様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21 年　5　月　16　日現在

研究種目：基盤研究（C）
研究期間：2007～2008
課題番号：19540171
研究課題名（和文）　多変数フーリエ積分に関する基礎的・応用的研究

研究課題名（英文）　Research on Fourier integrals of several variables

研究代表者
佐藤 秀一 （SATO SHUICHI）
金沢大学・学校教育系・准教授
研究者番号：20162430

研究成果の概要：
滑らかさの正則性を持たない積分核から定義される finite type の多様体に沿った Calderon-Zygmund 型の特異積分に対してある種の積分核の大きさに関する条件のもとに、Lebesgue 空間 Lp での精密なノルム評価が得られた。積分核の Lq 可積分性でｑが１に近づく時の特異積分作用素の精密な Lp 評価を証明することにより、補外法(extrapolation) が適用できることになる. また, Littlewood-Paley 関数に対しても類似の結果が証明された.
滑らかさの正則性のない斉次核から定義される nonisotropic dilation に適合した Calderon-Zygmund 型の parabolic 特異積分作用素の 弱 (1,1)有界性が, 2 次元 Euclid 空間の場合に示された.

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	500,000	150,000	650,000
2008 年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
年度			
総　計	1,000,000	300,000	1,300,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：Fourier 級数, 特異積分

１．研究開始当初の背景
今回の研究課題には従来の研究課題の中でもテーマとして取り上げてきた問題でいまだ解決していない問題が多い. これらの解決のために関係する研究会に積極的に出席し, それまで得られた結果の研究発表（講演）等を行っている. さらに, 同じ興味を持つ研究者との討論に努め研究課題の解決に向けて努力している. また, 海外共同研究者. D. Fan 氏(Department of Mathematics, University of Wisconsin-Milwaukee) との共同研究により研究課題に関連した問題に関して共著論文を発表している.

２．研究の目的
ユークリッド空間または多様体における特異積分, 擬微分作用素, 固有関数展開の Riesz 平均等に関する研究であるが, 特に次の(1), (2)について研究する.

(1) Euclid 空間においてクリティカルオーダー (n-1)/2 に対する Bochner-Riesz 平均が間隙概発散する可積分関数の存在を示すこと．ただし，ここで n は Euclid 空間の次元である．
クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均は，M. Christ, J. L. Rubio de Francia 等のいわゆる rough operator に対する基本的な研究においても取り扱われ，その研究には，以後種々の発展がある．筆者は既に (Muckenhoupt の A_1)荷重空間におけるベクトル値 weak type (1,1) 有界性（弱 (1,1) 有界性），荷重 Hardy 空間における間隙概収束，そして概発散性等についての一般的な結果を得ているが（これらの結果を補完することにもなるのであるが）上記の事実を示したい．1 変数のフーリエ級数の場合には類似の古典的結果がよく知られているが，この問題についても S.Bochner の研究(1936)以来知られているフーリエ級数との類似性により，肯定的解決が予想される．
球面平均作用素(spherical mean)とクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均のある種の類似性が知られている．M. Christ は論文:
Weak type (1,1) bounds for rough operators, Ann. of Math. 128 (1988), 19—42 において球面平均作用素から定義される間隙最大関数(lacunary maximal function) が Hardy 空間 H^1 から weak L^1 空間への有界な作用素を定義することを示した．しかし，M. Christ はこの論文において詳しい証明を与えていない．この結果はクリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均の間隙概収束･発散問題と深く関係していると思われる．そこで，

(2) 球面平均作用素に対するこの結果に独自の証明を与えたい．
これにより，クリティカルオーダーの Bochner-Riesz 平均に対する理解も深まると予想される．

