主観確率とその測定

主観確率とその測定

平　館　道　子

§1　主観確率

私達は日常生活においても，専門の分野においてもあらゆる種類の不確実性に直面せざるを得ず，それらに対してさまざまな対処の仕方をしている。実際，不確実性といっても，サイコロをなげる時6の目がでる確からしさはどのくらいか，というような問題から，発表される各種の統計からある事柄の可能性を考えたり，また明日株価は上がるかどうかなど，実にさまざまなものがある。人間が偶然性に対処する方法論としては，H. Simon の〝限定された合理性〟の認識の上に立つ接近など、より記述的なものもあるが，最もよく理論的に基礎づけられ展開されているのは，統計理論と統計的決定理論であろう。Neyman, Pearson に代表される伝統的な統計理論が相対頻度の極限として定義される確率をその基礎概念としており，従ってこれによって対処できるのは普通統計的大量現象とよばれている種類の現象であることは，しばしば強調されるところである。ある年令階級に属する人間がある種の原因によって一年間に死亡する頻度は安定しており，保険会社がこれらの頻度に基づいて業務を行なうことはよく知られた統計的大量現象利用の例である。しかし私達はしばしば個別的な現象の確からしさを考えなければならないことがあり，この場合には直接頻度を用いることができない。例えばある人がこの一年間にある種の事故に遭遇する確からしさとか，ある理論上の仮説が真である確からしさなどである。伝統的統計理論では，これらの確からしさは客観的に測れるものではないから，統計理論の枠外で考えなければならないものとしている。しかし確率という概念が頻度にもとづいて整理される以前の古典的な時期には，確率を推

量に関する概念として把える考え方があったのであり，これは論理確率としてその後も Keynes, Jeffreys, Carnap と現代に受けつがれている。一方統計理論がその推測論の分野で推定方式や検定方式の決定という考え方を確立した結果，単に標本に基づく推測論から，更に実験コストなどの推測のための環境・条件をも考慮に入れた統計的決定理論が展開されると，行動選択のための基礎概念としての主観的確率が注目され，理論的に検討されるようになった。例えばある新薬が従来のものより効果があるかどうかが問題である時，研究者は実験の結果に基づいてこれを判定しなければならない。従来の有意性検定による判定では，同じ方式を繰り返し用いれば，例えば100回中99回の割合で正しい判定が得られることを有意水準が保証してくれる。しかしいまの特定の判定についてどの程度信頼できるかを問うことはできない。この場合普通研究者は実のところこの一回の判定がどの程度確実かを知りたいのであろう。これは〝新薬が従来のものより良く効く〟という仮説が特定の実験結果によってどの程度支持されるか，という問題である。この支持される程度，云い換えればデータが与えられた時の仮説の確実さの程度を確率によって測定できるというのが，伝統的理論に対立する立場である。この確率を $P(H \mid D)$ としよう。Hは仮説を，Dは実験結果をあらわす。この確率はベイズの定理によって

$$P(H \mid D) = \frac{P(H)P(D \mid H)}{P(D)}$$

と表現できる。左辺は仮説の事後確率であり，右辺の $P(H)$ は仮説の事前確率，$P(D \mid H)$ は尤度，$P(D) = \Sigma P(H)P(D \mid H)$である。$P(H \mid D)$ は $P(H)$ を通じて定まるのであるが， $P(H)$ は客観的に測定できないというのが伝統的理論である。これに対し，$P(H \mid D)$ は論理必然的に定まるとするのが論理確率の立場であり，人間の主観的判断が加えられて定まるとするのが主観確率の立場である。主観確率は判断確率，あるいは個人確率とも呼ばれている。

最近経済のミクロ分析や経営上の実際問題で，主体がどのように行動するか，あるいは行動すべきかを記述，指示する理論として，統計的決定理論が応用さ

れるようになって来た。この様な場合，不確実性は除外することのできない要素であり，しかもそれは大量現象に直接には裏打ちされないかもしれない。この場合の不確実性の中には相手の行動に関するものも含まれるであろう。主体はその持っている一定の知識や経験にもとづいてこれに対処しなければならない。この様な状況における行動選択に関する一つの方法論が，確率と効用とを基本概念として，期待効用を決定の指標とする決定理論である。

こういった状況におかれた主体は一般に完全な情報を持たない，すなわちこれから起る結果がどれであるかを完全に知ることはできないか，その情報はきわめて高価ということが，決定理論において設定される状況の主要な特徴である。実際問題においてもこの様な状況は多いであろう。しかし一方，全く無知であるというわけでもないのが普通で，ある程度の見込や判断を持つことができる。その見込みや判断は主体の持つ部分的な情報に依存するであろう。この情報は過去の経験や事実であったり，また可能ならば実験や調査によるいわゆる標本情報であったりする。このような不完全な情報に基づく判断をひき出し，それを測定することは，心理学的分野のみならず，リスクを含む状況における決定とその基準に関する理論的あるいは実際的研究にとって重要な段階を構成している。

主観確率の概念を最初に明確に定義し展開したのは F. P. Ramsey (〔8〕) である。Ramsey は，確率とは個人が不確実性に直面して行動しなければならない時，それに基づいて行動できるところの部分的確信の程度であると定義し，いくつかの行動に関する公理から不確実性に関する判断の測度としての確率と，個人の価値判断の測度としての効用とを導出できることを示した。また de Finetti, L. J. Savage は同じ定義に基づいて主観確率の数学的基礎づけを行なった (〔2〕,〔9〕)。その後多くの人々によって主観確率を導くための公理化の試みがなされている (〔1〕,〔6〕)。その基本的な点は，これらの公理に整合的な確信の程度を不確実事象に対して付与するならば，それは Kolmogorov が提起した公理体系を満足するという意味で，確率測度たり得ることが数学的に証明できるということである。これらの公理系に矛盾しない決定 α は，不確

実事象がθである時実現する結果 $\rho(\alpha, \theta)$ の関数 $u(\rho)$ と θ の関数$P(\theta)$ とによって説明できる。この時$P(\theta)$ はθのみの関数であって不確実性に対する主観的判断を示し，価値判断の測度である効用uの構造とは独立である。この事を基礎として一歩を進めると，不確実性の下で合理的な行動をとろうとするならば，確率と効用を定めなければならない。したがって決定理論が有用であるためには基本概念の定義は測定方法を伴う操作的なものでなければならないであろう。

主な主観確率の定義として以下のものをあげることができる。

1）基準的な賭による定義（〔2〕,〔9〕). 単一の事象Eに関して，Eが起る時賞金Sを獲得でき，Eが起らない時には何も獲得出来ない賭を想定し，個人がこの賭と，確実にS′だけ獲得できる権利との間で無差別であるとする。この時事象Eに対する個人の確率pを$pS=S'$から定義する。

