

# Inflation and baryon number asymmetry in an extended radiative seesaw model

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/45393">http://hdl.handle.net/2297/45393</a>

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



# 学位論文

## 拡張輻射ニュートリノ質量生成模型における インフレーションと宇宙のバリオン数生成

金沢大学大学院自然科学研究科  
数物科学専攻

学籍番号： 1323102005

氏名： 柏瀬 翔一

主任指導教員名：末松 大二郎 教授





## 概要

素粒子標準模型は TeV スケールまでの高エネルギー実験の結果をほとんど正しく説明することができる。しかしその一方で、ニュートリノの質量, 暗黒物質の存在, 宇宙のバリオン数非対称性など標準模型では説明できない観測・実験事実が明らかになっている。さらに近年の CMB の観測結果はインフレーションと呼ばれる極初期宇宙における空間の急膨張の存在を支持している。このような問題は標準模型の拡張による解決が要求されている。

ニュートリノ質量と暗黒物質の存在を説明する拡張模型の一つとして Ma 模型が知られている。この模型の枠組みにおける宇宙のバリオン数非対称性は右巻きニュートリノの崩壊による熱的レプトン数生成によって実現できる。本研究ではこの模型を拡張し、インフレーションを説明する模型を構築した。この拡張模型では、宇宙の再加熱期にインフラトンの崩壊によってレプトン数を生成する非熱的レプトン数生成のシナリオについても考えることができる。このとき重要なパラメーターはニュートリノ振動実験や暗黒物質探査実験によって制限されるため、これらの実験・観測結果による制限と生成されるバリオン数との整合性について評価した。

## 表記法

本論文では自然単位系

$$c = \hbar = k_B \equiv 1$$

を用いている. また, 計量は  $(+, -, -, -)$  である. ローレンツの添え字について, ギリシア文字の場合  $0, 1, 2, 3$  をとり, ラテン文字は  $1, 2, 3$  をとるものとする. また, 四次元の共変微分を ; または  $\nabla$  で表わす.

# 目次

第 1 章	導入	1
第 2 章	素粒子標準模型と宇宙論	3
2.1	素粒子標準模型	3
2.1.1	ヒッグス機構	4
2.1.2	フェルミオンの質量	6
2.1.3	カビボ・小林・益川行列	7
2.2	標準宇宙論	8
2.2.1	FRW 計量とフリードマン方程式	8
2.2.2	膨張宇宙における熱力学	10
2.2.3	宇宙の熱史	14
2.2.4	ビッグバン元素合成	17
2.2.5	標準宇宙論における問題	22
第 3 章	素粒子論と宇宙論の現状	25
3.1	ニュートリノ振動とその質量	25
3.1.1	ニュートリノ振動	25
3.1.2	ニュートリノ質量生成模型	28
3.1.3	ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊	30
3.2	暗黒物質	32
3.2.1	暗黒物質の存在証拠と残存量	32
3.2.2	暗黒物質の候補と探査実験	34
3.2.3	膨張宇宙におけるボルツマン方程式	36
3.2.4	対消滅過程におけるボルツマン方程式とその解	38
3.2.5	共対消滅過程を含むボルツマン方程式	41
3.3	宇宙のバリオン数非対称性	43
3.3.1	サハロフの三条件	43
3.3.2	スファレロン過程	44
3.4	インフレーション宇宙論	47
3.4.1	宇宙のインフレーションと諸問題の解決	47
3.4.2	インフレーションの機構	49

3.4.3	インフラトンによる宇宙の揺らぎ生成 . . . . .	51
3.4.4	宇宙の再加熱 . . . . .	68
<b>第 4 章</b>	<b>輻射ニュートリノ質量生成模型</b>	<b>71</b>
4.1	Ma 模型 . . . . .	71
4.2	スカラー暗黒物質の残存量と制限 . . . . .	73
4.2.1	暗黒物質の質量領域 . . . . .	73
4.2.2	残存量の評価 . . . . .	73
4.2.3	暗黒物質直接探査実験における散乱過程からの制限 . . . . .	75
4.3	輻射ニュートリノ質量生成機構 . . . . .	76
4.3.1	輻射補正によるニュートリノ質量生成 . . . . .	76
4.3.2	レプトンフレーバーを破る過程からの制限 . . . . .	78
4.4	熱的レプトン数生成 . . . . .	79
4.4.1	右巻きニュートリノの崩壊と CP 対称性の破れ . . . . .	79
4.4.2	Ma 模型におけるレプトン数生成量の評価 . . . . .	80
4.4.3	レゾナントレプトジェネシス . . . . .	81
<b>第 5 章</b>	<b>模型の拡張とインフレーションおよび非熱的レプトン数生成</b>	<b>85</b>
5.1	Ma 模型の拡張 . . . . .	85
5.2	ニュートリノ質量生成 . . . . .	86
5.3	重力相互作用項によるインフレーション . . . . .	88
5.4	インフラトンの崩壊による非熱的レプトン数生成 . . . . .	90
5.5	暗黒物質直接探査実験による制限 . . . . .	94
<b>付録 A</b>	<b>摂動アインシュタインテンソルの導出</b>	<b>101</b>
<b>付録 B</b>	<b>崩壊幅と散乱断面積の熱平均</b>	<b>107</b>
<b>付録 C</b>	<b>レプトン数生成量評価のための崩壊および散乱過程の反応密度</b>	<b>111</b>
C.1	右巻きニュートリノ崩壊によるレプトン数生成シナリオの場合 . . . . .	111
C.2	インフラトン崩壊によるレプトン数生成シナリオの場合 . . . . .	113
<b>付録 D</b>	<b>レプトン数生成のボルツマン方程式の導出</b>	<b>115</b>
D.1	熱的レプトン数生成過程におけるボルツマン方程式 . . . . .	115
D.2	非熱的レプトン数生成過程におけるボルツマン方程式 . . . . .	117
<b>付録 E</b>	<b>実スカラー場と重力との相互作用によるインフレーション</b>	<b>119</b>
E.1	複数の実スカラー場が存在する場合の共形変換について . . . . .	119
E.2	ユニタリティーの破れ . . . . .	122
<b>参考文献</b>		<b>123</b>

# 第 1 章

## 導入

近年のヒッグスの発見 [1, 2] は, 標準模型が電弱スケールまでの物理現象を説明する模型であることを示している. その一方で, いくつかの実験結果によってこの模型の枠組みで説明できない現象が明らかになっている. その主なものとして, ニュートリノ振動 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] や暗黒物質の存在 [11, 12], 宇宙のバリオン数非対称性 [13, 14, 15] が挙げられる.

これらを解決する単純な拡張模型として, 真空期待値を持たないスカラー二重項とゲージ一重項フェルミオンを標準模型に導入した模型が知られている [16]. この新たに導入した粒子が  $Z_2$  対称性の下で奇パリティであるとすると, ニュートリノの質量は, ディラック質量項が禁止されるため, 輻射補正によって生成される. さらに, 最も軽い粒子は標準模型粒子への崩壊が禁止されることから暗黒物質の候補となる. これらの粒子の質量が TeV スケールにあれば, この模型の枠組みで, ニュートリノ振動と暗黒物質の存在を同時に説明することができる. この模型とその拡張については [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32] にて詳細に議論されている. この模型では暗黒物質の候補として, 新しく導入した一重項フェルミオンとスカラー二重項の中性成分が考えられるが, 一重項フェルミオン暗黒物質の場合, レプトンフレーバーを破る過程の観測実験によって厳しく制限されている [19, 20, 33]. 一方, 新たなスカラー二重項の中性成分が暗黒物質の場合, 広いパラメーター領域でこれらの問題の同時説明が可能である [27, 28, 34, 35]. さらにこのとき, 一重項フェルミオンの崩壊によるバリオン数生成が可能であり, 二つの一重項フェルミオンの質量が縮退している場合, 観測で要求されるバリオン数を TeV スケールで実現できる [27, 28].

本研究ではさらに, インフレーションを説明する拡張模型について議論する. 宇宙マイクロ波背景輻射 (CMB) の観測結果は, ビッグバン以前に宇宙が指数関数的な急膨張したことを示唆している [36, 37, 38, 39]. これまでに様々なインフレーション模型が観測によって排除されているが, ヒッグスによるインフレーションの模型はその結果とよく合っている [40, 41]. この模型では, ヒッグスとリッチスカラーが強く結合することで, ヒッグスのポテンシャルが場の値が大きい領域で平坦になり, インフレーションが実現される. ここで扱う拡張模型は, 上で述べた  $Z_2$  奇パリティのスカラー二重項とゲージ一重項フェルミオンに加え, さらに実スカラー場を導入する [42]. この実スカラー場は輻射補正によるニュートリノの質量生成に重要な役割を果たすが, リッチスカラーとの結合を考えることで, ヒッグスによるものと同様の機構によってインフレーションを実現することができる. このような枠組みは  $s$  インフレーションとして知られている [43, 44]. 今の模型の場合, ヒッグスによるインフレーションの場合に生じるユニタリティーの間



題 [45, 46, 47, 48] を回避することができる。さらに、このモデルでは実スカラー場の崩壊による非熱的レプトン数生成シナリオを考えることができる。そこで、宇宙のバリオン数生成量を数値計算で定量的に評価し、実験および観測結果との整合性について調べた。

本論文の構成は次のようになっている。

第2章では、本研究内容を議論するにあたって重要な標準模型と宇宙論な基礎知識について簡潔に説明し、第3章で標準模型と宇宙論における問題点や実験・観測の現状について触れる。第4章では、標準模型に  $Z_2$  奇パリティのスカラー二重項とゲージ重項フェルミオンを導入した拡張模型について議論し、一重項フェルミオンの崩壊によるバリオン数生成量の評価を行う。そして第5章では、さらに実スカラー場を導入した拡張模型を扱う。ニュートリノ振動実験結果を満たすパラメーターを用いて実スカラー場の崩壊によるバリオン数の生成量を定量的に評価し、暗黒物質直接探査実験からの制限との整合性について調べた。

## 第 2 章

# 素粒子標準模型と宇宙論

### 2.1 素粒子標準模型

素粒子標準模型は、素粒子物理学における基本的な 4 つの相互作用 (強い力, 弱い力, 電磁力, 重力) のうち, 重力相互作用を除いた 3 つの相互作用を記述する理論である. この模型は量子色力学とワインバーグ=サラム理論を統合したもので,  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  のゲージ対称性に基づく非可換ゲージ理論である. そのため上に挙げた 3 つの相互作用は, 全てゲージ原理より導かれる普遍的なゲージ力として記述され, 光子 ( $A_\mu^0$ ) と 3 つのウィークボソン ( $Z_\mu^0, W_\mu^\pm$ ), および 8 つのグルーオン ( $G_\mu^a$ ) のゲージ粒子によって媒介される.

標準模型にはさらに物質を構成するフェルミオンがあり, これらは強い相互作用をするクォークと強い相互作用をしないレプトンに分けられる. クォークとレプトンにはそれぞれ 6 つのフレーバーが存在し, 三代を形成する. これらのフェルミオンはカイラルフェルミオンであり, 添

	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	スピン
$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	<b>3</b>	<b>2</b>	1/3	1/2
$u_R = u_R, c_R, t_R$	<b>3</b>	<b>1</b>	4/3	1/2
$d_R = d_R, s_R, b_R$	<b>3</b>	<b>1</b>	-2/3	1/2
$\ell_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	<b>1</b>	<b>2</b>	-1	1/2
$e_R = e_R, \mu_R, \tau_R$	<b>1</b>	<b>2</b>	-2	1/2
$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	<b>1</b>	<b>2</b>	1	0
$G_\mu^a (a = 1 - 8)$	<b>8</b>	<b>1</b>	0	1
$W_\mu^+$	<b>1</b>	<b>3</b>	0	1
$Z_\mu^0$	<b>1</b>	<b>1</b>	0	1
$A_\mu^0$	<b>1</b>	<b>1</b>	0	1

表 2.1 標準模型粒子の量子数

え字の  $L, R$  は各粒子のカイラリティを表す. 標準模型は左右のカイラリティが非対称なカイラル理論になっている. そしてさらに基本粒子としてヒッグスを加えたものが標準模型における素粒子である (表 2.1).

標準模型のラグランジアンはゲージ対称性と繰り込み可能性から以下のように与えられる.

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2}\text{Tr}(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}\text{Tr}(W^{\mu\nu}W_{\mu\nu}) - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = |D_\mu\phi|^2 - m_\phi^2\phi^\dagger\phi - \lambda_1(\phi^\dagger\phi)^2, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = i\bar{q}_L\not{D}q_L + i\bar{u}_R\not{D}u_R + i\bar{d}_R\not{D}d_R + i\bar{\ell}_L\not{D}\ell_L + i\bar{e}_R\not{D}e_R, \quad (2.4)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -(Y_u)_{ij}(\bar{u}_R)_i\tilde{\phi}^\dagger(q_L)_j - (Y_d)_{ij}(\bar{d}_R)_i\tilde{\phi}^\dagger(q_L)_j - (Y_e)_{ij}(\bar{e}_R)_i\phi^\dagger(\ell_L)_j + \text{h.c.} \quad (2.5)$$

ここで, 添え字  $i, j$  はフェルミオンの世代を表している.  $D_\mu$  は共変微分:  $D_\mu \equiv \partial_\mu - ig_s G_\mu^a \lambda^a / 2 - ig_2 A_\mu^a \tau^a / 2 - ig_Y B_\mu Y / 2$  であり,  $A_\mu^a$  は  $SU(2)_L$  のゲージボソン,  $B_\mu$  は  $U(1)_Y$  のゲージボソンである. また,  $\lambda^a$  はゲルマン行列,  $\tau^a$  はパウリ行列である.  $G_{\mu\nu}^a, W_{\mu\nu}^a, B_{\mu\nu}$  はそれぞれ  $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$  のゲージ場の強さであり, 例えば,  $W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_2 f_{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  で定義され,  $f_{abc}$  は群の構造定数で実数である.  $\tilde{\phi} \equiv i\tau_2\phi^*$  は  $\phi$  を荷電共役変換したものである.

### 2.1.1 ヒッグス機構

ここでは,  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  で記述される電弱理論に注目する. 弱い相互作用の到達距離は有限であるから, これを媒介するゲージボソンには質量が存在する. しかし, ゲージボソンの質量項を直接導入するとゲージ対称性が破れる. さらに, 繰り込み不可能となるため, 無意味な理論になってしまう. そこで, 自発的対称性の破れによってゲージボソンの質量を導入する. このとき生じる質量ゼロの南部・ゴールドストーンボソンの自由度は重いゲージボソンの縦波成分に吸収される. これをヒッグス機構という.

$m_\phi^2 < 0, \lambda_1 > 0$  のとき, ポテンシャルの最小値は  $|\phi| = \sqrt{|\phi^+|^2 + |\phi^0|^2} = \sqrt{-m_\phi^2/2\lambda_1}$  の位置にずれる. 摂動計算は古典的なポテンシャルの最小値 (真空と呼ぶ) まわりの展開であるから, このポテンシャルが最小となる一点を選び, その周りの量子ゆらぎとして新たな場を定義する. これを

$$\phi' \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi_1(x) + i\xi_2(x) \\ h(x) + i\xi_3(x) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

とする. 真空は無限に縮退しているため, 選び方は任意であるが, 少なくとも現在のエネルギースケールで  $U(1)_{\text{em}}$  対称性が保たれている必要がある. この電荷  $Q$  は中野・西島・ゲルマンの法則

$$Q \equiv I_3 + \frac{Y}{2} \quad (2.7)$$

で与えられる.  $I_3$  はアイソスピンである. したがって,  $Q$  がゼロでない  $\phi^+$  に真空期待値を与えることは許されないため,  $\phi^0$  のみが真空期待値を持つ. すなわち,

$$\langle \phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \phi^0 \rangle \end{pmatrix}, \quad \langle \phi^0 \rangle = \sqrt{-m_\phi^2/2\lambda_1} \quad (2.8)$$

となる.  $\phi'$  は真空まわりの場であるから,  $\phi$  との間に

$$\phi' = \phi - \langle \phi \rangle \quad (2.9)$$

のような関係となっている。したがって、

$$\phi = \begin{pmatrix} \frac{\xi_1(x) + i\xi_2(x)}{\sqrt{2}} \\ \langle \phi^0 \rangle + \frac{h(x) + i\xi_3(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

となる。これはさらに、

$$\phi \simeq e^{i\frac{\xi(x)\cdot\tau}{\langle \phi^0 \rangle}} \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \phi^0 \rangle + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

のように書くことができる。そのため、 $\xi_{1-3}(x)$  は  $SU(2)_L$  のゲージ変換:  $\phi(x) \rightarrow e^{-i\frac{\xi(x)\cdot\tau}{\langle \phi^0 \rangle}} \phi(x)$  によって取り去ることができる。このようなゲージの取り方をユニタリーゲージと呼び、 $\xi_{1-3}(x)$  は物理的に意味のある自由度ではないことがわかる。

新たに定義した  $U(1)_{\text{em}}$  対称な真空において、ヒッグスのポテンシャル項は

$$-m_\phi^2 \phi^\dagger \phi - \lambda_1 (\phi^\dagger \phi)^2 = -2\lambda_1 \langle \phi^0 \rangle^2 h^2 - \sqrt{2}\lambda_1 \langle \phi^0 \rangle h^3 - \frac{\lambda_1}{4} h^4 + \lambda_1 \langle \phi^0 \rangle^4 \quad (2.12)$$

となる。ここで、 $m_h = 2\sqrt{\lambda_1} \langle \phi^0 \rangle$  とすると、右辺の第一項目は  $\frac{1}{2}m_h^2 h^2$  となり、ヒッグスが質量を獲得したことを示している。LHC 実験からその大きさが測定されており、

$$m_h = 125.09 \pm 0.21 \pm 0.11 \text{ GeV} \quad (2.13)$$

であることがわかっている [49]。これは摂動計算を  $\langle \phi^0 \rangle \neq 0$  となる基底状態のまわりで実行したため、ラグランジアン対称性が見かけ上破れたことに起因する。これを自発的対称性の破れという。

このときゲージボソンの質量項はヒッグスの運動項から生じ、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}g_2^2 \langle \phi^0 \rangle^2 (A_\mu^1 A^{1\mu} + A_\mu^2 A^{2\mu}) + \frac{1}{4} \langle \phi^0 \rangle^2 (A_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_Y \\ -g_2 g_Y & g_Y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} (Z_\mu^0, A_\mu^0) \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{0\mu} \\ A^{0\mu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。ここで、質量固有値と質量固有状態を

$$\begin{aligned} M_W &= \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \langle \phi^0 \rangle, \quad M_Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{g_2^2 + g_Y^2} \langle \phi^0 \rangle, \\ W_\mu^\pm &= \frac{A_\mu^1 \mp iA_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad Z_\mu^0 = \cos \theta_W A_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad A_\mu^0 = \sin \theta_W A_\mu^3 + \cos \theta_W B_\mu \end{aligned} \quad (2.15)$$

とした。 $\theta_W$  はワインバーグ角であり、 $\tan \theta_W = g_Y/g_2$  である。ここで、 $W$  ボソンの質量とフェルミ結合定数  $G_F$  との間に、

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8M_W^2} \quad (2.16)$$

なる関係があり、 $\mu^-$  崩壊から  $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  であることがわかっている [49]。したがって、式 (2.15) からヒッグスの真空期待値が求まり、 $\langle \phi^0 \rangle = 174.1 \text{ GeV}$  となる。 $W$  ボソンの質量は Tevatron 実験と LEP 実験、 $Z$  ボソンの質量は LEP 実験により、

$$M_W = 80.385 \pm 0.015 \text{ GeV}, \quad M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV} \quad (2.17)$$

であることがわかっている [49]。

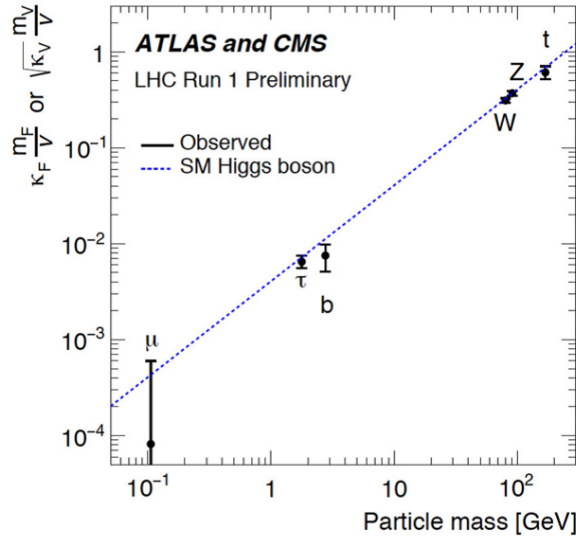


図 2.1 フェルミオンとゲージボソンの質量と結合定数の関係. 青点線が標準模型の予言値で黒線が実験結果である. 実験結果が標準模型の予言とよく合っていることがわかる.\*2

### 2.1.2 フェルミオンの質量

もとのラグランジアンでは, ゲージ対称性により, フェルミオンの質量項は許されない. 標準模型では自発的対称性の破れによってゲージボソンだけでなく, フェルミオンの質量も生み出すことができる. 世代を無視してラグランジアン (2.5) に

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \phi^0 \rangle + \frac{h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & -Y_u \langle \phi^0 \rangle \bar{u}_R u_L - Y_d \langle \phi^0 \rangle \bar{d}_R d_L - Y_e \langle \phi^0 \rangle \bar{e}_R e_L \\ & - \frac{Y_u}{\sqrt{2}} h \bar{u}_R u_L - \frac{Y_d}{\sqrt{2}} h \bar{d}_R d_L - \frac{Y_e}{\sqrt{2}} h \bar{e}_R e_L + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.19)$$

となる. 上式一行目からフェルミオンの質量項が出現していることがわかる. そこで,  $m_f = Y_f \langle \phi^0 \rangle$  のように書くと,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & -m_u \bar{u}_R u_L - m_d \bar{d}_R d_L - m_e \bar{e}_R e_L \\ & - \frac{m_u}{\sqrt{2} \langle \phi^0 \rangle} h \bar{u}_R u_L - \frac{m_d}{\sqrt{2} \langle \phi^0 \rangle} h \bar{d}_R d_L - \frac{m_e}{\sqrt{2} \langle \phi^0 \rangle} h \bar{e}_R e_L + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.20)$$

のように表わすことができる. フェルミオンの質量は理論に現れるパラメーターであり, 理論によって予言されるものではない, そのため, これらは実験によって決められる必要がある. しかし, 式 (2.20) からわかるように, この理論はフェルミオンの湯川結合定数と質量が比例することを予言する. 図 2.1 から, 実験結果が標準模型の予言とよく合っていることがわかる. 標準模型のフェルミオンの質量を表 2.2 にまとめておく.

\*2 図は <http://atlas.ch/news/2015/shedding-new-light-on-the-higgs.html> から抜粋.

1 世代	質量 (MeV)	2 世代	質量 (GeV)	3 世代	質量 (GeV)
$u$	$2.3^{+0.7}_{-0.5}$	$c$	$1.275 \pm 0.025$	$t$	$173.21 \pm 0.51 \pm 0.71$
$d$	$4.8^{+0.5}_{-0.3}$	$s$	$0.095 \pm 0.005$	$b$	$4.18 \pm 0.03 (\overline{MS}), 4.66 \pm 0.03 (1S)$
$e$	0.511	$\mu$	0.106	$\tau$	1.776

表 2.2 標準模型フェルミオンの質量 [49]

### 2.1.3 カビボ・小林・益川行列

前節ではヒッグスの真空期待値によりフェルミオンが質量を獲得することを示した。しかし、世代を考慮すると質量行列に非対角項が存在するため、物理的に意味のある質量ではない。そこで、この質量行列を対角化する必要がある。例として、クォークのアップセクターについて考える。この質量行列は

$$(m_u)_{ij}(\bar{u}_R)_i(u_L)_j + \text{h.c.} = (\bar{u}_R, \bar{c}_R, \bar{t}_R) \begin{pmatrix} (m_u)_{uu} & (m_u)_{uc} & (m_u)_{ut} \\ (m_u)_{cu} & (m_u)_{cc} & (m_u)_{ct} \\ (m_u)_{tu} & (m_u)_{tc} & (m_u)_{tt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} + \text{h.c.} \quad (2.21)$$

のようになっている。この行列は双ユニタリー変換で対角化でき、

$$\begin{aligned} \bar{u}_R m_u u_L + \text{h.c.} &= \bar{u}_R U_R^{u\dagger} U_R^u m_u U_L^{u\dagger} U_L^u u_L + \bar{u}_L U_L^{u\dagger} U_L^u m_u^\dagger U_R^{u\dagger} U_R^u u_R \\ &= \bar{u}_R U_R^{u\dagger} m_u^d U_L^u u_L + \bar{u}_L U_L^{u\dagger} m_u^{d*} U_R^u u_R \\ &= \bar{u}'_R m_u^d u'_L + \bar{u}'_L m_u^d u'_R \\ &= \bar{u}' m_u^d u' \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。  $m_u^d = U_R^u m_u U_L^{u\dagger}$  は対角行列であり、  $u'_{L,R} = U_{L,R}^u u_{L,R}$  はクォークの質量固有状態である。ここで、  $m_u^d$  の複素位相成分は、左巻き粒子については二重項をなしているためアップセクターとダウンセクターの位相を独立に変えることができないことから、右巻き粒子  $u_R$  の波動関数に吸収させた。クォークのダウンセクターと荷電レプトンについても同様に独立なユニタリー行列を用いて対角化することができ、

$$\begin{aligned} m_u^d &= U_R^u m_u U_L^{u\dagger}, & u'_L &= U_L^u u_L, & u'_R &= U_R^u u_R, \\ m_d^d &= U_R^d m_d U_L^{d\dagger}, & d'_L &= U_L^d d_L, & d'_R &= U_R^d d_R, \\ m_e^d &= U_R^e m_e U_L^{e\dagger}, & e'_L &= U_L^e e_L, & e'_R &= U_R^e e_R \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。標準模型のフェルミオンすべてを質量固有状態に書き直すと、ほとんどの相互作用は変化を受けず対角的に保たれるが、唯一クォークの荷電カレント部分に

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin}} \supset -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}_L \gamma^\mu d_L &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_L \gamma^\mu U_L^u U_L^{d\dagger} d'_L \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \bar{u}'_L \gamma^\mu U_{\text{CKM}} d'_L \end{aligned} \quad (2.24)$$

のような世代間の混合を表わす部分が残る。この世代間の混合を表わす行列  $U_{\text{CKM}} = U_L^u U_L^{d\dagger}$  はカビボ・小林・益川 (CKM) 行列と呼ばれる。  $U_{\text{CKM}}$  はユニタリー行列であるから、  $N \times N$  複素

行列に含まれる  $2N^2$  個のパラメーターのうち、 $N^2$  個のパラメーターはユニタリー条件によって関係づいている。さらに、 $2N - 1$  個のパラメーターをクォークの位相として吸収させることができるから、最終的に  $(N - 1)^2$  個の自由度が残ることになる。このうち  $N(N - 1)/2$  個が回転角の自由度であるから、複素位相の自由度は最終的に  $(N - 1)(N - 2)/2$  となる。したがって、 $3 \times 3$  の CKM 行列には複素数が 1 つ含まれる。

CKM 行列が複素数の場合、荷電カレントは CP 変換で

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset -W_\mu^+ (\bar{u}'_L)_i \gamma^\mu (U_{\text{CKM}})_{ij} (d'_L)_j - W_\mu^- (\bar{d}'_L)_j \gamma^\mu (U_{\text{CKM}})_{ij}^* (u'_L)_i \\ &\xrightarrow{\text{CP}} -W_\mu^- (\bar{d}'_L)_j \gamma^\mu (U_{\text{CKM}})_{ij} (u'_L)_i - W_\mu^+ (\bar{u}'_L)_i \gamma^\mu (U_{\text{CKM}})_{ij}^* (d'_L)_j \end{aligned}$$

のようになるから、CP 対称性が破れる。CP 対称性の破れは 1964 年、中性 K メソンの崩壊で発見された。小林、益川はクォークが 3 世代存在すれば CP 対称性が破れるとして、1973 年、当時見つかっていた  $u$ ,  $d$ ,  $s$  に加えてさらに 3 種類のクォークを予言した [50]。

現在、実験によって CKM 行列の各成分の大きさは以下のようにになっている [49]。

$$U_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} 0.97427 \pm 0.00014 & 0.22536 \pm 0.00061 & 0.00355 \pm 0.00015 \\ 0.22522 \pm 0.00061 & 0.97343 \pm 0.00015 & 0.0414 \pm 0.0012 \\ 0.00886^{+0.00033}_{-0.00032} & 0.0405^{+0.0011}_{-0.0012} & 0.99914 \pm 0.00005 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

レプトンについても荷電カレントが存在するが、標準模型ではニュートリノが質量を持たないため、ニュートリノのゲージ固有状態と質量固有状態を区別することができない。そのため、荷電レプトンを質量対角化する行列  $U^e$  をニュートリノの状態を再定義して取り込むことで、混合が現れない基底を選ぶことができる。しかし、近年のニュートリノ振動実験によりニュートリノに質量があることが明らかになった [3]。このため、レプトンの荷電カレントに混合行列が現れる。このことについては次章の 3.1 節で議論する。

## 2.2 標準宇宙論

### 2.2.1 FRW 計量とフリードマン方程式

我々が観測可能な宇宙の放射や物質の分布はほぼ一様等方であることがわかっている。もちろん、局所的には銀河などの天体が存在しており、完全に一様ではなく、銀河の回転方向は特別な方向となるので等方ではない。しかし、宇宙全体を大きなスケールで見れば特別な場所や方向がないと考えることはいたって自然であると思われる。そこで、宇宙時間が一定で宇宙全体を大域的に一様等方であると仮定し、宇宙を記述する。この仮定を宇宙原理という。

宇宙原理によれば、我々の宇宙の時空構造はフリードマン・ロバートソン・ウォーカー (FRW) 計量

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (2.26)$$

によって表される [51]。 $a(t)$  はスケール因子、 $K$  は曲率である。この時空構造の下、宇宙の時間発展はアインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.27)$$

によって記述される. ここで,  $R_{\mu\nu}$  はリッチテンソル,  $R$  はリッチスカラーであり,  $G$  は重力定数である.  $\Lambda$  は宇宙項と呼ばれる.  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである. FRW 計量 (2.26) を用いてアインシュタイン方程式 (2.27) の左辺を計算すると対角成分のみの行列となるため, エネルギー運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P), \quad (2.28)$$

という形しかとり得ないことがわかる. これは完全流体のエネルギー運動量テンソルであり,  $\rho$  はエネルギー密度,  $P$  は圧力である. エネルギー保存則 ( $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ ) の  $\mu = 0$  成分は熱力学第一法則であり,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) \quad (2.29)$$

が導かれる. ここで, エネルギー密度  $\rho$  と圧力  $P$  は状態方程式  $P = \omega\rho$  によって関係づけられるため, 式 (2.29) を解くとエネルギー密度は  $\rho \propto a^{-3(1+\omega)}$  のように時間発展することがわかる. したがって, 膨張宇宙における物質 (非相対論的), 放射 (相対論的) および真空エネルギーそれぞれのエネルギー密度のふるまいを求めることができ,

$$\begin{aligned} \rho &\propto a^{-3} && (\text{物質: } \omega = 0), \\ \rho &\propto a^{-4} && (\text{放射: } \omega = \frac{1}{3}), \\ \rho &\propto \text{const.} && (\text{真空エネルギー: } \omega = -1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

を得る. スケール因子の時間依存性はフリードマン方程式 (2.32) を解くことで得ることができ, 宇宙項と曲率項を無視すると,  $a \propto t^{2/3(1+\omega)}$  となる. エネルギー密度と同様, スケール因子の時間依存性は

$$\begin{aligned} a &\propto t^{2/3} && (\text{物質: } \omega = 0), \\ a &\propto t^{1/2} && (\text{放射: } \omega = \frac{1}{3}), \\ a &\propto e^{Ht} && (\text{真空エネルギー: } \omega = -1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

となることがわかる.

エネルギー運動量テンソル (2.28) と FRW 計量 (2.26) を用いてアインシュタイン方程式を変形すると, (0, 0) および ( $i, i$ ) 成分はそれぞれ

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.33)$$

となる. 式 (2.32) はフリードマン方程式と呼ばれる.  $H$  はハッブルパラメーター:  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$  である.

フリードマン方程式 (2.32) の両辺を  $H^2$  で割ると

$$\frac{K}{a^2 H^2} = \frac{1}{\frac{3H^2}{8\pi G}}\rho + \frac{\Lambda}{3H^2} - 1 \quad (2.34)$$

となる. ここで, 密度パラメーター  $\Omega$  を

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad \rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.35)$$

と定義する.  $\rho_c$  は宇宙項がなく ( $\Lambda = 0$ ), 宇宙が平坦 ( $K = 0$ ) であるときのエネルギー密度で臨界密度と呼ばれる. さらに, 真空のエネルギー密度パラメーター  $\Omega_\Lambda$  と曲率パラメーター  $\Omega_K$  を

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{a^2 H^2} \quad (2.36)$$



と定義すると、式 (2.34) は

$$1 = \Omega + \Omega_{\Lambda} + \Omega_K \quad (2.37)$$

と表わせる。宇宙の構成エネルギーは物質および放射なので、各密度パラメーターをそれぞれ  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$  とすると、 $\Omega = \Omega_m + \Omega_r$  となる。宇宙マイクロ背景放射 (CMB) や大規模構造の観測などによって、これらの現在の値は

$$\Omega_K = 0.0008^{+0.0040}_{-0.0039}, \quad \Omega_m = 0.3089 \pm 0.0062, \quad \Omega_{\Lambda} = 0.6911 \pm 0.0062 \quad (68\% \text{CL}) \quad (2.38)$$

となることがわかっている [38].

## 2.2.2 膨張宇宙における熱力学

平衡系における粒子の数密度  $n$ , エネルギー密度  $\rho$  および圧力  $P$  は、粒子の内部自由度を  $g$  とすると、運動量空間の分布関数  $f(\mathbf{p})$  を用いて

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(\mathbf{p}), \quad (2.39)$$

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}), \quad (2.40)$$

$$P = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{|\mathbf{p}|^2}{3E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}) \quad (2.41)$$

で与えられる。質量  $m$  の粒子のエネルギーを  $E$  とすると、 $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$  である。運動学的平衡\*3における粒子の分布関数  $f(\mathbf{p})$  は

$$f(\mathbf{p}) = \left[ \exp\left(\frac{E - \mu}{T}\right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (2.42)$$

であり、 $\pm$  はそれぞれフェルミ統計とボース統計に従う場合である。粒子の化学ポテンシャル  $\mu$  は相互作用する他種粒子の化学ポテンシャルに関係する。たとえば、粒子  $i$  が他種の粒子  $j, k, l$  と相互作用  $i + j \leftrightarrow k + l$  をする場合、これが化学平衡であるとき常に

$$\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_l \quad (2.43)$$

が成り立つ。

平衡系における粒子数数密度  $n$ , エネルギー密度  $\rho$  および圧力  $P$  の振る舞いについてまとめて

\*3 粒子種を変えない反応が頻繁に起こっている状態。

おく. まず, 相対論的極限 ( $T \gg m, T \gg \mu$ ) の場合について考える.

$$n \simeq \begin{cases} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 & (\text{ボソン}) \\ \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} g T^3 & (\text{フェルミオン}) \end{cases},$$

$$\rho \simeq \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & (\text{ボソン}) \\ \frac{7\pi^2}{8 \cdot 30} g T^4 & (\text{フェルミオン}) \end{cases}, \quad (2.44)$$

$$P \simeq \frac{\rho}{3}.$$

ここで,  $\zeta(3) = 1.20206\dots$  はリーマンゼータ関数である. 一方, 非相対論的極限 ( $T \ll m$ ) の場合,

$$n \simeq g \left( \frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m-\mu}{T}\right),$$

$$\rho \simeq mn,$$

$$P \simeq nT \ll \rho \quad (2.45)$$

となる.

式 (2.45) から, 非相対論的な物質の寄与はボルツマン因子によって抑制される. そのため, 熱平衡状態にある全粒子のエネルギー密度は放射のエネルギー密度の寄与が支配的となる. したがって, 全エネルギー密度は光子の温度を  $T$  とすると, 式 (2.44) より,

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (2.46)$$

と表すことができる.  $g_*$  は相対論的自由度と呼ばれ, 各粒子の自由度  $g_i$ , 温度を  $T_i$  として,

$$g_* \equiv \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^4 \quad (2.47)$$

で定義される. 標準模型粒子すべてが相対論的な場合, 相対自由度は表 2.1 から反粒子を含めて 106.75 となる. 質量  $m_i$  の粒子の寄与は  $m_i \gg T$  で無視できるため, 膨張宇宙において  $g_*$  には図 2.2 のように温度依存性がある.

