

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 22 日現在

機関番号：13301

研究種目：挑戦的萌芽研究

研究期間：2013～2015

課題番号：25610103

研究課題名(和文)長距離相互作用による相転移を解析するための有限レンジくりこみ群の開発

研究課題名(英文)Finite range renormalization group to analyze the phase transition caused by long range interactions

研究代表者

青木 健一 (Aoki, Ken-Ichi)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：00150912

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：一次元の鎖状にならんだスピン自由度を考える。これらのスピンは上向きか下向きの二つの状態のみをとる。通常は、となりのスピンとの間だけに同じ方向を向くような相互作用があるとするが、ここでは、ずっと離れたスピンの間にも相互作用が残る場合を考える。このような長距離相互作用のある系を解析することは困難であるが、例えば、摩擦を量子力学的に扱う時に現れる系のモデルにもなっており新しい解析方法が望まれている。最近注目されている深層機械学習を応用して、この系の配位を再現する機械を設計し最適化することに成功した。この機械の構造を詳しくみることによって、系の特徴をつかむことができた。

研究成果の概要(英文)：One dimensional Ising spin chain with long range interactions is analyzed. In contrast to the nearest neighbor coupling model, the long range model exhibits the spontaneous magnetization with a finite coupling constant. It is also regarded as a simplest model of the quantum dissipation, and the deeper understanding of the dynamics is desired.

We adopt the deep learning method with the restricted Boltzman machine. We set up the unsupervised stochastic learning procedure to make the machine to reproduce the configuration ensembles of the long range Ising model. We calculate the magnetic susceptibility given by the set of configurations generated by the optimized machine and compare the results with the exact evaluation by the block decimation renormalization group, and we got satisfactory equivalence.

研究分野：素粒子論

キーワード：くりこみ群 長距離相互作用 機械学習 非摂動繰り込み群 イジング模型 相転移 自発的対称性の破れ 制限ボルツマン機械

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 長距離相互作用を含む系は、特異な振る舞いを見せることが多い。ここで言う長距離相互作用の定義は、相互作用の大きさを空間的な距離の関数と見た時に、指数関数的な減少ではなく、べき乗的にしか減少しない場合を指す。

(2) 典型的な例としては1次元のイジング模型がある。通常の最近接相互作用では強磁性相転移は有限温度では起こらないが、長距離相互作用を入れると、遠距離での減少度のべき乗指数に応じて、臨界結合定数が有限の値となり、自発磁化が発生する。

(3) なお、このような長距離相互作用を持つ系は、単なる思考実験的な産物ではなくて、例えば、摩擦を量子力学的に扱うひとつの方法として環境自由度へのエネルギー散逸を取り入れた有効理論を構成すると自然に現れる。

## 2. 研究の目的

(1) 長距離相互作用をもつ系の相構造や、その動的な振る舞い、あるいは臨界現象を扱う新しい方法を開発することが目的である。

(2) 特に以前に開発して成功したブロックくりこみ群と有限レンジスケリングの方法を、有限レンジくりこみ群として基礎づけることが目標である。そのために、長距離相互作用を持つ系のよいアンサンブルを生成する機械を学習によって最適化し、全く新しいくりこみ群的な取り扱いの可能性もさぐる

## 3. 研究の方法

(1) 研究代表者らは通常のくりこみ群の方法を拡張して長距離相互作用を扱う方法を提案してきた。長距離相互作用を有限レンジでカットオフした上で、磁気感受率を計算し、カットオフを長距離側に伸ばした時の変化についてスケリング仮説をたて、その指数を評価する。指数は結合定数の関数として数値的に評価されるが、磁気感受率の発散点はその指数がある値をとる時に対応しているので、その値をよぎる時の結合定数を臨界点として採用する。この方法によって、長距離相互作用の減少度を定めるべき乗則の指数毎に臨界結合定数を評価すると、モンテカルロシミュレーションによる方法と見事に一致する結果とな

