様式Ｃ－１９

科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成　24　年　5　月　18 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究（Ｃ）
研究期間：2009～2011
課題番号：21540171
研究課題名（和文）　多変数フーリエ積分に関する基礎的・応用的研究

研究課題名（英文）　Research on Fourier integrals of several variables

研究代表者
佐藤 秀一 （SATO SHUICHI）
金沢大学・学校教育系・准教授
研究者番号：20162430

研究成果の概要(和文):滑らかさの正則性のない斉次核から定義される一般的な nonisotropic dilation に適合した parabolic 特異積分作用素の 弱 (1,1)有界性が，2 次元 Euclid 空間の場合に積分核の大きさの最小条件のもとで示された． 一般の n 次元 Euclid 空間における dilation に対して，それが定義する斉次曲線に沿った Hardy-Littlewood 型最大関数，Hilbert 変換および 最大 Hilbert 変換を考え，ある種の荷重混合ノルム空間 での有界性を証明した.

研究成果の概要（英文）：Weak type (1,1) estimates were proved for 2-dimensional parabolic singular integrals defined by rough kernels which are homogeneous with respect to certain nonisotropic dilations, under the minimal size condition of the kernels. Some weighted mixed norm inequalities were proved for Hardy-Littlewood maximal operators, Hilbert transforms and maximal Hilbert transforms along homogeneous curves defined by certain nonisotropic dilations in the n-dimensional Euclidean space.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2009 年度	500,000	150,000	650,000
2010 年度	500,000	150,000	650,000
2011 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	1,500,000	450,000	1,950,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：Fourier 級数，特異積分

１．研究開始当初の背景

今回の研究課題には従来の研究課題の中でもテーマとして取り上げてきた問題でいまだ解決していない問題が多い．これらの解決のために関係する研究会に積極的に出席し，それまで得られた結果の研究発表（講演）等を行っている．さらに，同じ興味を持つ研究者との討論に努め研究課題の解決に向けて努力している．特に，海外共同研究者．D. Fan 氏(Department of Mathematics, University of Wisconsin-Milwaukee) との共同研究により研究課題に関連した問題に関していくつかの共著論文を発表している． さらに，北京師範大学を訪問し，Y. Ding 氏と研究課題に関係したいくつかの問題について討論している.

２．研究の目的

研究目的は以下の通りである．ユークリッド空間，及び多様体における特異積分，擬微分作用素，固有関数展開の Riesz 平均等に関する研究であるが，特に次の(1)-(4)について研究する．これらは互いに密接に関係していて，総合的に研究することで成果を得たい．以下(1)-(4)について説明する．

(1) Euclid 空間においてクリティカルオーダー $(n-1)/2$ に対する Bochner-Riesz 平均が間隙概発散する可積分関数の存在を示すこと．ただし，ここで n は Euclid 空間の次元である．クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均は，M. Christ, J. L. Rubio de Francia 等のいわゆる rough operator に対する基本的な研究においても取り扱われ，その研究には，以後種々の発展がある．筆者は既に(Muckenhoupt の A_1)荷重空間におけるベクトル値 weak type (1,1) 有界性（弱 (1,1) 有界性)，荷重 Hardy 空間における間隙概収束，そして概発散性等についての一般的な結果を得ているが（これらの結果を補完することにもなるのであるが）上記の事実を示したい．1 変数のフーリエ級数の場合には類似の古典的結果(間隙概発散)がよく知られているが，この問題についても S.Bochner の研究(1936)以来知られているフーリエ級数との類似性により，肯定的解決が予想される．

球面平均作用素(spherical mean)とクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均のある種の類似性が知られている．M. Christ は論文:

Weak type (1,1) bounds for rough operators, Ann. of Math. 128 (1988), 19-42 において球面平均作用素から定義される間隙最大関数(lacunary maximal function) が Hardy 空間 H^1 から weak L^1 空間への有界な作用素を定義することを示した．しかし，M. Christ はこの論文において詳しい証明を与えていない．この結果はクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均の間隙概収束・発散問題と深く関係していると思われる．そこで，

(2) 球面平均作用素に対するこの結果に独自の証明を与えたい．

これにより，クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均に対する理解も深まると予想される．

(3) (i) クリティカルオーダー以下のオーダーの Bochner-Riesz 平均に対して，予想される p の範囲，endpoints に対して適切な荷重 Lp 空間 (M. Christ, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 3 (1987), 25-31; T. Tao, Weak-type endpoint bounds for Riesz means, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996), 2797-2805 参照）におけるベクトル値弱評価を示すこと，及び (ii) 3 次元以上のユークリッド空間において(予想されている) Lp ノルム評価に対する研究の手がかりを見つけること．(さらに，これらの問題を一般的な qasiradial Bochner-Riesz 平均についても研究したい.)