観測結果 (2.38) から式 (2.30), (2.36) を用いて放射優勢期まで時間を遡ると, フリードマン方程式 (2.32) の宇宙項と曲率項の寄与は放射のエネルギー密度に比べて小さく, 無視することができる. この時期の温度  $T$  におけるハッブルパラメーターは式 (2.46) を用いて,

$$H \simeq 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{\text{pl}}} \quad (2.48)$$

となることがわかる. 式 (2.31) より放射優勢期では  $H = 1/2t$  だから, 時刻  $t$  と温度の関係

$$t = 0.301 g_*^{-1/2} \frac{m_{\text{pl}}}{T^2} \quad (2.49)$$

を得る.

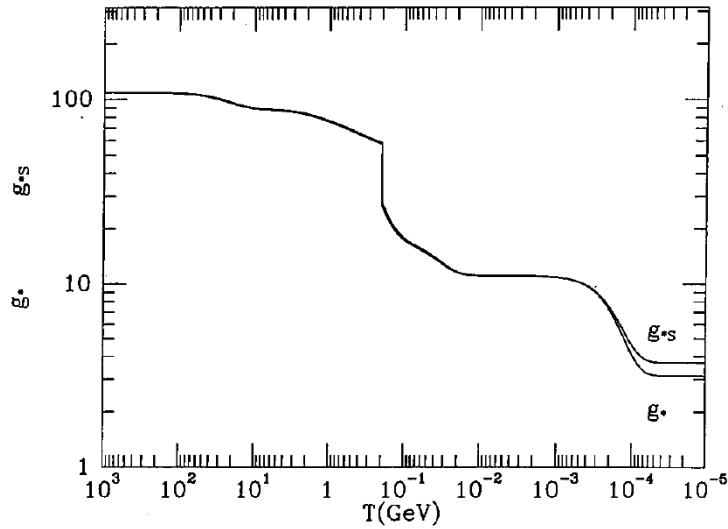


図 2.2 標準模型におけるエネルギー密度およびエントロピー密度に対する相対自由度  $g^*$ ,  $g_{*S}$  の温度依存性 [51]. 2.2.3 節で述べるように, 温度が低いところで  $g^*$  と  $g_{*S}$  の値は異なる.

熱平衡状態が維持されているような場合, エントロピーは保存するため, 重要な物理量となる. 共動体積  $V$  (物理的には  $a^3$ ) において, 熱力学第二法則はエントロピーを  $S$  とすると,

$$TdS = d\{\rho + P\} - VdP \quad (2.50)$$

となる. また,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{\rho + P}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} \quad (2.51)$$

であるから, 積分可能条件  $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$  は

$$dP = \frac{\rho + P}{T} dT, \quad (2.52)$$

のように書ける. したがって, 式 (2.50) にこの結果を代入すると,

$$dS = d\left\{\frac{(\rho + P)V}{T} + \text{const.}\right\}. \quad (2.53)$$

つまり, 定数次第で  $S = \frac{\rho + P}{T}V$  となる. さらに, 熱力学第一法則  $d\{\rho + P\} = VdP$  に式 (2.51) を代入すると

$$dS = d\left\{\frac{(\rho + P)V}{T}\right\} = 0 \quad (2.54)$$

となる. 以上より, 熱平衡状態の下ではエントロピーが保存することがわかる. ここで, 化学ポテンシャルは  $|\mu| \ll T$  として無視した. 単位体積当たりのエントロピー  $s$  はエントロピー密度と呼ばれ,

$$s \equiv \frac{S}{V} = \frac{(\rho + P)}{T} \quad (2.55)$$

と定義される. エネルギー密度の議論と同様, 非相対論的粒子の場合, 式 (2.45) よりエネルギー密度および圧力はボルツマン因子によって抑制されるため, エントロピー密度への寄与は相対論

的粒子のみに近似的に扱うことができる。したがって、式 (2.44) を用いると、エントロピー密度は光子温度を  $T$  として、

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3 \quad (2.56)$$

となる。ここで、 $g_{*S}$  はエントロピーについての有効自由度であり、

$$g_{*S} \equiv \sum_{i=\text{bosons}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermions}} g_i \left( \frac{T_i}{T} \right)^3 \quad (2.57)$$

で定義される。宇宙の歴史の長い間、すべての粒子は熱平衡状態にあるため、図 2.2 のように  $g_{*S}$  は  $g_*$  に一致する。ここで、光子は常に相対論的であるから、エントロピー密度 (2.56) を光子の数密度  $n_\gamma$  で表わすと、式 (2.44) より、

$$s = 1.80 g_{*S} n_\gamma \quad (2.58)$$

となる。今日のエントロピー密度  $s_0$  は、相対論的粒子は光子とニュートリノであり、後で求めるように  $g_{*S} = 3.91$  となるから、

$$s_0 = 7.04 n_\gamma \quad (2.59)$$

である。

熱平衡状態にある粒子のエントロピー密度は、エントロピー保存より、 $s \propto a^{-3}$  となる。一方、共動体積中の粒子数は  $na^3$  であるから、これを  $s$  を用いて、

$$Y \equiv \frac{n}{s} \quad (2.60)$$

のように定義する。共動体積中の粒子数が変化しない限りこの量は一定となるため、便利である。

また、エントロピー  $S \propto g_{*S} T^3 a^3$  が一定であることは、宇宙の温度が  $T \propto g_{*S}^{-1/3} a^{-1}$  となることを意味している。 $g_{*S}$  が一定のとき、 $T \propto a^{-1}$  となるが、熱浴中のある粒子が非相対論的となり、 $g_{*S}$  への寄与がなくなると、エントロピーが熱浴中の相対論的粒子に移り、温度  $T$  の減少が緩やかになる。

次に熱浴から脱結合した粒子の温度を考える。

時刻  $t_D$ 、温度  $T_D$  で熱浴から脱結合した相対論的粒子の場合、脱結合時の分布関数は

$$f(E_D, t_D) = \left[ \exp \left( \frac{E_D}{T_D} \right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (2.61)$$

となる。ここで、この時期のエネルギーを  $E_D$  とした。粒子の脱結合後のエネルギーは、赤方偏移により  $E(t) = E_D a(t_D)/a(t)$  となる。数密度は  $n \propto a^{-3}$  であるから、分布関数  $f(\mathbf{p}) = dn/d^3p$  は時間に依らないことがわかる。したがって、

$$f(E, t) = f(E_D, t_D) = \left[ \exp \left( \frac{E a(t)}{T_D a(t_D)} \right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (2.62)$$

であるから、熱浴から脱結合した相対論的粒子の温度は

$$T(t) = T_D \frac{a(t_D)}{a(t)} \quad (2.63)$$

となり、スケール因子に反比例することがわかる。

一方、非相対論的粒子の場合、 $|\mathbf{p}(t)| = |\mathbf{p}(t_D)|a(t_D)/a(t)$  より、運動エネルギーは  $a^{-2}$  に比例して減少する。したがって、脱結合時の化学ポテンシャルを  $\mu_D$  とすると、

$$T = T_D \left( \frac{a(t_D)}{a(t)} \right)^2, \quad \mu(t) = m + (\mu_D - m) \left( \frac{a(t_D)}{a(t)} \right)^2 \quad (2.64)$$

のように変化して分布関数の形が保たれる。

以上の議論は  $T \sim m$  のような相対論的、もしくは非相対論的取り扱いが成り立たない場合は適用できないことに注意が必要である。

### 2.2.3 宇宙の熱史

熱平衡状態が実現されるためには、粒子間の反応が十分長い時間に起こる必要がある。したがって、反応に要する時間が宇宙年齢よりも十分短いとき、熱平衡状態が実現される。反応率を  $\Gamma$  とすると、一回の反応が起こる時間スケールは  $\Gamma^{-1}$  である。熱平衡状態は、これが宇宙年齢  $t \sim H^{-1}$  より十分小さいとき実現されるので、このとき反応率とハッブルパラメーターとの間に

$$\Gamma \gg H \quad (2.65)$$

なる関係が成り立つ。 $\Gamma \gtrsim H$  は粒子分布が熱平衡状態かどうか判断する基準となる。

以下では宇宙膨張の過程でその構成要素の振る舞いについて簡潔に述べる。

#### 電弱対称性の破れ

宇宙誕生直後  $T \gtrsim 10^{19}$  GeV では重力の寄与が大きくなるため、この領域を扱うには量子重力理論が必要となる。弦理論はその候補として研究されている。

その後、相対論的な標準模型粒子がプラズマ状態で存在するようになる。そして、宇宙の温度が  $T \sim 100$  GeV になると 2.1.1 節で述べたようにヒッグス機構によって、標準模型のフェルミオンやゲージボソンが質量を獲得する。

#### クォーク・ハドロン相転移

宇宙初期の高温・高密度状態においてはクォークは単体で存在していた(クォーク・グルーオンプラズマ)と考えられている。宇宙の温度が  $T \sim 100$  MeV まで下がると、強い相互作用によってクォークはハドロンを形成するようになる。これをクォーク・ハドロン相転移という。このとき生成されたハドロンは非相対論的粒子として振る舞うため、クォークの相対自由度に対する寄与が非常に小さくなる。図 2.2 において、100 MeV 付近で、 $g_*(g_{*S})$  が急激に減少しているのはこのためである。

#### ニュートリノ脱結合

宇宙初期ではニュートリノは弱い相互作用の中性カレントを介した相互作用  $\bar{\nu}\nu \leftrightarrow e^+e^-$ ,  $\nu e \leftrightarrow \bar{\nu}e$  等を通じて熱平衡状態となっているため、その散乱断面積はフェルミ結合定数  $G_F$  を用いて  $\sigma \sim G_F^2 T^2$  と見積もられる。質量ゼロの数密度は式 (2.44) から

$n \propto T^3$  であるから、ニュートリノの反応率は

$$\Gamma = n\sigma|v| \simeq G_F^2 T^5. \quad (2.66)$$

一方、宇宙の膨張率は式 (2.48) に  $g_* = 10.75$  を代入して

$$\frac{\Gamma}{H} = \left( \frac{T}{1 \text{ MeV}} \right)^3 \quad (2.67)$$

となることから、ニュートリノは約 1MeV の温度で脱結合し、その後は分布関数 (2.62) に従って発展する。そして、式 (2.63) から脱結合後のニュートリノの温度  $T_\nu$  は  $a^{-1}$  に比例する。

ニュートリノ脱結合後、すぐに宇宙の温度が電子の質量 (0.5 MeV) より小さくなり、電子と陽電子の対消滅が起こる。この時、電子と陽電子のエントロピーが光子に移るが、既に脱結合しているニュートリノにはエントロピー移転がないため、ニュートリノの見かけの温度と光子の温度にずれが生じる。ニュートリノ脱結合時の温度を  $T_D$ 、スケール因子を  $a_D$  とおき、対消滅前後の温度をそれぞれ  $T_b$ ,  $T_a$  とおくと、式 (2.63) より  $T_{\nu b} = T_D a_D / a$  が得られる。また、エントロピー保存則から光子の温度も  $T_{\gamma b} = T_D a_D / a$  であるため、 $T_{\nu b} = T_{\gamma b}$  が成り立つ。電子と陽電子の対消滅前の有効自由度は光子 ( $g = 2$ ) と電子・陽電子 ( $g = 4$ ) だから  $g_{*S}^b = 11/2$  である。一方、対消滅後は光子のみ熱平衡状態であるから  $g_{*S}^a = 2$  となる。したがって、電子-陽電子対消滅前後でエントロピーが保存するから、

$$\frac{11}{2} T_{\gamma b}^3 = 2 T_{\gamma a}^3 \quad (2.68)$$

となる。このとき、ニュートリノにエントロピー移転はないから  $T_{\nu b} = T_{\nu a}$  が成り立つ。よって、対消滅後のニュートリノ温度は

$$T_{\nu a} = \left( \frac{4}{11} \right)^{1/3} T_{\gamma a} \quad (2.69)$$

となることがわかる。現在、光子の宇宙背景放射の温度が  $T = 2.75 \text{ K}$  であることから、ニュートリノの背景放射の温度は  $T_\nu = 1.95 \text{ K}$  となっているはずである。このことは現在の  $g_*$ ,  $g_{*S}$  の値が異なることを意味し、式 (2.47), (2.57) から、

$$\begin{aligned} g_* &= 2 + \frac{7}{8} \times 6 \times \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} = 3.36, \\ g_{*S} &= 2 + \frac{7}{8} \times 6 \times \frac{4}{11} = 3.91 \end{aligned} \quad (2.70)$$

が得られる。式 (2.59) ではこの結果を用いた。図 2.2 において温度が低いところで  $g_*$  と  $g_{*S}$  の値がずれるのはこのためである。

### 軽元素合成

$T \sim 0.1 \text{ MeV}$  程度まで温度が下がると、中性子と陽子から重水素が生成されるようになり、それからさらにヘリウム 4 やリチウム 7 などの原子核が形成される。標準宇宙論は現在の宇宙に存在するヘリウム 4, 重水素, リチウム 7 の存在比を説明することができる。この時期の詳細については 2.2.4 節で述べる。

### 再結合と宇宙の晴れ上がり

$T \sim 1$  eV では陽子と電子はプラズマ状態で存在する。このとき、光子は自由電子とのトムソン散乱  $e\gamma \leftrightarrow e\gamma$  を繰り返し、ほとんど直進できない。しかし、 $p + e \leftrightarrow H + \gamma$  によって水素原子が生成されるようになる (再結合<sup>\*4</sup>) と、自由電子数が減少するため、光子は散乱されず直進できるようになる。これを宇宙の晴れ上がり (光子の脱結合) と呼ぶ。現在、CMB として観測しているのはこのころの光である。

まず、自由電子の数を評価する。水素 (H)、陽子 (p)、電子の数密度は、温度 ( $T < m_i$ ) の熱平衡状態では式 (2.45) より、

$$n_i = g_i \left( \frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\mu_i - m_i}{T} \right) \quad (2.71)$$

となる。ここで、 $i = H, p, e$  である。 $p + e \leftrightarrow H + \gamma$  の化学平衡状態のもとでは  $\mu_p + \mu_e = \mu_H$  となるから、水素の数密度は  $n_p, n_e$  を用いて

$$n_H = \frac{g_H}{g_p g_e} n_p n_e \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{-3/2} \exp(B/T) \quad (2.72)$$

のように書くことができる。 $B$  は水素のイオン化エネルギーで  $B = m_p + m_e - m_H = 13.6$  eV である。さらに、宇宙は中性 ( $n_p = n_e$ ) であることと、バリオン数の保存 ( $n_B = n_p + n_H$ ) を考えると、イオン化率  $X_p \equiv n_p/n_B$  を用いて

$$\frac{1 - X_p^{\text{eq}}}{(X_p^{\text{eq}})^2} = \frac{4\sqrt{2}\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \eta_B \left( \frac{T}{m_e} \right)^{3/2} \exp(B/T) \quad (2.73)$$

と書ける。 $\eta_B$  は光子-バリオン比であり、 $\eta_B \equiv n_B/n_\gamma$  で定義される。また、 $g_p = g_e = 2, g_H = 4$  を用いた。式 (2.73) は熱平衡状態でのイオン化率を与え、サハの式という。

電子の 90% が陽子と結合した段階を再結合と定義すると、このときの赤方偏移は  $1 + z_{\text{rec}} \simeq 1300$  であるから、宇宙の温度は

$$T_{\text{rec}} = T_0(1 + z_{\text{rec}}) = 0.308 \text{ eV} \quad (2.74)$$

となり [51]、水素原子のイオン化エネルギー  $B = 13.6$  eV よりも小さくなる。

$\Gamma_\gamma \simeq H$  となる時期を晴れ上がりと定義する。トムソン散乱の反応率はその散乱断面積  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}$  cm<sup>2</sup> を用いて、 $\Gamma_\gamma = n_e \sigma_T$  と書ける。ここで、自由電子の数密度は  $n_e = X_p \eta_B = X_p \eta_B n_\gamma$  であるから、現在の光子数密度  $n_\gamma(t_0)$  を用いると、式 (2.44) より、

$$\Gamma_\gamma = n_\gamma(t_0) \eta_B \sigma_T \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 X_p(T) \quad (2.75)$$

となる。一方、宇宙の膨張率は、宇宙の晴れ上がりは物質優勢期であり、暗黒エネルギーを無視すると、 $H \simeq H_0 \sqrt{\Omega_m(t_0)} (T/T_0)^{3/2}$  だから、

$$\frac{\Gamma_\gamma}{H} = \frac{n_\gamma(t_0) \eta_B \sigma_T}{H_0 \sqrt{\Omega_m(t_0)}} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} X_p(T) = 0.068 \frac{h \Omega_B(t_0)}{\sqrt{\Omega_m(t_0)}} \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} X_p(T). \quad (2.76)$$

<sup>\*4</sup> 慣例としてこのように言われるが、陽子と電子が結合したのはこのときが初めてである。

これより晴れ上がりの温度  $T_{\text{dec}}$  は, Planck[38] の観測結果  $\Omega_m(t_0) = 0.3156$ ,  $\Omega_B(t_0)h^2 = 0.02225$ ,  $h = 0.6727$  を用いて数値的に解くと,

$$T_{\text{dec}} \simeq 0.263 \text{ eV} \quad (2.77)$$

となる. これは赤方偏移で  $z_{\text{dec}} = 1120$  程度である. この見積もりは  $H \simeq \Gamma_\gamma$  となるところで反応が熱平衡状態であることを仮定しており, 実際にはすでに平衡状態からのずれは無視できない. このような非熱平衡過程も寄与すると, 水素原子の生成が遅れるため, 晴れ上がりの時期の赤方偏移も  $z_{\text{dec}} = 1090$  程度となる [49].

## 2.2.4 ビッグバン元素合成

前節で述べたように, 標準宇宙論は現在の宇宙に存在するヘリウム4, 重水素, リチウム7の存在比をうまく説明でき, 成功を収めた. ここではその詳細について述べる.

原子番号  $Z$ , 質量数  $A$  の非相対論的原子核の運動学的平衡状態における数密度は式 (2.45) より,

$$n_A = g_A \left( \frac{m_A T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp\left( \frac{\mu_A - m_A}{T} \right) \quad (2.78)$$

と書ける.  $m_A$ ,  $\mu_A$  はそれぞれ原子核の質量と化学ポテンシャルである. さらに,  $Z$  個の陽子と  $A - Z$  個の中性子 ( $n$ ) から, 質量数  $A$  の原子核を生成する反応率が膨張率に比べて十分大きいとき, 化学平衡が実現し,

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n \quad (2.79)$$

が成り立つ. これを用いると数密度は

$$n_A = g_A A^{3/2} 2^{-A} \left( \frac{2\pi}{m_N T} \right)^{3(A-1)/2} n_p^Z n_n^{A-Z} \exp(B_A/T) \quad (2.80)$$

となる. ここで,  $m_N$  は核子の質量であり, 係数部分における  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_A/A$  の質量差を無視してこれらを共通の質量  $m_N$  とした. また,  $B_A$  は核種  $A(Z)$  の結合エネルギーであり,

$$B_A \equiv Zm_p + (A - Z)m_n - m_A \quad (2.81)$$

で定義される.

### 中性子-陽子比

宇宙の温度が  $T \gg 1 \text{ MeV}$  のとき, 中性子と陽子は以下のような弱い相互作用によって平衡状態にある.



したがって, それぞれの粒子の化学ポテンシャルの間に  $\mu_n + \mu_{\nu_e} = \mu_p + \mu_e$  の関係が成り立つ\*5. 今考えている温度では, 電子と陽電子, 電子ニュートリノは相対論的であるから, 粒子数と化学ポ

\*5 反粒子については化学ポテンシャルの符号が粒子のに比べて逆符号となることに注意.



テンシャルとの間に,

$$n_{e^-} - n_{e^+} = \frac{1}{3}\mu_e T^2, \quad (2.83)$$

$$n_{\nu_e} - n_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{3}\mu_{\nu_e} T^2 \quad (2.84)$$

なる関係がある. ここで, 宇宙は電氣的に中性なので,  $n_B = n_{e^-} - n_{e^+}$  が成り立ち,  $\eta_B = n_B/n_\gamma \sim 10^{-10}$  を用いると,  $\mu_e/T \sim 10^{-10}$  となるから, 電子の化学ポテンシャルは無視することができる. ニュートリノの化学ポテンシャルについてはレプトン数の起源の問題に関係するが, 後述するレプトジェネシスのシナリオにおいては,  $n_B \sim n_L$  となるため, 同様の理由で無視できる. これより, 中性子と陽子の存在比は, 式 (2.78) から,

$$\frac{n_n}{n_p} = \exp\left(\frac{-\Delta m}{T}\right) \quad (2.85)$$

となる. ここで,  $\Delta m = m_n - m_p = 1.293 \text{ MeV}$  である. これからわかるように, 中性子は陽子に比べて質量が重い分, 平衡状態における数が陽子より少ない. しかし, 宇宙の温度が小さくなると, (2.82) の反応率が宇宙の膨張率より小さくなり, 平衡状態から離脱して中性子と陽子の存在比が固定される\*6.

反応過程 (2.82) の散乱振幅は  $|\mathcal{M}|^2 \propto G_F^2(1 + 3g_A^2)$  と見積もられる [51].  $g_A$  は核子の軸性ベクトル結合定数であり,  $g_A = 1.26$  である. したがって, 反応率はオーダーとして  $\Gamma \sim G_F^2(1 + 3g_A^2)T^3$  であることがわかる. このとき, 宇宙は放射優勢期であるから, 宇宙の膨張率との比は式 (2.48) より,

$$\frac{\Gamma}{H} \sim \left(\frac{T}{0.8 \text{ MeV}}\right)^3 \quad (2.86)$$

となる. これより, 温度が約 0.8 MeV より高いとき, 反応過程 (2.82) は熱平衡状態であるから, 中性子と陽子の数密度比は式 (2.85) で与えられる. そして,  $T_d \simeq 0.8 \text{ MeV}$  で中性子-陽子比がほぼ固定され, 陽子の数が中性子に比べておよそ 5 倍となる. その後, 中性子はベータ崩壊によって陽子に崩壊するので, 中性子の寿命を  $\tau_n$  とおくと, 時刻  $t$  での中性子数と陽子数はそれぞれ  $n_n = n_n(T_d)e^{-t/\tau_n}$ ,  $n_p = n_p(T_d) + n_n(T_d)(1 - e^{-t/\tau_n})$  となるから, その比は

$$\frac{n_n}{n_p}(t) \simeq \frac{e^{-t/\tau_n}}{6 - e^{-t/\tau_n}} \quad (2.87)$$

となることがわかる.

## 重水素合成

ヘリウム 4 の合成には重水素 (D) を十分に生成する必要がある. 重水素は陽子と中性子から,



のような反応で生成される. この過程が熱平衡状態にあるとき,  $n_D/n_p n_n$  は式 (2.80) より,

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = 6 \left(\frac{\pi}{m_n T}\right)^{3/2} \exp(B_D/T) \quad (2.89)$$

\*6 この間, ベータ崩壊による中性子の現象が考えられるが, その半減期は約 1000 秒で今考えている時間スケールに比べて十分長いため, 無視する.

となる。重水素の結合エネルギーは  $B_D = m_n + m_p - m_D = 2.22 \text{ MeV}$  である。

陽子と中性子の存在比が固定される温度  $T_d$  における、陽子の全バリオン数に対する割合は、式 (2.85) より、 $n_p/n_B \simeq 0.83$  であるから、

$$n_p \simeq 0.83\eta_B n_\gamma = 1.66\eta_B \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (2.90)$$

を得る。したがって、式 (2.91) から、

$$\frac{n_D}{n_n} = 6.75\eta_B \left(\frac{T}{m_n}\right)^{3/2} \exp(B_D/T) \quad (2.91)$$

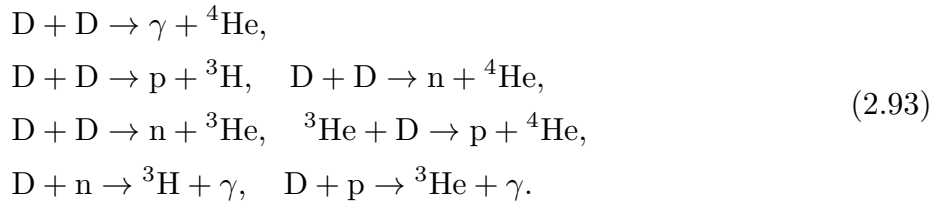
となる。重水素と中性子の存在比が同じになる温度  $T_N$  は、 $\eta_B \simeq 6 \times 10^{-10}$ 、 $m_n = 939 \text{ MeV}$  を用いると、

$$T_N \simeq 0.066 \text{ MeV} \quad (2.92)$$

となる。

### 軽元素合成

重水素が生成されると以下のような反応でヘリウム生成が起こる。



ヘリウム 4 ( ${}^4\text{He}$ ) の結合エネルギーは、ヘリウム 3 ( ${}^3\text{He}$ ) や重水素に比べて大きいため、重水素のほとんどが最終的にヘリウム 4 に取り込まれる。ここで質量数  $A$ 、数密度  $n_A$  の元素の全バリオン数に対する質量比

$$Y_A \equiv \frac{An_A}{n_B} \quad (2.94)$$

を定義すると、図 2.3 から、ヘリウム 4 の反応が宇宙誕生から約 4 分後に凍結することがわかる。このとき、中性子-陽子比は式 (2.87) から、

$$\frac{n_n}{n_p}(t_{\text{He}}) \simeq 0.146 \simeq \frac{1}{7} \quad (2.95)$$

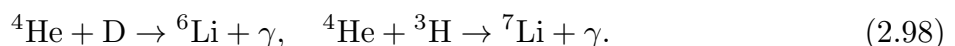
となる。全ての中性子がヘリウム 4 になるとすると、その質量比は

$$Y_p = \frac{4n_{\text{He}}}{n_B} = \frac{4n_n/2}{n_p + n_n} \simeq 0.25 \quad (2.96)$$

となり、残りのほとんどは陽子が占める。その他、重水素やトリチウム ( ${}^3\text{H}$ )、ヘリウム 3 がヘリウム 4 の生成過程 (2.93) でわずかに残るが、トリチウムに関してはベータ崩壊:



の半減期が約 12 年であるため、現在の宇宙にはほとんど存在しない。また、質量数が 5 や 8 の原子核は安定に存在できないため、ヘリウム 4 は陽子や中性子、ヘリウム 4 同士と結合しにくい。しかし、ヘリウム 4 は重水素やトリチウムと結合しリチウム 6 ( ${}^6\text{Li}$ ) とリチウム 7 ( ${}^7\text{Li}$ ) ができる。



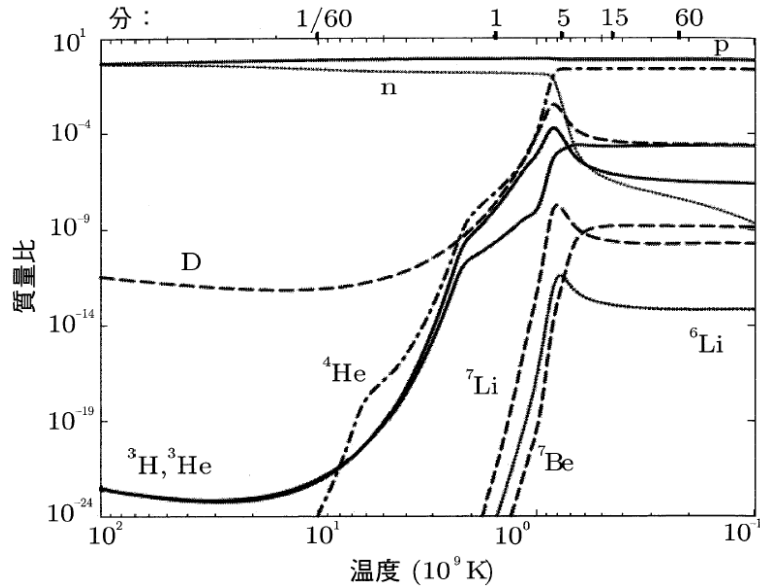


図 2.3 宇宙初期の軽元素の質量比の時間変化. 図は [52] からの抜粋である.  $\eta_B = 5.1 \times 10^{-10}$  と固定されている.

さらに, 反応



によってベリリウム 7 ( ${}^7\text{Be}$ ) も生成されるが,  ${}^7\text{Be} + e \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$  によってリチウム 7 が残る. 今考えている宇宙の温度では,  $A > 8$  の原子核同士の反応はクーロン力によって互いに反発し, 起こりにくくなるため, この時期に生成される元素は実質的に  $A = 7$  までとなる.

これらの軽元素の残存量は宇宙のバリオン数に依存する. 図 2.4 は水素核 (H) に対するヘリウム 4, 重水素, ヘリウム 3, リチウム 7, それぞれの存在比の光子-バリオン比 ( $\eta_{10} \equiv \eta_B \times 10^{10}$ ) の依存性を示している.  $\eta_B$  が大きくなるとヘリウム 4 の合成が効率良く起こるため, この間ベータ崩壊による中性子の減少量が少なくなり, ヘリウム 4 の生成量が増える. このとき, 反応率増加によって中間生成物である重水素やヘリウム 3 は消費されるため, これらの残存量は減ることになる. リチウム 7 については  $\eta_B$  が大きくなると, 強い相互作用による陽子捕獲反応  ${}^7\text{Li} + p \rightarrow 2{}^4\text{He}$  が進み, 残存量が少なくなるが,  $\eta_B \simeq 3 \times 10^{-10}$  より大きくなると,  ${}^7\text{Be} + e \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu_e$  による生成過程が大きくなるため, 増加に転ずる.

### 観測による軽元素量の測定

これらの軽元素の存在比は観測によって測定することができるため, 光子-バリオン比を決定することができる.

ヘリウム 4 と水素の存在比は, 銀河系外の  $\text{H II}$  領域<sup>\*7</sup>から放たれるヘリウム 4 と水素の再結合線を観測することで推定できる. ヘリウム 4 は星の内部でも生成されるが, このとき重元素も生成されるため, 重元素量の少ない領域を観測し, 宇宙初期に生成されたヘリウム 4 の推定が行われている. さらに, 星で生成されたヘリウム 4 は重元素生成に寄与するため, 星で生成されたヘリウム 4 と重元素量には相関があると考えられる. そのため, 観測したヘリウム 4 の存在比が重元素である酸素 (O) や窒素 (N) の存在比の一次関数としてフィットし, 重元素量ゼロの極限をとる

\*7 電離された水素が光を放っている領域.

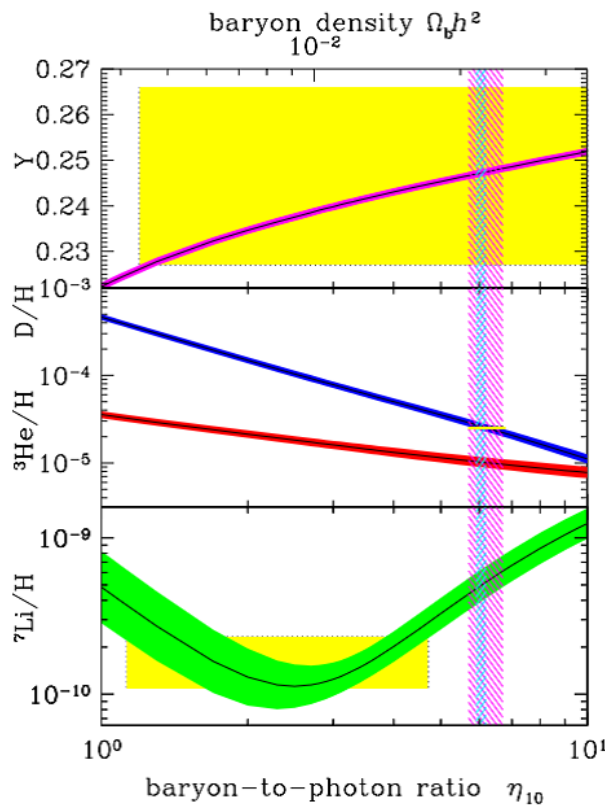


図 2.4 標準宇宙論における  $^4\text{He}$ , D,  $^3\text{H}$ ,  $^7\text{Li}$  の水素に対する存在比.  $Y \equiv ^4\text{He}/H$  である. バンドの幅は 95% CL の領域である. 黄色の領域が各元素の存在比の観測結果であり, 水色の縦バンド領域が CMB からの結果である. 図は [49] から抜粋.

ことで宇宙初期のヘリウム 4 の存在比を求めることができる. [53] によれば,  $Y_p = 0.249 \pm 0.009$  という値が得られている.

ヘリウム 3 については太陽系と我々の銀河系の重元素量の多い  $\text{H II}$  領域についてのデータしかなく, 宇宙初期のヘリウム 3 量を見積もることが困難であるため, 光子-バリオン比の制限に適さない.

重水素は非常に壊れやすい元素であり, 天体起源のものはないと考えられているため, 我々の近傍で観測される重水素はすべて宇宙初期に作られた重水素が天体進化の過程で壊されずに生き残ったものと考えられる. したがって, 我々の銀河近傍の重水素を観測すれば,  $D/H$  に下限値が付き, その量は  $D/H = (1.56 \pm 0.40) \times 10^{-5}$  であることがわかっている [54]. この量は光子-バリオン比に上限値 ( $\eta_{10} < 9$ ) を与える. 宇宙初期における重水素量のより精密な推定には, 重元素生成が進んでいない遠方の天体を観測する必要がある. 近年, 大口径の望遠鏡によって, 遠方クエーサーの光がライマン  $\alpha$  雲を通過する際に吸収されるスペクトル線を観測することで, ライマン  $\alpha$  雲中の重水素を直接測定できるようになった. 十分遠方のライマン  $\alpha$  雲は重元素量が太陽系より十分小さいため, そこでの重水素の存在比は宇宙初期での存在比と等しいとみなすことができる. [49] によると,  $D/H|_p = (2.53 \pm 0.40) \times 10^{-5}$  と見積もられている.

宇宙初期に生成されたリチウム 7 の存在量は我々の銀河内にある金属成分の少ない星から評価できる. 金属量 (主に鉄 (Fe)) が太陽の  $1/30$  より小さい星で  $\text{Li}/\text{H}$  が金属量 ( $\text{Fe}/\text{H}$ ) に寄らずほぼ一定となることがわかっており [55], これを外挿し金属量ゼロ極限をとることで  $\text{Li}/\text{H}$  を推定することができる. 近年の観測結果から, 鉄と水素の存在比が太陽に比べて  $10^{-3}$  の星では  $\text{Li}/\text{H}$

が小さくなり [56, 57, 58, 59],  $10^{-5}$  の矮星では  $\text{Li} < 10^{-11}$  となることがわかっている [60]. これは, このような質量が小さな星では対流表面近くまで効き, リチウム 7 が星の内部まで運ばれて破壊されるためであると考えられている. したがって, 金属量ゼロの極限をとる際に不確実性が生じる. このような効果も含めて,  $\text{Li}/\text{H}|_p = (1.6 \pm 0.3) \times 10^{-10}$  と見積もられている [49].

以上より, 各元素量の観測的な制限から, 光子-バリオン比は

$$5.7 \leq \eta_{10} \leq 6.7 \quad (95\% \text{ CL}) \quad (2.100)$$

という制限が与えられる [49]. 一方, 光子-バリオン比は CMB の温度揺らぎの観測により精密に測定されており,

$$\eta_{10} = 6.047 \pm 0.074 \quad (95\% \text{ CL}) \quad (2.101)$$

で与えられる [61]. 軽元素合成による制限 (2.100) はこの結果とよく合っている.

図 2.4 からわかるように, リチウム 7 の量は, 重水素と CMB から制限される光子-バリオン比の値と比べて小さくなっている. これはリチウム問題と呼ばれ, 観測量の統計誤差, 星の核反応に関する不定性もしくは標準模型を越える物理によるものと考えられているが, 未だに明らかになっていない.

## 2.2.5 標準宇宙論における問題

標準宇宙論は観測による結果をうまく説明し, 大きな成功を収めている. しかしその一方で, 我々の宇宙ができるためには極初期の宇宙において理論的に不自然な条件を満たしていなければならない. 以下にそれを具体的に述べる.

### 地平線問題

前節でみたように, 標準宇宙論によれば  $T \sim \mathcal{O}(0.1)$  eV で光子は電子やバリオンなどの残存粒子と脱結合し, 光子は自由に行き交うようになる. そして今日, 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB) として地上に降り注いでいる. このスペクトルは 2.73 K の黒体放射温度でほぼ一様 ( $10^{-5}$  の精度) で等方である.