2）標準的なくじに基づく定義（〔6〕,〔7〕). まず1つの偶然機構を想定する。例えば赤白2色のボールがいくつかづつ入っているつぼを考える。次に赤がつぼから取り出される時には賞 W を，白が取り出される時には賞Lを獲得できるくじを考える。これを Raiffa は標準くじと呼んでいる。一方事象Eが起る時には W を，Eが起らない時にはLを獲得できるくじを考える。もしつぼの中の赤の比率がpの時，両者のくじの選択に関して個人が無差別であれば，個人のEの確率はpである。

3）de Finetti の定義（〔4〕). A）事象E_1とその余事象E_2に対して個人がx_1, x_2という値を選ぶ時，彼はその利益が$C_1(E_1-x_1)+C_2(E_2-x_2)$となる賭を進んで受容しなければならないとする。ただしC_1，C_2は賭の対手が任意に選択する定数であり，E_1，E_2はそれぞれ事象E_1，E_2の指示関数である。すなわち，E_1，E_2はそれぞれ事象E_1，E_2が起る時1を，起らない時0をとる関数である。この時，この目的のために個人が選択するx_1，x_2がその個人の確率である。B） 同じく事象E_1，E_2に対しy_1，y_2を選択する時，$(E_1-y_1)^2+(E_2-y_2)^2$ という罰金がかけられるとする。この時，この目的のために個人が選ぶy_1，y_2が個人の確率である。

この他，実際の賭において用いられる勝ち目による確率の表現もある。それは事象Ｅの生起に関してm：nが公平な勝ち目であると個人が考える時，このことはＥの確率を$\frac{m}{m+n}$としていることを意味する。

定義１，３では線形効用を仮定していることに注意しなければならない。現実に不確実性の判断が行なわれる場合には，効用関数の影響を受けることが多いのである。定義１は確率を不確実な利益と確実な利益との代替率として定義している。後の定義３Ａはこれの特別な場合である。定義２では２つのくじの賞は共通であるから，一般の効用関数の下で確率を定めることができ，想定されている偶然機構が測定尺度となっている。定義３は上の２つとくらべてより間接的になっている。Ａは定義１の特別な場合で賞が確率そのものの関数になっており，ゲーム理論的な設定から整合的かつ正直な判断を引き出すことができるよう意図されている。

期待効用定理を導くのに，一般には行動に関するいくつかの公理を設定し，これらの公理から確率関数と効用関数とが定まることを示す方向がとられており（〔１〕,〔６〕,〔９〕), 定義１，２はそれぞれ Savage, Pratt–Raiffa–Schlaifer による公理化の基礎概念として用いられている。一方 de Finetti は効用関数は線形であるとして期待効用定理から確率を定義する方向も論じている。これが定義３Ｂである。一般に，事象Ｅおよびその余事象$\bar{E}$の確率としてy_1，y_2を付与し，Ｅあるいは$\bar{E}$が起る時，それぞれ$L_1(y_1, y_2)$,$L_2(y_1,y_2)$という損失が科されるとしょう。事前において付与者が実はp，１－pという判断を持つとしょう。p，１－pを真の判断とよぶことにする。この時，期待効用定理によれば，この問題は付与者にとって

$$L(y_1, y_2, p) = L_1(y_1, y_2)p + L_2(y_1, y_2)(1-p) \qquad \cdots\cdots (1)$$

の価値がある。これはy_1, y_2が定められた時pの一次関数である。もし

$$K(p) = \min_{y_1, y_2} L(y_1, y_2, p) \qquad \cdots\cdots (2)$$

となるようなy_1, y_2を選択すれば，彼は平均損失を最小にすることができる。

（1）はpのどのような値についても（2）より小さくなることはできないから，（2）が凹関数ならば，（1）が$y_1=p$，$y_2=1-p$のとき（2）に接するようにすることができる。このようなy_1，y_2が唯1つだけ存在する時，それを付与者の事象Eに対する確率と定義することができる。特に定義3BはK(p)がp(1－p)となっている場合である。

このような主観確率に要請されることは，決定される確率が，確率の公理に矛盾しないものであること，およびそれが正直な判断を忠実に反映していることの2つである。従って，確率を定めるに当っての問題は上に述べた要請をどのようにしたら満足できるか，であり，測定の方法はこれらの要請の満足を保証しなければならない。

主観確率概念に対しては様々な批判が論じられている。まずこの確率が恣意的である点に厳しい批判がある。すなわち，人によって異なる確率があり得るという点である。確率を対象がもつ物理的性格と考えるならば，真の確率が一意的に存在するとすべきであろう。この点では主観確率および論理確率を支持する人々の間でも，物理的確率との両者を認める見解と認めない見解とがあって意見が岐れている。ただ次の事は云えるであろう。普通物理的確率が言及される状況では，対称性のある現象が存在することである。例えばサイコロの材質が均質でしかも各面が対称的であること，そしてサイコロを何回か投げた時その結果の順序ではなく1やその他の目がそのうち何回出たかだけが問題とされること等である。この様な状況では頻度が安定していることが観察され，頻度の極限を確率と定義するのであるが，この極限は数学的な意味のものではなく，その存在を数学的に証明することはできない。極限の存在は頻度が安定していることをみて，多くの人々が同意する事柄としてあるものだという点が本質的であろう。また実際に実験してみることはしなくても，対称性から考えてそれがもっともなことどとして認められることもあるであろう。物理的確率を認めない立場からみても，物理的な対称性が判断の対称性に反映し合理的な思考をすれば，情報の量が少ない時には岐れている意見も，情報が圧倒的に多くなった時には頻度の近くに一致してくることを説明できるのである（〔2〕，〔3〕）。

主観確率に要請される整合性の保持ということが，また偏った判断に制約を加えることを指摘しておかなければならない。

次に主観確率においては確率の次々の付与の間の整合性だけが問題とされて，個々の付与の正しさを確証できないという点に批判がある。実際，上にも述べたようにこの概念には正しさという事は要請されない。不確実性そのものによって，どの様な確率もそれが0でない限り実際に生起する結果と矛盾するものではないと考えるのである。ある人がある事象の確率として10^{-10}を付与する時，この様に小さな確率の事象が実際に起ったからといって，その人の判断が正しくなかったという根拠はない。したがって論理的に矛盾を含む判断以外について，正しいかどうかを云うことはできない。云い換えれば，事象の組に対して付与された確率は，それが内部的矛盾を含まぬかぎり，どのようなものも許容される。しかし，きわめて偏った判断を整合的に保ち続けるのは容易でないことは理解できるであろう。そして証拠あるいはデータが得られた時には，もとの判断をその証拠にもとづいて変更して行く。その変更を整合的に行なうことを保証するのがベイズの定理である。実際に人間が判断して行く過程はベイズの定理に従っているのではなく，また従わなくてもそれがいけないという根拠はない，という批判もある。たしかに多くの人がベイズの定理に従っているわけではない。ただこの定理に従っていなければ矛盾した判断を下すことになることは云える。そしてもし整合的に判断していれば避け得たであろうような損失を豪むることになるであろう。