前者は非荷重空間上では M. Christ, A. Seeger, C. Sogge, T. Tao 等により研究されているが，完全な形でのベクトル値弱評価でさえまだ一部しかできていない．また荷重空間での研究はまだ始まっていない．そこで適当な重み関数を考えて（完全な形で）ベクトル値弱評価を(まず，スカラー値関数に対して弱評価が示されている Lp 空間上で)示したい． すなわち，Bochner-Riesz 平均のオーダー δ (p) と p の関係は $\delta(p) = n|1/p-1/2| - 1/2$, $1 \leqq p \leqq 2(n+1)/(n+3)$．これにより間隙概収束等にも応用がなされる．また，この解決の後は発散性に関する問題を取り扱う．

筆者は正の斉次関数 H から定義された一般の Bochner-Riesz 平均 (qasiradial Bochner -Riesz 平均)の最大関数に関する研究を行い，斉次関数 H に付随する超曲面 (cosphere) の Gauss 曲率が零になることを許す場合に Carbery-Rubio de Francia-Vega の結果を一般化した（これは $p \geqq 2$ の場合で，実際にはより一般的な結果を示した，2007)．クリティカルオーダーのこの種の Bochner-Riesz 平均に対して M. Christ and C. Sogge (1988) により弱 (1,1) 有界性が示されている．その証明はある種の Tauberian argument を用いるものであり，ある種のコンパクト多様体上の楕円型擬微分作用素の固有関数展開の場合に適用できるものである．しかし，Tauberian argument 等を用いることもあり，証明の本質が見えにくい部分がある．この M. Christ and C. Sogge の結果に対してより直接的な証明を与えたい．これも前者に含まれる問題のひとつとしたい．これにより，通常の Bochner-Riesz 平均に対する種々の結果が qasiradial Bochner-Riesz 平均に拡張されることを期待したい.

後者については，2 次元の場合は Carleson and Sölin の論文：

Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc, Studia Math. 44 (1972), 287-299

で解決されている．しかし 3 次元以上の場合は，最近では J. Bourgain, T. Wolff, T. Tao 等による研究があるが，まだ完全には解決していない．掛谷の問題，Hausdorff 次元の問題等にも関係し，難しい問題であるがこの解決は調和解析学にとって重要な課題である．この方面の研究は，Fourier 変換の制限定理等を通して偏微分方程式論への応用

へとも発展している．前者の研究等を通してこの問題への手がかりを得たい．
(4)　滑らかさの正則性のない非斉次核から定義される特異積分作用素の 弱 (1,1) 有界性及びこのような特異積分核から定義される F. Ricci-E. M. Sein 型の振動特異積分作用素に対する弱 (1,1) 有界性を示すこと．さらに，ある種の部分多様体上に沿った特異性を持つ特異積分作用素の研究に発展させたい．M. Christ, J. L. Rubio de Francia, S. Hofmann, A. Seeger, T. Tao 等の研究により，Hörmander 条件を満足しない核を持つ積分作用素に対する弱有界性が示されるようになった．特に，A. Seeger は論文:
Singular integral operators with rough convolution kernels, jour J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 95--105
において斉次型の特異積分核に対してサイズに関するある弱い条件（球面上の Zygmund クラス Llog L に属すること）を仮定するだけで，任意の次元で，この核から定義される特異積分作用素の弱 (1,1) 有界性を示すことに成功した（筆者は D. Fan 氏との共同研究で Marcinkiewicz 積分に対してこれに対応する結果を示している）． A. Seeger の証明は Fourier 変換に依存する部分(microlocal analysis 的な部分)があるが，T. Tao (1999) は Fourier 変換に依存しない証明を与えている．我々はこの A. Seeger の結果を非斉次積分核の場合に拡張したい．また パラボリック特異積分の場合にも拡張したい(2 次元の場合はすでにある程度の見通しがある)．さらに，このような特異積分核から定義される（F. Ricci-E. M. Stein 型の）振動特異積分作用素を考えてその弱 (1,1) 有界性を示したい． D. Fan 氏との共同研究で部分的な結果を得ているが，完全には解決していない．