ある時刻  $t_i$  に放たれた光が  $t$  までに進む距離を地平線と呼び,

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.102)$$

で与えられる. 標準宇宙論では  $a \propto t^n$ ,  $n < 1$  であるから,

$$d_H(t) = \frac{t}{1-n} = \frac{n}{1-n} H^{-1}, \quad (2.103)$$

のように, ハッブルパラメーターの逆数のオーダーで特徴づけられる. ここでは  $H = n/t$  となることを用いた. したがって,  $H^{-1}$  はハッブル半径と呼ばれ, 地平線のオーダーを決める重要な量である.

宇宙誕生から晴れ上がりまでの地平線と晴れ上がりから現在までの地平線の比較を行う. 宇宙誕生  $t = 0$  から晴れ上がり  $t = t_*$  までの地平線は, 宇宙の晴れ上がりまでの時期の大部分が物質

優勢であるから、式 (2.103) より

$$d_H(t_*) = a(t_*) \int_0^{t_*} \frac{dt'}{a(t')} \simeq 3t_*,$$

となる。一方、晴れ上がり時に放たれた光の現在における地平線は

$$d_{H_0}(t_0) = a(t_0) \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = 3t_0 \left[ 1 - \left( \frac{t_*}{t_0} \right)^{1/3} \right].$$

ここで、晴れ上がり期でのこの地平線の長さ  $d_{H_0}(t_*) = \frac{a(t_*)}{a_0} d_{H_0}(t_0)$  となるから、現在の地平線の晴れ上がり期での長さ  $d_H(t_*)$  と宇宙の晴れ上がり期の地平線の長さの比は、 $a \propto t^{2/3}$  より、

$$\frac{d_H(t_*)}{d_{H_0}(t_*)} = \left( \frac{t_*}{t_0} \right)^{1/3} \frac{1}{1 - \left( \frac{t_*}{t_0} \right)^{1/3}},$$

となる。したがって、宇宙の晴れ上がりの赤方偏移  $z_*$  を用いて

$$\left( \frac{t_*}{t_0} \right)^{1/3} = \left( \frac{a(t_*)}{a(t_0)} \right)^{1/2} = (1 + z_*)^{-1/2},$$

と表すことができるから、晴れ上がり期の赤方偏移は  $z_* \simeq 1090$  [38] より

$$\frac{d_H(t_*)}{d_H(t_0)} \sim \mathcal{O}(10^{-2}),$$

となり、晴れ上がりから現在までの地平線が宇宙誕生から晴れ上がりまでの地平線に比べてかなり大きいことがわかる。これは我々が現在観測できる領域のほとんどが因果関係をもっていないことを示している。このような因果関係を持たない領域に由来する CMB の強度は様々であるはずである。しかし、実際観測される CMB の強度は、上に述べたように一様に降り注いでおり、実験結果と矛盾する。これを地平線問題という。

### 平坦性問題

式 (2.33) から標準宇宙論では放射 ( $P = \frac{1}{3}\rho$ ) や通常物質 ( $P = 0$ ) を考えるかぎり  $\ddot{a} < 0$  となることがわかる。これより  $1/aH = 1/\dot{a}$  は時間と共に増加するため、式 (2.36) から  $\Omega_K$  は時間と共に大きくなる。言い換えれば、過去に遡るほど密度パラメータ  $\Omega_K$  は 0 に漸近する。

放射優勢期のある時刻  $t$  の曲率パラメータは、

$$\begin{aligned} |\Omega_K(t)| &= |\Omega_K(t_0)| \left( \frac{a_0 H_0}{a(t) H(t)} \right)^2 \\ &= |\Omega_K(t_0)| \left( \frac{a_0 H_0}{a_{\text{eq}} H_{\text{eq}}} \right)^2 \Bigg|_{\text{matter}} \left( \frac{a_{\text{eq}} H_{\text{eq}}}{a(t) H(t)} \right)^2 \Bigg|_{\text{radiation}} \\ &= |\Omega_K(t_0)| \left( \frac{\dot{a}_0}{\dot{a}_{\text{eq}}} \right)^2 \Bigg|_{\text{matter}} \left( \frac{\dot{a}_{\text{eq}}}{\dot{a}(t)} \right)^2 \Bigg|_{\text{radiation}} \\ &= |\Omega_K(t_0)| \left( \frac{t_0}{t_{\text{eq}}} \right)^{-2/3} \Bigg|_{\text{matter}} \left( \frac{t_{\text{eq}}}{t} \right)^{-1} \Bigg|_{\text{radiation}} \\ &= 4.20 \times 10^{-9} |\Omega_K(t_0)| \left( \frac{t}{1 \text{ yr}} \right) \end{aligned}$$

と見積もることができる. ここで,  $t_0$  は宇宙年齢,  $t_{\text{eq}}$  は  $\Omega_r = \Omega_m$  となる時間で, それぞれ

$$t_0 = 13.80 \text{ Gyr}, \quad t_{\text{eq}} = 5.13 \times 10^{-6} t_0 \quad (68\% \text{ CL})$$

であることを用いた [38]. ビッグバン元素合成時代 ( $t_{\text{BBN}} \sim 1 \text{ s}$ ) を考えると

$$\left| \frac{\Omega_K(t_{\text{BBN}})}{\Omega_K(t_0)} \right| \leq \mathcal{O}(10^{-16})$$

となる. 式 (2.38) で述べたように, 現在の曲率パラメーターは  $\Omega_K(t_0) \sim \mathcal{O}(10^{-3})$  であるから, この時期における  $\Omega_K$  は非常に 0 に近い. 標準宇宙論では初期の宇宙の密度パラメーターはどんな値をとってもよいため, このような  $\Omega_K$  が 0 に非常に近い状態から始まった必然性を説明できない. この問題を平坦性問題という.

### 宇宙構造の起源

我々の宇宙を大域的に見れば宇宙の構造は一様等方であり, このような宇宙は FRW 計量によって表される. これは標準宇宙論の出発点であった. しかし, 宇宙を局所的に見てみると, 恒星や銀河, 銀河団などの天体が存在しており, 完全な一様等方ではない. もし, 宇宙が完全に一様等方ならば, このような局所的な構造を生み出すことはできない. これは宇宙構造の起源に関する問題である.

## 第3章

# 素粒子論と宇宙論の現状

素粒子標準模型は、TeV スケールまでの高エネルギー実験結果をほとんど正しく説明することができ、標準宇宙模型は軽元素の存在比を実現できる等、成功を収めている。しかし、その一方で、これらの模型で説明できない問題も明らかになっており、標準模型の枠組みを越えた議論が要求されている。本章では素粒子論と宇宙論における問題点とその現状について議論する。

### 3.1 ニュートリノ振動とその質量

1998年のニュートリノ振動現象の観測によって、ニュートリノの質量の存在が明らかになった [3]。前節で議論したように、標準模型フェルミオンはヒッグス機構によって質量を獲得するが、ニュートリノについてはその質量が厳密にゼロであり、ニュートリノ振動現象は起こりえない。そのため、ニュートリノに質量を与える機構が必要となる。以下では、ニュートリノの振動現象と質量についての現状を簡潔に説明する。

#### 3.1.1 ニュートリノ振動

ニュートリノのフレーバー固有状態  $|\nu_\alpha\rangle$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) を質量固有状態  $|\nu_i\rangle$  を用いて

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^3 U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (3.1)$$

と書くことができる。  $U_{\alpha i}$  は質量固有状態の基底からフレーバー固有状態の基底へ変換するユニタリ行列である。  $|\nu_\alpha\rangle$  の時間発展はシュレディンガー方程式を解くことで得られ、

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i(0)\rangle \quad (3.2)$$

で表わされる。したがって、ある時刻  $t = 0$  におけるフレーバー固有状態を  $|\nu_\alpha\rangle$  とおくと、時刻  $t$  におけるフレーバー固有状態  $|\nu_\beta(t)\rangle$  への遷移振幅は

$$\langle \nu_\beta(t) | \nu_\alpha(0) \rangle = \sum_i e^{iE_i t} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* \quad (3.3)$$

となるから、その遷移確率  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$  は

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) \equiv |\langle \nu_\beta(t) | \nu_\alpha(0) \rangle|^2 = \sum_{i=j} |U_{\beta i}|^2 |U_{\alpha i}|^2 + \sum_{i \neq j} e^{i(E_i - E_j)t} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} \quad (3.4)$$



と表わすことができる. ここで,  $\delta_{\alpha\beta} = \sum_i U_{\beta i} U_{\alpha i}^*$  より,

$$\delta_{\alpha\beta} = \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} = \sum_{i=j} |U_{\beta i}|^2 |U_{\alpha i}|^2 + \sum_{i \neq j} U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} \quad (3.5)$$

であることを用いると, 式 (3.4) は

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} \left( e^{i(E_i - E_j)t} - 1 \right) U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} \\ &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} \left[ \cos \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t \right) + i \sin \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t \right) - 1 \right] U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる. ここで, 相対論的極限  $E \simeq |\mathbf{p}| + \frac{m^2}{2E}$  をとり,  $E = E_i \simeq E_j$  とした. また, ニュートリノの質量二乗差を  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$  をおいた. さらに, 二倍角公式  $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$  を用いると, 遷移確率 (3.6) は最終的に

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} + \sum_{i \neq j} \left[ -2 \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E} t \right) + i \sin \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} t \right) \right] U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j} \\ &= \delta_{\alpha\beta} - \sum_{i > j} \left[ 4 \operatorname{Re} (U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j}) \sin^2 \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{4E} L \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{Im} (U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j}) \sin \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \right) \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる. ニュートリノは相対論的であるから, 光速  $c (= 1)$  を用いて  $t \simeq L/c$  とした. これより, ニュートリノの質量と混合角が有限の値を持つ場合, ニュートリノ振動が起こることがわかる. また, 第三項目は CP 対称性を破る.  $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$  となる確率  $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta)$  は (3.7) で  $U$  と  $U^*$  を入れかえることによって得られ, CP 対称性の破れの大きさは

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}^{\text{CP}} &\equiv P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) - P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \\ &= 4 \sum_{i > j} \operatorname{Im} (U_{\beta i} U_{\alpha i}^* U_{\beta j}^* U_{\alpha j}) \sin \left( \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} L \right) \end{aligned}$$

で与えられる.

ニュートリノ振動はこれまでに様々な実験によって, ニュートリノの質量や混合角の測定が行われてきた. ニュートリノ振動実験は大気ニュートリノ実験, 太陽ニュートリノ実験, 原子炉ニュートリノ実験, 加速器ニュートリノ実験が知られている. 大気ニュートリノ実験は, 宇宙線が大気に衝突して生成された荷電パイオンが崩壊することで生じる  $\nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$  の欠損を測定する消失実験であり, Super-Kamiokande 実験 [3, 62, 63] によって  $|\Delta m_{23}^2|$  と  $\theta_{23}$  の値が制限されている. 太陽ニュートリノ実験は, 太陽内部で生成された  $\nu_e$  を観測する  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  の消失実験である. これによって,  $\Delta m_{21}^2$  と  $\theta_{12}$  が測定される. 質量二乗差については太陽内部の物質効果のため  $\Delta m_{21}^2$  の符号も決定されている. 太陽ニュートリノ実験は Super-Kamiokande や SNO 実験等がある [4, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]. 原子炉や加速器によるニュートリノ振動実験は人工的にニュートリノを生成させるため, ニュートリノの発生量やエネルギー分布がわかるという利点がある. 原子炉ニュートリノ実験としては KamLAND 実験 [5, 72] や Double Chooz 実験

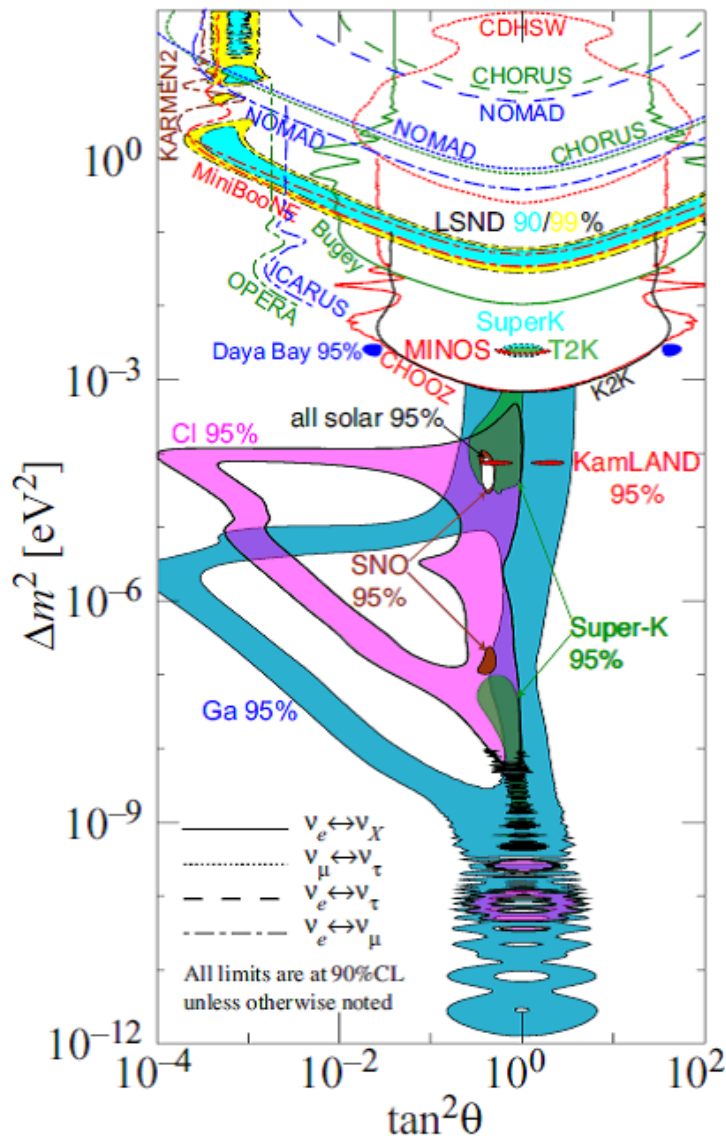


図 3.1 最近のニュートリノ振動実験データのまとめ. 図は [49] から抜粋した.  $\Delta m^2 \sim 10^{-3}$  より上は色付けされている領域が許されている.  $\Delta m^2 = 10^{-3}$  より下に関してはすべての領域が重なるところが許されている.

[8], RENO 実験 [9], Daya Bay 実験 [10] があり,  $\bar{\nu}_e$  の欠損の観測によって,  $\theta_{13}$  の値が測定されている. 加速器実験については,  $\nu_\mu$  の消失が K2K 実験 [73] や MINOS 実験 [74, 75, 76], T2K 実験 [77, 78, 79] でも観測され, ニュートリノ振動の強い証拠となっている. また, T2K 実験 [80] や MINOS 実験 [81] では  $\bar{\nu}_\mu$  の欠損も観測されており, ここから測定される振動パラメータは  $\nu_\mu$  消失実験 [77, 78, 79] や Super-Kamiokande 実験 [63] による大気ニュートリノの観測結果とよく合っている [80]. 出現過程については, T2K 実験 [7, 82, 83] による  $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$  の観測により,  $\theta_{13}$  が測定されており, MINOS 実験 [84, 85], Double Chooz 実験 [86] も  $\nu_e$  の出現が観測されている. さらに,  $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$  は Super-Kamiokande 実験 [87] や OPERA 実験 [88] で観測されている. このようなニュートリノ振動実験によるニュートリノの質量二乗差と混合角の制限を図 3.1 に示しておく.

### 3.1.2 ニュートリノ質量生成模型

上で述べたように、ニュートリノには有限の質量があることが確認された。これまでにたくさんニュートリノ質量生成模型が考えられている [89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96]。ニュートリノはディラック粒子とマヨラナ粒子の二つ可能性があり、ここではそれぞれの場合について簡単な模型を説明する。

#### ディラック質量生成模型

標準模型にゲージ重項フェルミオンである右巻きニュートリノ  $\nu_R$  を導入し、標準模型フェルミオンと同様に湯川結合を組む。

$$\mathcal{L}_\nu = -(Y_\nu)_{ij} (\bar{\ell}_L)_i \tilde{\phi} (\nu_R)_j + \text{h.c.} \quad (3.8)$$

ヒッグスが真空期待値を持つと、ニュートリノ質量行列は

$$(m_\nu)_{ij} = (Y_\nu)_{ij} \langle \phi^0 \rangle \quad (3.9)$$

となる。この質量行列は 2.1.3 節と同様、ユニタリー行列  $U_{L(R)}^\nu$  で対角化できる。対角行列を  $m_\nu^d$ 、質量固有状態を  $\nu'_{L(R)}$  とすると、

$$m_\nu^d = U_L^\nu m_\nu U_R^{\nu\dagger}, \quad \nu'_L = U_L^\nu \nu_L, \quad \nu'_R = U_R^\nu \nu_R \quad (3.10)$$

となる。これを用いてラグランジアンを質量固有状態で表わすと、クォークセクターと同様、荷電カレントに以下のような混合行列が現れる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{kin}} \supset -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e}'_L \gamma^\mu U_L^e U_L^{\nu\dagger} \nu'_L \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^- \bar{e}'_L \gamma^\mu U_{\text{PMNS}} \nu'_L. \end{aligned} \quad (3.11)$$

このクォークセクターの CKM 行列に相当するレプトンセクターにおける混合行列  $U_{\text{PMNS}} = U_L^e U_L^{\nu\dagger}$  をポンテコルボ・牧・中川・坂田 (PMNS) 行列と呼ぶ。ここで、荷電レプトンの混合行列  $U_L^e$  はニュートリノの混合行列に押し付けることができる。つまり、荷電レプトンを質量固有状態で表わし、ニュートリノのみに混合が生じる基底を選ぶことができ、このとき、ニュートリノの質量固有状態とフレーバー固有状態を結ぶ変換行列が PMNS 行列となる。また、ニュートリノがディラック粒子の場合、 $N \times N$  の PMNS 行列に含まれる複素位相の自由度は CKM 行列と同じく  $(N-1)(N-2)/2$  である。3×3 の PMNS 行列は 3 つの回転角の自由度  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  と一つの複素位相  $\delta$  を用いて、

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

と表される。近年のニュートリノ振動実験の結果から各振動角は表 3.1 で与えられている。

この模型は、他の標準模型フェルミオンの質量生成機構と同じもので、非常に簡潔であるが、湯川結合定数  $Y_\nu$  は任意のパラメーターであり、実験で得られる情報しか与えられない。また、ニュートリノの質量がその他の標準模型フェルミオンに比べて非常に小さいという点に不自然さがある。

パラメータ-	$2\sigma$
$\Delta m_{21}^2$ [ $10^{-5}\text{eV}^2$ ]	7.26-7.99
$ \Delta m_{31}^2 $ [ $10^{-3}\text{eV}^2$ ]	2.35-2.59
$\sin^2 \theta_{12}$	0.292-0.357
$\sin^2 \theta_{23}$	0.413-0.623
$\sin^2 \theta_{13}$	0.0195-0.0274

表 3.1 ニュートリノ振動実験結果で得られた振動パラメータ-のグローバルフィット [97].

### マヨラナ質量生成模型

上で導入した右巻きニュートリノはゲージ一重項なので, 以下のようにマヨラナ質量項を加えることができる.

$$\mathcal{L}_\nu = -(Y_\nu)_{ij}(\bar{\ell}_L)_i\phi(\nu_R)_j - \frac{M_{ij}}{2}(\bar{\nu}_R^c)_i(\nu_R)_j + \text{h.c.} \quad (3.13)$$

$M_{ij}$  はマヨラナ質量行列である. マヨラナ質量項はレプトン数を破るが, レプトン数の保存が実験的に確立されていないことから, 許されている. ヒッグスが真空期待値を持つとラグランジアン (3.13) の質量項は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu &\supset -m_D\bar{\nu}_L\nu_R - \frac{M}{2}\bar{\nu}_R^c\nu_R + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L, \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D^T & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (3.14)$$

のように書くことができる. ここで,  $(\bar{\nu}_L)_i(\nu_R)_j = (\bar{\nu}_R^c)_j(\nu_L^c)_i$  となることを用いた. また,  $(m_D)_{ij} = (Y_\nu)_{ij}\langle\phi^0\rangle$  とした. この質量行列を対角化することでニュートリノのマヨラナ質量項が得られる. 簡単のため 1 世代のみの場合を考え, さらに,  $M > 0$  とすると, 質量行列は直交行列

$$O = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

によって対角化される. 質量行列を  $\mathcal{M}$  とおくと

$$OMO^T = \begin{pmatrix} -m_D \sin 2\theta + M \sin^2 \theta & m_D \cos 2\theta - \frac{M}{2} \sin 2\theta \\ m_D \cos 2\theta - \frac{M}{2} \sin 2\theta & m_D \sin 2\theta + M \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

よって, 非対角成分がゼロとなる条件は  $\tan 2\theta = 2m_D/M$  であり, この時, 対角化された質量行列は

$$OMO^T = \begin{pmatrix} -m_- & 0 \\ 0 & m_+ \end{pmatrix}, \quad m_\pm = \frac{1}{2} \left( \sqrt{M^2 + 4m_D^2} \pm M \right) \quad (3.17)$$

となる. ここで,  $m_{1,2} > 0$  より, ニュートリノの質量が負になっているため, このままでは物理的な解釈ができない. そこで, 対角行列  $R = \text{diag}(i, 1)$  を用いて,

$$\begin{pmatrix} -m_- & 0 \\ 0 & m_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_- & 0 \\ 0 & m_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv R^T \mathcal{M}^d R \quad (3.18)$$

のように書くことができる。したがって、正の質量固有値をもつ対角行列  $\mathcal{M}^d$  はユニタリー行列  $U = OR$  を用いて、

$$\mathcal{M}^d = U\mathcal{M}U^T \quad (3.19)$$

で与えられることがわかる。このとき、ニュートリノの質量固有状態を

$$\begin{aligned} \nu_1 &= i\nu_L \cos \theta - \nu_R^c \sin \theta, \\ \nu_2 &= i\nu_L^c \sin \theta + \nu_R \cos \theta \end{aligned} \quad (3.20)$$

とおくと、質量行列は

$$\mathcal{L}_\nu \supset -\frac{1}{2}m_- \bar{\nu}_1 \nu_1^c - \frac{1}{2}m_+ \bar{\nu}_2 \nu_2 + \text{h.c.} = -\frac{1}{2}m_- \bar{\nu}_- \nu_- - \frac{1}{2}m_+ \bar{\nu}_+ \nu_+ \quad (3.21)$$

となる。ここで、

$$\nu_- = \nu_1 + \nu_1^c, \quad \nu_+ = \nu_2 + \nu_2^c \quad (3.22)$$

であり、これより2つのマヨラナ粒子が得られることがわかる。 $N$ 世代では一般に  $2N$  個のマヨラナ粒子が出現する。

ニュートリノの質量固有値は、 $M \gg m_D$  とすると、式 (3.17) は

$$m_- \simeq \frac{m_D^2}{M}, \quad m_+ \simeq M \quad (3.23)$$

となり、大きな質量  $m_+$  が得られる一方、 $m_-$  は非常に小さくなる。このような機構をシーソー機構と呼ぶ [98, 99, 100]。このとき  $\theta \rightarrow 0$  となるから、質量固有状態は式 (3.20), (3.22) より、

$$\nu_- \simeq i(\nu_L + \nu_L^c), \quad \nu_+ \simeq \nu_R + \nu_R^c \quad (3.24)$$

のように、左巻きニュートリノと右巻きニュートリノの成分がほとんど分離した状態で表わされる。

上で述べたように、 $N$ 世代のディラック粒子の場合、左巻き粒子と右巻き粒子を独立に再定義することで、 $2N - 1$  個のパラメーターを取り込むことができた。一方、マヨラナ粒子の質量項は同じ粒子で組まれているため、粒子の再定義で取り込めるパラメーターの数は荷電レプトンセクターのみの  $N$  個となる。したがって、複素位相の自由度は  $N(N - 1)/2$  個となり、3世代の場合の混合行列は、ディラックニュートリノの PMNS 行列 (3.12) に加えてマヨラナ位相と呼ばれる複素位相  $\alpha_1, \alpha_2$  が加わり、

$$U_{\text{Majorana}} = U_{\text{PMNS}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

となる。第4章以降、ニュートリノはマヨラナ粒子として取り扱うため、 $U_{\text{Majorana}}$  を単に  $U_{\text{PMNS}}$  と書く。

### 3.1.3 ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊

ニュートリノ振動確率 (3.7) からわかるように、マヨラナ位相はニュートリノ振動現象に寄与しない。そのため、振動実験ではディラックニュートリノとマヨラナニュートリノを識別するこ

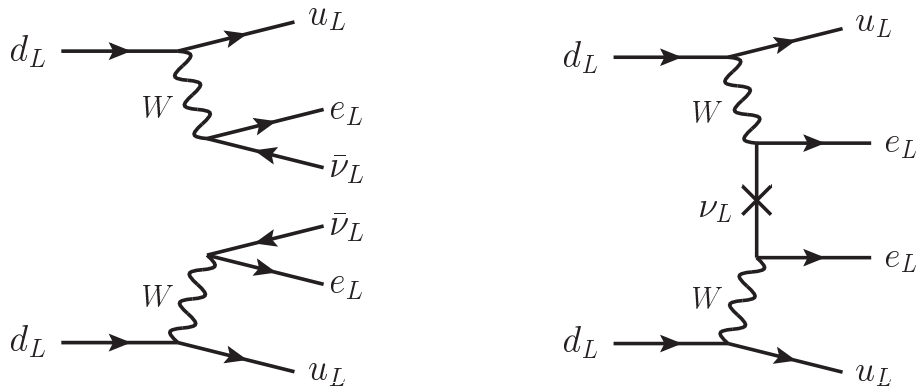


図 3.2 ニュートリノを放出する二重ベータ崩壊過程 (左図) とニュートリノを放出しない二重ベータ崩壊過程 (右図) のダイアグラム. 右図はレプトン数を破る過程である.

とはできない. しかし, これらを識別する過程としてニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊 (図 3.2 の右図) の観測が期待されている.

二重ベータ崩壊は中性子のベータ崩壊 ( $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ ) が原子核内で二度起こる過程である. ニュートリノがディラック粒子の場合, 原子核から二個のニュートリノが放出される過程 (図 3.2 の左図) のみが存在するが, マヨラナ粒子の場合, 粒子と反粒子の区別がないため, 反ニュートリノがニュートリノとして吸収され, その結果ニュートリノを生じない図 3.2 の右図のような過程も存在する. そのため, ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊を観測されれば, ニュートリノがマヨラナ粒子であることを意味する. この二つの崩壊過程は, そこから放出される電子のエネルギーの和を測定することで実験的に区別することができる. ニュートリノを伴わない過程においては, 原子核外に二個の電子のみが放出されるため, これらのエネルギーの和は常に一定になる. 一方で, ニュートリノを放出する過程では, ニュートリノが電子と共にエネルギーを放出し, これを測定できないため, 電子のエネルギーの和は連続スペクトルになる. さらに, 単位時間に何対の電子が放出されるか測定することで, それぞれの過程の崩壊率を決定することができる. ニュートリノを伴わない二重ベータ崩壊の崩壊率は

$$\left[ T_{1/2}^{0\nu} \right]^{-1} = G_{0\nu} |M_{0\nu}|^2 \langle m_{\beta\beta} \rangle^2 \quad (3.26)$$

で与えられる.  $G_{0\nu}$  は位相因子である.  $M_{0\nu}$  は核行列要素と呼ばれる理論計算に依存する部分であり, 数々の原子核構造模型が存在する.  $\langle m_{\beta\beta} \rangle$  は電子ニュートリノの有効質量

$$\langle m_{\beta\beta} \rangle = \left| \sum_i U_{ei}^2 m_{\nu_i} \right| = \left| c_{12}^2 c_{13}^2 m_{\nu_1} + c_{13}^2 s_{12}^2 m_{\nu_2} e^{i2\alpha_2} + s_{13}^2 m_{\nu_3} e^{2i(\alpha_2 - \delta)} \right| \quad (3.27)$$

で与えられる. 二重ベータ崩壊の実験によって, これを測定することができる. ニュートリノ振動実験からは質量二乗差しかわからないため, 最も軽いニュートリノの質量をパラメーターとして電子ニュートリノの有効質量をプロットしたものが図 3.3 である. ニュートリノ振動実験で  $m_2$  と  $m_3$  の大小関係が不明であるから, ニュートリノ質量構造は正常階層型 (NH):  $m_1 < m_2 \ll m_3$  と逆階層型 (IH):  $m_3 \ll m_1 < m_2$  が考えられる. また, 三種類のニュートリノの質量がその差より大きい場合 (0.1 eV 程度) で縮退型 (QD):  $m_1 \simeq m_2 \simeq m_3$  が考えられる.

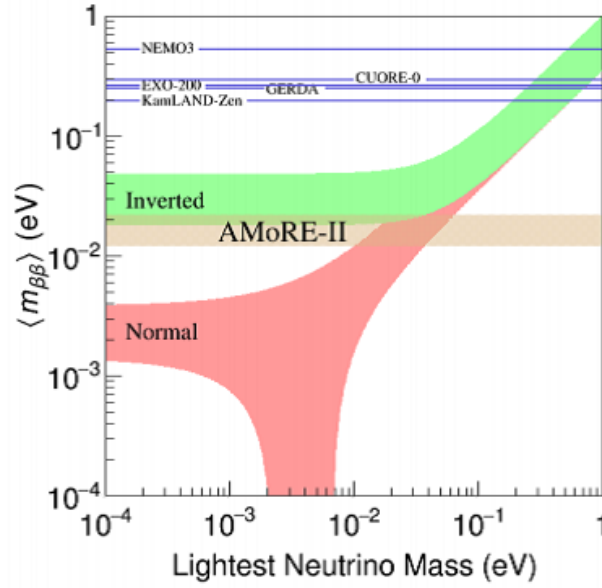


図 3.3 電子ニュートリノの有効質量と最も軽いニュートリノの質量の関係と現在および将来実験による制限 [101, 102, 103, 104, 105]. 図は [101] から抜粋.  $G_{0\nu}|M_{0\nu}|^2$  は [106] で与えられる領域の中心値を用いている.

このような質量構造によって  $\langle m_{\beta\beta} \rangle$  は異なり,

$$\langle m_{\beta\beta} \rangle \simeq \begin{cases} \left| \sqrt{\Delta m_{21}^2 s_{12}^2 c_{13}^2} + \sqrt{\Delta m_{31}^2 s_{13}^2} e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2 - \delta)} \right| & \text{(NH),} \\ \tilde{m} (1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin \alpha_1)^{1/2} & \text{(IH or QD)} \end{cases} \quad (3.28)$$

となる. ここで,  $\tilde{m} = \sqrt{\Delta m_{23}^2 - m_3^2}$  である. (3.28) にニュートリノ振動パラメーターを代入すると図 3.3 のようになり, 二重ベータ崩壊実験での  $\langle m_{\beta\beta} \rangle$  の測定によるニュートリノ質量構造の決定が期待される.

## 3.2 暗黒物質

### 3.2.1 暗黒物質の存在証拠と残存量

銀河団を構成する銀河の軌道速度から銀河団全体の質量が光学的に観測される物質質量に比べて大きいことが明らかになり, 1933 年にツビッキー (F.Zwicky) によって暗黒物質の存在が指摘された [107]. その後, 観測技術の発展により, 暗黒物質の存在を示唆する様々な観測結果が得られている.

- 渦巻銀河の回転曲線

銀河中心から  $r$  の位置での回転速度  $v$  は, ケプラーの法則により,  $v \propto \sqrt{M(r)/r}$  と見積もられる. ここで,  $M(r)$  は回転軌道の内側にある物質の全質量である.  $r$  が銀河の光学的に観測される物質領域より大きくなると, 回転速度は  $v \propto 1/\sqrt{r}$  で減少すると予想される. しかし, 実際はこのような領域において, 回転速度が一定になることが観測で明らかになった [108, 109, 110]. これは質量密度が  $\rho \propto 1/r^2$  ( $M(r) \propto r$ ) となる暗黒物質の存在を

示している\*1. 銀河の全質量はもちろん有限であるから、どこかで  $r$  が急激に収束する必要があるが、その距離が明らかになっていないため、暗黒物質のエネルギー密度に下限値  $\Omega_{\text{DM}} \gtrsim 0.1$  のみが与えられる [49].

- 重力レンズ効果

重力レンズ効果は光源の光が巨大な重力源によって曲げられることで生じる現象のことである。ハッブル宇宙望遠鏡が撮影した遠方銀河団 Abel2218 の写真が有名である。この光源の像を詳しく解析することで、重力源の空間分布を知ることができ、暗黒物質の空間分布が調べられている [112].

- 弾丸銀河団

1E 0657-56 は大小二つの銀河団が衝突したもので、小さな銀河団が衝突面を弾丸状に通り抜けていることから、弾丸銀河団と呼ばれる [113]. この衝突の様子を X 線と重力レンズで観測したところ、X 線を放つガスの分布と重力源の分布との間にずれがあることが明らかになった [114]. X 線領域が衝突面付近に存在する一方、重力源は衝突面を通り抜けて分布していることから、この重力源は非常に相互作用の弱い物質で構成されていると考えられる [113].

- 宇宙の大規模構造

宇宙の銀河分布は Sloan Digital Sky Survey(SDSS) や 2dF Galaxy Redshift Survey(2dFGRS) などによって観測され、宇宙は完全な一様等方ではなく、ボイドと呼ばれる銀河の無い空洞領域やフィラメントなどの銀河団が密集した領域が存在することが知られている。このような構造は宇宙初期の揺らぎが重力相互作用によって凝集してできたと考えられている。このとき、通常物質のみでは構造形成に時間がかかりすぎるのが数値シミュレーションによって明らかになっており、宇宙の質量の大部分が非相対論的な冷たい暗黒物質からできている必要があると考えられている。

- 宇宙マイクロ波背景放射 (CMB)

図 3.4 の左図は Planck による CMB の温度揺らぎのパワースペクトル [38] であり、右図はその密度パラメータ依存性について示したものである [115]. 2.2.3 節で述べたように再結合以前の宇宙は電子とバリオンがプラズマ状態で存在し、これらは音波として振動する。バリオンの密度  $\Omega_b h^2$  が大きい場合、音速が小さくなり、揺らぎによる重力ポテンシャルに逆らう圧力が弱くなるため、振幅が大きくなる。また、短波長領域では光子-電子散乱による揺らぎの減衰 (シルク減衰) がある。バリオン密度が大きくなると、再結合時により多くの電子を取り込むため、この減衰の寄与は小さくなり、その結果、減衰がより短波長側にずれる。次に、非相対論的物質の密度パラメータ依存性であるが、 $\Omega_m h^2$  を小さくすると物質と放射の等密度期に入る時期が遅くなり、再結合期における放射の影響が大きくなる。すると、重力ポテンシャルの変化がより浅い方向に進むため、青方偏移によりスペクト

\*1 修正重力理論による説明の試みもある [111].



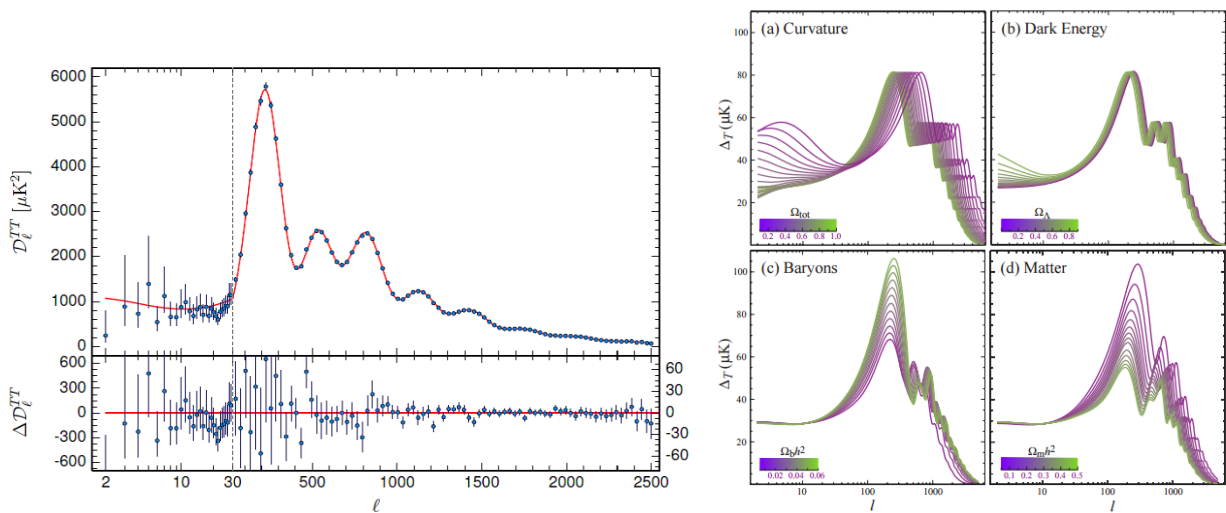


図 3.4 Planck による CMB のパワースペクトルの観測結果 (左図)[38] とその密度パラメータ依存性 (右図)[115].  $l$  が大きいほど小さなスケールを表す.