§ 2　確率の付与

不確実性に直面しての合理的な行動が効用と確率という2つの基本概念によって説明できることは，前節で述べたようにいくつかの合理性の公理にもとづいて証明されている。またこの2概念によって導かれる行動が合理性の公理を満足することも示すことができる。従って，確率と効用を実際に測定することは，決定問題における重要な第一段階を成している。しかし不確実性について実際に判断し，これを数値として表現することには様々な能力が要求され

容易なこととは云い難い。de Finetti はこの場合に注意すべき点としていくつかを上げている（〔3〕)。①問題のすべての側面について考えること。②すべての考え得る可能性を考慮に入れ，常に見落している事柄があり得ることを念頭におくこと。③問題点を明確にしたり曖昧にしたりする要素を識別すること。④現在の状況を既に経験した類似の性格をもつ他の状況と比較することによって自分の視野を広げること。⑤他の人々の確率付与の基礎になっていると思われる根拠や理由づけを発見するように努め，それらを自分が考慮に入れるかどうかを決定すること。

これらは考察上の目やすとなる点であるが，この様な考察に基づいて直ちに確率が定められるかというと，必ずしもそうではない。矛盾のない一組の数値として表現しなければならないのであるから，確率の理論を知らなければならず，また質的な判断を量化するための方法が工夫されなくてはならない。この方法は付与をできるだけ容易にし，かつ要請される条件を満足する形で確率を取り出すことを可能にするものであることが望ましい。前節で述べた定義は基準となる偶然機構との比較に依ったり，点数を与えるルールを用いる等，それぞれ測定の方法を含んでいる。これらの方法については次節で考察することにしょう。

確率の測定に関するもう一つの問題は，付与された確率を評価できるかどうかである。1つの評価の基準は整合性が満足されているかという点であり，もう1つは正直な判断を反映しているかという点である。これらの2点が満足されているとしょう。それでは整合的で正直な判断そのものを評価することは意味をもたないだろうか。既に述べたように，主観確率の観点からは内部的に矛盾を含まないものならどのような確率も許容される。従って正しいかどうかが評価の基準であるとすれば，この問題は意味がない。それでは何故評価するのであろうか。それは付与者が関係する情報や知識をどれだけ持っているか，またそれらの知識に基づいて適切な判断が下されているかを確かめるためであろう。またその評価を付与者にフィードバックすることによって，付与者の不確実性に対する判断能力を高めることにも少なからぬ意義があるであろう。前者

の点について云えば，この様な実質的な内容を一意的に定義することはできないから，それを評価するための一般的な尺度が存在するわけではない。またすべての場合について，判断決定の過程を詳細に分析することは実際上困難であろう。付与された確率は，これらの点を部分的にではあるが確かめるためのデータと手段を提供している。もう一つの手がかりは付与後に実際に起る事象である。この両者を何らかの方法で比較することによって確率付与を評価するならば，それは評価する者にとって一つの体系だった基準を提供するし，また評価される側に対しても説得力があるという意味で合理的な対処の仕方であろう。たしかに確率と実際の結果からだけでは実質的な判断の内容を直接そして全面的に評価することにはならないが，この方法による評価の結果，例えば成績，得点数といったもの，と更に立入った個々の分析との対照が可能ならば，実質的な意味合いを持ち得るであろう。またすべての場合について詳細な分析が出来ないとしても，どの場合について分析すれば有益な教訓を得られるかを成績が示唆するであろう。ただし，確率の理論に通じていることも成績を高める要素となるであろうから，好成績を得たのが実質的な面で適切であるためか，理論といういわば形式的な面に優れているためかを区別することは困難であろう。

付与された確率と実際の事象との関連によって評価するのに次のような2つの方向が考えられている。1つは定められた確率の組を1回ごとに実際の事象と関連させ，一定の方法で評価する。他は何回かにわたって付与された確率の各組を全体として考え，その集団的な性格を実際の事象との関連で評価する。この場合判断に偏りがあるかどうかが評価の眼目となるであろう。この他不確実量の性格によって，分布の形状が自然なものかどうかを検討すべき場合もあるであろう。

§ 3　付与の方法について

3.1　問題の設定

まず不確実な変量Xに関して，個人の判断はXの変域$\mathscr{X}$の上の分布関数Fに

よって表現できるものとする。この時E_1, E_2, …, E_kを$\mathfrak{X}$の1つの有限分割とする。すなわち，E_1, …, E_kはXの結果がこれらのうちのいずれか1つのみに実現し，しかも必ずどれかに実現するような$\mathfrak{X}$の部分集合のクラスを成すものとしょう。確率$P(X \in E_i)=\int_{E_i} dF(x)$を$p_i$と記す(i=, …, k)と，主観確率の分布は$(p_1, p_2, \cdots, p_k)$の組で表現される。Xの結果が$E_i$に実現することを事象$E_i$が生起するということにしょう。$\mathfrak{X}$の1つの分割を固定し(あるいはXの性格によって必然的に固定される場合もある)，その上の確率を付与する仕方と，pの方を固定して分割を指定する仕方とが考えられる。後者は例えば中央値，四分位値，分位値等を指定することがこれに当る。個々の確率を付与する場合，有限回の付与しか可能でないから，一般に確率論においては無限加法性が問題になるとしても有限分割を考えておく。この場合確率の公理は次の通りである。

1）すべてのiについて$P(E_i) \geqq 0$.

2）任意のi，jについて$i \neq j$ならば

$$P(E_i \cup E_j) = P(E_i) + P(E_j).$$

3）$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k)=1$.

従ってすべての確率は(1)，(2)，(3)を満足するよう決定されなければならない。この公理系は次の様にとることもできる([3])。E_i, $i=1$, …, kを事象E_iの指示関数とすると，

A）すべてのiについて，

$$\inf E_i \leqq P(E_i) \leqq \sup E_i.$$

B）$P(E_i \cup E_j) = P(E_i + E_j) = P(E_i) + P(E_j)$.