３．研究の方法

目的 (1) について：1 変数フーリエ級数の場合を再考察することから始める．Hardy 空間 H^1 の関数に対しては間隙概収束が知られているが，可積分関数の場合との違いを詳しく調べる．1 変数の特殊性がどこにあるのか調べ，多変数への拡張を試みる．このような考察により，証明を抽象化することにより Bochner-Riesz 平均の場合の解決を試みる．Bochner-Riesz 平均の発散性に関して筆者は論文：
Divergence of the Bochner-Riesz means in the weighted Hardy spaces, Studia Math. 118(1996),261-275 において本研究目的に関連した研究を行っており，これも参考にして研究を進める．また，本研究目的は整数論にも密接に関係していると思われる．従って，本研究目的解決には整数論に関係した議論を深める必要性もでてくる可能性がある．たとえば Kronecker の定理，そしてそれに関連したいくつかの定理の再構成等も必要になる可能性もある．また，J. P. Kahane, R. Salem のいくつかの仕事との関連性も考察したい．
目的 (2) について： Bochner-Riesz 平均との関係を明らかにする別証明を与えたい．T. Wolff, Lectures on harmonic analysis, Univ. Lecture series Vol 29, AMS, Chap. 7, J. Duoandikoetxea-L.Vega, Spherical means and weighted inequalities, J. London Math. Soc.53(1996) が参考になるかもしれない．
以上に述べた Bochner-Riesz 平均の研究と球面平均作用素の研究は互いに密接に関係しているものであり，両者の研究により総合的に解決を試みたい．
目的 (3) について：(3)の前者 のベクトル値弱有界性を示す研究に関しては次のような研究方法を考えている．クリティカル インデックス ((n-1)/2) における，弱 (1,1) 有界性を示す従来の方法 (M. Christ, J. L. Rubio de Franncia 等の方法) を一般のインデックスの場合に適用できるようにすることを試みる事から始める．さらに，クリティカルオーダーよりも小さいオーダーの Bochner-Riesz 平均の endpoints における弱有界性を扱った論文として： M. Christ , Weak type endpoint bounds for Bochner-Riesz multipliers, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 3 (1987), 25-31, あるいは T. Tao, Weak-type endpoint bounds for Riesz means, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996), 2797-2805 等があるが，これらの結果を詳しく検討することも行う．上の M. Christ (1987) は複素補間法とクリティカル インデックス ((n-1)/2) での評価方法をあわせて用いるのであるが，間隙 (lacunary) ベクトル値弱有界性を示すには有効であるが，一般のベクトル値弱有界性には改良が必要のように思われる． T. Tao の方法等も考慮し，実解析的観点から証明を再構成することも検討する．また，cylindrically symmetric functions に関数空間を制限して，実験的な評価も行う．荷重空間での弱有界性を示すには，以下で述べる，特異積分・振動特異積分に対する理論の発展を考慮し，解決を試みる．たとえば，非荷重空間における種々の評価を精密化し，適当な実補間を適用することにより解決できるかどうかを検討する．また，M. Christ and C. Sogge の結果に対する新しい証明を考えるためには,彼らの仕事を再検討することから始めたい．
(3)の後者の研究には，最近の掛谷の最大関数に関する研究等の幾何学的フーリエ解析の発展等も手がかりに進めて行きたい．特に，

T. Wolff, T.Tao, A. Vargas の仕事を詳しく検討したい．筆者は一般の quasiradial Bochner-Riesz 平均の最大関数に関して，Carbery-Rubio de Francia-Vega の結果を一般化する結果を得た．このような一般の Bochner-Riesz 平均の研究もあわせて行ってゆきたい；これにより通常 Bochner-Riesz 平均への理解も深まることを期待したい．
目的 (4) について：A. Seeger (1996) と T. Tao (1999)の弱有界性に関する論文の方法を見直すことから始める．特に，２次元の場合を良く調べてみる．F. Ricci-E.M. Stein 型の振動特異積分の弱有界性に対しては，A. Seeger, T. Tao の方法と筆者の荷重空間の場合に利用された精密化された平方積分評価，多項式に関する幾何学的な補題 (2000) 等を総合的に用いて解決を試みる．ところで，Lp 有界性 (1<p<∞) の場合は次の論文がある：S. Z. Lu and Y. Zhang, Criterion on Lp-boundedness for a class of oscillatory singular integrals with rough kernels, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 8, (1992), 201-219.　これにより積分核が斉次で，球面上で Lq 条件 (q>1) を満たす場合に振動特異積分の Lp 有界性 (1<p<∞) が示されている．しかし，弱 (1,1) 有界性に関しては，振動特異積分作用素の場合は特異積分作用素と違い，この場合にも有界性が示されていないので，まずこの場合から取り組みたい．やはり，2 次元の場合から調べたい．また，T. Tao (1999)の方法はパラボリック特異積分の場合に拡張することが期待できるが，2 次元の場合には筆者はすでにある程度の肯定的な結果を得ているので，これを高次元の場合に拡張したい．