ル強度は大きくなる. 宇宙の曲率を小さくすると, CMB を見込む角度が小さくなるため, スペクトルが全体的に右側 (短波長側) にずれる. また, 曲率の寄与は現在に近いほど大きくなるため, 地平線内に入る時期が遅い長波長側がその影響を受ける. 宇宙項についても同様に, 宇宙項の効果は宇宙初期ほど弱くなる, 短波長側への寄与はほとんどないが, 現在に近づくほどその影響が大きくなるため, 長波長領域が変化する. 図 3.4 の左図の観測結果を満たすようにこれらのパラメータをフィットすることで, (2.38) のように密度パラメータが求まり, 暗黒物質は宇宙のエネルギーの約 27 % を占めていることがわかっている.

### 3.2.2 暗黒物質の候補と探査実験

図 3.5 に主な暗黒物質の候補を示した. 標準模型の枠組みで中性で相互作用が弱い粒子としてニュートリノがあるが, 宇宙の大規模構造は暗黒物質は非相対論的であることが示唆しているため, 排除される. アクシオンは強い CP 問題を説明するために導入された, 擬スカラーボソンである [117]. その質量は様々な実験で制限されており,  $10^{-6}$  eV から  $10^{-4}$  eV 程度 [49, 116] と非常に軽い, 非熱的に生成されるため, 冷たい暗黒物質となる. 非熱的に生成される暗黒物質としてはそのほかにステライルニュートリノがある [118, 119]. 質量は数 keV 程度で準安定な暗黒物質となる. WIMP (Weakly Interacting Massive Particle) も暗黒物質候補として知られている. WIMP はインフレーション後, 標準模型粒子と共に熱平衡状態にあり, その後宇宙の膨張率が大きくなると, WIMP の生成消滅反応が凍結し, 現在まで残存する. このとき, WIMP の質量が数 GeV から数 TeV の範囲にあり, 相互作用の強さが弱い相互作用程度であれば, 観測される残存量を説明することができる. WIMP には超対称性理論におけるニュートラリーノや余剰次元理論に置くカルツァ・クライン粒子が知られている. 本研究で議論する暗黒物質も WIMP である. そのため, 以下では暗黒物質探査実験による WIMP に対する制限について述べる.

我々の銀河は暗黒物質ハローで被われており, 太陽系の位置での暗黒物質密度は  $\rho_{\odot} \simeq 0.39$

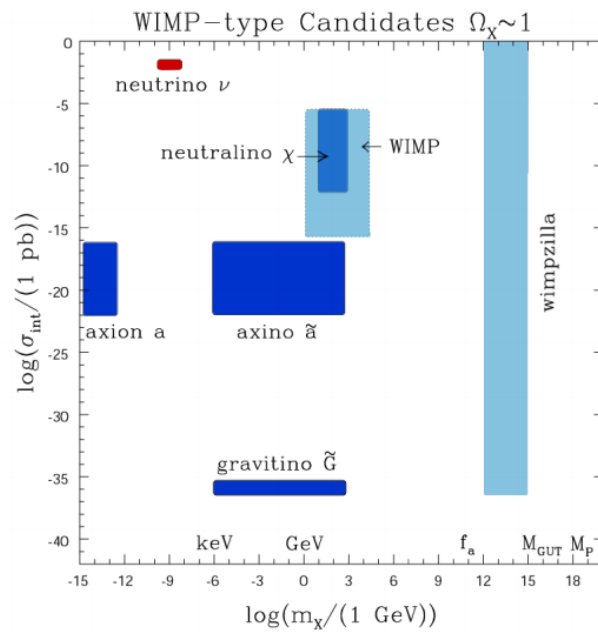


図 3.5 主な暗黒物質の質量と通常物質との相互作用の強さの関係。ニュートリノは熱い暗黒物質であるため排除される。図は [116] から抜粋。

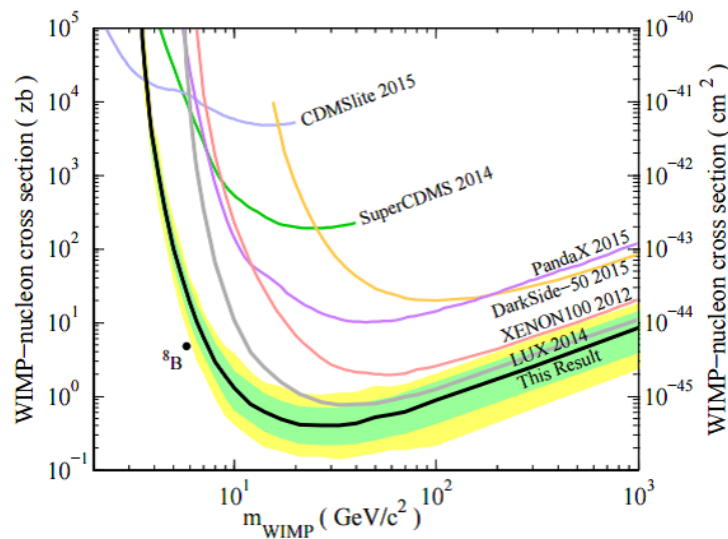


図 3.6 スピンに依存しない弾性散乱断面積に対する現在の制限 [126]。緑と黄色で塗られた領域はそれぞれ LUX 実験結果 [126] の  $1\sigma$  と  $2\sigma$  の範囲である。

$\text{GeV}/\text{cm}^3$  と見積もられている [120]。WIMP は相互作用が非常に弱い標準模型との相互作用があるため、ごくまれに物質との散乱があると考えられる。暗黒物質直接探査実験はこのことを利用して、地上で原子核を静止させておき、暗黒物質との散乱の検出を試みる実験である。主な実験として、XENON100[121]、SuperCDMS[122]、CDMSlite[123]、DarkSide-50[124]、PandaX[125]、LUX[126] があり、その他、DAMA/LIBRA[127]、CoGeNT[128] などがある。暗黒物質直接探査実験による現在の制限を図 3.6 に示す。

現在まで残存した暗黒物質が対消滅して標準模型粒子になると宇宙線として観測される可能性がある。そのため、宇宙線観測による暗黒物質の間接的な探索も行われている。近年、AMS02[129] や PAMELA[130]、FERMI/LAT[131] などによって、過剰な電子および陽電子の

フラックスが観測されており、暗黒物質の対消滅によるものと期待される。一方、反陽子フラックスは PAMELA 等によって観測され [132]、二次粒子によるものと矛盾がないことがわかっている。このため、電子・陽電子フラックスの過剰が暗黒物質によるものであれば、主に暗黒物質はレプトンと相互作用するという性質があり、 $W$  や  $Z$  ボソンとの相互作用も制限されることになる [133]。暗黒物質の対消滅によって生じるガンマ線の探査は H.E.S.S.[134] や FERMI/LAT[135] などで行われており、銀河中心付近からの高エネルギーのガンマ線が報告されている [136, 137, 138] が共に天文学的な起源である可能性が高いとされている。ガンマ線による暗黒物質探査はこのような不明確なバックグラウンドによる困難がある。暗黒物質は太陽や地球に捕獲される可能性があるため、これらの中心部は暗黒物質の密度が比較的高いと考えられており、太陽や地球内部からのミューニュートリノ探査が Super-Kamiokande[139, 140] や IceCube[141] などで行われている。

### 3.2.3 膨張宇宙におけるボルツマン方程式

上で述べたように、WIMP 暗黒物質は、宇宙初期で標準模型粒子と共に熱浴にあり、宇宙の膨張率が大きくなると熱浴から脱結合して現在まで残存する。この過程はボルツマン方程式を解くことで定量的に評価できる。そこで、ここでは膨張宇宙におけるボルツマン方程式を導出する。

衝突項を含むボルツマン方程式は

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} p^\rho p^\sigma \frac{\partial f}{\partial p^\mu} = C(f) \quad (3.29)$$

で与えられる。 $\Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}$  はクリストッフエル記号である。左辺は重力場中で粒子が自由運動する場合の位相空間の密度の時間変化を表している。一方、衝突項は粒子間の相互作用によって粒子が位相空間の別の部分へ移動する変化分を表している。

一様等方な宇宙における分布関数はエネルギーと時間の関数  $f(E, t)$  となるので、ボルツマン方程式 (3.29) の左辺は、クリストッフエル記号が  $\Gamma^0{}_{00} = 0$ ,  $\Gamma^0{}_{0i} = 0$ ,  $\Gamma^0{}_{jk} = -\frac{\dot{a}}{a} g_{jk}$  となることを用いると、

$$p^\mu \frac{\partial f(E, t)}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} p^\rho p^\sigma \frac{\partial f(E, t)}{\partial p^\mu} = E \frac{\partial f(E, t)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f(E, t)}{\partial E}$$

のように変形できる。よって、式 (3.29) は

$$E \frac{\partial f(E, t)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\mathbf{p}|^2 \frac{\partial f(E, t)}{\partial E} = C(f) \quad (3.30)$$

となる。 $C(f)$  は汎関数であるため、これを解析的に解いて分布関数  $f(E, t)$  を得るのは困難である。しかし、今興味があるのは座標空間中の粒子数密度なので、分布関数を運動量空間で積分した数密度 (2.40)

$$n(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(E, t) \quad (3.31)$$

に関する方程式を解く。 $g$  は粒子の内部自由度である。したがって、式 (3.30) の両辺を  $E$  で割り、運動量空間で積分するとその左辺は

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \left( \frac{\partial f(E, t)}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{|\mathbf{p}|^2}{E} \frac{\partial f(E, t)}{\partial E} \right) = \frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3Hn(t)$$

となる. 途中で分布関数  $f(E, t)$  が  $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$  でゼロに収束することを用いた. これより数密度  $n$  に関するボルツマン方程式

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3Hn(t) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{C(f)}{E} \quad (3.32)$$

が得られる. 右辺の衝突項については, ある粒子  $a$  に注目し,  $ab \cdots \leftrightarrow ij \cdots$  のような反応を考えると,

$$C(f_a) = -\frac{1}{2} \int \frac{g_b}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_b}{2E_b} \cdots \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_i}{2E_i} \frac{g_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{2E_j} \cdots \times (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b \cdots - p_i - p_j \cdots) \\ \times [|\mathcal{M}|_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots}^2 f_a f_b \cdots (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots - |\mathcal{M}|_{ij \cdots \rightarrow ab \cdots}^2 f_i f_j \cdots (1 \pm f_a)(1 \pm f_b) \cdots]$$

となる. ここで,

$$\gamma_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots} \equiv \int \frac{g_a}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_a}{2E_a} \frac{g_b}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_b}{2E_b} \cdots \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_i}{2E_i} \frac{g_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{2E_j} \cdots \times (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b \cdots - p_i - p_j \cdots) \\ \times |\mathcal{M}|_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots}^2 f_a f_b \cdots f_\psi (1 \pm f_i)(1 \pm f_j) \cdots \quad (3.33)$$

を定義する. 凝縮や縮退がなく, 反応後の粒子はあらゆる量子状態をとりうるものとする,  $1 \pm f_i \simeq 1$  となる. また, 平衡状態で粒子の分布関数がマクスウェル-ボルツマン統計に従うという近似を用いる. つまり,  $f_i^{\text{eq}} \simeq e^{-E/T}$  とする. さらに弾性散乱の場合, 1量子状態の粒子数のみが増減する一方, 非弾性散乱は粒子数密度が増減する. もし, 弾性散乱が非弾性散乱より十分頻繁に起こっているとすると, 運動学的平衡, すなわち分布関数は平衡状態と同じ形

$$f_i(E, T) = \frac{n_i}{n_i^{\text{eq}}} f_i^{\text{eq}}(E, T) \quad (3.34)$$

を保つ. これを用いると,

$$\gamma_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots} = \frac{n_a}{n_a^{\text{eq}}} \frac{n_b}{n_b^{\text{eq}}} \cdots \gamma_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots}^{\text{eq}}, \quad (3.35)$$

$$\gamma_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots}^{\text{eq}} \equiv \int \frac{g_a}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_a}{2E_a} \frac{g_b}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_b}{2E_b} \cdots \frac{g_i}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_i}{2E_i} \frac{g_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_j}{2E_j} \cdots \times (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b \cdots - p_i - p_j \cdots) \\ \times |\mathcal{M}|_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots}^2 e^{-E_a/T} e^{-E_b/T} \cdots \quad (3.36)$$

が得られる. したがって, 粒子  $a$  に対するボルツマン方程式は

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t} + 3Hn(t) = - \left( \frac{n_a}{n_a^{\text{eq}}} \frac{n_b}{n_b^{\text{eq}}} \cdots \gamma_{ab \cdots \rightarrow ij \cdots}^{\text{eq}} - \frac{n_i}{n_i^{\text{eq}}} \frac{n_j}{n_j^{\text{eq}}} \cdots \gamma_{ij \cdots \rightarrow ab \cdots}^{\text{eq}} \right) \quad (3.37)$$

のように与えられる.

ここで, 式 (2.60) のように宇宙膨張に寄らない量  $Y = n/s$  についてのボルツマン方程式に書き換える. 単位共動体積あたりのエントロピーは保存されることを用いると,  $\dot{n} + 3Hn = s\dot{Y}$  となる. 温度に依存する変数として  $z \equiv m/T$  を用いると, 式 (2.49) より放射優勢期では,  $t = 0.301g_*^{-1/2} m_{\text{pl}}/T^2 = 0.301g_*^{-1/2} m_{\text{pl}}z^2/m^2$  となるから,

$$\dot{Y} = \frac{dz}{dt} \frac{dY}{dz} \simeq \frac{H(m)}{z} \frac{dY}{dz}, \quad H(m) = 1.66g_*^{1/2} \frac{m^2}{m_{\text{pl}}}. \quad (3.38)$$

$m_{\text{pl}}$  はプランク質量である. このとき, 式 (2.48) のハッブルパラメーターは  $H(m)$  を用いて  $H = H(m)z^{-2}$  と表される. 衝突項は式 (3.37) の粒子数密度を  $Y$  に書き換えることで得られる. したがって, 粒子  $a$  に対するボルツマン方程式 (3.37) は

$$\frac{dY_a}{dz} = -\frac{z}{sH(m)} \left( \frac{Y_a}{Y_a^{\text{eq}}} \frac{Y_b}{Y_b^{\text{eq}}} \cdots \frac{Y_a}{Y_a^{\text{eq}}} \gamma_{a,b,\dots \rightarrow i,j,\dots}^{\text{eq}} - \frac{Y_i}{Y_i^{\text{eq}}} \frac{Y_j}{Y_j^{\text{eq}}} \cdots \gamma_{i,j,\dots \rightarrow a,b,\dots}^{\text{eq}} \right) \quad (3.39)$$

のように書き換えられる.

### 3.2.4 対消滅過程におけるボルツマン方程式とその解

ここでは安定な粒子  $\psi$  の対消滅過程  $\psi\bar{\psi} \leftrightarrow XX'$  について考える. 簡単のため, 粒子  $X, X'$  は熱平衡状態にあるものとする\*2. また, この過程は CP 対称で,  $\psi, \bar{\psi}$  の数密度の間に非対称性はないものとする. このとき, ボルツマン方程式 (3.39) は

$$\frac{dY_\psi}{dz} = -\frac{z}{sH(m_\psi)} \left( \frac{Y_\psi}{Y_\psi^{\text{eq}}} \frac{Y_{\bar{\psi}}}{Y_{\bar{\psi}}^{\text{eq}}} \gamma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow XX'}^{\text{eq}} - \frac{Y_X}{Y_X^{\text{eq}}} \frac{Y_{X'}}{Y_{X'}^{\text{eq}}} \gamma_{XX' \rightarrow \psi\bar{\psi}}^{\text{eq}} \right) \quad (3.40)$$

となる. 今の場合,  $z = m_\psi/T$  とした. ここで, CP 対称な散乱または崩壊過程では  $|\mathcal{M}|_{ab \dots \rightarrow ij \dots}^2 = |\mathcal{M}|_{ij \dots \rightarrow ab \dots}^2$  が成り立ち, さらにエネルギー保存則  $E_\psi + E_{\bar{\psi}} = E_X + E_{X'}$  から, 熱平衡状態の分布関数の間に  $f_\psi^{\text{eq}} f_{\bar{\psi}}^{\text{eq}} = e^{-(E_\psi + E_{\bar{\psi}})/T} = e^{-(E_X + E_{X'})/T} = f_X^{\text{eq}} f_{X'}^{\text{eq}}$  が成り立つ\*3から,  $\gamma_{\psi\bar{\psi} \rightarrow XX'}^{\text{eq}} = \gamma_{XX' \rightarrow \psi\bar{\psi}}^{\text{eq}} \equiv \gamma_{\psi\bar{\psi} \leftrightarrow XX'}^{\text{eq}}$  が得られる. したがって, 粒子  $\psi$  に関するボルツマン方程式は

$$\frac{dY_\psi}{dz} = -\frac{z}{sH(m_\psi)} \left( \frac{Y_\psi}{Y_\psi^{\text{eq}}} \frac{Y_{\bar{\psi}}}{Y_{\bar{\psi}}^{\text{eq}}} - \frac{Y_X}{Y_X^{\text{eq}}} \frac{Y_{X'}}{Y_{X'}^{\text{eq}}} \right) \gamma_{\psi\bar{\psi} \leftrightarrow XX'}^{\text{eq}} \quad (3.41)$$

のように変形できる. 今,  $X, X'$  は熱平衡状態を仮定しているので  $Y_{X,X'} = Y_{X,X'}^{\text{eq}}$  であり,  $\psi, \bar{\psi}$  の数密度間の非対称性はないから  $Y_\psi = Y_{\bar{\psi}}$  である. したがって, 式 (3.41) は

$$\frac{dY_\psi}{dz} = -\frac{zs}{H(m_\psi)} \left( Y_\psi^2 - Y_\psi^{\text{eq}2} \right) \langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \leftrightarrow XX'} v \rangle$$

が得られる.  $\langle \sigma v \rangle$  は熱平均化した散乱断面積であり

$$\langle \sigma_{\psi,\bar{\psi} \leftrightarrow X,X'} v \rangle \equiv \frac{1}{n_\psi^{\text{eq}2}} \gamma_{\psi\bar{\psi} \leftrightarrow XX'}^{\text{eq}} \quad (3.42)$$

で定義される. すべての熱平衡である終状態についての熱平均化した散乱断面積  $\langle \sigma_{\psi\bar{\psi} \leftrightarrow XX'} v \rangle$  の和を  $\langle \sigma_{A v} \rangle$  とすると,  $\psi$  の対消滅に関するボルツマン方程式

$$\frac{dY_\psi}{dz} = -\frac{\langle \sigma_{A v} \rangle zs}{H(m_\psi)} \left( Y_\psi^2 - Y_\psi^{\text{eq}2} \right) \quad (3.43)$$

を得る.

上のボルツマン方程式 (3.43) はかなり良い精度で近似的に解くことができる. 脱結合時に暗黒物質が相対論的 (熱い暗黒物質) な場合と非相対論的 (冷たい暗黒物質) な場合でこの近似解は異なる. そこで, ここではこの二つの場合についての近似解を求める. 脱結合を  $Y_\psi(z) - Y_\psi^{\text{eq}}(z) \sim Y_\psi^{\text{eq}}(z)$  と定義し, このときの  $z$  を  $z_f$  とおく.

\*2 非平衡な場合は  $X, X'$  に関するボルツマン方程式との連立方程式を解く必要がある.

\*3 宇宙の進化に関する粒子の化学ポテンシャルは非常に小さく, 無視できる. よって  $\mu = 0$  とした.

### 相対論的粒子の場合

相対論的な粒子の場合、熱平衡状態におけるその数密度は式 (2.44) で与えられ、 $T^3$  に比例する。エントロピー密度 (2.51) も  $T^3$  に比例することから、 $Y_\psi$  は  $z$  に関して一定となる。したがって、脱結合後の残存量  $Y_\psi(\infty)$  は  $Y_\psi^{\text{eq}}(z_f)$  によって決まる。このことから、脱結合時に相対論的粒子に対するボルツマン方程式の解は

$$Y_\psi(\infty) = Y_\psi^{\text{eq}}(z_f) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_i}{g_{*S}(z_f)} \quad (3.44)$$

となる。ここで、 $g_i = g$  (ボソン)、 $g_i = 3g/4$  (フェルミオン) である。

前章 2.2.3 節で述べたように、ニュートリノは  $T \sim 1$  MeV で脱結合し、その後、温度は  $a^{-1}$  で発展する。そして、現在の温度は  $T_\nu = 1.95$  K であり、これは  $10^{-4}$  eV に相当する。一方、ニュートリノ振動実験からニュートリノ質量が  $m_\nu \simeq 0.1$  eV 程度だとすると、相対論的に脱結合したニュートリノは現在、非相対論的に振る舞うことがわかる。よって、現在のニュートリノのエネルギー密度  $\sum \Omega_{\nu_i}(t_0)h^2$  は

$$\sum_i^3 \Omega_{\nu_i}(t_0)h^2 = \sum_i^3 \frac{m_{\nu_i} Y_\nu^\infty s_0}{\rho_c(t_0)} h^2 \simeq 3.18 \times 10^{-3} \quad (3.45)$$

となる。ここで、三代目のニュートリノの質量はすべて 0.1 eV とした。また、 $g_{*S} = 10.75$ 、 $s_0 = 2891.2T_{2.73}^3 \text{ cm}^{-3}$ 、 $\rho_c(t_0) = 1.054 \times 10^{-5} h^2 \text{ GeV cm}^{-3}$  [49] を用いた。この結果から、ニュートリノの残存量は暗黒物質  $\Omega_{\text{DM}}h^2 \simeq 0.12$  に比べて非常に小さく、暗黒物質の候補となり得ないことがわかる。また、大規模構造の観点からニュートリノが暗黒物質でないことを考慮すれば、 $\sum \Omega_{\nu_i}(t_0)h^2 < 0.12$  であるべきなので、式 (3.45) はニュートリノ質量の総和に上限値を与え、 $\sum_i^3 m_{\nu_i} < 11.32$  eV と制限される。この制限は Cowsik-McClelland bound と呼ばれる [51]。

### 非相対論的粒子の場合

宇宙の大規模構造から、暗黒物質の主成分は冷たい暗黒物質であるという説が有力である。そのため、脱結合時に非相対論的な粒子の残存量を求めることが重要となる。そこで、まず式 (2.56) を用いて、ボルツマン方程式 (3.43) を

$$\frac{dY_\psi}{dz} = -\frac{\lambda \langle \sigma_{Av} \rangle}{z^2} \left( Y_\psi^2 - Y_\psi^{\text{eq}2} \right), \quad \lambda \equiv \frac{2\pi^2 g_{*S} m_\psi^3}{45 H(m_\psi)} \quad (3.46)$$

と変形する。今興味があるのは現在における粒子  $\psi$  の残存量だから、 $z = z_0 \gg z_f$  を考える。このとき、 $Y_\psi \gg Y_\psi^{\text{eq}}$  だから、 $\psi$  の残存量は  $dY_\psi/dz = -\lambda \langle \sigma_{Av} \rangle z^{-2} Y_\psi^2$  を解くことで得られる。よって、

$$Y_\psi(t_0) = \frac{1}{\lambda J(z_f)}, \quad J(z_f) \equiv \int_{z_f}^{\infty} \frac{\langle \sigma_{Av} \rangle}{z^2} dz \quad (3.47)$$

となる。現在のエントロピー密度と宇宙の臨界密度  $s_0 = 2891.2T_{2.73}^3 \text{ cm}^{-3}$ 、 $\rho_c(t_0) = 1.054 \times 10^{-5} h^2 \text{ GeV cm}^{-3}$  [49] を用いると

$$\Omega_\psi h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1}}{J(z_f) g_*^{1/2} m_{\text{pl}}} \quad (3.48)$$

が得られる. ここで,  $g_*$ ,  $g_{*S}$  は  $z = z_f$  のときの有効自由度であり, 今考えている時期においては  $g_* = g_{*S}$  が成り立つことを用いた.

次に,  $z_f$  を求める.  $z_f$  は  $Y_\psi - Y_\psi^{\text{eq}}$  が  $Y_\psi^{\text{eq}}$  のオーダーとなるときだから,  $c$  を 1 のオーダーの係数として  $Y_\psi(z_f) - Y_\psi^{\text{eq}}(z_f) = cY_\psi^{\text{eq}}(z_f)$  とおく. さらに,  $z < z_f$  では,  $Y_\psi \simeq Y_\psi^{\text{eq}}$  であるから,  $d(Y_\psi - Y_\psi^{\text{eq}})/dz \simeq 0$ . したがって, 式 (3.46) より,

$$\frac{d(Y_\psi - Y_\psi^{\text{eq}})}{dz} = -\frac{\lambda\langle\sigma_{Av}\rangle}{z_f^2}c(c+2)Y_\psi^{\text{eq}2}(z_f) - \frac{dY_\psi^{\text{eq}}}{dz} \simeq 0 \quad (3.49)$$

となる. 非相対論的な粒子の場合, 式 (2.45), (2.56) より,

$$Y_\psi^{\text{eq}} = 0.145 \frac{g_\psi}{g_{*S}} z^{3/2} e^{-z} \quad (3.50)$$

であり,  $z_f \gg 1$  より, 式 (3.49) の微分は  $dY_\psi^{\text{eq}}/dz \simeq -Y_\psi^{\text{eq}}$  となる. したがって, 式 (3.49) を  $z_f$  について変形すると,

$$z_f = \ln \frac{0.145g_\psi\lambda\langle\sigma_{Av}\rangle c(c+2)}{g_{*S}^{1/2}z_f^{1/2}} \simeq \ln \frac{0.038m_{\text{pl}}m_\psi g_\psi\langle\sigma_{Av}\rangle c(c+2)}{g_{*S}^{1/2}z_f^{1/2}} \quad (3.51)$$

となる.

非相対論的な粒子の残存量を求めるためには熱平均化された散乱断面積  $\langle\sigma v\rangle$  を求める必要がある. 非相対論的な粒子の二体対消滅過程において, 式 (3.42) は

$$\langle\sigma v\rangle = \frac{e^{2m_\psi/T}}{(2\pi m_\psi T)^3} \int d^3p_\psi d^3p_{\bar{\psi}} e^{-(E_\psi+E_{\bar{\psi}})/T} \sigma v \quad (3.52)$$

で与えられる. この積分は解析的に計算することができないため, 通常, 非相対論的な粒子の相対速度  $v^2$  が十分小さいとして,

$$\sigma v = a + bv^2 + \mathcal{O}(v^4) \quad (3.53)$$

のように展開して近似を行う.  $v$  の奇数次については, 熱平均をとると消える. したがって, これを式 (3.52) に代入して積分を実行すると

$$\langle\sigma v\rangle = a + \frac{6b}{z} + \mathcal{O}(z^{-2}) \quad (3.54)$$

が得られる. ここで, エネルギー等分配則  $m\langle v^2\rangle = T$  を用いた. 各次数  $n$  について,  $n = 0$  のとき,  $s$  波消滅,  $n = 1$  のとき,  $p$  波消滅という.

このとき, 式 (3.47) の積分は

$$J(z_f) = \frac{1}{z_f} \left( a + \frac{3b}{z_f} \right) + \mathcal{O}(z_f^{-3}). \quad (3.55)$$

したがって, 非相対論的な粒子の残存量 (3.48) は

$$\Omega_\psi h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 z_f \text{ GeV}^{-1}}{(a + 3b/z_f) g_*^{1/2} m_{\text{pl}}} \quad (3.56)$$

となる.  $z_f$  は式 (3.51) を解くことで得られる. このとき定数  $c$  は数値計算の結果から,  $c(c+2) = n+1$  ととればよいことが知られており,

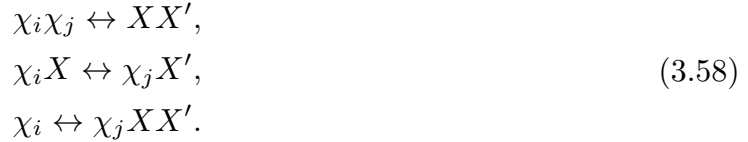
$$z_f = \ln \frac{0.038m_{\text{pl}}m_\psi g_\psi (a + 6b/z_f)(n+1)}{z_f^{1/2}} \quad (3.57)$$

で与えられることがわかる.

### 3.2.5 共対消滅過程を含むボルツマン方程式

前節の議論は、暗黒物質同士の対消滅過程における残存量を見積もった。しかし、暗黒物質と他の粒子が 5 ~ 10% 以下の縮退度で縮退している場合、これらの消滅過程についても考慮する必要がある [142].

今、 $N$  個の質量が縮退した粒子  $\chi_i$  ( $i = 1 - N$ ) を考える。これらの質量を  $m_i$  ( $m_{i=2-N} > m_1$ ) とし、以下のような標準模型粒子  $X, X'$  との反応過程を考える。



粒子  $\chi_i$  に対するボルツマン方程式は、(3.39) から、

$$\begin{aligned}\frac{dY_{\chi_i}}{dz} = - \sum_j \frac{z}{sH(m_1)} &\left[ \left( \frac{Y_{\chi_i} Y_{\chi_j}}{Y_{\chi_i}^{\text{eq}} Y_{\chi_j}^{\text{eq}}} - \frac{Y_X Y_{X'}}{Y_X^{\text{eq}} Y_{X'}^{\text{eq}}} \right) \gamma_{\chi_i \chi_j \leftrightarrow X X'}^{\text{eq}} \right. \\ &+ \left( \frac{Y_{\chi_i} Y_X}{Y_{\chi_i}^{\text{eq}} Y_X^{\text{eq}}} - \frac{Y_{\chi_j} Y_{X'}}{Y_{\chi_j}^{\text{eq}} Y_{X'}^{\text{eq}}} \right) \gamma_{\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X'}^{\text{eq}} \\ &\left. + \left( \frac{Y_{\chi_i}}{Y_{\chi_i}^{\text{eq}}} - \frac{Y_{\chi_j} Y_X Y_{X'}}{Y_{\chi_j}^{\text{eq}} Y_X^{\text{eq}} Y_{X'}^{\text{eq}}} \right) \gamma_{\chi_i \leftrightarrow \chi_j X X'}^{\text{eq}} \right]\end{aligned}\tag{3.59}$$

となり、暗黒物質の残存量の計算にはこれらを連立して解く必要がある。ここで、 $z = m_1/T$  とした。しかし、脱結合後に残存した  $\chi_i$  は崩壊して最終的に  $\chi_1$  となるとすると、 $\chi_i$  の残存量をすべて足しあげることによって暗黒物質の残存量が得られる。したがって、 $Y_{\chi_1} = \sum_i Y_{\chi_i}$  に対するボルツマン方程式

$$\frac{dY_{\chi_1}}{dz} = - \sum_{i,j} \frac{z}{sH(m_1)} \left[ \left( \frac{Y_{\chi_i} Y_{\chi_j}}{Y_{\chi_i}^{\text{eq}} Y_{\chi_j}^{\text{eq}}} - \frac{Y_X Y_{X'}}{Y_X^{\text{eq}} Y_{X'}^{\text{eq}}} \right) \gamma_{\chi_i \chi_j \leftrightarrow X X'}^{\text{eq}} \right]\tag{3.60}$$

を評価する必要がある。反応過程  $\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X'$ ,  $\chi_i \leftrightarrow \chi_j X X'$  に関する項は反応の前後で  $\sum_i Y_{\chi_i}$  を変えないため、 $i, j$  について和をとると消える。今考えているエネルギースケールが宇宙は放射優勢期だとすると、 $H(m_1) = 1.66g_*^{1/2} m_1^2/m_{\text{pl}}$ 。さらに、標準模型粒子  $X, X'$  は熱平衡状態であるから、 $Y_{X(X')} = Y_{X(X')}^{\text{eq}}$  となるので、式 (3.60) は

$$\begin{aligned}\frac{dY_{\chi_1}}{dz} &= - \frac{zs}{H(m_{H_0})} \sum_{i,j} (Y_i Y_j - Y_i^{\text{eq}} Y_j^{\text{eq}}) \langle \sigma_{ij} v \rangle, \\ \langle \sigma_{ij} v \rangle &\equiv \sum_{X, X'} \frac{1}{n_i^{\text{eq}}} \frac{1}{n_j^{\text{eq}}} \gamma_{ij \leftrightarrow X X'}^{\text{eq}}\end{aligned}\tag{3.61}$$

となる。ここで、反応過程  $\chi_i \chi_j \leftrightarrow X X'$  と  $\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X'$  および  $\chi_i \leftrightarrow \chi_j X X'$  の反応率を比べる。それぞれの反応率は式 (2.44), (2.45) から、

$$(\chi_i \chi_j \leftrightarrow X X') \quad n_{\chi_i}^{\text{eq}} n_{\chi_j}^{\text{eq}} \sigma_{ij} \sim T^3 m_i^{3/2} m_j^{3/2} \sigma_{ij} e^{-(m_i+m_j)/T},\tag{3.62}$$

$$(\chi_i X \leftrightarrow \chi_j X') \quad n_{\chi_i}^{\text{eq}} n_X^{\text{eq}} \sigma'_{ij} \sim T^{9/2} m_i^{3/2} \sigma'_{ij} e^{-m_i/T}\tag{3.63}$$



となる.  $\chi_i\chi_j \leftrightarrow XX'$  はボルツマン因子が  $e^{-(m_i+m_j)/T}$  となるのに対し  $\chi_iX \leftrightarrow \chi_jX'$  は  $e^{-m_i/T}$  である. したがって, 散乱断面積  $\sigma_{ij}$  と  $\sigma'_{ij}$  の比が非常に大きくなければ,  $\chi_iX \leftrightarrow \chi_jX'$  の反応過程は  $\chi_i\chi_j \leftrightarrow XX'$  の反応率より

$$\frac{n_X}{n_{\chi_j}} \sim \left(\frac{T}{m_j}\right)^{3/2} e^{m_j/T} \sim 10^9 \quad (3.64)$$

だけ大きくなる. ここで,  $T$  は暗黒物質が熱平衡から離脱するときの温度の見積もりとして  $T_f \sim m_1/25$  を用いた. また,  $\chi_i \leftrightarrow \chi_jXX'$  の反応率についても同様に, 崩壊率を  $\Gamma$  として,

$$n_{\chi_i}^{\text{eq}} \sim T^{3/2} m_i^{3/2} \Gamma_{ij} e^{-m_j/T} \quad (3.65)$$

となるため,  $\chi_i\chi_j \leftrightarrow XX'$  よりも反応率が非常に大きくなる. したがって,  $\chi_i\chi_j \leftrightarrow XX'$  反応が凍結した後もこれらの反応による寄与が大きいため,  $n_\chi = \sum_i n_{\chi_i}$  中の  $n_{\chi_i}$  の割合は熱平衡状態時のその割合と変わらない\*4, つまり,

$$\frac{n_{\chi_i}}{n_\chi} \simeq \frac{n_{\chi_i}^{\text{eq}}}{n_\chi^{\text{eq}}} \quad (3.66)$$

のように近似できる. この近似を用いると, 暗黒物質に関するボルツマン方程式 (3.61) は最終的に

$$\frac{dY_\chi}{dz} = -\frac{z\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle s}{H(m_1)} \left(Y_{\chi_1}^2 - Y_{\chi_1}^{\text{eq}2}\right) \quad (3.67)$$

となる.  $\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle$  は有効散乱断面積で

$$\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle = \frac{1}{g_{\text{eff}}^2} \sum_{i,j} g_i g_j \frac{m_i^{3/2} m_j^{3/2}}{m_1^3} e^{-(m_i-m_1)/T} e^{-(m_j-m_1)/T} \langle\sigma_{ij}v\rangle \quad (3.68)$$

であり,  $g_{\text{eff}}$  は有効自由度と呼ばれ,

$$g_{\text{eff}} \equiv \sum_i g_i \left(\frac{m_i}{m_1}\right)^{3/2} e^{-(m_i-m_1)/T} \quad (3.69)$$

で与えられる. 有効散乱断面積  $\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle$  および有効自由度  $g_{\text{eff}}$  にはボルツマン因子があり, その肩には  $m_1$  との質量差が現れている. そのため, この質量差が大きくなると有効散乱断面積, 有効自由度はボルツマン因子によって抑制されることがわかる.

