2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ５ 月 ２１ 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2013～2015
課題番号：２５４００１３０

研究課題名（和文）フーリエ積分と特異積分に関する基礎的・応用的研究

研究課題名（英文）Research on Fourier integrals and singular integrals

研究代表者
佐藤　秀一（Sato, Shuichi）

金沢大学・学校教育系・教授

研究者番号：２０１６２４３０

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：Heisenberg 群を含む一般の斉次群上でLittlewood-Paley作用素と特異積分作用素を考えて，それらの作用素に対して Euclid 空間 上で知られている結果と同等の有界性に関する結果を示した．
ここで，作用素の積分核には滑らかさの正則性が仮定されていなく，サイズに関する最小の仮定と相殺性に関する仮定が置かれているのみである．また，ある種のLittlewoodPaley作用素で．ユークリッド空間上で．Sobolev 空間を特徴付けることに成功した(IllinoisJ. Math.　58(4)).

研究成果の概要（英文）：We considered Littlewood-Paley operators and singular integral operators in general homogeneous groups including the Heisenberg group and proved that those operators have mapping properties similar to the ones that are known on the Euclidean spaces. Here, the kernels of the operators are assumed to have minimal size conditions and cancellation properties. Also, we have succeeded to characterize the Sobolev spaces on the Euclidean spaces by some Littlewood-Paley operators (IllinoisJ. Math.　58(4)).

研究分野：解析学基礎

キーワード：Fourier 級数　特異積分

１．研究開始当初の背景

今回の研究課題には従来の研究課題の中でもテーマとして取り上げてきた問題でいまだ解決していない問題が多い．これらの解決のために関係する研究会に積極的に出席し，それまで得られた結果の研究発表（講演）等を行っている．さらに，同じ興味を持つ研究者との討論に努め研究課題の解決に向けて努力している．特に，海外共同研究者．D.Fan 氏(Department of Mathematics, University of Wisconsin-Milwaukee) との共同研究により研究課題に関連した問題に関していくつかの共著論文を発表している． さらに，北京師範大学を訪問し，Y. Ding 氏と研究課題に関係したいくつかの問題について討論している．

２．研究の目的

研究目的は以下の通りである．ユークリッド空間，多様体，べき零 Lie 群（特に homogeneous group）及びそれらの空間の直積空間における特異積分，擬微分作用素，固有関数展開の Riesz 平均，Cesaro 平均等に関する種々の関数空間上での写像性，有界性(強有界性，弱有界性) 等にかかわる調和解析の研究であるが，特に次の(1)—(4)について研究する．これらは互いに密接に関係していて，総合的に研究することで成果を得たい．以下(1)—(4)について説明する．(1) Euclid 空間においてクリティカルオーダー (n-1)/2 に対する Bochner-Riesz 平均が間隙概発散する可積分関数の存在を示すこと．ただし，ここで n は Euclid 空間の次元である．クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均は，M. Christ, J. L. Rubio de Francia 等のいわゆる rough operator に対する基本的な研究においても取り扱われ，その研究には，以後種々の発展がある．筆者は既に(Muckenhoupt の A_1)荷重空間におけるベクトル値 weak type (1,1) 有界性（弱 (1,1) 有界性)，荷重 Hardy 空間における間隙概収束，そして概発散性等についての一般的な結果を得ているが（これらの結果を補完することにもなるのであるが）上記の事実を示したい．1 変数のフーリエ級数の場合には類似の古典的結果がよく知られているが，この問題についても S.Bochner の研究(1936)以来知られているフーリエ級数との類似性により，肯定的解決が予想される．球面平均作用素(spherical mean)とクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均のある種の類似性が知られている．M. Christ は論文:Weak type (1,1) bounds for rough operators, Ann. of Math. 128 (1988), 19—42 において球面平均作用素から定義される間隙最大関数(lacunary maximal function) が Hardy 空間 H^1 から weak L^1 空間への有界な作用素を定義することを示した．しかし，M. Christ はこの論文において詳しい証明を与えていない．この結果はクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均の間隙概収束・発散問題と深く関係していると思われる．そこで，(2) 球面平均作用素に対するこの結果に独自の証明を与えたい．

これにより，クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均に対する理解も深まると予想される．これら(特に(1))は従来の研究課題の中でもテーマとして取り上げてきたのであるがいまだ解決していない．引き続き研究テーマのひとつとしたい．