この(A)，(B)から(1)，(2)，(3)を導くことは容易である。

これらの公理を満足する確率の組は整合的である。de Finetti は整合性を望ましくない結果をもたらす決定を避けることであるとし，定義3Aの賭の場合には，どの事象が起っても常に付与者にとって損失を生じるような確率の決定

を避けることであるとしている。これはいわゆるダッチ・ブックが成立しないようにすることを意味する。また定義３Ｂの場合にはどの事象が生じてもほとんど一様に損失を減少させる余地を残した決定をしないことを整合性と定義している。これは決定理論における許容的な確率の決定を意味する。いずれの場合にも整合性の必要十分条件は上の公理系を満足することであることが証明できる。

3.2　確率の定義と測定

第１節であげた定義はそれぞれ測定方法を含んでいる。各々の定義について測定という観点から問題点をあげよう。

定義１は既に述べたように効用が線形であることを仮定している。しかし不確実な結果に対してはリスク回避（§４　参照）の傾向がしばしば見られ，一般に効用関数が線形であるとは云えないから，この仮定は非線形効用のある範囲での近似を意味する。したがって，関係する量ＳやＳ′を適当な大きさにとって，ほぼ線形効用が成立つ範囲で測定しなければならない。しかし他方関係する量があまり大きくなければ確率の付与も真剣に考えられないということもあり得るから，付与される確率が歪められるという困難がある。もし効用関数が決定されているならば，賞を金額単位でなく効用単位で示すことによってこの難点を解決することができる。ただし，効用関数の決定には実際にいくつかの実験が行なわれているが，やはり様々な困難がある。

定義２は標準的な偶然機構との比較によって確率を測定することを意図している。この場合関係する賞は２つのくじの間で同じものを用いているから，効用の影響は排除されている。しかしここでも賞の大きさはどれだけ真剣に判断されるかに影響を与えるから， Raiffa は賞は実質的な意味を持ち得るほどのものでなければならないとしている。したがって正直な判断の反映は，賞の価値の大きさを通じて暗黙的に推量されるだけである。しかし，整合性は自ずから保証され，後述する点数ルールの様に決定の合理性を前提するものと比較して，その意味が直観的に明確であり付与が容易であること，また　Raiffa,　Pratt, Schlaifer ([6]) にも示されるように，確率と効用の両方を測定するのに基本的に同じ方法を用いることが出来るという点でも優れている。

定義3Aでは既に述べたように，次の定義Bと共に線形効用を前提している。この場合整合性はどの事象が起っても常に損失を豪むるという可能性を残さないことであり，Cがどのように選択されても，この可能性を排除できるように確率を決定しなくてはならない。その必要十分条件は§3.1にあげた公理系を満足することであることは次の様に証明できる。

事象E_iが起る時の利益をG_i，$i=1, \cdots, k$とすると，

$$\mathbf{G}=\mathbf{PC}$$

と書くことができる。ここに$\mathbf{G}=(G_1, \cdots, G_k)'$，$\mathbf{C}=(C_1, \cdots, C_k)'$であり，$\mathbf{P}$は

$$\begin{pmatrix} 1-x_1 & -x_2 & \cdots\cdots & -x_k \\ -x_1 & 1-x_2 & \cdots\cdots & -x_k \\ \vdots & & & \vdots \\ -x_1 & -x_2 & \cdots\cdots & 1-x_k \end{pmatrix}$$

なる$k \times k$行列である。もし$|\mathbf{P}| \neq 0$ならば，$\mathbf{C}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}$であるから，対手がCを適当に選択することによってGの要素がすべて負になるようにすることができる。すなわち$|\mathbf{P}| \neq 0$ならば，どの事象が起っても付与者は常に負の利益しか得られない。$|\mathbf{P}|=1-\Sigma x_i$であるから，この可能性を除くためには確率の和が1になるよう決定しなければならない。また和が1であっても，負のものが少くとも1つあれば，$\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_k)$とすると，

$$\mathbf{xG} = 0 \qquad \cdots\cdots (3)$$

であるから，すべてのGを負にすることができる。従ってすべてのGが負となり得ないためには，確率の総和は1で，かつすべての確率は非負でなければならない。

次に和が1で，すべての確率が非負であれば，(3)よりすべてのGが負であ

ることはあり得ない。従って整合性の必要十分条件はすべての確率が非負で，かつ和が１であることである。

次に付与者の真の判断をp_i（$i=1, \cdots, k$）とすると，この賭は付与者にとって

$$\Sigma G_i p_i \quad = \quad \Sigma C_i(p_i - x_i)$$

の価値を持つが，C_iは対手の選択に任されているから，付与者にとってx_iをp_iと異なる値に決定する誘因はない。従って真の判断をこの設定から取り出すことができるであろう。

定義３Ｂについてみると，事象E_iが起る時損失 $L_i = \Sigma (E_j - x_j)^2$ が科されるのであるが，E_jは事象E_jの指示関数であるから，L_iはまた$(1-x_i)^2+\sum_{j \neq i} x_j^2$と表わされる。$L_i$は$k-1$次元の閉じた単体の頂点$(0, \cdots\cdots, \overset{i}{1}, \cdots, 0)$から点$\mathbf{x}=(x_1, \cdots, x_k)$への距離の２乗である。従ってすべての$x'_i$が非負の任意の点$\mathbf{x}'$に対しては，その単体上への射影をとれば常に$L'_i > L_i$ $(i=1, \cdots, k)$となる。単体の各点はその和が１であるから，どの事象が起っても$\Sigma x'_i \neq 1$である点に対して常に和が１でしかも損失を一様に小さくできる点が存在する。また和が１でも負の確率がある場合には，この点$\mathbf{x}'$に対して$L'_i \geqq L_i$ $(i=1, \cdots, k)$で，少なくとも１つのiに対して$L'_i > L_i$が成立つ点が単体上に存在する。

またこの単体の任意の点をとる時，すべてのiに対して$L'_i \leqq L_i$が成立ち，少くとも１つのiに対して$L'_i < L_i$となる点は存在しないことは明らかであるから整合性の必要十分条件は付与された確率の点$\mathbf{x}$が閉じた単体に属していることである。すなわち確率の総和が１ですべて非負であるように決定しなければならない。

次にこの状況での確率決定に伴う損失は付与者にとって

$$\Sigma p_i (1-p_i) + \Sigma (p_i - x_i)^2$$

の価値をもつ。これは損失であるから，これを最小にするような確率の付与はすべてのiに対して$x_i = p_i$である。従って真の判断を確率として付与する時

に限って損失の期待値は最小になる。

定義3によって測定する場合，付与者は定義の含意について明確な理解を要請される。Aの場合，付与者が自分の判断を歪めることなく正直に表明しなければ不当な損失を蒙むることをはっきり認識しなければならない。この場合対手の存在が攪乱の要因となる可能性もあるであろう。Bによる場合には付与者は期待損失を最小にするという意味で損失を出来るだけ小さくすることに関心を持たなければならないが，これは期待値という概念を含んでいるだけに，直観的に理解することの困難な目標である。理論的な理解と実際の訓練が要請される。