以上より, 共対消滅過程における暗黒物質の残存量は, 3.2.4 節の議論と同様に求めることができ,

$$\Omega_{\chi_1} h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 \text{ GeV}^{-1}}{J(z_f) g_*^{1/2} m_{\text{pl}}}, \quad J(z_f) = \int_{z_f}^{\infty} \frac{\langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle}{z^2} dz, \quad (3.70)$$

$$z_f = \ln \frac{0.038 m_{\text{pl}} m_{\chi_1} g_{\chi_1} \langle\sigma_{\text{eff}}v\rangle (n+1)}{z_f^{1/2}}$$

を解いて得られる.

\*4  $\chi_i\chi_j \leftrightarrow XX'$  過程が凍結すると,  $n_\chi$  が不変となる. しかし, その後も  $\chi_i \leftrightarrow \chi_j$  反応が有効であるから  $n_\chi$  中に含まれる  $n_{\chi_i}$  の割合は熱平衡時と変わらない.

### 3.3 宇宙のバリオン数非対称性

現在, 我々の身のまわりにあるものは物質であり, 反物質はほとんど存在しない. 2.2.4 節で述べたように, 軽元素や CMB の観測から光子-バリオン比は

$$\begin{aligned}\eta_B &= (5.7 - 6.7) \times 10^{-10} && (\text{BBN : 95\% CL}), \\ \eta_B &= (6.047 \pm 0.074) \times 10^{-10} && (\text{CMB : 95\% CL})\end{aligned}\tag{3.71}$$

となることがわかっている [49]. このような粒子-反粒子非対称性はインフレーション後に生成されたと考えられる. なぜなら, 宇宙の初期条件としてバリオン数非対称だったとしても, インフレーション後の再加熱時に標準宇宙論における全エントロピーが生成されるため, これによって薄められてしまうからである. したがって, このような非対称性が素粒子的な要因によって生じたものだとすると, 標準模型ではこのような非対称性を生み出す機構が不十分なため, 模型を拡張する必要がある.

#### 3.3.1 サハロフの三条件

バリオン数対称な宇宙から非対称な宇宙へと発展するためには以下の3つの条件が必要である [143].

- バリオン数の破れ  
すべての相互作用でバリオン数が保存されている場合, バリオン数は生成されないため, これを破る相互作用が存在しなければならない.
- C および CP 対称性の破れ  
バリオン数を生成する反応過程が存在したとしても, これと同時に反バリオンを生成する過程も存在する. これらが同頻度で起こる場合, バリオン数を生成することができない. C 変換とは粒子と反粒子の入れ替え操作である. あるバリオン数を  $B$  だけ破る相互作用  $i, j \rightarrow a, b$  を考える. CPT 定理<sup>\*5</sup>により

$$\mathcal{M}(i, j \rightarrow a, b) = \mathcal{M}(\bar{a}, \bar{b} \rightarrow \bar{i}, \bar{j})\tag{3.72}$$

となるので, もし, C 対称ならば,  $\mathcal{M}(i, j \rightarrow a, b) = \mathcal{M}(\bar{i}, \bar{j} \rightarrow \bar{a}, \bar{b})$  だから,

$$\mathcal{M}(i, j \rightarrow a, b) \stackrel{\text{CPT}}{=} \mathcal{M}(\bar{a}, \bar{b} \rightarrow \bar{i}, \bar{j}) \stackrel{\text{C}}{=} \mathcal{M}(a, b \rightarrow i, j) \stackrel{\text{CPT}}{=} \mathcal{M}(\bar{i}, \bar{j} \rightarrow \bar{a}, \bar{b})\tag{3.73}$$

が成り立つ. したがって, バリオン数は C 変換で  $B \rightarrow -B$  となることを用いると,

$$B = B (|\mathcal{M}|^2(i, j \rightarrow a, b) - |\mathcal{M}|^2(\bar{i}, \bar{j} \rightarrow \bar{a}, \bar{b}) - |\mathcal{M}|^2(a, b \rightarrow i, j) + |\mathcal{M}|^2(\bar{a}, \bar{b} \rightarrow \bar{i}, \bar{j})) = 0$$

となり, 正味のバリオン数は生成されない. また, C 対称性が破れていても, 粒子と反粒子の入れ替えと同時に空間反転を行う CP 変換の対称性が保たれていると, バリオン数は生成できない. 例えば, CP 変換でクォークはカイラリティが逆の反クォークに変換され

\*5 相対論的量子場の理論では CPT 対称性が保存される.

	$u_{L,R}$	$d_{L,R}$	$\nu_L$	$e_{L,R}$
$B$	1/3	1/3	0	0
$L$	0	0	1	1

表 3.2 標準模型粒子のバリオン数とレプトン数. 反粒子については逆符号の値をとる.

るが, CP 対称性が存在すると, これら 2 つが同等となるため, 全体のバリオン数は変化しない. したがって, バリオン数を生成するためには C 対称性および CP 対称性が破れなければならない.

- 熱平衡状態からの逸脱

バリオン数を生成する過程が熱平衡状態にあるとその逆過程も同頻度で起こるため, 系全体のバリオン数は変化しない. そのため, バリオン数を破る反応は熱平衡から離脱した状況で行われなければならない.

### 3.3.2 スファレロン過程

標準模型ではバリオン数  $B$ , レプトン数  $L$  は表 3.2 のように割り当てられる. 大域的な  $U_{B(L)}(1)$  変換:  $\psi(x) \rightarrow e^{-iB(L)\theta}\psi(x)$  の下で標準模型のラグランジアンは不変である. したがって, 保存カレントであるバリオンカレント  $j_B^\mu$  およびレプトンカレント  $j_L^\mu$  が存在し,

$$j_B^\mu = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n_f} [(\bar{u}_L)_i \gamma^\mu (u_L)_i + (\bar{d}_L)_i \gamma^\mu (d_L)_i + (\bar{u}_R)_i \gamma^\mu (u_R)_i + (\bar{d}_R)_i \gamma^\mu (d_R)_i], \quad (3.74)$$

$$j_L^\mu = \sum_{i=1}^{n_f} [(\bar{\nu}_L)_i \gamma^\mu (\nu_L)_i + (\bar{e}_L)_i \gamma^\mu (e_L)_i + (\bar{e}_R)_i \gamma^\mu (e_R)_i], \quad (3.75)$$

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = 0 \quad (3.76)$$

となる.  $i$  は世代数である. このような古典的な手順に従って導かれるカレントは保存される. しかし, 量子効果を考慮すると, バリオンカレントとレプトンカレントは

$$\partial_\mu j_B^\mu = \partial_\mu j_L^\mu = \frac{n_f}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (g_2^2 W_{\mu\nu}^a W_{\rho\sigma}^a - g_Y^2 B_{\mu\nu} B_{\rho\sigma}) \quad (3.77)$$

となり, 対称性が破れる (量子異常)[144, 145].  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  は完全反対称テンソルである. また, 右辺は微分をくくりだせて

$$\frac{n_f}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (g_2^2 W_{\mu\nu}^a W_{\rho\sigma}^a - g_Y^2 B_{\mu\nu} B_{\rho\sigma}) = \frac{n_f}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left[ g_2^2 A_\nu^a \left( \partial_\rho A_\sigma^a - \frac{2g_2}{3} \epsilon^{abc} A_\rho^b A_\sigma^c \right) - g_Y^2 B_\nu \partial_\rho B_\sigma \right] \quad (3.78)$$

のように書くことができる. ここで,

$$K^\mu \equiv \frac{g_2^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu^a \left( \partial_\rho A_\sigma^a - \frac{2g_2}{3} \epsilon^{abc} A_\rho^b A_\sigma^c \right), \quad (3.79)$$

$$k^\mu \equiv \frac{g_Y^2}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_\nu \partial_\rho B_\sigma \quad (3.80)$$

と定義する.  $\partial_\mu j^\mu$  を全時空間で積分すると, 電荷の定義  $Q_c \equiv \int d^4x j^0$  より

$$\int d^4x \partial_\mu j^\mu = \int dt d^3x (\partial_0 j^0 + \partial_i j^i) = \int d^3x j^0 \Big|_{t_i}^{t_f} = Q_c(t_f) - Q_c(t_i) \equiv \Delta Q_c$$

となるから, 式 (3.77) の両辺を全時空間で積分した結果は,

$$\Delta B = \Delta L = n_f \int d^3x (K^0 + k^0) \Big|_{t_i}^{t_f}$$

となる. ここで,

$$N_{CS}(t) = \int d^3x K^0 \quad (3.81)$$

はチャーン・サイモンズ数と呼ばれる. 一般に, 非可換ゲージ理論のゲージ場  $A_\mu^a$  は真空 ( $W_{\mu\nu}^a = 0$ ) を満たす  $A_\mu^a$  の配位が多数存在し, 各真空はこのチャーン・サイモンズ数によって区別される. 始状態と終状態それぞれの時刻  $t_i, t_f$  にゲージ場がある真空状態 ( $W_{\mu\nu} = 0, B_{\mu\nu} = 0$ ) にあるとすると, この間のバリオン数およびレプトン数は

$$\Delta B = \Delta L = n_f (N_{CS}(t_f) - N_{CS}(t_i))$$

となるから, チャーン・サイモンズ数の変化を  $\Delta N_{CS}$  と表わせば,

$$\Delta(B - L) = 0, \quad \Delta(B + L) = 2n_f \Delta N_{CS} \quad (3.82)$$

となる. したがって, 真空間変位によって  $B - L$  は保存されるが  $B + L$  が変化することがわかる. このような遷移を引き起こすゲージ場の配位をインスタントンといい, 真空間のポテンシャルの壁をトンネル効果で通過する解である. その遷移確率  $P_{\text{instanton}}$  は  $T = 0$  で

$$P_{\text{instanton}} \sim e^{-\frac{8\pi^2}{g_2^2}} \sim 10^{-200} \quad (3.83)$$

と非常に小さく, このような遷移はほとんど起こらない [146, 147]. 一方, 有限の温度では二つの真空間のポテンシャルの山を越える熱的遷移も考えられる [148, 149]. このような有限温度系における場の配位はスファレロン解と呼ばれる. スファレロンによる遷移確率はボルツマン因子に比例し, これは  $E_{\text{spha}} \simeq 8\pi M_W/g_2^2$  として  $e^{-\frac{E_{\text{spha}}}{T}}$  と見積もられている. このため, 温度が電弱スケール程度で真空間の遷移が抑制されないことが指摘された [150]. 宇宙の温度がさらに高温の状態では, 電弱対称性が回復し, 真空間の遷移確率は次元解析により

$$P_{\text{spha}} \simeq \kappa(\alpha_W T)^4 \quad (3.84)$$

と見積もられ,  $B + L$  の破れが頻繁に起こる.  $\kappa$  は無次元定数で, 格子ゲージ理論のシミュレーションによって  $\kappa = 1.09 \pm 0.04$  が与えられている [151]. 初期宇宙のような高温領域における, 量子異常による  $\Delta(B + L) \neq 0$  過程をスファレロン過程という.

上で述べたように宇宙初期 ( $T > T_{\text{EW}}$ ) では  $B$  と  $L$  は破れるが  $B - L$  は保存する. 以下では  $T > T_{\text{EW}}$  でスファレロン過程が十分な頻度で起こるものとして, 保存量  $B - L$  とバリオン数およびレプトン数との関係について議論する.

今考えているエネルギースケールではクォークとレプトンの質量はゼロであり、これらは化学平衡状態にある。内部自由度  $g_X$  の粒子  $X$  の化学ポテンシャルを  $\mu_X$  とすると、その数密度は

$$n_X - n_{\bar{X}} = \begin{cases} \frac{g_X T^2}{6} \mu_X & (\text{フェルミオン}) \\ \frac{g_X T^2}{3} \mu_X & (\text{ボソン}) \end{cases}$$

で与えられる。後で扱う模型のために、ここでは標準模型フェルミオンの世代数  $n_f$ 、スカラー二重項  $\phi = (\phi^+, \phi^0)^T$  の数が  $m$  個を含み、これらは熱平衡状態であるものとする。湯川相互作用は化学平衡状態であるから、各粒子の化学ポテンシャルとの間に

$$\mu_{qL_i} - \mu_{uR_j} = -\mu_\phi, \quad \mu_{qL_i} - \mu_{dR_j} = \mu_\phi, \quad \mu_{\ell L_i} - \mu_{eR_j} = \mu_\phi \quad (3.85)$$

なる関係が成り立つ。さらにこのとき、湯川相互作用にはフレーバー間の混合があるためクォークとレプトンの化学ポテンシャルは平均化され、

$$\mu_{qL_i} = \mu_{qL}, \quad \mu_{uR_i} = \mu_{uR}, \quad \mu_{dR_i} = \mu_{dR}, \quad \mu_{\ell L_i} = \mu_{\ell L}, \quad \mu_{eR_i} = \mu_{eR} \quad (3.86)$$

となる。スファレロンによる過程が平衡状態にあるとき、 $3q_L \ell_L$  生成が各世代について起こるので、化学ポテンシャルは

$$\sum_i^{n_f} (3\mu_{qL} + \mu_{\ell L}) = 0 \quad (3.87)$$

のような関係が得られる。また、ハイパーチャージ  $Y$  が保存するから、

$$\begin{aligned} Y &= \sum_i^{n_f} \left[ \frac{1}{3} (n_{qL_i} - n_{\bar{q}L_i}) + \frac{4}{3} (n_{uR_i} - n_{\bar{u}R_i}) - \frac{2}{3} (n_{dR_i} - n_{\bar{d}R_i}) - (n_{\ell L_i} - n_{\bar{\ell}L_i}) \right. \\ &\quad \left. - 2(n_{eR_i} - n_{\bar{e}R_i}) \right] + \sum_i^m (n_\phi - n_{\phi^\dagger}) \\ &= \frac{T^2}{3} n_f (\mu_{qL} + 2\mu_{uR} - \mu_{dR} - \mu_{\ell L} - \mu_{eR}) + \frac{T^2}{3} 2m\mu_\phi = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

が成り立つ。したがって、6個の独立な化学ポテンシャルと5個の独立な方程式があるから、全ての化学ポテンシャルを  $\mu_{qL}$  で表すことができ、

$$\begin{aligned} \mu_{\ell L} &= -3\mu_{qL}, \quad \mu_\phi = -\frac{4n_f}{2n_f + m} \mu_{qL}, \quad \mu_{uR} = \frac{-2n_f + m}{2n_f + m} \mu_{qL}, \\ \mu_{dR} &= \frac{6n_f + m}{2n_f + m} \mu_{qL}, \quad \mu_{eR} = \frac{-2n_f - 3m}{2n_f + m} \mu_{qL} \end{aligned} \quad (3.89)$$

となる。これを用いてバリオン数密度  $B$  とレプトン数密度  $L$  を表す。それぞれの量子数 (表 3.2

参照) をもつ粒子の化学ポテンシャルを用いてこれらを  $\mu_{qL}$  で表すと,

$$\begin{aligned} B &= \sum_i^{n_f} \left[ \frac{1}{3}(n_{qLi} - \bar{n}_{qLi}) + \frac{1}{3}(n_{uRi} - \bar{n}_{uRi}) + \frac{1}{3}(n_{dRi} - \bar{n}_{dRi}) \right] \\ &= \frac{T^2}{6} n_f (2\mu_{qL} + \mu_{uR} + \mu_{dR}) \\ &= \frac{T^2}{6} \left( \frac{8n_f + 4m}{2n_f + m} \right) \mu_{qL}, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} L &= \sum_i^{n_f} [(n_{\ell Li} - n_{\bar{\ell} Li}) + (n_{eRi} - n_{\bar{e} Ri})] \\ &= \frac{T^2}{6} n_f (2\mu_{\ell L} + \mu_{eR}) \\ &= \frac{T^2}{6} \left( \frac{-14n_f - 9m}{2n_f + m} \right) \mu_{qL} \end{aligned} \quad (3.91)$$

が得られる. これより, 保存量  $B - L$  は

$$B - L = \frac{T^2}{6} \left( \frac{22n_f^2 + 13n_fm}{2n_f + m} \right) \mu_{qL} \quad (3.92)$$

となることがわかる. これを  $\mu_{qL}$  について解き, (3.91) に代入すると, バリオン数密度を保存量である  $B - L$  数密度で表すことができ,

$$B = \frac{8n_f + 4m}{22n_f + 13m} (B - L) \quad (3.93)$$

が得られる. これは  $B$  や  $L$  がゼロでなかったとしても,  $B - L$  がゼロであれば, 反応過程においてバリオン数やレプトン数が消えてしまうことを意味している. つまり,  $B - L$  が有限であればバリオン数非対称性が実現される.  $B - L$  を生成する例として, レプトジェネシスが知られている [152]. 3.1.2 節で議論したモデルはマヨラナ質量項でレプトン数を破る. そのため, 右巻きニュートリノの崩壊によってレプトン数が生成される. つまり, 生成されたレプトン数を  $\Delta L$  とおくと, この崩壊過程は  $B - L = \Delta L \neq 0$  の反応となっており, 最終的に有限のバリオン数が残ることになる. このシナリオの詳細については次節で議論する.

## 3.4 インフレーション宇宙論

2.2 節で述べたように, 標準宇宙論は軽元素合成比を説明し, 大きな成功を収めた. しかし, その一方で地平線問題や平坦性問題のような標準宇宙論では説明できない問題が存在する. インフレーションはこの問題を解決する極初期宇宙の進化モデルであり, 佐藤勝彦やグースによって提唱された. インフレーションは, 極初期宇宙において, フリードマン宇宙のような膨張ではなく, 指数関数的に膨張するド・ジッター宇宙のような時代が存在したとするシナリオである.

### 3.4.1 宇宙のインフレーションと諸問題の解決

標準宇宙論の問題点である平坦性問題, 地平線問題はインフレーションを導入する事で解決することができる.

加速膨張は  $\ddot{a} > 0$  であるから、式 (2.33) より  $P < -\rho/3$  となり、宇宙全体の圧力が負であることがわかる。これは物質優勢期 ( $P = 0$ ) と放射優勢期 ( $P = \rho/3$ ) のどちらも当てはまらない。ここで、 $P = -\rho$  の場合を考える。 $P = -\rho$  となる宇宙の時期はド・ジッター期と呼ばれる。極初期の宇宙では曲率項と宇宙項を無視できるから、式 (2.29), (2.32) より

$$\begin{aligned}\dot{\rho} + 3H(\rho + P) &= 0 \implies \rho = \text{const.}, \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho \implies H = \text{const.}\end{aligned}$$

が得られる。このときのハッブルパラメーターを  $H_I$  とすれば、スケール因子が求まり

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_I = H_I^2 \implies a \propto e^{H_I t} \quad (3.94)$$

となる。これは宇宙が指数関数的に膨張していることを示しており、このような膨張をインフレーションと呼ぶ。

### 地平線問題の解決

上で議論したように、インフレーション中のハッブルパラメーターはほぼ一定となる。インフレーションが十分長く続くことで因果的に結びついた領域を地平線の外へ追い出すことができる。そして、インフレーションが終了して宇宙膨張が緩やかになると、この外に追い出されていた領域が再び地平線内に入ってくる。この領域は過去に因果的に結びついていたのであるから、CMB がほぼ一様な強度で全天空から降り注いでいることはごく自然なことであり、地平線問題が解決される。

ではどのくらいの期間、インフレーションが続けば地平線問題が解決されるのか。インフレーションの前後で宇宙がどのくらい膨張したかを表す量として e-fold 数がある。インフレーション開始時刻を  $t_i$ 、終了時刻を  $t_f$  とおくと、これは

$$N \equiv \ln \frac{a(t_f)}{a(t_i)} = \int_{t_i}^{t_f} H dt \quad (3.95)$$

で定義される。地平線問題は現在観測される領域のほとんどが過去に因果関係をもたないことに起因する。これを解決するためには、現在の地平線のインフレーション開始時のスケールがそのときの地平線内であればよい。よって、この条件は

$$\frac{a(t_i)}{a(t_0)} d_{H_0}(t_0) < d_H(t_i) \quad (3.96)$$

で与えられる。再加熱時刻を  $t_{\text{reh}}$ 、物質=放射となる時刻を  $t_{\text{eq}}$  とすると

$$\begin{aligned}\frac{a(t_i)}{a(t_0)} d_{H_0}(t_0) &= \frac{a(t_i)}{a(t_f)} \frac{a(t_f)}{a(t_{\text{reh}})} \frac{a(t_{\text{reh}})}{a(t_{\text{eq}})} \frac{a(t_{\text{eq}})}{a(t_0)} d_H(t_0) \\ &= \frac{a(t_f)}{a(t_{\text{reh}})} \frac{a(t_{\text{reh}})}{a(t_{\text{eq}})} \frac{a(t_{\text{eq}})}{a(t_0)} e^{-N} d_H(t_0) < d_H(t_i), \\ \therefore N &> \ln \left[ \frac{a(t_f)}{a(t_{\text{reh}})} \frac{a(t_{\text{reh}})}{a(t_{\text{eq}})} \frac{a(t_{\text{eq}})}{a(t_0)} \frac{H(t_i)}{H_0} \right].\end{aligned}$$

ここで、再加熱期の宇宙は物質優勢宇宙としてふるまうと仮定すると、

$$\frac{a(t_f)}{a(t_{\text{reh}})} \propto \left( \frac{\rho_f}{\rho_{\text{reh}}} \right)^{-1/3} \quad (3.97)$$

である。再加熱の後、宇宙は放射優勢期、物質優勢期を経るので、

$$\frac{a(t_{\text{reh}})}{a(t_{\text{eq}})} \propto \left( \frac{\rho_{\text{reh}}}{\rho_{\text{eq}}} \right)^{-1/4}, \quad \frac{a(t_{\text{eq}})}{a(t_0)} \propto \left( \frac{\rho_{\text{eq}}}{\rho_0} \right)^{-1/3} \quad (3.98)$$

が得られる。また、フリードマン方程式 (2.32) から

$$\frac{H_i}{H_0} = \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{1/2}. \quad (3.99)$$

よって、e-fold 数は

$$\begin{aligned} N &> \ln \left[ \left( \frac{\rho_f}{\rho_{\text{reh}}} \right)^{-1/3} \left( \frac{\rho_{\text{reh}}}{\rho_{\text{eq}}} \right)^{-1/4} \left( \frac{\rho_{\text{eq}}}{\rho_0} \right)^{-1/3} \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{1/2} \right] \\ &= \ln \frac{10^{16} \text{ GeV}}{\rho_{\text{eq}}^{1/12} \rho_0^{1/6}} + \ln \frac{\rho_i^{1/4}}{10^{16} \text{ GeV}} + \ln \frac{\rho_i^{1/4}}{\rho_f^{1/4}} + \ln \frac{\rho_{\text{reh}}^{1/12}}{\rho_f^{1/12}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\rho_{\text{eq}}^{1/4} = 1 \text{ eV}$ 、 $\rho_0 \simeq 8 \times 10^{-11} \Omega_0 h^2$ 、 $h \simeq 0.673$ 、 $\Omega_0 \simeq 0.24$  だから、結局、

$$N > 62 + \frac{\rho_i^{1/4}}{10^{16} \text{ GeV}} + \ln \frac{\rho_i^{1/4}}{\rho_f^{1/4}} + \ln \frac{\rho_{\text{reh}}^{1/12}}{\rho_f^{1/12}} \quad (3.100)$$

が得られる。後ろの三つの項はインフレーションに関連したエネルギースケールの不確定性を表している。

### 平坦性問題の解決

平坦性問題は  $\ddot{a} < 0$  であることに起因しているため、 $\ddot{a} > 0$  となるインフレーションはこの問題を解決することができる。式 (2.32) において、 $\ddot{a} > 0$  より、 $1/aH$  は時間と共に小さくなるため、 $\Omega_K$  は 0 に近づいていく。すなわち、式 (2.36) は式 (3.94) から、

$$\Omega_K \propto -\frac{K}{(e^{H_I t})^2 H_I^2} \quad (3.101)$$

となり、 $\Omega_K$  の初期値がどんな値であったとしてもインフレーションが十分長く続けば  $\Omega_K \rightarrow 0$  となる。これにより、標準宇宙論では説明できなかった初期宇宙において、 $\Omega_K$  が 0 に非常に近い状態から始まることを説明することができる。

### 3.4.2 インフレーションの機構

前節で宇宙初期にインフレーションがあれば標準宇宙論における問題を解決できることを述べた。このような急膨張はスカラー場を導入することで実現される。インフレーションを引き起こすスカラー場はインフラトンと呼ばれる。このスカラー場を  $\varphi$  とし、その作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi) \right] \quad (3.102)$$



を考える。ここで、FRW 計量より、 $\sqrt{-g} = a^3$  である。このとき、スカラー場のエネルギー運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^\mu \varphi} \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (3.103)$$

より、エネルギー密度  $\rho_\varphi$  と圧力  $P_\varphi$  は

$$\rho_\varphi = T_{00} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (3.104)$$

$$P_\varphi = \frac{T_{ii}}{a^2} = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \quad (3.105)$$

となる。ここで、勾配項  $(\nabla\varphi)^2/a^2$  は、インフレーションによりスケール因子が十分大きいとして無視した。この二式から、状態方程式は

$$w = \frac{P_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi)}{\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi)} \quad (3.106)$$

と書ける。上で述べたように、指数関数的宇宙膨張が起こるためには  $w = -1$  であればいいから、ここからポテンシャル優勢  $\dot{\varphi}^2/2 \ll V(\varphi)$  のとき、インフレーションが実現することがわかる。また、インフラトンのオイラー・ラグランジュ方程式は

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V_{,\varphi}(\varphi) = 0 \quad (3.107)$$

となる\*6。ここで、 $V_{,\varphi}(\varphi) = dV(\varphi)/d\varphi$  とした。摩擦項  $3H\dot{\varphi}$  が現れていることに注目する。インフレーションが十分な期間起こるためには、ポテンシャル面をインフラトンがゆっくり転がる必要があり、場の速度の時間変化が摩擦項に比べて十分小さくならなければならない。したがって、 $|\ddot{\varphi}| \ll |3H\dot{\varphi}|$  が要求される。このようなインフレーションのシナリオはスローロールインフレーションと呼び、インフレーションの条件

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi), \quad |\ddot{\varphi}| \ll |3H\dot{\varphi}| \quad (3.108)$$

はスローロール条件と呼ぶ。この条件の下、フリードマン方程式 (2.32) と運動方程式 (3.107) 式は、

$$H^2 \simeq \frac{V(\varphi)}{3M_{\text{pl}}^2}, \quad (3.109)$$

$$3H\dot{\varphi} \simeq -V_{,\varphi}(\varphi) \quad (3.110)$$

と近似することができる。これをスローロール近似という。  $M_{\text{pl}}$  は換算プランク質量であり、 $M_{\text{pl}} \equiv m_{\text{pl}}/\sqrt{8\pi}$  である。この近似が成り立っているとき、(3.108) は

$$\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \implies \left( \frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (3.111)$$

$$|\ddot{\varphi}| \ll |3H\dot{\varphi}| \implies |V_{,\varphi\varphi}| \ll 1 \quad (3.112)$$

\*6 勾配項  $-\frac{\nabla^2\varphi}{a^2}$  はエネルギー密度、圧力を求める場合と同様に無視した。

と書き表わされる. そこで, スローロールパラメーター

$$\varepsilon(\varphi) \equiv \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left( \frac{V_{,\varphi}}{V} \right)^2, \quad (3.113)$$

$$\eta(\varphi) \equiv M_{\text{pl}}^2 \frac{V_{,\varphi\varphi}}{V} \quad (3.114)$$

を導入すると,

$$\varepsilon(\varphi) \ll 1, \quad |\eta(\varphi)| \ll 1 \quad (3.115)$$

が成り立つとき, インフレーションが実現する.

### 3.4.3 インフラトンによる宇宙の揺らぎ生成

CMB はほぼ一様等方であるが,  $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$  程度の揺らぎが存在する. 宇宙の大規模構造はこの揺らぎが重力不安定性によって成長したものと考えられている. このような揺らぎはインフラトンの量子揺らぎに起因しているものと考えられている.

#### 計量の揺らぎ

FRW 計量を, 便利のため,  $d\tau \equiv a^{-1}dt$  で定義される共形時間  $\tau$  を用いて

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 (d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j) \quad (3.116)$$

のように書く. ここで,  $i, j = (r, \theta, \phi)$  である. このとき,  $\gamma_{ij}$  とその逆行列は

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad \gamma^{ij} = \begin{pmatrix} 1-Kr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (3.117)$$

である. ここで, インフラトンの量子揺らぎによって生じる一様等方からのずれは非常に小さいものとして摂動で表す. つまり,  $\bar{g}_{\mu\nu}$  を背景時空として計量を

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (3.118)$$

のように表す.  $\delta g_{\mu\nu}$  は計量の摂動である.  $\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\nu\mu}$  であるから, 独立なパラメーターを 10 個含んでいる. ここで, 計量の添え字の上げ下げについては,  $\delta g_{\mu\nu}$  の一次の近似の下では  $\bar{g}_{\mu\nu}$  を用いて上げ下げした結果と同じになる.

計量の摂動成分を

$$\delta g_{00} = 2a^2 A, \quad \delta g_{0i} = -a^2 V_i, \quad \delta g_{ij} = -a^2 C_{ij} \quad (3.119)$$

のように表わすと, 線素は

$$ds^2 = a^2 [(1+2A)d\tau^2 - 2V_i d\tau dx^i - (\gamma_{ij} + C_{ij}) dx^i dx^j] \quad (3.120)$$

となる. このとき, 逆行列の摂動成分は

$$\delta g^{00} = -2a^{-2} A, \quad \delta g^{0i} = -a^{-2} V^i, \quad \delta g^{ij} = a^{-2} C^{ij} \quad (3.121)$$

で与えられる. このような一次の摂動を含むアインシュタインテンソル  $G^\mu{}_\nu \equiv R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu{}_\nu R$  は

$$G^0{}_0 = \bar{G}^0{}_0 + \frac{1}{a^2} \left[ -6\mathcal{H}^2 A - 2\mathcal{H}V^i{}_{|i} + \mathcal{H}C'^i{}_i - KC^i{}_i + \frac{1}{2} \left( C^{ji}{}_{|ij} - C^i{}_i{}^{j|j} \right) \right], \quad (3.122)$$

$$G^0{}_i = \bar{G}^0{}_i + \frac{1}{a^2} \left[ 2\mathcal{H}A_{|i} - KV_i + \frac{1}{2} \left( V_j{}^{j|}{}_{|i} - V_i{}^{j|j} \right) + \frac{1}{2} \left( C'^j{}_i{}_{|j} - C'^j{}_{j|i} \right) \right], \quad (3.123)$$

$$G^i{}_0 = \bar{G}^i{}_0 - \frac{1}{a^2} \left[ 2\mathcal{H}A^{|i} - 2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)V^i + \frac{1}{2} \left( V_j{}^{i|j} - V^i{}_{j|} \right) + \frac{1}{2} \left( C'^{ji}{}_{|j} - C'^j{}_{j|i} \right) \right], \quad (3.124)$$

$$G^i{}_j = \bar{G}^i{}_j - \frac{1}{a^2} \left\{ \left[ 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)A + 2\mathcal{H}A' + A^{|k}{}_{|k} + V'^k{}_{|k} + 2\mathcal{H}V^k{}_{|k} - \frac{1}{2}C''^k{}_k - \mathcal{H}C'^k{}_k \right. \right. \\ \left. \left. + KC^k{}_k - \frac{1}{2}C^{lk}{}_{|kl} + \frac{1}{2}C^k{}_k{}^{l|l} \right] \delta_j^i - A^{|i}{}_{|j} - \frac{1}{2} \left( V^i{}_{|j} + V_j{}^{i|} \right) - \mathcal{H} \left( V^i{}_{|j} + V_j{}^{i|} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}C''^i{}_j + \mathcal{H}C'^i{}_j - 2KC^i{}_j + \frac{1}{2} \left( C^{ki}{}_{|jk} + C^k{}_j{}^{i|}{}_{|k} - C^k{}_k{}^{i|}{}_{|j} - C^i{}_j{}^{k|}{}_{|k} \right) \right\} \quad (3.125)$$

のように与えられる. これらの導出については付録 A を参照. ここで, ' は  $\tau$  での微分を意味しており,  $\mathcal{H} \equiv a'/a$  と定義した. さらに,  $|$  は三次元背景空間の共変微分である.  $\bar{G}^\mu{}_\nu$  は背景時空のアインシュタインテンソルであり,

$$\begin{aligned} \bar{G}^0{}_0 &= \frac{3}{a^2} (\mathcal{H}^2 + K), & \bar{G}^i{}_0 &= \bar{G}^0{}_j = 0, \\ \bar{G}^i{}_j &= \frac{1}{a^2} (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + K) \delta_j^i \end{aligned} \quad (3.126)$$

である.

### ゲージ変換

ここでは宇宙の揺らぎを記述するため, (3.118) のように一様等方な背景時空からのずれとして摂動時空を導入し, 二種類の時空について考えた. このとき, 背景時空における各座標点と摂動時空における各座標点とを対応させる非物理的なゲージ自由度が存在する.

前節の計量をそのまま用いるとゲージ自由度が複雑に混ざり合ってしまうため,  $\delta g_{\mu\nu}$  をスカラー摂動とベクトル摂動, テンソル摂動の 3 つに分解しておくことと便利である. まずはスカラー摂動について考える.  $\delta g_{00}$  はスカラー量  $A$  の寄与のみなので, (3.119) と同様,

$$\delta g_{00} = 2a^2 A \quad (3.127)$$

と書く.  $V_i$  に対するスカラー量の寄与は, これを  $B$  とすると, その三次元背景空間の計量  $\gamma_{ij}$  の共変微分  $B_{|i}$  を用いて,

$$V_i^S = B_{|i} \quad (3.128)$$

と書くことができる.  $C_{ij}$  に対するスカラーの寄与は, 二つのスカラー量  $\psi, E$  を用いて,

$$C_{ij}^S = 2(\psi\gamma_{ij} + E_{|ij}) \quad (3.129)$$

となる. したがって,  $A, B, \psi, E$  の 4 つのパラメーターから成る.

次にベクトル摂動について考える.  $V_i$  に対するベクトル量の寄与は,  $B_{|i}$  は回転がゼロのベクトル量であるから, 発散がゼロのベクトルを  $S_i$  とすると, 任意のベクトルはこれらの和で書くことができる\*7. したがって,

$$V_i = B_{|i} - S_i \quad (3.130)$$

のように書いておくと, すべてのベクトルを表すことができる.  $C_{ij}$  についても同様に, 発散がゼロのベクトルを  $F_i$  とすると,  $C_{ij}$  には  $F_{i|j}$  が含まれており, さらに,  $\delta g_{\mu\nu}$  は対称だから,

$$C_{ij}^V = F_{i|j} + F_{j|i} \quad (3.131)$$

と書ける. ここで,  $S_i, F_i$  にはそれぞれ 3 個のパラメーターが存在するが, これらの発散がゼロでなければならないから,  $S_i^{||i} = 0, F_i^{||i} = 0$  の二つの条件式が得られ, 独立な自由度は 4 個となる.

$C_{ij}$  に対して, テンソル摂動  $h_{ij}$  については

$$C_{ij}^T = h_{ij} \quad (3.132)$$

と書く. ここで,  $h_{ij}$  の独立な自由度は  $10 - 8 = 2$  でなければならない. 一般に任意の二階対称テンソルは  $T_{ij}^{||j} = 0, T_i^i = 0$  を満たすテンソル  $T_{ij}$  とベクトル量およびスカラー量の空間微分のとで表わされる. したがって,  $h_{ij}$  の純粋なテンソル成分を取り出すためには条件式  $h_{ij}^{||j} = 0, h_i^i = 0$  が必要となり, 6 個の自由度のうち 4 個はこれらの条件式で関係づけられているので, 独立な自由度は 2 個となる. したがって,  $\delta g_{\mu\nu}$  の自由度と一致する.

以上をまとめると, 一様等方時空を背景とした摂動を含む時空の線素は

$$ds^2 = a^2 \left\{ (1 + 2A) d\tau^2 - 2(B_{|i} - S_i) d\tau dx^i - [(1 + 2\psi) \gamma_{ij} + 2E_{i|j} + F_{i|j} + F_{j|i} + h_{ij}] dx^i dx^j \right\} \quad (3.133)$$

のように表すことができる. その逆行列の摂動部分は

$$\begin{aligned} \delta g^{00} &= -\frac{2}{a^2} A, & \delta g^{0i} &= -\frac{1}{a^2} (B^{||i} - S^i), \\ \delta g^{ij} &= \frac{1}{a^2} \left( 2\psi \gamma^{ij} + 2E^{i|j} + F^{i|j} + F^{j|i} + h^{ij} \right) \end{aligned} \quad (3.134)$$

となる.