(3) クリティカルオーダー以下のオーダーの Bochner-Riesz 平均に対して，予想される p の範囲，endpoints に対して適切な荷重 Lp 空間 におけるベクトル値弱評価を示すこと，及び 3 次元以上のユークリッド空間において(予想されている) Lp ノルム評価に対する研究の手がかりを見つけること．前者は非荷重空間上では M. Christ, A. Seeger, C. Sogge, T. Tao 等により研究されているが，完全な形でのベクトル値弱評価でさえまだ一部しかできていない(p=1 の時は S.Sato, Bull. London Math. Soc. 27 (1995), 58—64 参照)．また荷重空間での研究はまだ始まっていないようである．そこで適当な重み関数を考えて（完全な形でベクトル値弱評価を(まず，スカラー値関数に対して弱評価が示されている Lp 空間上で)示したい．これ

により間隙概収束等にも応用がなされる．また，この解決の後は発散性に関する問題を取り扱う．(4)　滑らかさの正則性のない非斉次核から定義される特異積分作用素の 弱(1,1) 有界性及びこのような特異積分核から定義される F. Ricci-E. M. Sein 型の振動特異積分作用素に対する弱 (1,1) 有界性を示すこと． M. Christ, J. L. Rubio de Francia, S. Hofmann, A. Seeger, T. Tao 等の研究により，Hormander 条件を満足しない核を持つ積分作用素に対する弱有界性が示されるようになった．特に，A. Seeger は論文:Singular integral operators with rough convolution kernels, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 95—105 において斉次型の特異積分核に対してサイズに関するある弱い条件(球面上の Zygmund クラス Llog L に属すること) を仮定するだけで，任意の次元で，この核から定義される特異積分作用素の弱 (1,1) 有界性を示すことに成功した (筆者は D. Fan 氏との共同研究で Marcinkiewicz 積分に対してこれに対応する結果を示している(Tohoku Math. J. 53(2001), 265—284)). A. Seeger の証明は Fourier 変換に依存する部分(microlocal analysis 的な部分)があるが，T. Tao (1999) は Fourier 変換に依存しない証明を与えている．我々はこの A. Seeger の結果を非斉次積分核の場合に拡張したい．また，一般のパラボリック特異積分の場合にも拡張したい(2 次元の斉次核の場合はすでに 2011 の論文で解決された)．さらに，このような特異積分核から定義される (F. Ricci-E. M. Stein 型の) 振動特異積分作用素を考えてその弱 (1,1) 有界性を示したい．また，べき零リー群 (homogeneous group)の直積空間上の理論に発展させたい．

３．研究の方法

調和解析関係の研究会，国際会議，講演会等に積極的に出席し，講演，意見交換・資料収集等に勤める．これらの研究集会に出席することにより，本研究目的に対して，共通の興味と重要性にたいする認識を有する国内外の研究者と意見交換する．さらに，国内外の同じ興味をもつ研究者と共同研究を行う．これらの研究はフーリエ積分に関する調和解析学はもちろん，複素解析学，確率論，微分幾何学等と深く関わっている．そのため本研究に関連した研究結果や情報を載せた種々の図書類の購入も必要と考える． 研究目的 (1)—(4) を述べたが，概括的にいうと，これらはユークリッド空間及び多様体における特異積分，擬微分作用素，固有関数展開の Riesz 平均等に関係する研究である．本研究課題の解決のためには，国内外の同じ興味をもつ研究者との共同研究をおこなうこと(本研究課題に関連して，既に D. Fan 氏 (Univ. of Wisconsin Milwaukee) との共同研究によりいくつかの共著論文を発表している)，実解析学，確率論及び複素解析学的な考察と方法を総合していくことが必要であると考える．研究目的に述べた項目毎に以下のような計画・方法で行う．

目的 (1) について：1 変数フーリエ級数の場合を再考察することから始める．Hardy 空間 H^1 の関数に対しては間隙概収束が知られているが，可積分関数の場合との違いを詳しく調べる．1 変数の特殊性がどこにあるのか調べ，多変数への拡張を試みる．このような考察により，証明を抽象化することにより Bochner-Riesz 平均の場合の解決を試みる．Bochner-Riesz 平均の発散性に関して筆者は論文：Divergence of the Bochner-Riesz means in the weighted Hardy spaces, Studia Math. 118(1996),261—275 において本研究目的に関連した研究を行っており，これも参考にして研究を進める．また，本研究目的は整数論にも密接に関係していると思われる．従って，本研究目的達成には整数論に関係した議論を深める必要性もでてくる可能性がある．たとえば Kronecker の定