3.3　点数法による付与

確率の付与に関する点数法は，決定者が真の判断とは違った付与をすれば，彼自身の得点の期待値が減少することから，正直な判断を表明せざるを得なくさせるような決定のルールである。一般的な効用関数の下での点数ルールを考えることもできるが，ここでは線形効用を仮定する。また整合性を前提する。定義3Bから1つの点数ルールを導くことができる。このルールの場合，合理的な決定ならば整合性も保証されることは既に述べた通りであるが，一般に点数ルールは真の判断を引き出すことを目的とし，整合性を前提しておかなければならない。点数ルールを表明される確率 $\mathbf{x}=(x_1\ \ x_2\ \cdots x_k)$ および実際に生じる事象 E_h との関数として $S_h(\mathbf{x})$ と表わすことにしょう。確率の付与あるいは決定という仕事は事象が実際に起る以前，あるいは起った事象を付与者が知る以前の問題であるから，付与者は自分の得点成績を期待値によって評価するものとする。真の判断を $\mathbf{p}=(p_1\cdots\cdots p_k)$ とすれば，確率 $\mathbf{x}$ の決定は

$$S\ (\mathbf{p},\mathbf{x})\ \equiv\ \Sigma p_h\, S_h\,(\mathbf{x}) \qquad \cdots\cdots (4)$$

によって導かれる。主観確率には真の判断 $\mathbf{p}$ が $\mathbf{x}$ と一致することを要請されているから，$S\ (\mathbf{p},\mathbf{x})$ は $\mathbf{p}=\mathbf{x}$ の時に最大値をとらなければならない。すなわち $\mathbf{p}\neq\mathbf{x}$ ならば

$$S(\mathbf{p},\mathbf{p}) \geqq S(\mathbf{p},\mathbf{x}) \qquad \cdots\cdots (5)$$

が成立たなければならない。しかしこの条件では $\mathbf{x}$ が $\mathbf{p}$ と異る時にも最大値をとる可能性を除くことはできないから，条件（5）は確率付与の点からみれば適切なものとはいえない。$\mathbf{p}=\mathbf{x}$ の時にのみ $S(\mathbf{p},\mathbf{x})$ が最大値をとらなければならない。すなわち，$\mathbf{x}\neq\mathbf{p}$ なるすべての $\mathbf{x}$ に対して，

$$S(\mathbf{p},\mathbf{p}) > S(\mathbf{p},\mathbf{x}) \qquad \cdots\cdots (6)$$

が成立つことが要請される。（6）を満たす規則は厳密に proper であるといわれる。

（6）を満たす規則の一般形について， Savage, de Finetti は $S_h(\mathbf{x})$ が次の様な形である時にのみ，（6）が満足されることを示した（〔10〕).

$$S_h(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}) - \Sigma x_i J_i'(\mathbf{x}) + J_h'(\mathbf{x}) \qquad \cdots\cdots (7)$$

ここに $J(\mathbf{x})$ は厳密に凸な関数で，$J_i'(\mathbf{x})$ は $J(\mathbf{x})$ の x_i に関する偏導関数である。例えば $J(\mathbf{x}) = \Sigma x_i^2$ とすると

$$S_h(\mathbf{x}) = 2x_h - \Sigma x_i^2 \qquad \cdots\cdots (8)$$

が得られる。これは定義3Bにおける事象 E_h が起る時の損失 $L_h(\mathbf{x})$ から，$1 - L_h(\mathbf{x})$ として求められるものである。$J(\mathbf{x}) = \sqrt{\Sigma x_i^2}$ とすると，

$$S_h(\mathbf{x}) = x_h / \sqrt{\Sigma x_i^2} \qquad \cdots\cdots (9)$$

が得られ，$J(\mathbf{x}) = \Sigma x_i \log x_i$ とすると

$$S_h(\mathbf{x}) = \log x_h \qquad \cdots\cdots (10)$$

が得られる。（9）は spherical ルール，(10) は対数ルールと呼ばれており，この3つのルールが最もよく用いられている。一般にSが厳密に proper ならば，$aS+b$ $(a\neq 0)$ も厳密に proper である。aが負の場合後者は損失である。§3.2で定義3Bが厳密に proper であることを示したから（8）もまたそ

うであることは明らかであろう。

（7）が（6）の成立つための必要十分条件であることは次の様に示すことができる。Jは2階微分可能であると仮定する。

$$S(\mathbf{p},\mathbf{x}) = \Sigma S_h(\mathbf{x})\, p_h$$
$$= J(\mathbf{p}) - \{J(\mathbf{p}) - J(\mathbf{x}) - \Sigma J'_h(\mathbf{x})(p_h - x_h)\}$$

であるが，後の括孤の中（これをQとする）は非負である。したがってQが最小値0をとる時にのみ S(p,x) は最大値J(p) をとる。まず $\mathbf{x}=\mathbf{p}$ のとき $Q=0$ となることは明らかである。次にQが最小値0をとるとする。この時Jが2階微分可能であれば，

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = -\sum_{h=i}\frac{\partial^2 J}{\partial x_i \partial x_h}(p_h - x_h) - \frac{\partial^2 J}{\partial x_i^2}(p_i - x_i)$$
$$= 0 \qquad i = 1, \cdots, k$$

が成立つ。このk個の連立方程式は行列

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_k} \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 J}{\partial x_2^2} & \cdots\cdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_k \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_k^2} \end{pmatrix}$$

が正則でない時にのみ $p_i - x_i \neq 0, i=1,\cdots,k$ という根をもつが，J(x)は厳密に凸な関数であるから $|J|>0$ である。従って $p_i - x_i = 0, i=1,\cdots,k$ でなければならない。

点数ルールは正直な確率の決定を導くものとして考案され，このことから厳密に proper なルールという概念が導かれた。しかしこれは既に3種類あげたように一意的なものではない。もし付与者が理想的な人間で完全に合理的であるならば，どのルールを用いても正直な判断を引き出せる筈である。しかし実際には付与者は必ずしもこのように理想的な人間ではないから，真の判断を引き出そうとすれば，更に細かな配慮が必要であろう。例えば付与された確率 **x** が真の判断 **p** と一致している時にのみ期待得点は最大になるが，もし **x** が **p** から少しずれても得点が最大点とあまり変らないようなルールであれば，真剣

な考慮が払われることを期待できないかもしれない。従ってこの乖離に対して敏感なルールが望ましいであろう。上述の3つのルールはあまり敏感ではないことがみられている。

Raiffa は点数ルールを選択する際の原則として次の3つを指摘している。1) relevance, $S_h(\mathbf{x})$ はすべての h に対し x_hのみに依存する。$S_h(\mathbf{x})$ は実際に起らなかった事象に対して付与された確率に依存しない。2) invariance, $\mathbf{x}$ において x_i と x_h を交換したものを $\mathbf{x}^{ih}$ とする時，$S_i(\mathbf{x}) = S_h(\mathbf{x}^{ih})$ がすべての i と h(i≠h)について成立つ. この両者を満足する点数ルールについては，ある関数 f によって $S_h(\mathbf{x}) = f(x_h)$ と書くことができる。3) strong discriminability, 任意の x，y ($0 \leqq x, y \leqq 1$) について $f(x) + f(y)$ はxy に関して単調増加でなければならない。x,y を2つの継続する試行についての確率とみなすことができるから，xy はこの複合事象に対する確率を表わす。この時 $f(x) + f(y)$ はこの複合事象に関する点数であるから xy に関して単調増加でなければならない。