微小ゲージ変換  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$  による各計量の摂動の変換性について調べる.  $\xi^\mu$  は摂動と同じオーダーの微小量とする. このとき, 計量は

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \quad (3.135)$$

のように変換されるから, 微分が摂動の一次までで

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\delta^\nu_\mu - \xi^\nu_{, \mu}) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \quad (3.136)$$

のように変換されることを用いると,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) &= (\delta^\alpha_\mu - \xi^\alpha_{, \mu})(\delta^\beta_\nu - \xi^\beta_{, \nu}) g_{\alpha\beta}(x) \\ &\simeq g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha_{, \mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^\beta_{, \nu} g_{\mu\beta}(x). \end{aligned}$$

\*7 ヘルムホルツの定理という.

一方,  $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \simeq \tilde{g}_{\mu\nu}(x) + g_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha$  だから, 同一点における計量の変換性は

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) - \xi^\alpha{}_{,\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^\alpha{}_{,\nu} g_{\mu\alpha}(x) - g_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \quad (3.137)$$

となる. これより, 計量の摂動部分の変化量  $\Delta\delta g_{\mu\nu}(x) \equiv \delta\tilde{g}_{\mu\nu}(x) - \delta g_{\mu\nu}(x)$  は

$$\Delta\delta g_{\mu\nu}(x) = \tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha{}_{,\mu} g_{\alpha\nu}(x) - \xi^\alpha{}_{,\nu} g_{\mu\alpha}(x) - g_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \quad (3.138)$$

となる. ヘルムホルツ定理より,  $\xi^\mu$  のスカラー成分とベクトル成分に分けて,  $(\xi^0, \xi^{|i} + \zeta^i)$  と書く. ただし,  $\zeta^i{}_{|i} = 0$  である. すると, ゲージ変換により  $\Delta\delta g_{00}$  は

$$\Delta\delta g_{00} = -2\xi^0{}_{,0}g_{00} - g_{00,0}\xi^0 = -2a^2\xi^{0'} - 2a^2\mathcal{H}\xi^0 \quad (3.139)$$

となる. その他の成分については,

$$\begin{aligned} \Delta\delta g_{0i} &= -\xi^0{}_{,i}g_{00} - g_{\alpha i}\xi^\alpha{}_{,0} = -a^2\xi^0{}_{|i} + a^2\xi_{i,0} = -a^2\xi^0{}_{|i} + a^2(\xi'_{|i} + \zeta'_{|i}), \quad (3.140) \\ \Delta\delta g_{ij} &= -\xi^k{}_{,i}g_{kj} - \xi^k{}_{,j}g_{ik} - g_{ij,k}\xi^k - g_{ij,0}\xi^0 \\ &= -(\xi_{i,j} - g_{kj,i}\xi^k + \xi_{j,i} - g_{ki,j}\xi^k) - g_{ij,k}\xi^k - 2a^2\mathcal{H}\xi^0\gamma_{ij} \\ &= -a^2(\xi_{i|j} + \xi_{j|i}) - 2a^2\mathcal{H}\xi^0\gamma_{ij} \\ &= -a^2(\xi_{|i} + \zeta_{|i})_{|j} - a^2(\xi_{|j} + \zeta_{|j})_{|i} - 2a^2\mathcal{H}\xi^0\gamma_{ij} \\ &= -2a^2\xi_{|ij} - a^2(\zeta_{i|j} + \zeta_{j|i}) - 2a^2\mathcal{H}\xi^0\gamma_{ij} \quad (3.141) \end{aligned}$$

で与えられる. したがって, ゲージ変換によって, スカラー摂動量  $A, B, E, \psi$  はそれぞれ,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - \xi^{0'} - \mathcal{H}\xi^0, \\ \tilde{B} &= B + \xi^0 - \xi', \\ \tilde{E} &= E - \xi, \\ \tilde{\psi} &= \psi - \mathcal{H}\xi^0 \end{aligned} \quad (3.142)$$

となり, ベクトル摂動量  $F_i, S_i$  は

$$\begin{aligned} \tilde{F}_i &= F_i - \zeta_i, \\ \tilde{S}_i &= S_i + \zeta'_i \end{aligned} \quad (3.143)$$

のように変換されることがわかる. テンソル摂動についてはゲージ変換に対して不変である.  $\xi^\mu$  はベクトル量なので, これから  $T_{ij}{}^{||j} = 0, T_i{}^i = 0$  を満たすテンソル成分をつくることができないためである.

ここで, 上で用いた摂動量の線形結合とり, ゲージ不変な変数を定義しておく. スカラー摂動量については

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv A - \mathcal{H}(E' - B) - (E' - B)', \\ \Phi &\equiv \psi - \mathcal{H}(E' - B) \end{aligned} \quad (3.144)$$

と定義すると, これらはゲージ不変量になっている. ベクトル摂動量に関しては

$$U_i \equiv S_i + F'_i \quad (3.145)$$

がゲージ不変量となる.

前節で導いたアインシュタインテンソル (3.122)-(3.125) の摂動部分から  $A$  および  $\psi$  を取り除くと、スカラー摂動は

$$\begin{aligned}\delta G^{S^0}_0 &= \frac{2}{a^2} \left[ -3\mathcal{H}^2\Psi + 3(\mathcal{H}\Phi' - K\Phi) - \Phi^{||i}{}_{|i} - 3\mathcal{H}(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + K)(E' - B) \right] \\ &= 2a^{-2} \left[ -3\mathcal{H}^2\Psi + 3(\mathcal{H}\Phi' - K\Phi) - \Phi^{||i}{}_{|i} \right] - (\bar{G}^0_0)'(E' - B),\end{aligned}\quad (3.146)$$

$$\begin{aligned}\delta G^{S^0}_i &= \frac{2}{a^2} \left[ (\mathcal{H}\Psi - \Phi')_{|i} + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + K)(E' - B)_{|i} \right] \\ &= \frac{2}{a^2} (\mathcal{H}\Psi - \Phi')_{|i} + \left( \bar{G}^0_0 - \frac{1}{3}\bar{G}^j{}_j \right) (E' - B)_{|i},\end{aligned}\quad (3.147)$$

$$\begin{aligned}\delta G^{S^i}_0 &= -\frac{2}{a^2} \left[ (\mathcal{H}\Psi - \Phi')^{||i} + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + K)E'^{||i} \right] \\ &= -\frac{2}{a^2} (\mathcal{H}\Psi - \Phi')^{||i} - \left( \bar{G}^0_0 - \frac{1}{3}\bar{G}^j{}_j \right) E'^{||i},\end{aligned}\quad (3.148)$$

$$\begin{aligned}\delta G^{S^i}_j &= -\frac{1}{a^2} \left\{ \left[ \Psi^{||k}{}_{|k} + 2H\Psi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \Phi^k{}_k - 2\Phi'' - 4\mathcal{H}\Phi' + 2K\Phi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(\mathcal{H}^3 + \mathcal{H}\mathcal{H}' - \mathcal{H}'' + K\mathcal{H})(E' - B) \right] \delta^i_j - \Psi^i{}_j - \Phi^i{}_j \right\} \\ &= -\frac{1}{a^2} \left\{ \left[ \Psi^{||k}{}_{|k} + 2H\Psi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \Phi^{||k}{}_{|k} - 2\Phi'' - 4\mathcal{H}\Phi' + 2K\Phi \right] \delta^i_j - \Psi^{||i}{}_{|j} - \Phi^{||i}{}_{|j} \right\} \\ &\quad + (\bar{G}^i{}_j)'(E' - B)\end{aligned}\quad (3.149)$$

となる。ここで、共変微分の交換関係

$$A^\mu{}_{|\alpha\beta} - A^\mu{}_{|\beta\alpha} = R^\mu{}_{\nu\beta\alpha}A^\nu, \quad A_{\mu|\alpha\beta} - A_{\mu|\beta\alpha} = R^\nu{}_{\beta\alpha\mu}A_\nu, \quad (3.150)$$

およびリーマンテンソルの性質

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= -R_{\mu\nu\sigma\rho} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} &= 0, \\ R_{\mu\nu\rho\sigma} &= R_{\rho\sigma\mu\nu}\end{aligned}\quad (3.151)$$

を用いた。同様に、ベクトル摂動については、

$$\delta G^{V^0}_0 = 0, \quad (3.152)$$

$$\delta G^{V^0}_i = \frac{1}{a^2} \left( KU_i + \frac{1}{2}U_i^{||j}{}_{|j} \right), \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned}\delta G^{V^i}_0 &= -\frac{1}{a^2} \left[ KU^i + \frac{1}{2}U^{i||j}{}_{|j} - 2(\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + K)S^i \right] \\ &= -\frac{1}{a^2} \left( KU^i + \frac{1}{2}U^{i||j}{}_{|j} \right) + \left( \bar{G}^0_0 - \frac{1}{3}\bar{G}^j{}_j \right) S^i,\end{aligned}\quad (3.154)$$

$$\delta G^{V^i}_j = -\frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2} \left( U^{||i}{}_{|j} + U_j^{||i} \right) + \mathcal{H} \left( U^i{}_{|j} + U_j{}^{||i} \right) \right], \quad (3.155)$$

テンソル摂動については、

$$\delta G^{T^0}_0 = \delta G^{T^0}_i = \delta G^{T^i}_0 = 0, \quad (3.156)$$

$$\delta G^{T^i}_j = -\frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2}h^{||i}{}_{|j} + \mathcal{H}h^{||i}{}_{|j} + Kh^i{}_j - \frac{1}{2}h^i{}_j{}^{||k}{}_{|k} \right) \quad (3.157)$$

となる。ゲージ変換による摂動量の変換性 (3.142), (3.143) から明らかなように, アインシュタインテンソル (3.146)-(3.149) および (3.154) はゲージ不変になっていない。

### エネルギー運動量テンソルの摂動

エネルギー密度  $\rho$ , 圧力  $P$  の流体のエネルギー運動量テンソルは, 一般に,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} \quad (3.158)$$

と書かれる。  $\pi_{\mu\nu}$  は非等方ストレスで, 空間方向の非等方性に寄与する項であり, 空間成分のみをもつ。一様等方時空には非等方ストレスの寄与はないので, これは一次の摂動量である。  $u^\mu$  は四次元速度であり,  $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1$  を満たす。計量の摂動と同様に, 摂動量をスカラー量とベクトル量, テンソル量に分解することを考える。ヘルムホルツ定理より, 空間的速度  $u^i$  はスカラー量  $v$  とベクトル量  $v^i$  に分解できる。ここで,  $v^i$  は  $v^i|_i = 0$  を満たす。一様等方時空では  $u^i$  はゼロであるから,  $v^i$  は摂動の一次の量である。  $u^0$  は線素 (3.133) を用いて,  $u^0 = \frac{dt}{ds} = 1/a\sqrt{1+2A} \simeq (1-A)/a$  であるから,

$$u^\mu = \frac{1}{a} (1 - A, v^i + v^i) \quad (3.159)$$

となる。  $u_\mu$  に関しては

$$u_\mu = g_{\mu\alpha}u^\alpha \simeq a (1 + A, -v_{|i} - v_i - B_{|i} + S_i) \quad (3.160)$$

が得られる。非等方ストレスについても, スカラー量  ${}^S\Pi$  とベクトル量  ${}^V\Pi_i$ , テンソル量  ${}^T\Pi_{ij}$  を用いて,

$$\pi_{ij} = \left( {}^S\Pi_{|ij} - \frac{1}{3} {}^S\Pi^{|k}{}_{|k} g_{ij} \right) + \frac{1}{2} ({}^V\Pi_{i|j} + {}^V\Pi_{j|i}) + {}^T\Pi_{ij} \quad (3.161)$$

のように表わすことができる。エネルギー密度を, 非摂動部分と摂動部に分けて, それぞれ  $\bar{\rho}$ ,  $\delta\rho$  とする。圧力についても同様に,  $\bar{P}$ ,  $\delta P$  と分けると, エネルギー運動量テンソル (3.158) の各成分は

$$\begin{aligned} T_{00} &= a^2 (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P) (1 + A)^2 - a^2 (\bar{P} + \delta P) (1 + 2A) \\ &\simeq a^2 (\bar{\rho} + \delta\rho + 2A\bar{\rho}), \end{aligned} \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} T_{0i} = T_{i0} &= a^2 (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P) (1 + A) (-v_{|i} - v_i - B_{|i} + S_i) + a^2 (\bar{P} + \delta P) (B_{|i} - S_i) \\ &\simeq a^2 [ -(\bar{\rho} + \bar{P}) (v_{|i} + v_i) - \bar{\rho} (B_{|i} - S_i) ], \end{aligned} \quad (3.163)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= a^2 \left[ (\bar{P} + \delta P) \gamma_{ij} + \bar{P} (2\psi \gamma_{ij} + 2E_{|ij} + F_{i|j} + F_{j|i} + h_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \left( {}^S\Pi_{|ij} - \frac{1}{3} {}^S\Pi^{|k}{}_{|k} g_{ij} \right) + \frac{1}{2} ({}^V\Pi_{i|j} + {}^V\Pi_{j|i}) + {}^T\Pi_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.164)$$

となり, 揺らぎによる一次の摂動部分は

$$\delta T_{00} = a^2 (\delta\rho + 2A\bar{\rho}), \quad (3.165)$$

$$\delta T_{0i} = \delta T_{i0} = a^2 [ -(\bar{\rho} + \bar{P}) (v_{|i} + v_i) - \bar{\rho} (B_{|i} - S_i) ], \quad (3.166)$$

$$\begin{aligned} \delta T_{ij} &= a^2 \left[ -\delta P \gamma_{ij} + \bar{P} (2\psi \gamma_{ij} + 2E_{|ij} + F_{i|j} + F_{j|i} + h_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + \left( {}^S\Pi_{|ij} - \frac{1}{3} {}^S\Pi^{|k}{}_{|k} \gamma_{ij} \right) + \frac{1}{2} ({}^V\Pi_{i|j} + {}^V\Pi_{j|i}) + {}^T\Pi_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.167)$$

となる. ここで, (3.138) と同様にエネルギー運動量テンソルはゲージ変換の下で

$$\Delta\delta\bar{T}_{\mu\nu}(x) = -\xi^\alpha{}_{,\mu}\bar{T}_{\alpha\nu}(x) - \xi^\alpha{}_{,\nu}\bar{T}_{\mu\alpha}(x) - \bar{T}_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \quad (3.168)$$

のように変換されることを用いると, 各成分の変換性は

$$\Delta\delta T_{00} = a^2 \left( -2\xi^{0'}\bar{\rho} - \bar{\rho}'\xi^0 - 2\mathcal{H}\bar{\rho}\xi^0 \right), \quad (3.169)$$

$$\Delta\delta T_{0i} = \Delta\delta T_{i0} = a^2 \left[ -\xi^0{}_{|i}\bar{\rho} - \left( \xi'_{|i} + \zeta'_{|i} \right) \bar{P} \right], \quad (3.170)$$

$$\Delta\delta T_{ij} = a^2 \left\{ \bar{P} \left[ \left( \xi_{|j} + \zeta_{|j} \right)_{|i} + \left( \xi_{|i} + \zeta_{|i} \right)_{|j} \right] - \left( 2\mathcal{H}\bar{P}\xi^0 + \bar{P}'\xi^0 \right) \gamma_{ij} \right\} \quad (3.171)$$

となることがわかる. スカラー摂動量  $A, B, E, \psi$  とベクトル摂動量  $F_i, S_i$  の変換性は (3.142), (3.143) で与えられているから, これらを比較することで, エネルギー密度および圧力の揺らぎと空間速度の変換性が得られ,

$$\begin{aligned} \tilde{\delta\rho} &= \delta\rho - \bar{\rho}'\xi^0, \\ \tilde{\delta\bar{P}} &= \delta P - \bar{P}'\xi^0, \\ \tilde{v} &= v + \xi', \\ \tilde{v}_i &= v_i + \zeta'_i \end{aligned} \quad (3.172)$$

となる. その他の摂動量はゲージ不変となっている.

エネルギー運動量テンソルの添え字を一つ上げると

$$T^0_0 = (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)(1 - A^2) - \bar{P} - \delta P \simeq \bar{\rho} + \delta\rho, \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} T^0_i &= (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)(1 - A)(-v_{|i} - v_i - B_{|i} + S_i) \\ &\simeq (\bar{\rho} + \bar{P})(-v_{|i} - v_i - B_{|i} + S_i), \end{aligned} \quad (3.174)$$

$$\begin{aligned} T^i_0 &= (\bar{\rho} + \delta\rho + \bar{P} + \delta P)(1 + A)(v^{|i} + v^i) \\ &\simeq (\bar{\rho} + \bar{P})(v^{|i} + v^i), \end{aligned} \quad (3.175)$$

$$T^i_j = -(\bar{P} + \delta P)\delta^i_j + \left( S\Pi^{||i}{}_{|j} - \frac{1}{3}S\Pi^{||k}{}_{|k}\delta^i_j \right) + \frac{1}{2} \left( V\Pi^i{}_{|j} + V\Pi_j{}^{||i} \right) + T\Pi^i_j \quad (3.176)$$

となるから, エネルギー運動量テンソルの非摂動部分  $\bar{T}^\mu{}_\nu$  は

$$\bar{T}^0_0 = \bar{\rho}, \quad \bar{T}^0_i = \bar{T}^i_0 = 0, \quad \bar{T}^i_j = -\bar{P}\delta^i_j \quad (3.177)$$

であり, 一次の摂動部分は

$$\delta T^0_0 = \delta\rho, \quad (3.178)$$

$$\delta T^0_i = (\bar{\rho} + \bar{P})(-v_{|i} - v_i - B_{|i} + S_i), \quad (3.179)$$

$$\delta T^i_0 = (\bar{\rho} + \bar{P})(v^{|i} + v^i), \quad (3.180)$$

$$\delta T^i_j = -\delta P\delta^i_j + \left( S\Pi^{||i}{}_{|j} - \frac{1}{3}S\Pi^{||k}{}_{|k}\delta^i_j \right) + \frac{1}{2} \left( V\Pi^i{}_{|j} + V\Pi_j{}^{||i} \right) + T\Pi^i_j \quad (3.181)$$

で与えられることがわかる. これらをスカラー, ベクトル, テンソル摂動部分に分離すると, スカラー摂動については

$$\delta T^{S^0}_0 = \delta\rho, \quad (3.182)$$

$$\delta T^{S^0}_i = (\bar{\rho} + \bar{P})(-v_{|i} - B_{|i}), \quad (3.183)$$

$$\delta T^{S^i}_0 = (\bar{\rho} + \bar{P})v^{||i}, \quad (3.184)$$

$$\delta T^{S^i}_j = S\Pi^{||i}{}_{|j} - \left( \delta P + \frac{1}{3}S\Pi^{||k}{}_{|k} \right) \delta^i_j, \quad (3.185)$$



ベクトル摂動は

$$\delta T^{V^0}_0 = 0, \quad (3.186)$$

$$\delta T^{V^0}_i = (\bar{\rho} + \bar{P})(-v_i + S_i), \quad (3.187)$$

$$\delta T^{V^i}_0 = (\bar{\rho} + \bar{P})v^i, \quad (3.188)$$

$$\delta T^{V^i}_j = \frac{1}{2} \left( v \Pi^i_{|j} + v \Pi_j^{|i} \right) \quad (3.189)$$

であり, テンソル摂動は

$$\delta T^{T^0}_0 = \delta T^{T^0}_i = \delta T^{T^i}_0 = 0, \quad (3.190)$$

$$\delta T^{T^i}_j = T \Pi^i_j \quad (3.191)$$

となる.

### 摂動アインシュタイン方程式

3.4.3 節と 3.4.3 節で求めた摂動を含むアインシュタインテンソルとエネルギー運動量テンソルを用いて, 摂動アインシュタイン方程式を導出する.

アインシュタイン方程式  $G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu$  のスカラー摂動部分に関しては

$$\frac{2}{a^2} \left[ -3\mathcal{H}^2\Psi + 3(\mathcal{H}\Phi' - K\Phi) - \Phi^{|i}_{|i} \right] - (\bar{G}^0_0)' (E' - B) = 8\pi G \delta\rho, \quad (3.192)$$

$$\frac{2}{a^2} (\mathcal{H}\Psi - \Phi')_{|i} + \left( \bar{G}^0_0 - \frac{1}{3}\bar{G}^j_j \right) (E' - B)_{|i} = 8\pi G (\bar{\rho} + \bar{P}) (-v - B)_{|i}, \quad (3.193)$$

$$-\frac{2}{a^2} (\mathcal{H}\Psi - \Phi')^{|i} - \left( \bar{G}^0_0 - \frac{1}{3}\bar{G}^j_j \right) E'_{|i} = 8\pi G (\bar{\rho} + \bar{P}) v^{|i}, \quad (3.194)$$

$$-\frac{1}{a^2} \left\{ \left[ \Psi^{|k}_{|k} + 2H\Psi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \Phi^{|k}_{|k} - 2\Phi'' - 4\mathcal{H}\Phi' + 2K\Phi \right] \delta^i_j - \Psi^{|i}_{|j} - \Phi^{|i}_{|j} \right\} + (\bar{G}^i_j)' (E' - B) = 8\pi G \left[ S\Pi^i_{|j} - \left( \delta P + \frac{1}{3}S\Pi^{|k}_{|k} \right) \delta^i_j \right] \quad (3.195)$$

となる. ゲージ変換による摂動量の変換性 (3.142), (3.172) と背景時空のアインシュタイン方程式が, (3.126) および (3.177) より,

$$\bar{G}^0_0 = 8\pi G \bar{\rho}, \quad \bar{G}^0_i = \bar{G}^i_0 = 0, \quad \bar{G}^i_j = -8\pi G \bar{P} \delta^i_j \quad (3.196)$$

であることを用いると, 上の方程式がゲージ不変であることがわかる. そこで, ゲージ不変量として,

$$\begin{aligned} \delta\rho^{(\text{GI})} &\equiv \delta\rho - \bar{\rho}' (E' - B), \\ \delta P^{(\text{GI})} &\equiv \delta P - \bar{P}' (E' - B), \\ v^{(\text{GI})} &\equiv v + E' \end{aligned} \quad (3.197)$$

を定義すれば, スカラー摂動のアインシュタイン方程式 (3.192)-(3.195) はすべてゲージ不変量で

書くことができ,

$$\frac{2}{a^2} \left[ -3\mathcal{H}^2\Psi + 3(\mathcal{H}\Phi' - K\Phi) - \Phi^{||i}{}_{|i} \right] = 8\pi G\delta\rho^{(\text{GI})}, \quad (3.198)$$

$$\frac{2}{a^2} (\mathcal{H}\Psi - \Phi')_{|i} = -8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})v_{|i}^{(\text{GI})}, \quad (3.199)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{a^2} \left\{ \left[ \Psi^{||k}{}_{|k} + 2H\Psi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \Phi^{||k}{}_{|k} - 2\Phi'' - 4\mathcal{H}\Phi' + 2K\Phi \right] \delta_j^i - \Psi^{||i}{}_{|j} - \Phi^{||i}{}_{|j} \right\} \\ & = 8\pi G \left[ {}^S\Pi^{||i}{}_{|j} - \left( \delta P^{(\text{GI})} + \frac{1}{3} {}^S\Pi^{||k}{}_{|k} \right) \delta_j^i \right] \end{aligned} \quad (3.200)$$

で与えられる. 同様に, ベクトル摂動に関するアインシュタイン方程式は

$$\frac{1}{a^2} \left( KU_i + \frac{1}{2} U_i^{||j}{}_{|j} \right) = 8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})(-v_i + S_i), \quad (3.201)$$

$$-\frac{1}{a^2} \left( KU^i + \frac{1}{2} U^{i||j}{}_{|j} \right) + \left( \bar{G}^0{}_0 - \frac{1}{3} \bar{G}^j{}_j \right) S^i = 8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})v^i, \quad (3.202)$$

$$-\frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2} \left( U'^i{}_{|j} + U_j'^{||i} \right) + \mathcal{H} \left( U^i{}_{|j} + U_j^{||i} \right) \right] = 4\pi G \left( {}^V\Pi^i{}_{|j} + {}^V\Pi_j^{||i} \right) \quad (3.203)$$

で与えられ, ゲージ不変量

$$v_i^{(\text{GI})} \equiv v_i - S_i \quad (3.204)$$

を用いることで,

$$\frac{1}{a^2} \left( KU_i + \frac{1}{2} U_i^{||j}{}_{|j} \right) = -8\pi G(\bar{\rho} + \bar{P})v_i^{(\text{GI})}, \quad (3.205)$$

$$-\frac{1}{a^2} \left[ \frac{1}{2} \left( U'^i{}_{|j} + U_j'^{||i} \right) + \mathcal{H} \left( U^i{}_{|j} + U_j^{||i} \right) \right] = 4\pi G \left( {}^V\Pi^i{}_{|j} + {}^V\Pi_j^{||i} \right) \quad (3.206)$$

のように, ベクトル摂動に対するアインシュタイン方程式をゲージ不変量で表わすことができる. テンソル摂動については

$$-\frac{1}{a^2} \left( \frac{1}{2} h^{||i}{}_{|j} + \mathcal{H}h^i{}_{|j} + Kh^i{}_{|j} - \frac{1}{2} h^i{}_{|j}{}^{||k}{}_{|k} \right) = 8\pi G^T\Pi^i{}_j \quad (3.207)$$

で与えられ, すでにゲージ不変量のみで書かれている.

### スカラー揺らぎの生成

インフレーション後のような極初期の宇宙は平坦であるから,  $K = 0$  とする. このとき, 背景時空の計量は

$$\bar{g}_{00} = a^2, \quad \bar{g}_{i0} = \bar{g}_{0i} = 0, \quad \bar{g}_{ij} = a^2\delta_{ij} \quad (3.208)$$

で与えられる\*8. 実スカラー場のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi) \quad (3.209)$$

で与えられ, オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \partial_\nu\varphi) + V_{,\varphi}(\varphi) = 0 \quad (3.210)$$

\*8 ガリレイ座標系  $i = x, y, z$  を用いている.

となる。また、スカラー場のエネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned}
T^\mu{}_\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} \partial_\nu \varphi - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L} \\
&= \frac{\partial}{\partial \partial_\mu \varphi} \left( \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \varphi \partial_\mu \varphi - V(\varphi) \right) \partial_\nu \varphi - \delta^\mu{}_\nu \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - V(\varphi) \right) \\
&= g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \varphi \partial_\nu \varphi - \delta^\mu{}_\nu \left( \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - V(\varphi) \right)
\end{aligned} \tag{3.211}$$

となる。ここで、スカラー場を

$$\varphi(x^\mu) = \bar{\varphi}(\tau) + \delta\varphi(x^\mu) \tag{3.212}$$

のように非摂動部分と摂動部分に分ける。このとき、オイラー・ラグランジュ方程式 (3.210) の左辺は摂動の一次までで

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{-(\bar{g} + \delta g)}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-(\bar{g} + \delta g)} (\bar{g}^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu}) \partial_\nu (\bar{\varphi} + \delta\varphi) \right] + [V(\bar{\varphi} + \delta\varphi)]_{,\varphi} \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu \left( \sqrt{-\bar{g}} \frac{\delta g}{2\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi} \right) + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\varphi) - \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \frac{\delta g}{2\bar{g}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) + [V(\bar{\varphi}) + V_{,\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi]_{,\varphi} \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) + \partial_\mu \left( \frac{\delta g}{2\bar{g}} \right) \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\varphi) + V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) + V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi
\end{aligned} \tag{3.213}$$

となる。ここで、 $\delta g$  は行列式の定義より、

$$\delta g = \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} (\delta g_{0\alpha} \bar{g}_{1\beta} \bar{g}_{2\gamma} \bar{g}_{3\delta} + \bar{g}_{0\alpha} \delta g_{1\beta} \bar{g}_{2\gamma} \bar{g}_{3\delta} + \bar{g}_{0\alpha} \bar{g}_{1\beta} \delta g_{2\gamma} \bar{g}_{3\delta} + \bar{g}_{0\alpha} \bar{g}_{1\beta} \bar{g}_{2\gamma} \delta g_{3\delta})$$

であり、 $\delta^\mu{}_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu}$  の変分をとることで得られる関係式

$$\delta g_{\mu\nu} = -\bar{g}_{\mu\alpha} \delta g^{\alpha\beta} \bar{g}_{\beta\nu} \tag{3.214}$$

を代入すると、

$$\delta g = -\bar{g} \bar{g}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{3.215}$$

となることがわかる。さらに、 $\sqrt{-\bar{g}} = a^4$  であるから、(3.213) は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) - \frac{1}{2} \partial_\mu (\bar{g}_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}) \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \delta g^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{\varphi}) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial_\mu (\sqrt{-\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} \partial_\nu \delta\varphi) + V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) + V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi \\
&= a^{-4} \partial_0 (a^2 \partial_0 \bar{\varphi}) + \frac{1}{2} \partial_0 (2A + C^i{}_i) a^{-2} \partial_0 \bar{\varphi} + a^{-4} \partial_0 (-2a^2 A \partial_0 \bar{\varphi}) + a^{-4} \partial_i (-a^2 V^i \partial_0 \bar{\varphi}) \\
&\quad + a^{-4} \partial_0 (a^2 \partial_0 \delta\varphi) - a^{-2} \partial_i \partial^i \delta\varphi - V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) - V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{-2} (\bar{\varphi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\varphi}') + \frac{1}{2} a^{-2} (2A' + C'^i{}_i) \bar{\varphi}' - 4a^{-2} \mathcal{H}A\bar{\varphi}' - 2a^{-2} A'\bar{\varphi}' - 2a^{-2} A\bar{\varphi}'' \\
&\quad - a^{-2} V^i{}_{|i} \bar{\varphi}' + a^{-2} (2\mathcal{H}\delta\varphi' + \delta\varphi'') - a^{-2} \delta\varphi'^i{}_{|i} + V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) + V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi \\
&= a^{-2} (\bar{\varphi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\varphi}' + a^2 V_{,\varphi}(\bar{\varphi})) + a^{-2} \left[ \delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \left( A' + V^i{}_{|i} - \frac{1}{2} C'^i{}_i \right) \bar{\varphi}' \right. \\
&\quad \left. - 2A (\bar{\varphi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\varphi}' + a^2 V_{,\varphi}(\bar{\varphi})) + 2a^2 AV_{,\varphi}(\bar{\varphi}) - \delta\varphi'^i{}_{|i} + a^2 V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi \right]
\end{aligned}$$

となる。したがって、オイラー・ラグランジュ方程式の非摂動部分

$$\bar{\varphi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\varphi}' + a^2 V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) = 0 \quad (3.216)$$

および摂動部分

$$\delta\varphi'' + 2\mathcal{H}\delta\varphi' - \delta\varphi'^i{}_{|i} + a^2 V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi = \left( A' + V^i{}_{|i} - \frac{1}{2} C'^i{}_i \right) \bar{\varphi}' - 2a^2 AV_{,\varphi}(\bar{\varphi}) \quad (3.217)$$

が得られる。

次に、インフラトンの揺らぎによってアインシュタイン方程式の右辺に現れるエネルギー運動量テンソルの摂動  $\delta T^\mu{}_\nu$  について考える。このとき、エネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned}
T^\mu{}_\nu &= (\bar{g}^{\mu\alpha} + \delta g^{\mu\alpha}) \partial_\alpha (\bar{\varphi} + \delta\varphi) \partial_\nu (\bar{\varphi} + \delta\varphi) \\
&\quad - \delta^\mu{}_\nu \left[ \frac{1}{2} (\bar{g}^{\alpha\beta} + \delta g^{\alpha\beta}) \partial_\alpha (\bar{\varphi} + \delta\varphi) \partial_\beta (\bar{\varphi} + \delta\varphi) - V(\bar{\varphi} + \delta\varphi) \right] \\
&\simeq \bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\nu \bar{\varphi} - \delta^\mu{}_\nu \left[ \frac{1}{2} (\bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\beta \bar{\varphi} - V(\bar{\varphi})) \right] \\
&\quad + \delta g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\nu \bar{\varphi} + \bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\nu \delta\varphi + \bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_\nu \bar{\varphi} \\
&\quad - \delta^\mu{}_\nu \left[ \frac{1}{2} (\delta g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\beta \bar{\varphi} + \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\beta \delta\varphi + \bar{g}^{\alpha\beta} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_\beta \bar{\varphi}) - V_{,\varphi} \delta\varphi \right]. \quad (3.218)
\end{aligned}$$

したがって、その揺らぎは

$$\delta T^\mu{}_\nu = \delta g^{\mu\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\nu \bar{\varphi} + \bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_\nu \delta\varphi + \bar{g}^{\mu\alpha} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_\nu \bar{\varphi} - \delta^\mu{}_\nu \left[ \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') - V_{,\varphi} \delta\varphi \right] \quad (3.219)$$

となる。これを用いて、エネルギー運動量テンソルの揺らぎの各成分を具体的に書き下すと、

$$\begin{aligned}
\delta T^0{}_0 &= \delta g^{0\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_0 \bar{\varphi} + \bar{g}^{0\alpha} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_0 \bar{\varphi} + \bar{g}^{0\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_0 \delta\varphi - \left[ \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') - V_{,\varphi} \delta\varphi \right] \\
&= \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') + V_{,\varphi} \delta\varphi, \quad (3.220)
\end{aligned}$$

$$\delta T^0{}_i = \delta g^{0\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_i \bar{\varphi} + \bar{g}^{0\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_i \delta\varphi + \bar{g}^{0\alpha} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_i \bar{\varphi} = \bar{g}^{00} \partial_0 \bar{\varphi} \partial_i \delta\varphi = \frac{\bar{\varphi}'}{a^2} \delta\varphi^i{}_{|i}, \quad (3.221)$$

$$\begin{aligned}
\delta T^i{}_0 &= \delta g^{i\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_0 \bar{\varphi} + \bar{g}^{i\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_0 \delta\varphi + \bar{g}^{i\alpha} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_0 \bar{\varphi} = \delta g^{i0} \bar{\varphi}'^2 + \bar{g}^{ij} \partial_j \delta\varphi \partial_0 \bar{\varphi} \\
&= \delta g^{i0} \bar{\varphi}'^2 + \frac{\bar{\varphi}'}{a^2} \delta\varphi^i{}_{|i} = \frac{\bar{\varphi}'^2}{a^2} \left( -B^{|i} + S^i + \frac{\delta\varphi^i{}_{|i}}{\bar{\varphi}'} \right), \quad (3.222)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta T^i{}_j &= \delta g^{i\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_j \bar{\varphi} + \bar{g}^{i\alpha} \partial_\alpha \delta\varphi \partial_j \bar{\varphi} + \bar{g}^{i\alpha} \partial_\alpha \bar{\varphi} \partial_j \delta\varphi - \delta^i{}_j \left[ \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') - V_{,\varphi} \delta\varphi \right] \\
&= -\delta^i{}_j \left[ \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') - V_{,\varphi} \delta\varphi \right] \quad (3.223)
\end{aligned}$$

となる. これと (3.178)-(3.181) を比べることにより, スカラー場の揺らぎによるエネルギー密度と圧力の揺らぎ,  $v_{|i}$ ,  $v_i$  および非等方テンソルが求められる.

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\varphi}'^2}{2a^2} + V, \quad \bar{P} = \frac{\bar{\varphi}'^2}{2a^2} - V \quad (3.224)$$

より,  $\bar{\rho} + \bar{P} = \bar{\varphi}'^2/a^2$  となること用いれば,

$$\begin{aligned} \delta\rho &= \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') + V_{,\varphi}\delta\varphi, \\ \delta P &= \frac{1}{a^2} (-A\bar{\varphi}'^2 + \bar{\varphi}'\delta\varphi') - V_{,\varphi}\delta\varphi, \\ (v+B)_{|i} &= -\frac{\delta\varphi_{|i}}{\bar{\varphi}'}, \quad v_i = S_i, \\ \pi^i_j &= 0 \end{aligned} \quad (3.225)$$

が得られる.

3.4.3 節で議論したゲージ変換の下でスカラー場は  $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(x)$  が成り立つ. 一方,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \tilde{\varphi}(x) + \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\xi^\mu \quad (3.226)$$

であるから, 同一点におけるスカラー場の変換性は

$$\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\xi^\mu \quad (3.227)$$

となる. したがって, インフラトンの非摂動部分および摂動部分の変換性は

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{\varphi}}(x) &\simeq \bar{\varphi}(x) - \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x^\mu}\xi^\mu = \bar{\varphi} - \bar{\varphi}'\xi^0, \\ \tilde{\delta\varphi}(x) &\simeq \delta\varphi - \bar{\varphi}'\xi^0 \end{aligned} \quad (3.228)$$

となることがわかる. そこで, ゲージ不変量

$$\delta\varphi^{(\text{GI})} \equiv \delta\varphi - \bar{\varphi}'(E' - B) \quad (3.229)$$

を定義すると, (3.144) より, 摂動オイラー・ラグランジュ方程式 (3.217) はゲージ不変量のみを用いて

$$\delta\varphi^{(\text{GI})''} + 2\mathcal{H}\delta\varphi^{(\text{GI})'} - \delta\varphi^{(\text{GI})|i}_{|i} + a^2 V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi^{(\text{GI})} - (\Psi' - 3\Phi')\bar{\varphi}' + 2a^2\Psi V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) = 0 \quad (3.230)$$

と書くことができる.