４．研究成果

滑らかさの正則性のない斉次核から定義される一般的な nonisotropic dilation に適合した Calderón-Zygmund 型の parabolic 特異積分作用素の 弱 (1,1)有界性が，2次元 Euclid 空間の場合に示された．この結果が論文 Weak type $(1,1)$ estimates for parabolic singular integrals にまとめられ出版されることとなった．このような nonisotropic dilation に適合した Calderón-Zygmund 型の特異積分作用素の研究はさらに homogeneous group 上の特異積分作用素，最大特異積分作用素の Lp 有界性，荷重 Lp 有界性の研究へと発展した．
対角型とは限らない一般の n 次元 Euclid 空間における dilation に対して，それが定義する斉次曲線に沿った Hardy-Littlewood 型最大関数，Hilbert 変換および 最大 Hilbert 変換を考え，ある種の荷重混合ノルム空間 $L^p_w(L^q)$ での有界性を証明した．これは w=1 の場合には，Hardy-Littlewood 型最大関数，Hilbert 変換に対しては,既に N. Bez (2008) により示されていた結果を，最大 Hilbert 変換に対しても証明したものである．さらに，荷重混合ノルム空間に拡張することに成功してい．証明には M. Christ, J. Duoandikoetxea, J. L. Rubio de Francia のベクトル値(Sobolev 空間値)の関数に対する Plancherel の定理，N. Bez の振動席分に対する評価，ベクトル値 Littlewood-Paley 理論，測度の変化を伴う補間等を用いる．考える 重み関数のクラスは Muckenhoupt の A_1 クラスであるが，このような荷重評価は，isotropic dilation の場合でも，これが初めてである． 応用として，variable Kernel から定義される Calderón-zygmund 型の特異積分の最大関数に対する有界性に
関する Cowling- Mauceri (1985)の結果を nonisotropic dilation の場合に，重み付きで，拡張することができた(Nonisotropic dilations and the method of rotations with weight)．
n 次元 Euclid 空間上の周期関数の Fourier 級数に対して，クリティカルオーダー (n-1)/2 に対する Bochner-Riesz 平均を考え，Antonov 空間 Llog L LogLogLog L の関数に対してその概収束が示された．また，3 次元 Euclid 空間の単位球面上の球面調和関数展開に対して，クリティカルオーダー 1/2 の Cesàro 平均を考え，その概収束を単位球面上の Antonov 空間の関数に対して証明した．
Homogeneous 群の直積上の特異積分に対して，積分核に $L(\log L)^2$ 条件を仮定して Lp 有界性 (1<p<∞) が示された．$L(\log L)^2$ 条件は最良条件であることが知られている．また，一変数の片側振動特異積分作用素 (one-sided oscillatory singular integral)の荷重 弱 (1,1) 有界性が証明された(On weighted weak type norm inequalities for one-sided oscillatory singular integrals)．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　9 件）

(1) Shuichi Sato, Nonisotropic dilations and the method of rotations with weight, Proc. Amer. Math. Soc.
印刷中，査読有 (electronically published on December 19, 2011)．掲載確定

(2) Zunwei Fu, Shanzhen Lu, Shuichi Sato and Shaoguang Shi, On weighted weak type norm inequalities for one-sided oscillatory singular integrals, Studia Mathematica, 207(2011), 137-151, 査読有 (DOI 10.4064/sm207-2-3).

(3) Shuichi Sato, Singular integrals associated with functions of finite type and extrapolation, Analysis (Munich), 31 (2011), 273-291, 査読有 (DOI 10.1524/anly.2011.1124).

(4) S. Sato, Weak-type (1, 1) estimates for parabolic singular integrals, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. 54, No. 1 (2011), 221-247 , 査読有 (DOI 10.1017/S0013091509000790).

(5) S. Sato, A note on L^p estimates for singular integrals, Sci. Math. Jpn. 71 (2010), 343-348, 査読有.

(6) S. Sato, On certain estimates of singular integrals useful for extrapolation, RIMS Kokyuroku Bessatsu B 14 (2009), 155-162, 査読有.

(7) S. Sato, Estimates for singular integrals along surfaces of revolution, J. Aust. Math. Soc. 86 (2009), 413-430, 査読有(DOI 10.1017/S1446788708000773).

(8) D. Fan and S. Sato, A note on singular integrals associated with a variable surface of revolution, Math. Inequal. Appl. 12 (2009), 441-454, 査読有.

(9) S. Sato, Estimates for singular integrals and extrapolation, Studia Math. 192 (2009), 219-233, 査読有 (DOI 10.4064/sm192-3-2).

〔学会発表〕(計 3 件)

(1) 佐藤秀一, Some non-regular convolution operators, 日本数学会実関数論分科会特別講演, 2010 年 9 月 24 日, 名古屋大学 (愛知県).

(2) S. Sato, On singular integrals and maximal singular integrals associated with non-isotropic dilations, Harmonic analysis and its applications at Pohang 2009 , 2009 年 11 月 28 日, Pohang University of Science and Technology (韓国) .

(3) S. Sato, Estimates for singular integrals associated with nonisotropic dilations,第 9 回名古屋国際数学コンファレンス, 2009 年 9 月 28 日, 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科.

6．研究組織
(1)研究代表者

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI)
金沢大学・学校教育系・准教授
研究者番号：20162430