これらの3原則を $k > 2$ の時に満足するルールは存在しないが，$x_h > 0$ の時に満足するのは対数ルールだけであることが示される。しかしこれらの原則に対する反論も出ている。例えば，事象 E_1, …, E_k が株価の変動のような1つの特性の順序づけられた測度を表わしている場合、実際に起った事象が E_h である時，$P(E_h)$ が同じであっても，$P(E_{h-1})$, $P(E_{h+1})$ 等の確率を高く付与したものの方がより得点が高い，というのが妥当であろう。これは分布の妥当な形状に関する考慮から来ており，(1) の relevance に対する1つの反論である。

点数ルールが持つべき性格，望ましい性格に関する議論は他にもあり，様々な示唆や実験が行なわれているが，Savage も云っているように，ルールの選択をめぐる議論は非生産的な面がある。それは人間のあらゆる非合理的な側面に関係しており，これを一意的に規定することはできないからである。従って点数ルールを用いて確率を付与しょうという場合，何よりも付与者が決定理論をよく知り，ルールの含意を理解することが重要である。

付与された確率の評価

評価という問題には評価する者の主観が含まれるが，点数ルールを実質的な良さの１つの測度として用い，得点を付与者の実績を近似するものと受けとることは不合理ではないであろう。この時確率の付与に際して用いる点数ルールと，評価のために用いるものとが必ずしも同じでなければならないという訳ではない。評価者は自分の評価を最もよく表現できると思われるルールを選択するかもしれない。しかし付与者は，自分が違ったルールで評価されることを知れば，そこにはゲーム理論におけるような状況が生じ，結果が歪められる可能性があることに注意しなければならない。

いくつかの実験によれば，上述の３ルールによる得点順位の相関はかなり高くなる傾向があることが観察されている（〔12〕)。この事はそれぞれのルールにおいて，同一の付与者は同様な順位を得る傾向が強いことを意味し，点数ルールが整合的な評価方法であることを裏づけているといえよう。

3.4　等可能性による付与

不確実性に関する判断を量的に測定することは，実際問題としてかなり困難な作業であるが，それを２つの可能性が同じと考えられるかどうか，というような質的な比較に還元できる時には容易になるであろう。事象Ｅの確率が0.5であることを判断することは容易でないが，Ｅとその余事象$\overline{E}$とが等しい可能性をもつと感じられるかどうかを考えることは比較的容易である。不確実量Ｘの変域$\mathscr{X}$を等しい可能性をもつと判断される領域E_1，…，E_mに分割することができれば，それぞれの領域の確率は等しく$\frac{1}{m}$である。この様な分割を構成すれば，さらに任意の事象の確率を分割の事象の和から構成した事象との比較によって付与することができる。

この様な等可能な分割を構成するには，まず中央値からはじめて，次に.25分位点と.75分位点，.125分位点と.375分位点，.625分位点と.875分位点という様に次々と領域を細分して分布の形が十分に示されるようになる迄この過程を続ける。しかし分布の形状についてある判断を持っている場合には，この

過程をそれ程続ける必要はない。単峰型が考えられるならば，.25，.5，.75 分位点および両端の.01，.99 分位点などが決定されれば十分であろう。両端の点については特別な工夫をしなければならない。また付与された分布が自然であるか，あるいは判断をよく反映しているかなどのチェックをする際に，分布の形状について判断を持つことは重要である。

この様な方法については，付与者が真の判断を示すべく努力する誘因がないという批判がある。しかし，定義 2 の標準くじを用いてこれとの無差別性による分位点の決定を行なうならば，この批判に答えることができる。両端の点を決定する際にはこのやり方が必要であろう。そして前節の点数ルールによる場合の様には高度の理解と習熟を要求せず，比較的容易なことから，この方法は有用だと云えるであろう。

評価と実験の結果

この直接的な方法による確率の決定を評価するには，付与された分布と実際の値との関係をもとに，何回かにわたる付与の集団的特徴を分析することが考えられる。この時，分布が偏っているか，あまりにもきっちりしすぎているかあるいは散慢すぎるか，単峰型であるか，といった点が評価すべき事項として考えられる。Pratt–Raiffa–Schlaifer (P.R.S.) がこの方向でいくつかの実験を行なっている(未公刊レポート). 筆者は同様な方向で小規模な実験を行なった。詳細な検討はもっと広範な実験の後に行なわれなければならないが，この小規模な実験でも P．R．S．の実験に報告されていると同様な傾向がみられるので概略を記しておくことにしょう。60 人について被験者が完全な知識を持たないと思われる 10 の量について.01，.25，.5，.75，.99 分位点を指定することを求め，それぞれの真の値がこれら 5 点から構成される 6 つの区間のどれに入るかをみた。全体で 600 の分布のうち.25～.75 の四分位範囲に入った割合は.30 であった。もし偏りない判断が下されるとしたら，四分位範囲の性格によって，この割合は.5 である筈であるが，上述の Pratt 他の実験でも大体.33 の近くであることがみられている。また各被験者について 10 の分布のうち四分位範囲に真の値が入った回数を求め，60 人についてその分布を p=.30 の 2 項分布で近

似してみるとかなりの適合性を示している。次に.01より下，あるいは.99より上の区間に真の値が入った割合は.44であった。これは偏りがない場合には.02である筈だが，P. R. S. の実験では.388，.460等が得られている。

四分位範囲に関する分布で最も頻度が高いのは3回のところで，回数の少ない方に分布が偏っている。両端の区間について同様な分布を求めると，3回及至6回に集中する傾向が強く，やゝ回数の多い方に偏っている。これらの点からみると，判断が偏る傾向があり，しかも分布が全体としてかなり幅狭く付与されがちであることがわかる。またその結果，単峰分布が自然だと思われるにも拘わらず，峰が2つ出来る傾向がみえる。しかし問題に対する関心および情報という点で各問は異なっており，付与された分布の形状も相異をみせている。また不確実量の変域が百分率のように限られている場合と，かなり広い場合とでは様相が異なる。一般的な事を云うことはできないが，各問について6区間のそれぞれに真の値が入っている人数の分布をみると，変域が限られていて関心と情報が比較的あると思われる問題については，中央の区間を中心とするかなり明確な単峰型になっているが，変域が広く情報や関心の点で欠けると思われる場合については逆にU字型になった。前者の場合四分位範囲に真の値が入った割合は.476，両端の区間に入った割合は.147と偏りが小さいのに対し，後者ではそれぞれ.172，.641と偏りが大きい。これらの事から情報，関心，変量の変域等を要因として実験をくみ，これらの判断に与える影響を詳細に分析すれば興味深い結果が期待できるであろう。

これらの結果を被験者に知らせ，確率の決定に更に習熟するよう促すことが必要である。またこのフイードバックの結果様子がどの様に変るか実験を更に続ける必要があろう。

3.5 データに基づく付与

これまでは確率の決定に際してデータからの情報を明確に採り上げなかったが，過去のデータが存在する場合，これは一般に判断に対して大きな影響を与えるであろう。伝統的理論では過去の相対頻度は確率の推定値，あるいは近似