また, ゲージ不変量 (3.197) は (3.225), (3.229) および (3.144) より,

$$\begin{aligned} \delta\rho^{(\text{GI})} &= \frac{\bar{\varphi}'}{a^2} \left( -\Psi\bar{\varphi}' + \delta\varphi^{(\text{GI})'} \right) + V_{,\varphi}\delta\varphi^{(\text{GI})}, \\ \delta P^{(\text{GI})} &= \frac{\bar{\varphi}'}{a^2} \left( -\Psi\bar{\varphi}' + \delta\varphi^{(\text{GI})'} \right) - V_{,\varphi}\delta\varphi^{(\text{GI})}, \\ v^{(\text{GI})} &= -\frac{\delta\varphi^{(\text{GI})}}{\bar{\varphi}'} \end{aligned} \quad (3.231)$$

となるから、ゲージ不変量で表わされたスカラー摂動のアインシュタイン方程式 (3.198)-(3.200) は

$$\begin{aligned} -3\mathcal{H}^2\Psi + 3(\mathcal{H}\Phi' - K\Phi) - \Phi^{||i}{}_{|i} \\ = 4\pi G \left[ \bar{\varphi}' \left( -\Psi\bar{\varphi}' + \delta\varphi^{(\text{GI})'} \right) + a^2 V_{,\varphi} \delta\varphi^{(\text{GI})} \right], \end{aligned} \quad (3.232)$$

$$\mathcal{H}\Psi_{|i} - \Phi'_{|i} = 4\pi G \bar{\varphi}' \delta\varphi_{|i}^{(\text{GI})}, \quad (3.233)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{||i}{}_{|i} + 2\mathcal{H}\Psi' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Psi + \Phi^{||i}{}_{|i} - 2\Phi'' - 4\mathcal{H}\Phi' + 2K\Phi \\ = 8\pi G \left[ \bar{\varphi}' \left( -\Psi\bar{\varphi}' + \delta\varphi^{(\text{GI})'} \right) - a^2 V_{,\varphi} \delta\varphi^{(\text{GI})} \right], \end{aligned} \quad (3.234)$$

$$\Psi + \Phi = 0 \quad (3.235)$$

のように書くことができる. (3.235) を用いて  $\Phi$  を消去すると, (3.233) は

$$\mathcal{H}\Psi + \Psi' = 4\pi G \bar{\varphi}' \delta\varphi^{(\text{GI})} \quad (3.236)$$

となり, (3.232) と (3.234) を足すと関係式

$$\Psi'' + 2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 + K)\Psi + \Psi^{||i}{}_{|i} = 8\pi G \bar{\varphi}' \left( -\Psi\bar{\varphi}' + \delta\varphi^{(\text{GI})'} \right) \quad (3.237)$$

が得られる. ここで, アインシュタイン方程式の非摂動部分 (3.196) は

$$\frac{3}{a^2} (\mathcal{H}^2 + K) = 8\pi G \left( \frac{\bar{\varphi}'^2}{2a^2} + V \right), \quad (3.238)$$

$$\frac{1}{a^2} (\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}' + K) = -8\pi G \left( \frac{\bar{\varphi}'^2}{2a^2} - V \right) \quad (3.239)$$

であるから, これらの差をとることで

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' + K = 4\pi G \bar{\varphi}'^2 \quad (3.240)$$

が得られることを用いると, (3.237) は

$$\Psi'' + \Psi^{||i}{}_{|i} = 8\pi G \bar{\varphi}' \delta\varphi^{(\text{GI})'} \quad (3.241)$$

となる. したがって, (3.236) を用いてこの式から  $\delta\varphi^{(\text{GI})}$  を消去すると,

$$\Psi'' + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}\right)\Psi' + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\bar{\varphi}''}{\bar{\varphi}'}\right)\Psi - \Psi^{||i}{}_{|i} = 0 \quad (3.242)$$

が得られる. また, (3.235) よりスカラー場の運動方程式 (3.230) は

$$\delta\varphi^{(\text{GI})''} + 2\mathcal{H}\delta\varphi^{(\text{GI})'} - \delta\varphi^{(\text{GI})||i}{}_{|i} + a^2 V_{,\varphi\varphi}(\bar{\varphi})\delta\varphi^{(\text{GI})} - 4\Psi'\bar{\varphi}' + 2a^2\Psi V_{,\varphi}(\bar{\varphi}) = 0 \quad (3.243)$$

となることがわかる. ここで, ゲージ不変な変数

$$u \equiv a \left( \delta\varphi^{(\text{GI})} - \frac{\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}}\Psi \right) \quad (3.244)$$

とおくと, (3.242) は  $K = 0$  およびスカラー場の運動方程式 (3.216), (3.243) を用いて,

$$u'' - \frac{z''}{z}u - u^{||i}{}_{|i} = 0 \quad (3.245)$$

のように書くことができる [180]. このとき,

$$z \equiv \frac{a\bar{\varphi}'}{\mathcal{H}} \quad (3.246)$$

とした. また,  $u$  は

$$\mathcal{R} = \Phi - \frac{\mathcal{H}}{\bar{\varphi}'} \delta\varphi^{(GI)} \quad (3.247)$$

で定義されるゲージ不変量である曲率ゆらぎ  $\mathcal{R}$  を用いて,

$$u = -z\mathcal{R} \quad (3.248)$$

と表わされることがわかる.

ここまで, スカラー場の揺らぎと計量の揺らぎの発展を記述する方程式を導出した. 以下ではその量子化を行う.

今考えている系では時間並進不変となっていないため, 場を演算子を以下のように平面波展開する.

$$u(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} [u_k(\tau)a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + u_k^*(\tau)a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (3.249)$$

ここで,  $k = |\mathbf{k}|$  である.  $a(\mathbf{k})$  と  $a^\dagger(\mathbf{k})$  はそれぞれ消滅, 生成演算子であり, これらの交換関係は

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0, \\ [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= 2k(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (3.250)$$

を満たすものとする. 一方, 共役運動量は

$$\pi(\tau, \mathbf{x}) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u'} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \left[ \frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau} a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \frac{\partial u_k^*(\tau)}{\partial\tau} a^\dagger(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (3.251)$$

で与えられる. これらが場の交換関係

$$\begin{aligned} [u(\tau, \mathbf{x}), u(\tau, \mathbf{y})] &= [\pi(\tau, \mathbf{x}), \pi(\tau, \mathbf{y})] = 0, \\ [u(\tau, \mathbf{x}), \pi(\tau, \mathbf{y})] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (3.252)$$

を満たすための条件は

$$u_k(\tau) \frac{\partial u_k^*(\tau)}{\partial\tau} - u_k^*(\tau) \frac{\partial u_k(\tau)}{\partial\tau} = 2ik \quad (3.253)$$

であることがわかる. したがって, (3.249) のフーリエ変換

$$\tilde{u}(\tau, \mathbf{k}) = \frac{1}{2k} [u_k(\tau)a(\mathbf{k}) + u_k^*(\tau)a^\dagger(\mathbf{k})] \quad (3.254)$$

を用いると,

$$\langle 0 | \tilde{u}^\dagger(\tau, \mathbf{k}) \tilde{u}(\tau, \mathbf{k}') | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \mathcal{P}_u(\tau, \mathbf{k}) \quad (3.255)$$

で与えられる二点相関関数の真空期待値のパワースペクトル  $\mathcal{P}_u$  は, 左辺を (3.252) を用いて計算すると,

$$\mathcal{P}_u(\tau, \mathbf{k}) = \frac{|u_k(\tau)|^2}{2k} \quad (3.256)$$

となることがわかる。したがって、曲率揺らぎのパワースペクトル  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  は、(3.248) より、

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\tau, \mathbf{k}) = \frac{1}{2k} \frac{|u_k(\tau)|^2}{z^2} \quad (3.257)$$

で与えられることがわかる。

$u_k$  の時間発展は (3.245) に (3.249) を代入して得られる式

$$u_k'' + \left( k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0 \quad (3.258)$$

を解くことで得ることができる。そこで、3.4.2 節で扱ったスローロール近似 (3.109), (3.110) の下での解を求める。このとき、スローロールパラメーター (3.113), (3.114) はそれぞれ

$$\varepsilon \simeq \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left( \frac{-3H\dot{\varphi}}{\frac{3H^2}{8\pi G}} \right)^2 = \frac{4\pi G\dot{\varphi}^2}{H^2} = \frac{4\pi G\bar{\varphi}'^2}{\mathcal{H}^2} = 1 - \frac{\mathcal{H}'}{\mathcal{H}^2}, \quad (3.259)$$

$$\eta \simeq -\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{\varphi}}{H\dot{\varphi}} = \epsilon + 1 - \frac{\bar{\varphi}''}{\mathcal{H}\bar{\varphi}'} \quad (3.260)$$

となる。スローロール近似が成り立つとき、これらは十分小さく、その時間変化も十分小さいため、スローロールパラメーターの一次までで、

$$\begin{aligned} z' &\simeq (1 + 2\varepsilon - \eta)\mathcal{H}z, \\ z'' &\simeq (2 + 5\varepsilon - 3\eta)\mathcal{H}^2z \end{aligned} \quad (3.261)$$

となることがわかる。ここで、 $\varepsilon$  がほぼ一定とみなせることから、(3.259) は簡単に積分することができ、

$$(1 - \varepsilon)\tau \simeq -\frac{1}{\mathcal{H}} \quad (3.262)$$

が得られる。このとき、基準点として無限未来  $\tau \rightarrow -0$  をとった。したがって、

$$\frac{z''}{z} \simeq \frac{2 - 9\varepsilon + 3\eta}{\tau^2} \quad (3.263)$$

となるから、式 (3.258) は

$$u_k'' + \left[ k^2 - \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\tau^2} \right] u_k = 0 \quad (3.264)$$

のように表わすことができる。ここで、便利のため、

$$\frac{z''}{z} \equiv \left( \nu^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{\tau^2} \quad (3.265)$$

とした。 $\nu$  は一次近似で一定となり、

$$\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\varepsilon - \eta \quad (3.266)$$

で与えられる。このとき、(3.264) はベッセル微分方程式であるから、第一種および第二種ハンケル関数  $H_\nu^{(1)}$ ,  $H_\nu^{(2)}$  を用いて一般解を求めることができ、

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{-k\tau} \left[ C_1 H_\nu^{(1)}(-k\tau) + C_2 H_\nu^{(2)}(-k\tau) \right] \quad (3.267)$$



が得られる.  $C_1, C_2$  は定数であり, 規格化条件 (3.284) より

$$|C_1|^2 - |C_2|^2 = 1 \quad (3.268)$$

を満たす. さらに, 非常に短いスケールでは平坦な時空上の場の理論とみなせるはずである. 実際,  $k^2 \gg z''/z(-k\tau \rightarrow \infty)$  で (3.258) は  $u_k'' + k^2 u_k = 0$  となり, 規格化条件 (3.284) を満たす解は

$$u_k = e^{-ik\tau} \quad (3.269)$$

のように平面波解となっていることがわかる. ここで, ハンケル関数は  $-k\tau \rightarrow 0$  の極限で

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(-k\tau) &\simeq \sqrt{\frac{2}{-\pi k\tau}} \exp\left[i\left(-k\tau - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right)\right], \\ H_\nu^{(2)}(-k\tau) &\simeq \sqrt{\frac{2}{-\pi k\tau}} \exp\left[-i\left(-k\tau - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (3.270)$$

となる. このとき, (3.267) が (3.269) となることから,  $C_1 = \exp[i(\pi/4 + \pi\nu/2)]$ ,  $C_2 = 0$  と選べばよいことがわかる. したがって, 最終的な解は

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2} + \nu\right)\right] \sqrt{-k\tau} H_\nu^{(1)}(-k\tau) \quad (3.271)$$

となることがわかる. 長波長極限 ( $-k\tau \rightarrow 0$ ) では, 第一種ハンケル関数が

$$H_\nu^{(1)}(-k\tau) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{-\nu} \quad (3.272)$$

となるから, ハッブル半径より十分大きな波長 ( $-k\tau \ll 1$ ) の解は

$$u_k(\tau) = \exp\left[i\frac{\pi}{2}\left(\nu - \frac{1}{2}\right)\right] 2^{\nu-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{\frac{1}{2}-\nu} \quad (3.273)$$

で与えられる. この解は, スローロールの最低次で  $-\tau \simeq \mathcal{H}^{-1}$  であることを用いれば,

$$|u_k(\tau)|^2 \simeq \frac{\mathcal{H}^2}{k^2} \left(\frac{k}{\mathcal{H}}\right)^{-6\epsilon+2\eta} = \left(\frac{aH}{k}\right)^2 \left(\frac{k}{aH}\right)^{-6\epsilon+2\eta} \quad (3.274)$$

となり, 曲率ゆらぎのパワースペクトル (3.257) は,  $z^2 = 2a^2\epsilon M_{\text{pl}}^2$ ,  $H^2 \simeq V/3M_{\text{pl}}^2$  から,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{V}{12k^3 M_{\text{pl}}^4 \epsilon} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-6\epsilon+2\eta} \quad (3.275)$$

となることがわかる. ここで,  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$  の全波数空間について積分

$$\frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \int d\ln k \Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \quad (3.276)$$

で定義される無次元化されたパワースペクトル  $\Delta_{\mathcal{R}}^2(k)$  が用いられることが多く,

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) \equiv \frac{k^3 \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)}{2\pi^2} = \frac{V}{24\pi^2 M_{\text{pl}}^4 \epsilon} \left(\frac{k}{aH}\right)^{-6\epsilon+2\eta} \quad (3.277)$$

となる。したがって、スカラー揺らぎの振幅

$$A_s \equiv \frac{V}{24\pi^2 M_{\text{pl}}^4 \varepsilon} \quad (3.278)$$

が得られる。また、(3.277) から、スローロール近似の最低次で  $\Delta_{\mathcal{R}}^2$  の  $k$  依存性はなく、スケール不変なスペクトルとなることがわかる。このスケール不変なスペクトルからのずれを表すスペクトル指数  $n_s$  は、スローロールパラメーターを用いて

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_{\mathcal{R}}^2}{d \ln k} = -6\varepsilon + 2\eta \quad (3.279)$$

で与えられることがわかる。

### 重力波の生成

テンソル摂動の運動方程式は (3.207), (3.225) より,

$$\frac{1}{2} h''_{ij} + \mathcal{H} h'_{ij} + K h_{ij} - \frac{1}{2} h^i_j{}^{|k}{}_{|k} = 0 \quad (3.280)$$

で与えられる。3.4.3 節で述べたように、 $h_{ij}$  の独立な自由度は 2 個であるから、その単位偏光ベクトルをそれぞれ  $e_{ij}^+$ ,  $e_{ij}^\times$  とおくと、これらは対称テンソルであり、 $e^+{}^i{}_i = 0$ ,  $e^\times{}^{|j}{}_{|j} = 0$  を満たす。さらに、直交規格化条件  $e_{ij}^\lambda(\mathbf{k}) e_{ij}^{\lambda'}(\mathbf{k})^* = \delta_{\lambda\lambda'}$  ( $\lambda, \lambda' = +, \times$ ) を満たしている。ここで、 $v_{ij} = a h_{ij}$  とおくと、(3.280) は  $K = 0$  で

$$v''_{ij} - \frac{a''}{a} v_{ij}^\lambda - v_{ij}{}^{|k}{}_{|k} = 0 \quad (3.281)$$

となり、(3.245) と同じ形の方程式となる。そこで、スカラー揺らぎと同様に量子化を行う。

場を演算子を

$$v_{ij}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k} \sum_{\lambda=+, \times} \left[ v_k^\lambda(\tau) e_{ij}^\lambda a_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^{\lambda*}(\tau) e_{ij}^{\lambda*} a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right]. \quad (3.282)$$

のように平面波展開する  $a_\lambda(\mathbf{k})$  と  $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$  はそれぞれ消滅、生成演算子であり、これらの交換関係が

$$\begin{aligned} [a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}(\mathbf{k}')] &= [a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] = 0, \\ [a_\lambda(\mathbf{k}), a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')] &= 2k(2\pi)^3 \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \end{aligned} \quad (3.283)$$

を満たすものとし、規格化条件として、

$$v_k^\lambda(\tau) \frac{\partial v_k^{\lambda*}(\tau)}{\partial \tau} - v_k^{\lambda*}(\tau) \frac{\partial v_k^\lambda(\tau)}{\partial \tau} = 2ik \quad (3.284)$$

を課すと、二点相関関数の真空期待値のパワースペクトル  $\mathcal{P}_v$  を計算して、

$$\mathcal{P}_v(\tau, \mathbf{k}) = \frac{|v_k^+(\tau) + v_k^\times(\tau)|^2}{k} \quad (3.285)$$

が得られる。スローロール近似の下、 $a''/a$  はスローロールパラメーターを用いて、

$$\frac{a''}{a} \simeq 2\mathcal{H}^2 \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad (3.286)$$

と表わすことができ、さらに、

$$\frac{a''}{a} = \left( \mu^2 - \frac{1}{4} \right) \tau^2, \quad \mu \simeq \frac{3}{2} + \varepsilon \quad (3.287)$$

と書くと、スカラー揺らぎと同様の手順で、 $v_\lambda$  を求めることができる。特に、 $-k\tau \ll 1$  で

$$v_k^\lambda(\tau) = \exp \left[ i \frac{\pi}{2} \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \right] 2^{\mu - \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{\frac{1}{2} - \mu} \quad (3.288)$$

が得られる。したがって、重力波の無次元化されたパワースペクトルは

$$\Delta_h^2(k) = \frac{k^3 \mathcal{P}_v}{2\pi^2 a^2} = \frac{2V}{3\pi^2 M_{\text{pl}}^2} \left( \frac{k}{aH} \right)^{-2\varepsilon} \quad (3.289)$$

で与えられ、その振幅とスペクトル指数は

$$A_h = \frac{2V}{3\pi^2 M_{\text{pl}}^2}, \quad n_h \equiv \frac{d \ln \Delta_h^2}{d \ln k} = -2\varepsilon \quad (3.290)$$

となる。特に、 $A_s$  との比はテンソル・スカラー比と呼ばれ、

$$r \equiv \frac{A_h}{A_s} = 16\varepsilon \quad (3.291)$$

と表わされる。

### 観測による模型の制限

スローロール近似の下でパワースペクトル (3.289), (3.277) をある波数  $k_*$  の周りで展開すると、CMB の温度揺らぎの観測結果は  $A_s$ ,  $n_s$  および  $r$  によって実現される。つまり、 $A_s$ ,  $n_s$ ,  $r$  を変化させ、CMB の温度揺らぎの観測結果とフィッティングを行うことでこれらの3個の量を制限することができる。図 3.7 は Planck[38] によるスペクトル指数 (横軸) とテンソル・スカラー比 (縦軸) に対する制限を示しており、 $k_* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  である。また、 $A_s = (2.445 \pm 0.096) \times 10^{-9}$  であることが知られている [36]。  $A_s$ ,  $n_s$ ,  $r$  はインフラトンのポテンシャルに依存するため、図 3.7 のようにポテンシャルに対する制限を与える。

### 3.4.4 宇宙の再加熱

インフレーションは標準宇宙論における問題を補完する理論として導入されており、インフレーション終了後に軽元素合成へと移行しなければならない。3.4.1 節で述べたように、インフレーション中のインフラトンのエネルギー密度はほぼ一定となる。軽元素合成を実現するためにはインフラトンが自身のエネルギーを物資や放射のエネルギーへと転化することが必要となる。

これを宇宙の再加熱 (リヒーティング) という。十分なインフレーションが起こり、適切な温度まで宇宙が再加熱されるかどうかはインフラトンのポテンシャルの形状や他の場との相互作用に依存する。この節ではインフラトンのエネルギー密度と再加熱温度との関係について議論する。

インフラトンは、インフレーションが終了すると、ポテンシャルの最小点のまわりを激しく振動するようになる。インフラトンが振動する時期における宇宙の振る舞いについて考える。式

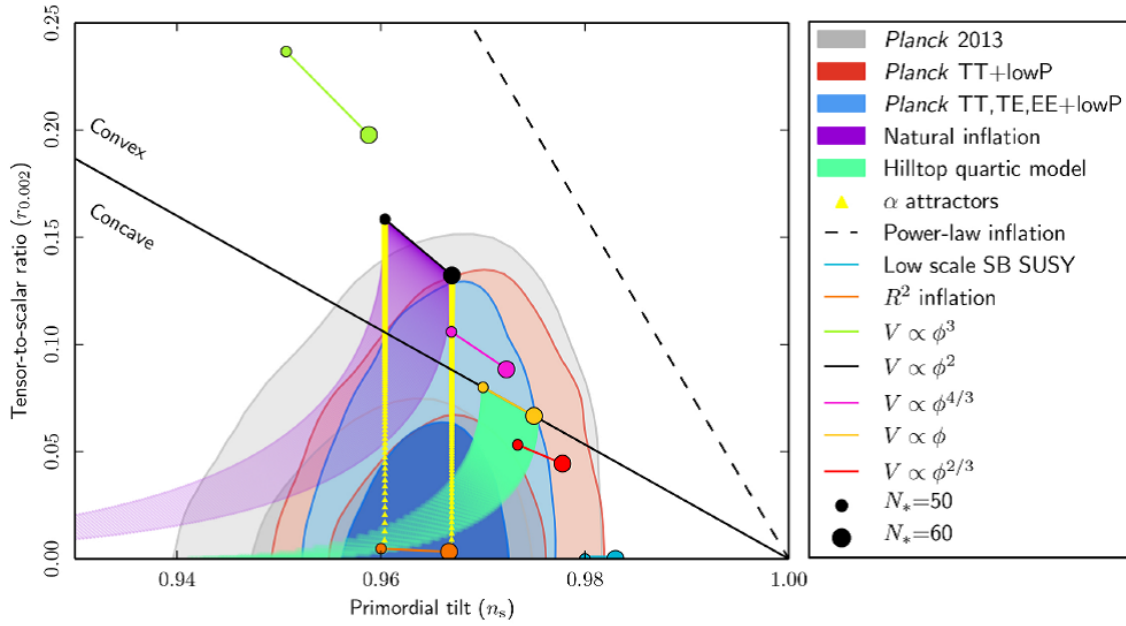


図 3.7 Planck[38] による主なインフレーション模型に対する制限. 領域はそれぞれ 68%CL, 95%CL である.

(3.107) の両辺に  $\dot{\varphi}$  をかけて,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right) = -3H\dot{\varphi}^2 \quad (3.292)$$

とまとめることができる. 今, 振動が宇宙膨張に比べて十分速いとき  $\dot{\varphi}^2$  を一周期平均  $\langle \dot{\varphi}^2 \rangle$  とし, さらにビリアル定理 ( $\langle K \rangle = \langle V \rangle$ ) より

$$\left\langle \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right\rangle + \langle V(\varphi) \rangle = \langle \dot{\varphi}^2 \rangle$$

と書くことができるから, 式 (3.292) はインフラトンのエネルギー密度の時間平均  $\langle \rho_\varphi \rangle = \langle \dot{\varphi}^2 \rangle$  の発展方程式

$$\frac{d}{dt} \langle \rho_\varphi \rangle + 3H \langle \rho_\varphi \rangle = 0 \quad (3.293)$$

に書き換えることができる. これは式 (2.29) の非相対論的物質のエネルギー密度に対する方程式に他ならない. よって, この時期におけるエネルギー密度は宇宙の膨張により  $a^{-3}$  で減少することがわかる. 以下では  $\langle \rangle$  を省略する.

インフラトンのエネルギー密度と再加熱温度の関係を調べる. 標準宇宙論によれば, インフレーション後, 放射優勢期となるので, インフラトンが崩壊して生成される粒子が相対論的であるとする. インフラトンの崩壊率を  $\Gamma_\varphi$  とすると, インフラトンの崩壊による相対論的粒子へのエネルギーの転移は

$$\frac{d}{dt} \rho_\varphi = -(3H + \Gamma_\varphi) \rho_\varphi, \quad (3.294)$$

$$\frac{d}{dt} \rho_r = -4H \rho_r + \Gamma_\varphi \rho_\varphi \quad (3.295)$$

となる。このとき、フリードマン方程式 (2.32) は

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{pl}}^2}(\rho_r + \rho_\varphi) \quad (3.296)$$

と書かれる。これらを連立して解けばインフラトンと放射のエネルギー密度の時間推移が求まる。式 (3.294) は  $d(a^3\rho_\varphi)/dt = -\Gamma_\varphi a^3\rho_\varphi$  とまとめることができ、これを解くと

$$a^3(t)\rho_\varphi(t) = Ce^{-\Gamma_\varphi t} \quad (3.297)$$

となる。積分定数  $C$  をインフレーション終了時刻  $t_f$  におけるスケール因子  $a(t_f)$  とインフラトンのエネルギー密度  $\rho_\varphi(t_f)$  を用いて  $C = a^3(t_f)\rho_\varphi(t_f)e^{\Gamma_\varphi t_f}$  と書くと、

$$\rho_\varphi(t) = \rho_\varphi(t_f) \left( \frac{a(t)}{a(t_f)} \right)^{-3} e^{-\Gamma_\varphi(t-t_f)} \quad (3.298)$$

が得られる。同様に式 (3.295) を解くと、

$$\rho_r(t) = \Gamma_\varphi \int_{t_f}^t \left( \frac{a(t)}{a(t')} \right)^{-4} \rho_\varphi(t') dt' \quad (3.299)$$

となる。式 (3.298) の指数部分を  $t_f$  のまわりで展開して1次以上を無視して、

$$\rho_\varphi(t) \simeq \rho_\varphi(t_f) \left( \frac{a(t)}{a(t_f)} \right)^{-3}. \quad (3.300)$$

上で述べたように、インフラトンがポテンシャルの最下点で振動すると宇宙は物質優勢のように振る舞うので  $a \propto t^{2/3}$  となる。さらにこのとき、 $t_f = 2/3H(t_f) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3M_{\text{pl}}^2}{\rho_\varphi(t_f)}}$  であるから、式 (3.299) は

$$\rho_r(t) \simeq \frac{4\sqrt{3}}{15}\Gamma_\varphi M_{\text{pl}}\sqrt{\rho_\varphi(t_f)} \left( \frac{a(t)}{a(t_f)} \right)^{-3/2} \left[ 1 - \left( \frac{a(t)}{a(t_f)} \right)^{-5/2} \right] \quad (3.301)$$

となる。インフレーション終了時、 $\rho_r = 0$  であるから、インフラトンがポテンシャルの最小点を宇宙膨張の時間スケールより十分短い周期で振動するようになると、 $\rho_r$  は瞬時に  $\Gamma_\varphi M_{\text{pl}}^2\sqrt{\rho_\varphi(t_f)}$  のオーダーまで跳ね上がり、その後は宇宙の膨張によって  $a^{-3/2}$  で減少していくような振る舞いをするのがわかる。生成された放射が熱平衡状態にあるとすると、放射のエネルギー密度は式 (2.44) より  $\rho_r = \pi^2 g_* T^4/30$  に従うので、これによって到達する温度  $T_{\text{max}}$  は、

$$T_{\text{max}} \simeq 1.40g_*^{-1/4} M_{\text{pl}}^{1/2} \Gamma_\varphi^{1/4} \rho_\varphi^{1/8}(t_f)$$

となる。そして、 $t \simeq \Gamma_\varphi^{-1}$  になると、インフラトンの崩壊が急速に進み、宇宙は放射優勢期に入る。このとき、 $t = 1/2H$  だから、 $H = 1/2t \simeq \Gamma_\varphi/2$  となり、フリードマン方程式  $H^2 = \rho_r/3M_{\text{pl}}^2$  から、再加熱温度  $T_R$  が

$$T_R = 1.74g_*^{-1/4} (M_{\text{pl}}\Gamma_\varphi)^{1/2} \quad (3.302)$$

と見積もることができる。

## 第4章

# 輻射ニュートリノ質量生成模型

前章で述べた標準模型で説明できないニュートリノ質量や暗黒物質を説明する模型として, Ma 模型 [16] が知られている. この模型は新たな場として, 右巻きニュートリノとスカラー二重項を導入し, これらに  $Z_2$  対称性を課したものである. この枠組みでは小さなニュートリノ質量と暗黒物質が共通の起源をもつ. さらに, スカラー二重項の中性成分と最も軽い右巻きニュートリノが暗黒物質の候補となりうるが, スカラー二重項の中性成分を暗黒物質とすることで, 右巻きニュートリノの崩壊によるレプトジェネシスが実現可能となる. この章では, そのレプトジェネシスによるバリオン数生成について定量的に評価する. インフレーションについては次章で議論する.

### 4.1 Ma 模型

ニュートリノ質量と暗黒物質を説明する拡張模型として, 標準模型にスカラー二重項  $\eta = (\eta^+, (\eta_R + i\eta_I)/\sqrt{2})^T$  とゲージ重項フェルミオンである右巻きニュートリノ  $N_i$  ( $i = 1-3$ ) を導入した模型が知られている [16]. この模型では, さらに  $Z_2$  離散対称性として, 標準模型の粒子に偶パリティ, 新たに導入した粒子スカラー二重項および右巻きニュートリノに奇パリティを課している. 導入した新たな粒子の量子数を表 (4.1) にまとめておく. ラグランジアンに対する新たな粒子の寄与は

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L} \supset & \sum_{\alpha,i} \left[ h_{\alpha i} \bar{N}_i \eta^\dagger \ell_\alpha + h_{\alpha i}^* \bar{\ell}_\alpha \eta N_i + \frac{M_i}{2} \bar{N}_i N_i^c + \frac{M_i}{2} \bar{N}_i^c N_i \right] \\
 & + m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + m_\eta^2 \eta^\dagger \eta + \lambda_1 (\phi^\dagger \phi)^2 + \lambda_2 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_3 (\phi^\dagger \phi) (\eta^\dagger \eta) + \lambda_4 (\phi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \phi) \\
 & + \left[ \frac{\lambda_5}{2} (\phi^\dagger \eta)^2 + \frac{\lambda_5^*}{2} (\eta^\dagger \phi)^2 \right], \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$Z_2$
$\eta$	<b>2</b>	1	–
$N_{1-3}$	<b>1</b>	2	–

表 4.1 粒子の量子数

で与えられる. 右巻きニュートリノの質量  $M_i$  に対する仮定として,  $M_1 < M_2 < M_3$  とする.  $h_{\alpha i}$  はニュートリノの湯川結合定数であり, ここではフレーバー構造として,

$$\begin{aligned} h_{ei} &= 0, & h_{\mu i} &= h_i, & h_{\tau i} &= q_1 h_i, \\ h_{ej} &= h_j, & h_{\mu j} &= q_2 h_j, & h_{\tau j} &= -q_3 h_j, \end{aligned} \quad (4.2)$$

を仮定する [27].\*<sup>1</sup>  $q_{1-3}$  は実定数であり,  $i$  および  $j$  は  $i = 1, 2, j = 3$  をとる.

スカラー結合定数に対する制限として, 摂動的に理論を扱うための条件 ( $|\lambda_i| < 4\pi$ ) [153] に加えて, 真空の安定性がある. 真空の安定性はスカラーポテンシャルの両端が立ち上がることで保障される. 場の値が非常に大きくなる場所ではポテンシャルの 4 次の項の寄与が支配的となるため, 真空が安定となる条件として, ツリーレベルでは,

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3, \lambda_{\pm} > -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2} \quad (4.3)$$

が要求される [154]. ここで,  $\lambda_{\pm} = \lambda_3 + \lambda_4 \pm \lambda_5$  とした. さらに, スカラー場のツリーレベルでの散乱過程において, 散乱確率が 1 を越えないための条件として,

$$\begin{aligned} |e_i| &< 16\pi, \\ e_{1,2} &= \lambda_3 \pm \lambda_4, \quad e_{3,4} = \lambda_3 \pm |\lambda_5|, \\ e_{5,6} &= \lambda_3 + 2\lambda_4 \pm 3|\lambda_5|, \quad e_{7,8} = \lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_4^2}, \\ e_{9,10} &= 3(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{9(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)^2}, \\ e_{11,12} &= \lambda_1 + \lambda_2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + |\lambda_5|^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

が与えられる [155, 156].

$\eta$  は真空期待値をもたないものと仮定すると,  $Z_2$  対称性が保存されるため,  $Z_2$  奇パリティの最も軽い粒子が電氣的に中性であれば, これは暗黒物質となりうる. この模型の場合,  $\eta$  の中性成分粒子か最も軽い右巻きニュートリノがその候補であるが, 以下では  $\eta$  の中性成分粒子  $\eta_R^0$  を暗黒物質とするシナリオについて考える. 電弱対称性が破れるとヒッグス  $\phi$  とスカラー二重項  $\eta$  の各成分の質量は

$$M_h^2 = 4\lambda_1 \langle \phi^0 \rangle^2, \quad M_{\eta_R^0}^2 = m_\eta^2 + \lambda_+ \langle \phi^0 \rangle^2, \quad M_{\eta_I^0}^2 = m_\eta^2 + \lambda_- \langle \phi^0 \rangle^2, \quad M_{\eta_c}^2 = m_\eta^2 + \lambda_3 \langle \phi^0 \rangle^2 \quad (4.5)$$

となる. したがって,  $\eta_R^0$  が暗黒物質となる条件として,

$$\lambda_3 + \lambda_4 < 0, \quad \lambda_5 < 0, \quad M_{\eta_R^0} < M_1 \quad (4.6)$$

が得られる\*<sup>2</sup>. また, LHC によってヒッグスの質量が  $M_h = 125$  GeV であるから, 式 (4.5) より  $\lambda_1 \simeq 0.13$  が得られる.

\*<sup>1</sup> ここでは軽いニュートリノ質量構造が正常階層型 (NH) の場合を扱う. 逆階層型 (IH) の場合については [28] を参照.

\*<sup>2</sup>  $\lambda_5 > 0$  とすると,  $\eta_I^0$  が最も軽い粒子になるため, 暗黒物質の候補となる. しかし,  $\eta_R^0$  が暗黒物質の場合と議論は変わらないため,  $\lambda_5 < 0$  の場合のみを扱う.

## 4.2 スカラー暗黒物質の残存量と制限

### 4.2.1 暗黒物質の質量領域

今考えているスカラー暗黒物質のシナリオは、これまでに数々の論文で議論されている [34, 157, 158, 159, 160, 161, 162]. 暗黒物質  $\eta_R^0$  の質量領域は残存量をはじめ, LEP や LHC の加速器実験, LUX などの暗黒物質直接探査実験により制限されており,  $53 \text{ GeV} \lesssim M_{\eta_R^0} \lesssim 72 \text{ GeV}$  と  $500 \text{ GeV} \lesssim M_{\eta_R^0}$  の領域に大別される.

$M_{\eta_R^0} \lesssim M_W$  の質量領域では, 暗黒物質の残存量に寄与する主な対消滅過程は  $\eta_R^0 \eta_R^0 \rightarrow h \rightarrow b\bar{b}$  である. この過程は  $\lambda_+$  に依存しており, これは  $\eta_R^0$  と核子の反応率にも寄与するため, 暗黒物質の直接探査実験から小さく制限されており, ほとんどの質量領域で  $\Omega_{\eta_R^0} h^2 > 0.12$  となる. しかし,  $M_{\eta_R^0} \simeq M_h/2$  では, 共鳴効果によって対消滅散乱断面積が大きくなるため,  $\Omega_{\eta_R^0} h^2 = 0.12$  が実現できる. また,  $M_{\eta_R^0} \lesssim M_W$  の質量領域では,  $\eta_R^0$  と  $\eta_I^0$  または  $\eta^p m$  との質量差が十分小さいとき, ゲージ場を介した共対消滅過程の寄与が考えられる. しかし, これらの質量差は LEP 実験によって制限されており, 共対消滅過程の寄与が支配的になる領域はすでに排除されている.

$M_{\eta_R^0}$  が  $72 \text{ GeV}$  より大きい場合,  $\eta_R^0 \eta_R^0 \rightarrow W^\pm f \bar{f}'$  の対消滅過程が許されるようになる.  $f, f'$  は標準模型フェルミオンである. これはゲージ相互作用なので既知のパラメーターのみに依存し, 散乱断面積が非常に大きくなるため,  $\Omega_{\eta_R^0} h^2 < 0.12$  となる. さらに,  $M_{\eta_R^0}$  が大きい領域では  $\eta_R^0 \eta_R^0 \rightarrow W^+ W^- (Z^0 Z^0)$  が許されるようになる. そのため,  $M_{\eta_R^0} \simeq 500 \text{ GeV}$  まで暗黒物質の残存量を満たす質量領域はない.