理，そしてそれに関連したいくつかの定理の再構成等も必要になる可能性もある．さらに,J. P. Kahane, R. Salem のいくつかの仕事 , S.V.Konyagin, On everywhere divergence of trigonometric Fourier series, Mat.Sb. 191(200)(L(logL)^{1/2} に近い空間での発散)との関連性も考察したい．目的 (2) について： Bochner-Riesz 平均との関係を明らかにする別証明を与えたい. T. Wolff, Lectures on harmonic analysis, Univ. Lecture series Vol 29, AMS,Chap.7,J. Duoandikoetxea-L.Vega, Spherical means and weighted inequalities, J. London Math. Soc.53 (1996) が参考になる. 以上に述べた Bochner-Riesz 平均の研究と球面平均作用素の研究は互いに密接に関係しているものであり，両者の研究により総合的に解決を試みたい.

目的 (3) について： (3)の前者 のベクトル値弱有界性を示す研究に関しては次のような研究計画を考えている．クリティカルインデックス ((n-1)/2) における，弱 (1, 1) 有界性を示す従来の方法 (M. Christ，J. L. Rubio de Franncia 等の方法) をその他の endpoints の場合に適用できるようにすることを試みる事から始める．さらに，クリティカルオーダーよりも小さいオーダーの Bochner-Riesz 平均のendpoints における弱有界性を扱った論文として：M. Christ, Weak type endpoint bounds for Bochner-Riesz multipliers, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 3 (1987), 25-31, T. Tao, Weak-type endpoint bounds for Riesz means, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996), 2797-2805 等があるが, これらの結果を詳しく検討することも行う. 上の M. Christ (1987) は複素補間法とクリティカル インデックス ((n-1)/2) での評価方法をあわせて用いるのであるが，間隙 (lacunary) ベクトル値弱有界性を示すには有効であるが，一般のベクトル値弱有界性には改良が必要のように思われる. T. Tao の方法等も考慮し，実解析的観点から証明を再構成することも検討する．(3)の後者の研究には，最近の掛谷の最大関数に関する研究等の幾何学的フーリエ解析の発展等も手がかりに進めて行きたい．特に，T. Wolff，T.Tao，A. Vargas 等の仕事を詳しく検討したい.

目的 (4) について：A. Seeger (1996) と T. Tao (Indiana Univ. Math. J. 1999) の弱有界性に関する論文の方法を見直すことから始める．特に，２次元の場合を良く調べてみる. F.Ricci-E.M. Stein 型の振動特異積分の弱有界性に対しては，A. Seeger，T. Tao の方法と筆者の荷重空間の場合に利用された(精密化された)平方積分評価，多項式に関する幾何学的な補題 (Studia Math. 2000) 等を総合的に用いて解決を試みる. ところで，Lp 有界性 ($1<p<\infty$) の場合は次の論文がある：S. Z. Lu and Y. Zhang, Criterion on Lp-boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 8, (1992), 201―219. これにより積分核が斉次で，球面上で Lq 条件 ($q>1$) を満たす場合に振動特異積分の Lp 有界性 ($1<p<\infty$) が示されている. しかし, 弱 (1,1) 有界性に関しては，振動特異積分作用素の場合は，特異積分作用素と違い，この場合にも有界性が示されていないので，まずこの場合から取り組みたい．やはり，2 次元の場合から調べたい．また，T. Taoの方法は一般のパラボリック特異積分の場合(2 次元の場合にはすでに2011の論文がある),そして直積空間上の特異積分の場合に拡張することが期待できるが，Y. Ding 氏 (北京師範大学)と協力して研究を進めたい.