値と考えられるのであるが，§1でも述べたように頻度を特定の事象の確率として用いることができない場合もあり，またそうでなくても納得し難い状況が起り得ることが指摘されている。例えば硬貨投げという単純な例を考えれば，n回振って表が1回も出ないとか，すべて表になるという結果がnが小さい程起り得る。rを表の回数とすると，r/nは周知の通りその硬貨の表のでる確率の最尤推定量である。しかし硬貨には表と裏があるのに，0や1が確率の推定値として適当だとは考えられないであろう。これを修正するには，例えば$\frac{r+k}{n+t}$というように何らかの緩衝的な要素を加えることが考えられ，$\frac{r+1}{n+2}$は有名なLaplaceの継起の法則であるが，これを伝統的理論から根拠づけることは容易ではないようである。Goodは主観確率の立場からこの場合にDirichlet分布を事前分布として根拠づけを行ない（〔5〕），de Finettiはexchangeabilityという概念から導いている（〔2〕，〔3〕）。

過去のデータを確率の判断に際して用いようとする時，次の3段階を経て確率の決定に至ると考えられる。①使用するデータを定める。②過去の頻度から長期的な未来の頻度を予測する。③いま問題となっている事象の確率と予測された長期頻度とを比較する。例えばある人がこの一年間にある種の事故にあう確率を定めたい時，過去の統計によって同様な境遇にある人々のうち，どれだけの割合が事故にあったかがわかる。同様な境遇とは年令別，職業別等で規定されるが，それは一意的なものではなく付与者の選択に任される。次にこれからの各一年間の頻度はどのくらいが最もありそうであるかを過去のデータから判断し，最後にその特定の人について，長期的にみた時の平均頻度，あるいは最も起りそうな頻度と比較し確率を決定する。

この様に，どのデータを用いるかは恣意的である。また同じデータでも分類の仕方によって様子は多少異なり，分類の仕方も恣意的である。従ってデータによって未来の頻度を予測するといっても，それは機械的なプロセスではなく，実はかなりの実質的な考察と判断が必要である。過去の頻度と未来の頻度との関係について，de Finettiはexchangeableな事象および変量に関して重要な結論を導いている。exchangeability (Savageはsymmetryとよんでいる

〔9〕）とは各試行が確率の決定に関して対称的な役割を演じることをいう。例えばベルヌーイ試行の長い系列において，n回試行中r回成功するという現象Eの確率を考える時，系列中の成功と失敗の並び方が判断に関して無関係ならば，その系列中のどのr回の成功と n−r 回の失敗をとっても，この現象の確率は同じに付与される。この場合硬貨が正しく作られているというような物理的対称性が判断の対称性を導いていると考えることができよう。

いまこれまでにn回試行が行なわれ，そのうちr回の成功が特定の順序に並ぶ特定の系列が得られたとしょう。付与者はこの特定の系列E_n^rに対して確率$P(E_n^r)$を付与するとしょう。更に一回試行を重ねてそれが成功であるとすれば，それ迄に特定の順序でn＋1回中r＋1回成功することになる。この系列をE_{n+1}^{r+1}としその確率を$P(E_{n+1}^{r+1})$とする，このときn＋1回目に成功するという事象をEとすれば，E_n^rを条件とするEの確率は

$$P(E|E_n^r) = \frac{P(E_{n+1}^{r+1})}{P(E_n^r)}$$

である。ところで判断にあたって成功と失敗の順序が意味を持たないとすれば，任意の順序でn回中r回成功する事象の確率をp_n^rとすると，この現象は$\binom{n}{r}$通りの排反な個別的系列を含み，それらの確率は等しい筈であるから，観測された特定の系列の確率$P(E_n^r)$について

$$P(E_n^r) = p_n^r \Big/ \binom{n}{r}$$

が成立つ．同様に

$$P(E_{n+1}^{r+1}) = p_{n+1}^{r+1} \Big/ \binom{n+1}{r+1}$$

となる。従って

$$P(E|E_n^r) = \frac{r+1}{n+1}\,\frac{p_{n+1}^{r+1}}{p_n^r} \qquad \cdots\cdots (11)$$

が導かれる．一方

$$E_n^r = E_{n+1}^r \cup E_{n+1}^{r+1}$$

であるから，整合的であるならば，

$$P(E_n^r) \quad = \quad P(E_{n+1}^r)+P(E_{n+1}^{r+1})$$

すなわち

$$p_n^r/\binom{n}{r} \quad = \quad p_{n+1}^r/\binom{n+1}{r}+p_{n+1}^{r+1}/\binom{n+1}{r+1} \qquad \cdots\cdots (12)$$

が成立つ．(12) を (11) に代入すると

$$P(E|E_n^r) \quad = \quad \frac{r+1}{(n+2)+(n-r+1)(p_{n+1}^r/p_{n+1}^{r+1}-1)} \qquad \cdots\cdots (13)$$

となる。この結果特定の試行を経て次の 1 回に成功する確率は p_{n+1}^r と p_{n+1}^{r+1} の相対的な大きさによって様々な値をとり得るが，$\frac{r}{n}$の近くに来るであろうことがわかる。

次に exchangeability が成立つ場合，p_n^r は成功の長期相対頻度 ξ のある極限分布$\phi(\xi)$ によって

$$p_n^r=\binom{n}{r}\int_0^1 \xi^r(1-\xi)^{n-r}d\phi(\xi) \qquad \cdots\cdots (14)$$

と表現できることが証明される (〔2〕)。$\phi(\xi)$ は付与者の長期頻度に対する主観的判断を表わす。p_{n+1}^r，p_{n+1}^{r+1} についても同様である。ϕが一様分布であれば，$p_{n+1}^r = p_{n+1}^{r+1} = \frac{1}{n+2}$ となり，(13) から条件付確率は$\frac{r+1}{n+2}$，すなわち Laplace の継起の法則が導かれる。また ϕ がベータ分布 $K\xi^\alpha(1-\xi)^\beta$ ならば，これは $\frac{\alpha+r+1}{\alpha+\beta+n+2}$ となる。

他方条件つき確率は (14) を用いて

$$\alpha\int_0^1 \xi\cdot\xi^r(1-\xi)^{n-r}d\phi(\xi)$$

と表現することができる。ここに α は $\alpha\int_0^1 \xi^r(1-\xi)^{n-r}d\phi=1$ とする定数である。これはデータを得たのちにはその極限分布がϕから$\alpha\xi^r(1-\xi)^{n-r}d\phi$ となり，条件つき確率はこの新たな極限分布の平均であることを意味する。$\xi^r(1-\xi)^{n-r}$ は $\xi=\frac{r}{n}$の時最大値をとるから，データを得た後にはその相対頻度の近くの値が最も大きなウエイトを持つことになり，これらが長期頻度を予測する際にもっとも有力になることがわかる。これらの結果は観測されたデータがその観