(3) クリティカルオーダー以下のオーダーの Bochner-Riesz 平均に対して，予想される p の範囲，endpoints に対して適切な荷重 Lp 空間 (M. Christ, Rev. Mat. Iberoamericana, vol. 3 (1987), 25-31 参照) におけるベクトル値弱評価を示すこと，及び 3 次元以上のユークリッド空間において(予想されている) Lp ノルム評価に対する研究の手がかりを見つけること．(さらに，これらの問題を一般的な qasiradial Bochner-Riesz 平均についても研究したい.)
前者は非荷重空間上では M. Christ, A. Seeger, C. Sogge 等により研究されているが，完全な形でのベクトル値弱評価でさえまだ一部しかできていない．また荷重空間での研究はまだ始まっていない．そこで適当な重み関数を考えて（完全な形で）ベクトル値弱評価を(まず, スカラー値関数に対して弱評価が示されている Lp 空間上で)示したい．これにより間隙概収束等にも応用がなされる．また，この解決の後は発散性に関する問題を取り扱う．
筆者は最近，正の斉次関数 H から定義された一般の Bochner-Riesz 平均(qasiradial Bochner-Riesz 平均)の最大関数に関する研究を行い，斉次関数 H に付随する超曲面 (cosphere) の Gauss 曲率が零になることを許す場合に Carbery-Rubio de Francia-Vega の結果を一般化した (これは p≧2 の場合で，実際にはより一般的な結果を示した). クリティカルオーダーのこの種の Bochner-Riesz 平均に対して M. Christ and C. Sogge により弱 (1,1) 有界性が示されている．その証明はある Tauberian argument を用いるものであり，ある種のコンパクト多様体上の楕円型擬微分作用素の固有関数展開の場合に適用できるものである．しかし，Tauberian argument 等を用いることもあり，証明の本質が見えにくい部分がある．この M. Christ and C. Sogge の結果に対してより直接的な証明を与えたい．これも前者に含まれる問題のひとつとしたい．これにより, 通常の Bochner-Riesz 平均に対する種々の結果が qasiradial Bochner-Riesz 平均に拡張されることを期待したい.
後者については，2 次元の場合は Carleson and Solin の論文：
Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc, Studia Math. 44 (1972), 287—299
で解決されている．しかし 3 次元以上の場合は，最近では J. Bourgain, T. Wolff, T. Tao 等による研究があるが，まだ完全には解決していない．掛谷の問題，Hausdorff 次元の問題等にも関係し，難しい問題であるがこの解決は調和解析学にとって重要な課題である．C.Sogge 等により，球面平均作用素が Bochner-Riesz 平均のある種の共役作用素として機能することが知られるようになり，この方面の研究は，Fourier 変換の制限定理等を通して偏微分方程式論への応用へとも発展している．このことはこの種の研究の重要性を再認識させた．前者の研究等を通してこの問題への手がかりを得たい．

(4) 滑らかさの正則性のない非斉次核から定義される特異積分作用素の 弱 (1,1) 有界性及びこのような特異積分核から定義される F. Ricci-E. M. Sein 型の振動特異積分作用素に対する弱 (1,1) 有界性を示すこと．さらに，ある種の多様体上に沿った特異性を持

つ特異積分作用素の研究に発展させたい．
M. Christ, J. L. Rubio de Francia, S. Hofmann 等の研究により，Hormander 条件を満足しない核を持つ積分作用素に対する弱有界性が示されるようになった．特に，A. Seeger は論文:
Singular integral operators with rough convolution kernels, jour J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), 95-105
において斉次型の特異積分核に対してサイズに関するある弱い条件（球面上の Zygmund クラス Llog L に属すること）を仮定するだけで，任意の次元で，この核から定義される特異積分作用素の弱 (1,1) 有界性を示すことに成功した (筆者は D. Fan 氏との共同研究で Marcinkiewicz 積分に対してこれに対応する結果を示している). A. Seeger の証明は Fourier 変換に依存する部分があるが，T. Tao (1999) は Fourier 変換に依存しない証明を与えている．我々はこの A. Seeger の結果を非斉次積分核の場合に拡張したい．さらに，このような特異積分核から定義される（F. Ricci-E. M. Stein 型の）振動特異積分作用素を考えてその弱 (1,1) 有界性を示したい．(この種の振動特異積分の研究の背景のひとつには，べき零リー群上での調和解析がある.)

３．研究の方法

目的(1), (4) についてのみ述べる．

目的 (1) について：1 変数フーリエ級数の場合を再考察することから始める．Hardy 空間 H^1 の関数に対しては間隙概収束が知られているが，可積分関数の場合との違いを詳しく調べる．1 変数の特殊性がどこにあるのか調べ，多変数への拡張を試みる．このような考察により，証明を抽象化することにより Bochner-Riesz 平均の場合の解決を試みる．Bochner-Riesz 平均の発散性に関して筆者は論文：
Divergence of the Bochner-Riesz means in the weighted Hardy spaces, Studia Math. 118(1996),261—275 において本研究目的に関連した研究を行っており，これも参考にして研究を進める．また，本研究目的は整数論にも密接に関係していると思われる．従って，本研究目的解決には整数論に関係した議論を深める必要性もでてくる可能性がある．たとえば Kronecker の定理，そしてそれに関連したいくつかの定理の再構成等も必要になる可能性もある．また，J. P. Kahane, R. Salem のいくつかの仕事との関連性も考察する．