っている。この方法の基礎となるべき有限レンジくりこみ群の定式化を見つけ出すべく、物理量の検証を行う。

(2) これを探るために、機械学習によるシステムの解析方法を援用する。制限ボルツマン機械を定義し、長距離相互作用を持つイジング模型の配位を生成する機械を統計的学習による方法を通じて最適化する。機械を多段に積んで深層学習に持ち込み、各段の機械パラメタから、マクロ物理量を効率良く取り出すことのできるくりこまれた変数の定義方法、くりこみ群の定式化につなげる。

## 4. 研究成果

(1) 研究成果は大きく二つに分かれる。一つ目は、自発的対称性の破れに伴う特異点発生過程を数学的に記述する方法として、弱くりこみ群を定式化して、自発的質量生成、自発磁化の問題に適用したことである。特に、自発的質量生成の問題においては、相転移が一次転移の場合にも、ミクロからマクロへの変化を完全にユニークな弱解で記述することに成功しており、これは、質量(あるいは自発磁化)の非連続的(ジャンプ的)な生成を微分方程式の弱解として記述するという画期的なものである。弱解は近年、数学的に研究が大きく進んでいる領域であるが、物理学における極めて基礎的な方程式においてそれが正しく機能し、物理的に正しい解をユニークに導くことを示したことは重要な一歩である。

(2) 二つ目は、制限ボルツマン機械を定義して、長距離相互作用を持つイジング模型の配位を生成する機械パラメタを求めたことである。具体的には、長距離相互作用イジング模型の配位を、短距離相互作用イジング模型の配位に確率補正を組み合わせることで定義し、制限ボルツマン機械のパラメタを最適化する計算を行った。確率補正係数を各サンプルの有効発生数とみなして尤度関数を最大化した。確率補正が大きくなりすぎるとサンプルの質が悪化する。そこで短距離相互作用から目的の長距離相互作用に向かってハミルトニアンを十分に薄くスライスし、各スライス事に制限ボルツマン機械の最適化を実行し積み上げて行く、という多段最適化法を新たに提案し実行した。確率的最適化によって作られた機械が生成する配位の磁気感受率を評価し、ブロックくりこみ群による正確な計算と比較したところ、良い一致を見た。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

K. I. Aoki, H. Uoi and M. Yamada, Functional renormalization group study of the Nambu-Jona-Lasinio model at finite temperature and density in an external magnetic field, Phys. Lett. B 753, 580-585 (2016), 査読有。

Ken-Ichi Aoki and Masatoshi Yamada, The RG flow of Nambu-Jona-Lasinio model at finite temperature and density, Int. J. Mod. Phys. A 30, no. 27, 1550180 (2015), 査読有。

Ken-Ichi Aoki, Shin-Ichiro Kumamoto, Daisuke Sato, Weak solution of the non-perturbative renormalization group equation to describe dynamical chiral symmetry breaking, Prog. Theor. Exp. Phys., 043B05 (2014) 1-27, 査読有。

[学会発表](計 21 件)

青木健一, 小林玉青, くりこみ群と統計的機械学習, 日本物理学会, 2016.3.19, 東北学院大学(宮城県仙台市)。

青木健一, 熊本真一郎, 佐藤大輔, 山田雅俊, 有限温度・密度系におけるカイラル対称性の力学的破れの弱くりこみ群を用いた解析, 日本物理学会, 2015.9.27, 大阪市立大学(大阪府大阪市)。

Ken-Ichi Aoki, Weak solution of the renormalization group equation giving physically correct vacuum for theories with dynamical chiral symmetry breaking, 2015.6.4, RIMS, Kyoto.

青木健一, 小内伸之介, 佐藤大輔, 逐次変換法による自発的質量生成の解析, 日本物理学会, 2015.3.24, 早稲田大学(東京都新宿区)。

青木健一, 熊本真一郎, 佐藤大輔, ゲージ理論におけるカイラル対称性の力学的破れの弱くりこみ群による解析, 日本物理学会, 2015.3.24, 早稲田大学(東京都新宿区)。

Ken-Ichi Aoki, Shin-Ichiro Kumamoto and Daisuke Sato, Dynamical chiral symmetry breaking and weak nonperturbative renormalization group equation in gauge Theory, Origin of Mass and Strong Coupling Gauge Theories (SCGT15), 2015.3.3, Nagoya.