測順序に関係なく，失敗成功のような属性が実現した回数だけが問題となる性格のものであれば，このデータがなぜその判断の基礎になり得るかを説明している。

同様に一般的な不確実量についても exchangeability を定義することができる。この場合， exchangeable な不確実量は頻度ではなく分布によって特徴づけられ，上と同様な推論によって，様々な分布のうち長期分布を予測するものとして過去のデータによるものが最も有力と判断されるであろう。この場合にも観測が十分沢山行なわれれば，確率の判断における主観的要素の役割は相対的に小さくなるから，過去のデータに基づいて平滑化された分布曲線を描く時，それは実際に観測された値の条件つきでの確率分布を近似したものと考えてよいであろう。しかしこの曲線はそれでも尚主観的な要素に依存している。exchangeable な不確実量は伝統的理論において無作為標本として扱われる状況に対応している。Schlaifer はこれを区別不能な不確実量とよび，データの実際の取り扱いに際しては，単純なモデルを想定して分布の一般型を把握し，その一般型と適合しかつデータともかけ離れぬように曲線を描くのがよいと論じている（〔11〕)。

次に長期的頻度あるいは分布を得ても，それが直ちに問題となっている特定の不確実量に妥当すると判断できるとは限らない。事故の例の場合，その特定の人を他の人々から区別する特性や情報を考慮して，予測された長期頻度を増減することによって確率が定められるであろう。また分布の場合ならば，問題になっている特定の不確実量について長期分布を § 1 で述べた基準くじのような考案にもとづいて修正することになるであろう。

§ 4　終りに

前節までに主観確率とその測定，付与のいくつかの手法について考察して来たが，効用に関しては線形効用を仮定して，その判断に与える影響については述べなかった。また確率分布について解析的な形式とは無関係なまゝに付与することを考えて来たが，これでは推測や決定の問題を主観確率を用いて解析的

に解くことは困難である。この2点について簡単に述べてこの稿を締めくくりたい。

§1の定義1で設定される不確実な利益に対する態度については，一般に次の3つの型が見られる。1つはこの様な利益をその数学的期待値Mに等しい価値があるとする態度である。これは本稿で仮定して来た事柄である。もう1つはMより小さな価値しかないとするものであり，最後にMより大きな価値があると評価する態度がある。これらを効用関数という価値判断の測度によって表現すれば，それぞれ水平軸に対して線形，凹，凸関数に対応することがわかる。これらはリスク中立，リスク回避，リスク選好型などと呼ばれる。定義1によって線型効用の仮定の下に確率を付与すると，非線型の効用がどの様な影響を与えるかは容易にわかる。標準的な賭を考え，リスク回避型の人がこれに対して $S'(0<S'<S)$ が無差別だと答えたとしょう。この時彼の確率は $p'=\frac{S'}{S}$ と測定される。ところが彼の効用関数をuとし，$u(0)=0$ と標準化されているとすれば，彼にとってはこの賭は

$$u(S)\,p+u(0)(1-p)=u(S')$$

の価値があるから，実は $p=\frac{u(S')}{u(S)}$ が彼の真の判断である。一般に凹関数はその曲線上の任意の2点を結ぶ線分の上方にあるから，$\frac{u(S')}{u(S)}>\frac{S'}{S}$ が成立つ。このことから $p>p'$ であることがわかる。この様にリスク回避型の効用は事象Eに関する真の判断を小さい方向へ歪める。同様な推論によってリスク選好型の場合は大きい方へ歪められることがわかる。線型効用ならばこの歪みはない。一般の不確実量Xについて，リスク回避型の効用はその平均 E(X)を小さい方向へ歪め，選好型はその逆であることを示すことができる。それはXを非線型効用ならば E(u(X))によって評価するが，リスク回避型の場合これはE(X)より小さい価値しか持たないからである。換言すれが不確実な利益Xは E(X)より小さい確実な利益と無差別であると見なされる。そのために効用を明確に考慮しなければこの値が E(X)と識別されて，確率が歪められるのである。この確率の歪みは実際の場面でもしばしば観察されている。

次に本稿では確率分布が解析的な形式を考慮することなく付与される場合だけを考察した。しかし確率分布は一般に推測や決定問題のために事前分布として用いられるのであるから，そのまゝでは取り扱いが困難であろう。また確率の付与も詳細な点に至るまできっちりと判断を下すことは実際上不可能であり，細部においては判断の余地が残る筈である。これらの事から，もし判断を良く反映でき，しかも解析的に取扱いが容易な分布型を見つけることができれば，推測や決定問題の解析的定式化が可能になる。分布の細部にわたる指定が困難であるということは，中央値，分位点，平均のようないくつかの値を付与することが可能でも，分布の型についてはある程度の選択の余地が残されることを意味するであろうから，目的に適う分布型を求めるためには，この事を利用して適当な分布の族を選択し，その中から付与された値によって1つの分布を定める，という手順を経ることになるであろう。分布族の選択に関しては，しばしば標本分布に対して共役なものが選ばれる。共役な分布とは事前分布と，この事前分布と標本分布とから定められる事後分布とが同じ族に属するようなものをいう。共役分布族は一般に，自然に説明できるように母数化され，また判断をよく表現できる分布がその中で見出されるという意味で豊富であることが多い。更に選択された分布族から1つの分布を決定するためには，実際に付与された値に解析的分布形を適合させるための手法が必要であるが，それについては稿を改めたい。この様な段階を経て不確実性に関する総合的な問題へと一歩を進めることができる。

文　献

1 Anscomb, F.J., Aumann, R.J. "A Definition of Subjective Probability" AMS. 34. 1963.

2 de Finetti, B. "Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources," H.E. Kyburg Jr. H. E. Smokler, Studies in subjective probability, 1964. John Wiley に収録.

3 ———— "Probability, Induction and Statisics," 1972. John Wiley.

4 ———— "Theory of Probability" 1974. John Wiley.

5 Good, I. J. "The Estimation of Probability" 1965. M.I.T. Research Monograph 30.

6 Pratt, J.W., Raiffa, H., Schlaifer, R. "The Foundations of Decision under Uncertainty : an Elementary Exposition" JASA. 59. 1964.

7 Raiffa, H. "Decision Analysis" Addison-Wesley, 1968.

8 Ramsey, F.P. "Truth and Probability" Studies in subjective probability 1964 に収録

9 Savage, L.J. "The Foundations of Statistics" John wiley, 1954.

10 ——————"Elicitation of Personal Probabilities and Expectations" JASA. 1971.

11 Schlaifer, R. "Probability and Statistics for Business Decisions" Mcgraw-Hill 1959.

12 Winkler, R.L. "Probabilistic Prediction, some Experimental Results" JASA. 1971.