目的 (4) について：弱有界性に関しては，A. Seeger (1996) と T. Tao (1999) の方法を見直すことから始める．特に，２次元の場合を良く調べてみる．F. Ricci-E.M. Stein 型の振動特異積分の弱有界性に対しては，A. Seeger, T. Tao の方法と筆者の荷重空間の場合に利用された精密化された平方積分評価，多項式に関する幾何学的な補題等を総合的に用いて解決を試みる．Lp 有界性 (1<p<∞) の場合は積分核が斉次で，球面上で Lq 条件 (q>1) を満たす場合に振動特異積分の Lp 有界性 (1<p<∞) が示されている．しかし，弱 (1,1) 有界性に関しては，振動特異積分作用素の場合は特異積分作用素と違い，この場合にも有界性が示されていないので，まずこの場合から取り組む．やはり，2 次元の場合から調べる．

４．研究成果

滑らかさの正則性を持たない積分核から定義される finite type の多様体に沿った Calderon-Zygmund 型の特異積分に対してある種の積分核の大きさに関する条件のもとに、 Lebesgue 空間 Lp での精密なノルム評価が得られた。積分核の Lq 可積分性で q が１に近づく時の特異積分作用素の精密な Lp 評価を証明することにより、補外法 (extrapolation) が適用できることになる。これにより、積分核の最小の大きさを仮定するだけで、特異積分作用素の Lp 有界性が証明された。この結果は A. Al-Salman and Y. Pan が論文 Singular integrals with rough kernels in $L¥log L(S^{n-1})$ において少し違った方法で示している。我々の方法は積分核の大きさに対応した予想される最良の Lp ノルム評価を証明することにより、補外法の応用を可能とするものであり、新しい証明方法である．（論文：Estimates for singular integrals associated with manifolds of finite type and extrapolation）．

また，Littlewood-Paley 関数に対しても類似の結果が証明された(論文：Estimates for Littlewood-Paley functions and extrapolation). 証明方法は基本的には、J.Duoandikoetxea and J.L. Rubio de Francia(Maximal and singular integral operators via Fourier transform estimates) の方法によるが、ポイントは積分核の Lq 可積分性に対応した Littlewood-Paley 分解を用いることである。この方法は他のいくつかの種類の特異積分作用素にも適用できることがわかった．

滑らかさの正則性のない斉次核から定義される nonisotropic dilation に適合した Calderon-Zygmund 型の parabolic 特異積分作用素の 弱 (1,1)有界性が，2 次元 Euclid 空間の場合に示された．nonisotropic dilation が対角行列で定義できる場合はすでに T. Tao により，一般の homogeneous group 上の特異積分の場合に，すべての次元

に対してこの事実は示されている．しかし，nonisotropic dilation に対する行列がが対角化できない場合は T.Tao の方法を応用しようとすると，その行列の 実 Jordan 標準形の形により評価方法が異なり，困難を生ずる．これを克服し，2 次元の場合にはすべての nonisotropic dilation に適合した Calderon-Zygmund 型 parabolic 特異積分作用素に対して 弱 (1,1)有界性を証明することができた.

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

(1)（査読あり） S. Sato, Estimates for singular integrals and extrapolation, Studia Math. 192 (2009), 219-233.

(2) （査読あり） D. Fan, S. Sato,
A note on singular integrals associated with a variable surface of revolution,
Math. Inequal. Appl. 12(2009), 441-454.

(3) （査読あり）S. Sato,
Estimates for singular integrals along surfaces of revolution,
J. Aust. Math. Soc. 印刷中

(4) （査読あり）S. Sato,
Estimates for Littlewood-Paley functions and extrapolation,
Integr. equ. oper. theory 62(2008), 429-440.

(5) （査読あり）S.Sato,
Non-regular pseudo-differential operators on the weightedTriebel-Lizorkin spaces, Tohoku Math. J. 59 (2007), 323--339.

(6)（査読あり）S. Sato, Weighted estimates for maximal functions associated with Fourier multipliers,
Studia Sci. Math. Hungarica 44 (3) (2007), 317-330.

〔学会発表〕（計 2 件）

(1) Shuichi Sato,
On certain estimates of singular integrals useful for extrapolation,
RIMS 研究集会「調和解析と非線形偏微分方程式」，
平成 20 年 7 月 8 日，京都大学数理解析研究所．

(2) Shuichi Sato,
L^p estimates for singular Radon transforms and extrapolation,
平成１９年 9 月４日，
研究会 「Harmonic Analysis and its Applications at Sapporo 2007 」，
北海道大学．

６．研究組織
(1)研究代表者

佐藤 秀一 （SATO SHUICHI ）
金沢大学・学校教育系・准教授
研究者番号：20162430