４．研究成果

n 次元 Euclid 空間上の周期関数の Fourier 級数に対して，クリティカルオーダー (n-1)/2 に対する Bochner-Riesz 平均を考え，Antonov 空間 Llog L LogLogLog L の関数に対してその概収束が示された．また，3 次元 Euclid 空間の単位球面上の球面調和関数展開に対して，クリティカルオーダー

1/2 の Cesàro 平均を考え，その概収束を単位球面上の Antonov 空間の関数に対して証明した(Pointwise convergence of Cesàro and Riesz means on certain function spaces, Acta Sci. Math. (Szeged) 80 (2014), 129–139).
Homogeneous 群の直積上の特異積分に対して，積分核に L(logL)^2 条件を仮定して Lp 有界性 (1<p< ∞) が示された．L(logL)^2 条件は最良条件であることが知られている (Singular integrals on product homogeneous groups, 2013 May Integr. Equ. Oper. Theory, 76 (2013), 311—330).
Heisenberg 群を含む一般の斉次群上で Littlewood-Paley 作用素を考えて，それらの作用素に対して Euclid 空間 上で知られている結果と同等の有界性に関する結果を示した．ここで，作用素の積分核には滑らかさの正則性が仮定されていなく，サイズに関する最小の仮定と相殺性に関する仮定が置かれているのみである (Littlewood-Paley functions on homogeneous groups, *Forum Math.* 28 (1) (2016) 43–55)．また，ある種の Littlewood-Paley 作用素で．ユークリッド空間上で．Sobolev 空間を特徴付けることに成功した(*Illinois J. Math.* 58(4) (2014), 1025–1039).
Heisenberg 群を含む homogeneous 群上である種の特異積分作用素と最大特異積分作用素を考えて，それらの作用素の 荷重 Lp 空間上での弱有界性が示された．ここで，特異積分作用素には滑らかさの正則性が仮定されていなく，サイズに関する最小の仮定と cancellation に関する仮定が置かれているのみである(*Arkiv för Matematik, published online May 30, 2015*).

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 9 件）

(1) S. Sato, Weighted weak type (1,1) estimates for singular integrals with non-isotropic homogeneity, *Arkiv för Matematik, published online May 30, 2015,* 査読有.

(2) Y.Ding, and S.Sato, Littlewood-Paley functions on homogeneous groups, *Forum Math.* 28 (1) (2016) 43—55, 査読有.

(3) S. Sato, Littlewood-Paley operators and Sobolev spaces. *Illinois J. Math.* 58(4) (2014), 1025—1039 (2015/12 出版), 査読有.

(4) Y. Ding and S. Sato,Maximal singular integrals on product homogeneous groups, Studia Math. 222(2014), 41—49, 査読有.

(5) S. Sato, Boundedness of Littlewood-Paley operators, 2014 年 6 月, RIMS(京都大学数理解析研究所) Kokyuroku Bessatsu 49 巻, pp. 75-101 ISSN: 1881-6193 , 査読有.

(6) S. Sato, Pointwise convergence of Cesàro and Riesz means on certain function spaces, Acta Sci. Math. (Szeged) 80 (2014), 129–139, 査読有.

(7) S. Sato, Cesàro and Riesz means of critical order on certain function spaces Proceedings of the fourth international symposium on Banach and function spaces IV, 2014, August, Yokohama Publishers Kitakyushu, pp. 225-230, 査読有.

(8) Y. Ding and S. Sato, Singular integrals on product homogeneous groups, 2013 May Integr. Equ. Oper. Theory, 76 (2013), 55--79, 査読有.

(9) S.Sato, Estimates for singular integrals on homogeneous groups, 2013 April J. Math. Anal. Appl, 400(2013), 311—330, 査読有.

〔学会発表〕（計 4 件）

(1) S. Sato, Square functions related to Marcinkiewicz integral and Sobolev spaces, The Fifth International Symposium on BANACH and FUNCTION SPACES 2015 (ISBFS 2015), Kyushu Institute of Technology (KIT), Tobata Campus (Kitakyushu, Fukuoka, JAPAN) on September 2-6, 2015.

(2) S. Sato, Some weighted weak type estimates for singular integrals, 国際研究会「Harmonic Analysis and Applications」, Chern Institute of Mathematics, Nankai University, Tianjin (China), 2014 年 6 月 11 日, 招待講演.

(3) S. Sato, Boundedness of Littlewood-Paley operators, RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」, 京都大学数理解析研究所(京都府, 京都市), 2013 年 7 月 9 日, 招待講演.

(4) S. Sato, Some results in harmonic analysis related to singular integrals with mixed homogeneity, The Asian Mathematical Conference 2013, Busan (South Korea), 2013 年 7 月 2 日, 招待講演.

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
佐藤　秀一　（SATO SHUICHI　）
金沢大学・学校教育系・教授
研究者番号：20162430