Ken-Ichi Aoki, Shin-Ichiro Kumamoto and Daisuke Sato, Weak Renormalization Group Approach for Dynamical Chiral Symmetry Breaking, Origin of Mass and Strong Coupling Gauge Theories (SCGT15), 2015.3.3, Nagoya.

Ken-Ichi Aoki, Shin-Ichiro Kumamoto

and Daisuke Sato, Weak Renormalization Group Analysis of the Dynamical Chiral Symmetry Breaking, 7th Int. Conf. on the Exact Renormalization Group (ERG2014), 2014.9.26, Lefkada, Greece.

Ken-Ichi Aoki, Tamao Kobayashi, Tomohiko Yasoyama, Yusuke Yoshimura, Domain Wall Renormalization Group Approach to 2d Ising Model, 7th Int. Conf. on the Exact Renormalization Group (ERG2014), 2014.9.24, Lefkada, Greece.

Ken-Ichi Aoki, Daisuke Sato and Masatoshi Yamada, A beyond the local potential approximation study for the dynamical chiral symmetry breaking in effective model of QCD, 7th Int. Conf. on the Exact Renormalization Group (ERG2014), 2014.9.22, Lefkada, Greece.

Ken-Ichi Aoki, Shinnosuke Onai and Daisuke Sato, Analysis of the Spontaneous Mass Generation by Using an Iterative Method, 7th Int. Conf. on the Exact Renormalization Group (ERG2014), 2014.9.22, Lefkada, Greece.

青木健一, 藤井康弘, 小林玉青, 佐藤大輔, 富田洋, 吉村友佑, 磁場中の2次元イジング模型のドメイン・ウォールくりこみ群による解析, 日本物理学会, 2014.3.30, 東海大学(神奈川県平塚市)。

青木健一, 藤井康弘, 熊本真一郎, 佐藤大輔, カイラル対称性の自発的破れと非摂動くりこみ群方程式の粘性解, 日本物理学会, 2014.3.30, 東海大学(神奈川県平塚市)。

青木健一, 佐藤大輔, 山田雅俊, 有限温度・密度 QCD におけるカイラル有効模型の非摂動くりこみ群による解析, 日本物理学会, 2014.3.30, 東海大学(神奈川県平塚市)。

青木健一, 魚井英生, 佐藤大輔, 2+1-flavor Nambu-Jona-Lasinio 模型を用いた外部磁場による QCD 相構造の変化, 日本物理学会, 2014.3.30, 東海大学(神奈川県平塚市)。

青木健一, 佐藤大輔, 非摂動くりこみ群を用いたクォーク・メソン模型における非一様相の解析, 日本物理学会, 2014.3.28, 東海大学(神奈川県平塚市)。

青木健一, 小林玉青, 長距離相互作用のある二重井戸量子力学系の full-BDRG による解析, 日本物理学会, 2013.9.23, 高知大学(高知県高知市)。

青木健一, 熊本真一郎, 佐藤大輔, 非摂動くりこみ群方程式の弱解と自発的対称性の破れの解析, 日本物理学会, 2013.9.23, 高知大学(高知県高知市)。

青木健一, 佐藤大輔, 山田雅俊, 非摂動くりこみ群による有限温度密度系におけるカイラル対称性の自発的破れの解析, 日本物理学会, 2013.9.21, 高知大学(高知県高知市)。

Ken-Ichi Aoki, Yasuhiro Fujii, Tamao Kobayashi and Hiroshi Tomita, Domain Wall Renormalization Group Approach to the 2d

Ising Model with External Magnetic Field、  
RIMS Workshop on Applications of RG  
Methods in Mathematical Sciences,  
2013.9.11.

②1 Ken-Ichi Aoki, Shin-Ichiro Kumamoto  
and Daisuke Sato、Weak Solution of  
Renormalization Group Equation、RIMS  
Workshop on Applications of RG Methods in  
Mathematical Sciences, 2013.9.11.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

取得状況(計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

青木 健一 (AOKI KEN-ICHI)  
金沢大学理工研究域数物科学系・教授  
研究者番号 : 00150912

### (2) 連携研究者

小林 玉青 (KOBAYASHI TAMAO)  
米子高等工業専門学校・講師  
研究者番号 : 60506822