$M_{\eta_R^0} \gtrsim 500 \text{ GeV}$  より大きくなると,  $m_\eta \gg \langle \phi^0 \rangle$  となり, スカラー二重項  $\eta$  の成分間の質量が縮退するため, 共対消滅の寄与が重要になる. 本研究ではこの質量領域について議論する.

### 4.2.2 残存量の評価

暗黒物質の残存量は (3.67) を解くことで得られる. 今, 冷たい暗黒物質を考えているので 3.2 節で議論したように, 熱平均化した散乱断面積は平均二乗速度で展開でき,  $\langle \sigma_{ij} v \rangle = a_{ij} + b_{ij} \langle v^2 \rangle$  となる. ここで,  $(i, j = 0, 1, 2, 3)$  はそれぞれ  $(\eta_R^0, \eta_I^0, \eta^+, \eta^-)$  に対応する. 右巻きニュートリノについては, 暗黒物質が脱結合するエネルギースケール ( $\sim \mathcal{O}(100) \text{ GeV}$ ) では既に崩壊して存在しないものとする. 今考えている相互作用の場合, 残存量には  $a_{ij}$  の寄与が支配的となるため,  $\langle \sigma_{ij} v \rangle \simeq a_{ij}$  を考える. 式 (3.68), (3.69) から有効散乱断面積と有効自由度はそれぞれ

$$\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle = \frac{1}{g_{\text{eff}}^2} \sum_{i,j} g_i g_j \frac{M_{\eta_i}^{3/2} M_{\eta_j}^{3/2}}{M_{\eta_R^0}^3} e^{-(M_{\eta_i} - M_{\eta_R^0})/T} e^{-(M_{\eta_j} - M_{\eta_R^0})/T} a_{ij}, \quad (4.7)$$

$$g_{\text{eff}} \equiv \sum_i g_i \left( \frac{M_{\eta_i}}{M_{\eta_R^0}} \right)^{3/2} e^{-(M_{\eta_i} - M_{\eta_R^0})/T} \quad (4.8)$$

で与えられる. さらに, 式 (3.70) を用いると, 暗黒物質の残存量は  $n = 0$  として,

$$\Omega_{\eta_R^0} h^2 = \frac{1.07 \times 10^9 z_f \text{ GeV}^{-1}}{\langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle g_*^{1/2} m_{\text{pl}}}, \quad z_f = \ln \frac{0.038 m_{\text{pl}} M_{\eta_R^0} \langle \sigma_{\text{eff}} v \rangle}{g_{*S}^{1/2} z_f^{1/2}} \quad (4.9)$$



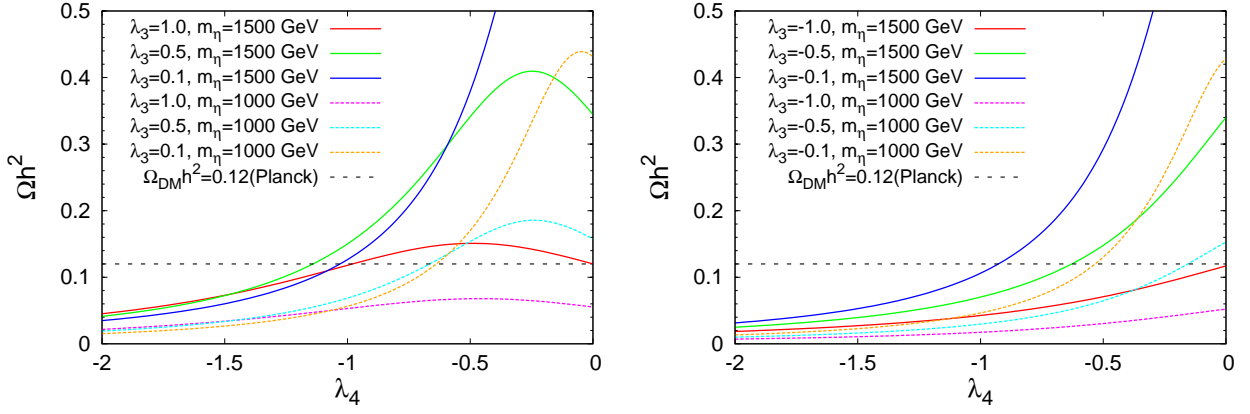


図 4.1  $m_\eta = 1000, 1500$  GeV それぞれの場合における  $\Omega_{\eta_R} h^2$  の  $\lambda_4$  依存性.  $|\lambda_5| = 10^{-5}$  とした. 左図は  $\lambda_3 > 0$  の場合で,  $\lambda_3 = 0.1, 0.5, 1.0$  について調べた. 右図は  $\lambda_3 < 0$  の場合で,  $\lambda_3 = -0.1, -0.5, -1.0$  について調べたものである. 黒点線は観測結果が要求する残存量を示している.

によって得ることができる.

今扱っている模型において暗黒物質の残存量に寄与する散乱断面積は, ゲージ相互作用に依存する部分とスカラー相互作用に依存する部分に分けることができ,

$$a^{ij} = a_g^{ij} + a_\lambda^{ij} \quad (4.10)$$

となる. これらの反応過程のダイアグラムは [35] を参照. 式 (4.1) の湯川相互作用は, 後で述べるように, その結合定数が非常に小さい ( $|h_i| \lesssim \mathcal{O}(10^{-3})$ ) ため, 無視できる.  $a_g^{ij}$  はゲージ結合が寄与する過程の散乱断面積で,

$$\begin{aligned} a_g^{00} = a_g^{11} = a_g^{23} &= \frac{(1 + 2c_W^4)g_2^4}{128\pi c_W^4 M_{\eta_R^0}^2}, \\ a_g^{02} = a_g^{03} = a_g^{12} = a_g^{13} &= \frac{s_W^2 g_2^4}{64\pi c_W^2 M_{\eta_R^0}^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

という結果が得られる. ここで,  $s_W = \sin \theta_W$ ,  $c_W = \cos \theta_W$  で  $\theta_W$  はワインバーグ角であり,  $g_2$  は  $SU(2)_L$  のゲージ結合定数である. 一方,  $a_\lambda^{ij}$  はスカラー結合による寄与で

$$a_\lambda^{ij} = \frac{\Lambda^{ij}}{64\pi M_{\eta_R^0}^2} \quad (4.12)$$

で与えられる. ここで,  $\Lambda^{ij}$  は  $\Lambda^{ij} = \Lambda^{ji}$  であり,

$$\begin{aligned} \Lambda^{00} = \Lambda^{11} &= (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 + 2\lambda_3^2), \\ \Lambda^{22} = \Lambda^{33} = 2\Lambda^{01} &= (\lambda_+ - \lambda_-)^2, \\ 2\Lambda^{02} = 2\Lambda^{03} = 2\Lambda^{12} = 2\Lambda^{13} &= (\lambda_+ - \lambda_-)^2 + (\lambda_- - \lambda_3)^2, \\ 2\Lambda^{23} &= (\lambda_+ + \lambda_-)^2 + 4\lambda_3^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

である.  $\lambda_5$  の大きさが十分小さい ( $\sim \mathcal{O}(10^{-5})$ ) とすると, 上で述べたスカラー結合定数に対する制限から,  $\lambda_3$  と  $\lambda_4$  のとりうる範囲を大まかに見積もることができて,

$$\lambda_3 < -1, \quad 0 > \lambda_4 > -4\pi \quad (4.14)$$

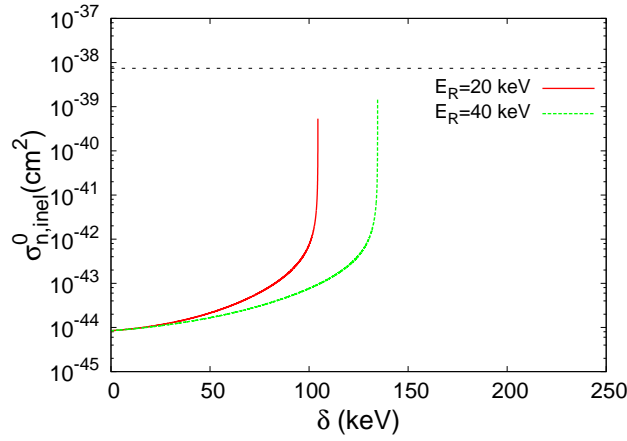


図 4.2 非弾性散乱過程の各反跳エネルギーに対する断面積の  $\delta$  依存性. 各制限には LUX 実験の結果を用いた [126]. 黒点線は  $\sigma_{n,\text{inel}}^0 \simeq 7.4 \times 10^{-39} \text{ cm}^2$  である.

となる. この範囲内で暗黒物質の残存量を評価する.

図 4.1 は  $m_\eta = 1000, 1500 \text{ GeV}$ ,  $\lambda_5 = -10^{-5}$  とし, 各  $\lambda_3$  に対して,  $\Omega_{\eta_R^0} h^2$  の  $\lambda_4$  依存性を評価したものである. これより, 観測結果を実現するパラメーター領域が存在することがわかる.

### 4.2.3 暗黒物質直接探査実験における散乱過程からの制限

暗黒物質の直接検出実験には弾性散乱過程と非弾性散乱過程が考えられる. 今の模型の場合, 前者はヒッグスを介した散乱過程であり, その散乱断面積は

$$\sigma_{\text{el}}^0 = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda_+^2 \mu_N^2 m_N^2 f_N^2}{M_{\eta_R^0}^2 m_h^4} \quad (4.15)$$

で与えられる [153]. ここで,  $m_N$  は核子 (N) の質量,  $\mu_N$  は核子-暗黒物質系の換算質量であり,  $\mu_N = m_N M_{\eta_R^0} / (m_N + M_{\eta_R^0})$  で定義される.  $f_N$  は形状因子であり,  $f_N = 0.3$  である [34, 35]. 今考えている質量領域  $M_{\eta_R^0} \simeq 1 \text{ TeV}$  では, 図 4.1 から  $\lambda_+ \sim \mathcal{O}(1)$  で暗黒物質の残存量が実現できることがわかる. したがって, 散乱断面積 (4.15) は,  $\sigma_{\text{el}}^0 \sim \mathcal{O}(10^{-44}) \text{ cm}^2$  と見積もられ, 今後, 実験による検証が期待される.

一方,  $\eta_R^0$  と核子が  $Z^0$  を介して反応する非弾性散乱過程  $\eta_R^0 N \rightarrow \eta_I^0 N$  があり, スカラー結合定数  $\lambda_5$  に制限が与えられる [163, 164, 165, 166]. これはゲージ相互作用であるから, その散乱断面積は  $\sigma_{n,\text{inel}}^0 \simeq \frac{1}{2\pi} G_F^2 m_n^2 \simeq 7.4 \times 10^{-39} \text{ cm}^2$  となり, LUX の制限 [126] に比べてかなり大きい値であるが, そのシグナルは今のところ観測されていない. これは  $\eta_R^0$  と  $\eta_I^0$  に質量差が存在し, 地表に降り注ぐ暗黒物質の運動量がこの質量差より小さいため, この非弾性散乱過程が運動学的に制限されていると考えられる.  $\eta_R^0$  と  $\eta_I^0$  の質量差を  $\delta \equiv M_{\eta_I^0} - M_{\eta_R^0}$  とすると, この反応に必要な暗黒物質の速度の下限値は

$$v_{\text{min}} = \frac{1}{\sqrt{2m_A E_R}} \left( \frac{m_A E_R}{m_r} + \delta \right) \quad (4.16)$$

と見積もることができる [167]. ここで,  $E_R$  は反跳エネルギーである.  $m_A$  は標的となる原子核の質量,  $m_r$  は原子核-暗黒物質系の換算質量  $m_r = m_A M_{\eta_R^0} / (m_A + M_{\eta_R^0})$  である.

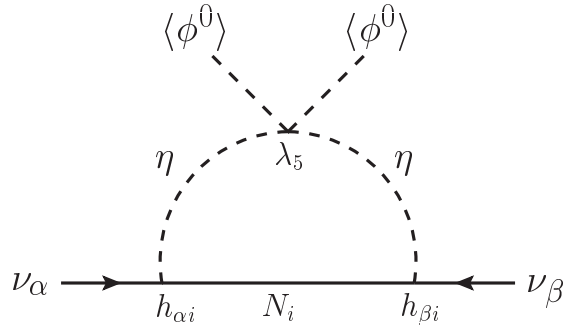


図 4.3 ニュートリノ質量を表すダイアグラム.

実験による非弾性散乱過程の断面積に対する制限は、弾性散乱過程の断面積  $\sigma_{n,el}^0$  に対する制限から、以下のように見積もることができる。

$$\sigma_{n,inel}^0 = \sigma_{n,el}^0 \frac{\int_{v_{\min}(\delta=0)}^{v_{\text{esc}}} dv \left( e^{-\frac{(v-v_e)^2}{v_0^2}} - e^{-\frac{(v+v_e)^2}{v_0^2}} \right)}{\int_{v_{\min}(\delta \neq 0)}^{v_{\text{esc}}} dv \left( e^{-\frac{(v-v_e)^2}{v_0^2}} - e^{-\frac{(v+v_e)^2}{v_0^2}} \right)}. \quad (4.17)$$

暗黒物質が我々の銀河に留まるための最大速度  $v_{\text{esc}}$  は、 $498 \text{ km/s} < v_{\text{esc}} < 608 \text{ km/s}$  と見積もられており [168],  $v_{\min} > v_{\text{esc}}$  である場合、この非弾性散乱過程は観測できない。以下では、 $v_{\text{esc}} = 544 \text{ km/s}$  とする。図 4.2 に典型的な反跳エネルギーに対する非弾性散乱過程の断面積の  $\delta$  依存性を示す。  $\sigma_{n,el}^0$  には LUX 実験の制限 [126] を用いた。各境界線より上の領域が排除されている領域であり、境界線の端点は  $v_{\min} = v_{\text{esc}}$  となる。これより、 $\eta_R^0$  と  $\eta_I^0$  の質量差は、例えば  $E_R = 20 \text{ keV}$  のとき、 $\delta \gtrsim 100 \text{ keV}$  と見積もることができる。

$|\lambda_5| \ll 1$  のとき、式 (4.5) から、質量差  $\delta$  は

$$\delta = M_{\eta_I^0} - M_{\eta_R^0} \simeq \frac{|\lambda_5| \langle \phi^0 \rangle^2}{M_{\eta_R^0}} \quad (4.18)$$

のように表わされる。したがって、上の結果から  $E_R = 20 \text{ keV}$  の場合の  $|\lambda_5|$  の下限値を見積もることができる。

$$|\lambda_5| \gtrsim 3.3 \times 10^{-6} \left( \frac{M_{\eta_R^0}}{1 \text{ TeV}} \right) \left( \frac{\delta}{100 \text{ keV}} \right) \quad (4.19)$$

となる。これはニュートリノ質量やバリオン数生成を評価する上で重要な制限である。

## 4.3 輻射ニュートリノ質量生成機構

### 4.3.1 輻射補正によるニュートリノ質量生成

この模型におけるニュートリノ質量は、 $Z_2$  対称性により、ディラック質量項が禁止されるため、図 4.3 のような 1 ループの寄与によって生成される。質量行列は

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\nu = \sum_{i=1}^3 h_{\alpha i} h_{\beta i} \left[ \frac{\lambda_5 \langle \phi^0 \rangle^2}{8\pi^2} \frac{M_i}{M_\eta^2 - M_i^2} \left( 1 + \frac{M_i^2}{M_\eta^2 - M_i^2} \ln \frac{M_i^2}{M_\eta^2} \right) \right] \equiv \sum_{i=1}^3 \lambda_5 h_{\alpha i} h_{\beta i} \Lambda_i \quad (4.20)$$

	$q_1$	$ h_2 $	$ h_3 $	$(q_2, q_3)$
(i)	0.8	$3.65 \times 10^{-3}$	$1.65 \times 10^{-3}$	(-0.30, 2.06)
(ii)	0.8	$3.23 \times 10^{-3}$	$1.64 \times 10^{-3}$	(-0.35, 2.07)

表 4.2 (i) $M_2 = 6$  TeV, (ii) $M_2 = 2$  TeV の場合におけるニュートリノ振動実験結果を満たすパラメーター. ここでは,  $|\lambda_5| = 10^{-5}$ ,  $|h_1| = 3.0 \times 10^{-8}$  とした.

となる. ここで,  $\lambda_5$  は十分小さく,  $M_\eta^2 = m_\eta^2 + (\lambda_3 + \lambda_4)\langle\phi\rangle^2$  とした. ニュートリノの微小な質量は, ループ補正による抑制と小さな  $\lambda_5$  によるものと解釈でき, 例えば,  $M_i \sim \mathcal{O}(1)$  TeV,  $|\lambda_5| \sim \mathcal{O}(10^{-5})$  とした場合, ニュートリノの湯川結合定数は  $h \sim \mathcal{O}(10^{-3})$  とミューオンの湯川結合定数と同程度の大きさになる.

式 (4.20) にフレーバー構造 (4.2) を代入してニュートリノ質量を

$$\mathcal{M}^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & q_1 & q_1^2 \end{pmatrix} (h_1^2 \Lambda_1 + h_2^2 \Lambda_2) \lambda_5 + \begin{pmatrix} 1 & q_2 & -q_3 \\ q_2 & q_2^2 & -q_2 q_3 \\ -q_3 & -q_2 q_3 & q_3^2 \end{pmatrix} h_3^2 \Lambda_3 \lambda_5 \quad (4.21)$$

のように表わす. ここで  $\Lambda_i$  は

$$\Lambda_i \equiv \frac{\langle\phi^0\rangle^2}{8\pi^2 \text{GeV}} \frac{1\text{GeV}}{M_i} \left[ 1 + \frac{M_i^2}{M_\eta^2 - M_i^2} \ln \frac{M_i^2}{M_\eta^2} \right] \quad (4.22)$$

と定義した.

式 (4.2) のフレーバー構造は,  $q_{1-3} = 1$  のとき, PMNS 行列が tribimaximal 構造

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

となるように定義されている. したがって, 質量行列 (4.21) を対角化すると,

$$U_{\text{PMNS}}^T \mathcal{M}^\nu U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3|\lambda_5||h_3|^2 \Lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2|\lambda_5|(|h_1|^2 \Lambda_1 + |h_2|^2 \Lambda_2) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

となり, マヨラナ位相  $\alpha_{1,2}$  は  $\lambda_5$ ,  $h_i$  の偏角を  $\varphi_{\lambda_5} = \arg(\lambda_5)$ ,  $\varphi_i = \arg(h_i)$  とすると,

$$\alpha_1 = \varphi_3 + \frac{\varphi_{\lambda_5}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{|h_1|^2 \Lambda_1 \sin(2\varphi_1 + \varphi_{\lambda_5}) + |h_2|^2 \Lambda_2 \sin(2\varphi_2 + \varphi_{\lambda_5})}{|h_1|^2 \Lambda_1 \cos(2\varphi_1 + \varphi_{\lambda_5}) + |h_2|^2 \Lambda_2 \cos(2\varphi_2 + \varphi_{\lambda_5})} \right) \quad (4.25)$$

と表わされる. 大気ニュートリノと太陽ニュートリノの振動実験 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] から要求される質量二乗差をそれぞれ  $\Delta m_{\text{atm}}^2$ ,  $\Delta m_{\text{sol}}^2$  とおくと, 式 (4.24) から,

$$|\lambda_5||h_2|^2 \Lambda_2 \simeq \frac{\sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}}{2}, \quad |\lambda_5||h_3|^2 \Lambda_3 \simeq \frac{\sqrt{\Delta m_{\text{sol}}^2}}{3} \quad (4.26)$$

となる. ここで,  $h_1$  は後で述べるように右巻きニュートリノ崩壊によるレプトジェネシスを実現するため, その大きさが  $h_{2,3}$  に比べて十分小さくなることから無視した.

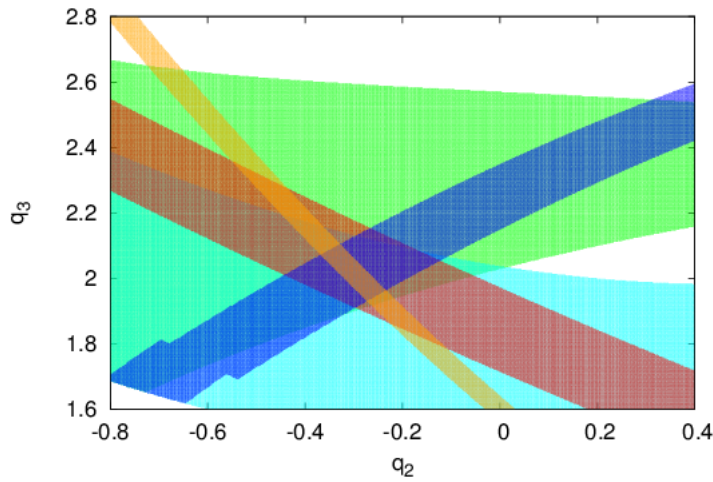


図 4.4 表 4.2 の (i) の場合について  $(q_2, q_3)$  平面上に描いた実験結果を満たす領域. 各領域の幅は  $2\sigma$  であり, それぞれ  $\Delta m_{31}$  (青色),  $\Delta m_{21}$  (橙色),  $\sin^2 \theta_{12}$  (赤色),  $\sin^2 \theta_{23}$  (水色),  $\sin^2 \theta_{13}$  (緑色) を表している.

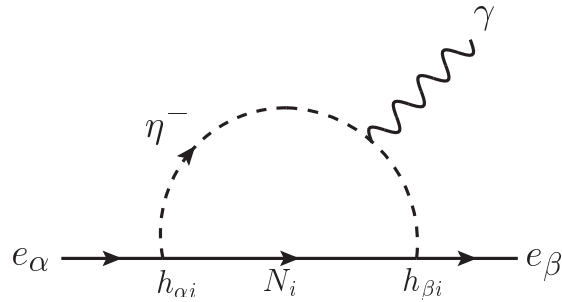


図 4.5 レプトンフレーバーを破る過程.

ここまで  $q_{1-3} = 1$  としたが, 近年のニュートリノ振動実験から  $\theta_{13}$  が有限の値を持つことがわかっているため, PMNS 行列は tribimaximal 構造ではありえない [7, 8, 9, 10]. そこで,  $q_1, q_2$  および  $q_3$  の値を適当に選び, ニュートリノ振動実験結果を満足するパラメータを求め. ここでは,  $M_\eta = 1 \text{ TeV}$ ,  $M_1 = 2 \text{ TeV}$ ,  $M_3 = 10 \text{ TeV}$  の場合について,  $q_1$  の値を固定し,  $(q_2, q_3)$  平面上に表 3.1 を満たすパラメータ領域を描くことで, すべての実験結果を満たす領域における  $(q_2, q_3)$  と湯川結合定数  $h_2, h_3$  の値を求めた. このとき, その他の結合定数を  $|\lambda_5| = 10^{-5}$ ,  $|h_1| = 3.0 \times 10^{-8}$  とし, 右巻きニュートリノ  $N_1, N_2$  の質量が (i) 階層的な場合 ( $M_1 < M_2$ ) と (ii) 縮退した場合 ( $M_1 \simeq M_2$ ) について調べた. 図 4.4 は (i) の場合について各ニュートリノ振動パラメータ領域を示したものである. ニュートリノ振動実験データをすべて満たすパラメータの組み合わせを表 4.2 に示した.

### 4.3.2 レプトンフレーバーを破る過程からの制限

この模型では,  $\mu \rightarrow e\gamma$  のようなレプトンフレーバーを破る過程が存在する. 今の模型の場合,  $e_\alpha \rightarrow e_\beta\gamma$  の分岐比は

$$\text{Br}(e_\alpha \rightarrow e_\beta\gamma) = \frac{3\alpha_{em}}{128\pi G_F^2 M_\eta^4} \left[ \sum_i h_{\beta i}^* h_{\alpha i} F_2 \left( \frac{M_i^2}{M_\eta^2} \right) \right]^2 \quad (4.27)$$

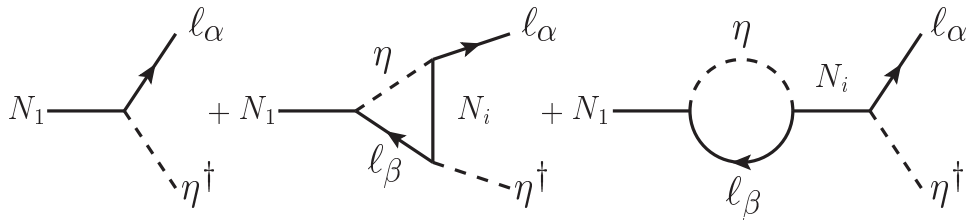


図 4.6 右巻きニュートリノの崩壊過程.

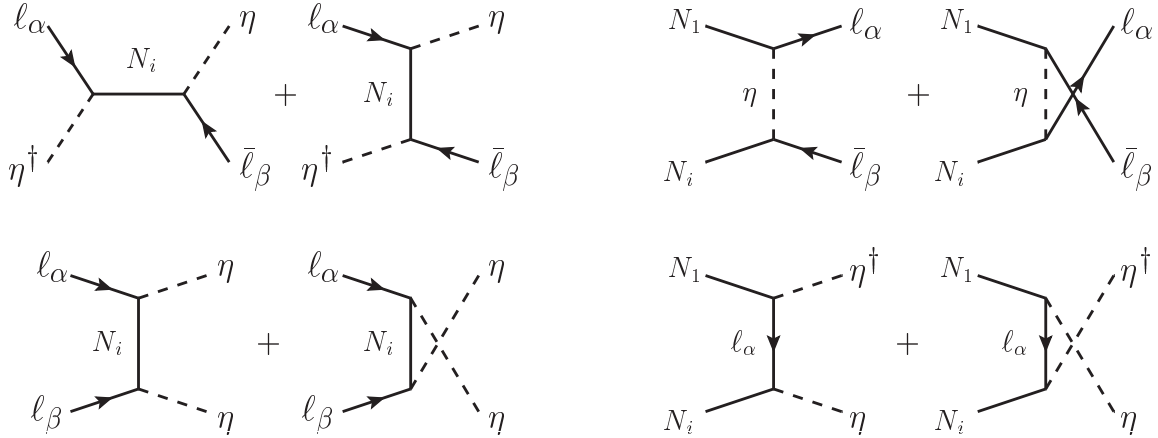


図 4.7 レプトン数を破る ( $\Delta L = 2$ ) 散乱過程 (左) とレプトン数を保存 ( $\Delta L = 0$ ) する散乱過程.  $\Delta L = 2$  の過程には  $\eta$  を媒介する  $N_i N_j \leftrightarrow l_\alpha l_\beta$  過程が存在するが, この散乱は  $\lambda_5$  に比例するため, ここでは十分小さいとして無視する.

で与えられる. ここで,  $\alpha_{em}$  は微細構造定数であり,  $F_2(x) = (1 - 6x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 \ln x) / 6(1 - x)^4$  である. 各過程の実験による制限は

$$\begin{aligned}
 \text{Br}(\mu \rightarrow e\gamma) &< 5.7 \times 10^{-13} \quad (90\% \text{CL}), \\
 \text{Br}(\tau \rightarrow \mu\gamma) &< 4.4 \times 10^{-8} \quad (90\% \text{CL}), \\
 \text{Br}(\tau \rightarrow e\gamma) &< 3.3 \times 10^{-8} \quad (90\% \text{CL})
 \end{aligned}
 \tag{4.28}$$

であることがわかっている [169, 170]. したがって, 今の場合, スカラー二重項  $\eta$  と右巻きニュートリノの質量を  $\mathcal{O}(1)$  TeV と仮定しているため, このようなレプトンフレーバーを破る過程はニュートリノの湯川結合定数に制限を与える. しかし, 4.2.3 節で議論した暗黒物質直接探査実験の制限から許されるニュートリノの湯川結合定数の最大オーダーは  $\mathcal{O}(10^{-3})$  であり, このとき分岐比は  $\text{Br} \lesssim \mathcal{O}(10^{-20})$  となるから, この模型の枠組みでは実験の制限 (4.28) を十分に満たす.

## 4.4 熱的レプトン数生成

### 4.4.1 右巻きニュートリノの崩壊と CP 対称性の破れ

3.3 章で述べたように, 電弱スケールより高エネルギーではスファレロン過程によってバリオン数とレプトン数の和が変化するが, その差は保存するため, 宇宙初期に  $\Delta(B - L) \neq 0$  となるような過程があれば最終的に  $\Delta B \neq 0$  となる. 今考えている模型の枠組みでは, 図 4.6 のような右巻きニュートリノの崩壊過程が存在し, この過程はレプトン数を破るため,  $\Delta(B - L) \neq 0$  が実現する. このようなバリオン数生成シナリオをレプトジェネシスという [152].

ここでは最も軽い右巻きニュートリノ  $N_1$  が崩壊するような場合を扱う。このとき、サハロフの条件から  $N_1$  の崩壊は非熱平衡状態で起こらなければならない。そのため、 $T \sim M_1$  で  $N_1$  の崩壊率  $\Gamma_{N_1}$  とハッブルパラメーター  $H$  との間に  $\Gamma_{N_1} < H$  が要求される。右巻きニュートリノ  $N_i$  の崩壊率はツリーレベルで

$$\Gamma_{N_i} = \frac{1}{8\pi} M_i \left(1 - \frac{M_\eta^2}{M_i^2}\right)^2 \sum_\alpha h_{\alpha i}^* h_{\alpha i} \quad (4.29)$$

で与えられる。フレーバー構造 (4.2) を用いると、 $N_1$  の崩壊率は  $\Gamma_{N_1} = \frac{|h_1|^2}{8\pi} M_1 (1 + q_1^2) \left(1 - \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right)^2$  となる。このとき、宇宙は放射優勢期であるから、ハッブルパラメーターは式 (2.48) で与えられ、非平衡条件として湯川結合定数に

$$|h_1| \lesssim 2 \times 10^{-7} (1 + q_1^2)^{-1/2} \left(1 - \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right)^{-1} \left(\frac{M_1}{1 \text{ TeV}}\right)^{1/2} \quad (4.30)$$

という条件が得られる。

右巻きニュートリノの崩壊過程における CP 対称性の破れは図 4.6 のようなツリーと 1 ループの干渉項によって生じ、サハロフの条件を満たす。CP 対称性の破れの大きさを表すパラメーター  $\epsilon$  は

$$\epsilon_i \equiv \frac{\sum_\alpha \Gamma(N_i \rightarrow \ell_\alpha \eta^\dagger) - \sum_\alpha \Gamma(N_i \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \eta)}{\sum_\alpha \Gamma(N_i \rightarrow \ell_\alpha \eta^\dagger) + \sum_\alpha \Gamma(N_i \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \eta)} \quad (4.31)$$

で定義される。 $N_1$  についてこれを求めると、

$$\epsilon_1 = \frac{1}{16\pi \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right)^2\right]} \sum_i \frac{\text{Im}(\sum_\alpha h_{\alpha 1} h_{\alpha i}^*)^2}{\sum_\alpha h_{\alpha 1} h_{\alpha 1}^*} G\left(\frac{M_i^2}{M_1^2}, \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right) \quad (4.32)$$

となる。ここで、 $G(x, y)$  は

$$G(x, y) = \frac{5}{4} F(x, 0) + \frac{1}{4} F(x, y) + \frac{1}{4} (1 - y)^2 [F(x, 0) + F(x, y)], \quad (4.33)$$

$$F(x, y) = \sqrt{x} \left[1 - y - (1 + x) \ln\left(\frac{1 - y + x}{x}\right)\right] \quad (4.34)$$

で与えられる [171]。 (4.32) にフレーバー構造 (4.2) を代入すると  $\epsilon_1$  は

$$\epsilon_1 = A \sin 2(\varphi_1 - \varphi_2) + B \sin 2(\varphi_1 - \varphi_3),$$

$$A = C |h_1|^2 (1 + q_1^2) G\left(\frac{M_2^2}{M_1^2}, \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right), \quad B = C \frac{|h_3|^2 (q_2 - q_1 q_3)^2}{(1 + q_1^2)} G\left(\frac{M_3^2}{M_1^2}, \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right) \quad (4.35)$$

となる。ここで  $C^{-1} = 16\pi \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{M_\eta^2}{M_1^2}\right)^2\right]$  とした。以下では、 $\sin 2(\varphi_1 - \varphi_{2,3}) = 1$  として解析を行う。

#### 4.4.2 Ma 模型におけるレプトン数生成量の評価

今の模型の場合、右巻きニュートリノの崩壊によって生成されたレプトン数がスファレロン過程によってバリオン数に転化される割合は、(3.93) から

$$Y_B = -\frac{8}{23} Y_L(z_{\text{EW}}) \quad (4.36)$$

と見積もられる. ここで,  $z_{EW} = M_1/T_{EW}$  であり,  $T_{EW}$  は電弱対称性が破れる温度 ( $T_{EW} \sim 100$  GeV) である. 現在, 我々の宇宙に存在する光子-バリオン比は  $\eta_B \simeq 6.05 \times 10^{-10}$  という観測結果が得られている [61]. また, 現在の宇宙のエントロピー密度は  $s_0 \simeq 7.04n_\gamma$  で与えられるから,  $|Y_B| \simeq 8.58 \times 10^{-11}$  となる. したがって, 式 (4.36) から我々の宇宙を説明するのに必要なレプトン数は

$$|Y_L| \equiv \frac{n_\ell - n_{\bar{\ell}}}{s} \simeq 2.98 \times 10^{-10} \quad (4.37)$$

と見積もられる.

ニュートリノ振動実験を満たすパラメーター (表 4.2) を用い, バリオン数の生成量を評価する. 今, 右巻きニュートリノ  $N_2$  および  $N_3$  は湯川結合定数が多い ( $\sim \mathcal{O}(10^{-3})$ ) ため,  $T \sim M_1$  で熱平衡状態にある. したがって, レプトン数は最も軽い右巻きニュートリノ  $N_1$  とレプトン数非対称性  $Y_L$  に関するボルツマン方程式

$$\begin{aligned} \frac{dY_{N_1}}{dz} &= -\frac{z}{sH(M_1)} \left( \frac{Y_{N_1}}{Y_{N_1}^{eq}} - 1 \right) \left[ \gamma_D^{N_1} + \sum_{i=2,3} \left( \gamma_{N_1 N_i}^{(2)} + \gamma_{N_1 N_i}^{(3)} \right) \right], \\ \frac{dY_L}{dz} &= \frac{z}{sH(M_1)} \left[ \epsilon_1 \left( \frac{Y_{N_1}}{Y_{N_1}^{eq}} - 1 \right) \gamma_D^{N_1} - \frac{2Y_L}{Y_\ell^{eq}} \left( \gamma_N^{(2)} + \gamma_N^{(13)} + \sum_i \frac{\gamma_D^{N_i}}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

を解くことで評価することができる. ここで,  $z = \frac{M_1}{T}$ ,  $H(M_1) = 1.66g_*^{1/2} \frac{M_1^2}{m_{pl}}$  である. また,  $Y_{N_1}$ ,  $Y_\ell$  はそれぞれ  $Y_{N_1} = \frac{n_{N_1}}{s}$ ,  $Y_\ell = \frac{n_\ell}{s}$  であり, 熱平衡状態におけるこれらの値は  $Y_{N_1}^{eq}(z) = \frac{45}{2\pi^4 g_*} z^2 K_2(z)$ ,  $Y_\ell^{eq}(z) = \frac{81}{\pi^4 g_*}$  で与えられる.  $K_2(z)$  は第二種変形ベッセル関数である.  $\gamma$  は図 4.6 および図 4.7 の各過程の反応密度であり, これらについては付録 C.1 で与える.

表 4.2 (i) の場合についてボルツマン方程式 (4.38) を解き, 得られた結果を図 4.8 に示す. 左図は  $Y_L$ ,  $Y_{N_1}$  の時間発展, 右図はレプトン数を破る散乱過程の反応率  $\Gamma$  とハッブルパラメーター  $H$  の比の時間発展である. 放射優勢期では過去に遡るほどハッブルパラメーターは大きくなるので,  $z$  の小さいところで  $N_1$  の崩壊は  $H \gg \Gamma$  となり, 非平衡状態が実現している. しかし, その一方で, レプトン数を破る散乱過程の反応率が非常に大きく, 熱平衡状態にある. このため, これらの散乱過程による洗い流し効果によって, 崩壊によるレプトン数生成が効率よく進行しない. よって, 最終的に得られたバリオン数は  $|Y_L| = 2.3 \times 10^{-12}$  程度と実験結果 (4.36) と比べて 1 オーダーほど小さく, (i) のような右巻きニュートリノの質量が階層的な場合, ニュートリノ振動実験結果と無矛盾なパラメーターを用いてバリオン数を生成することは困難であると考えられる.

### 4.4.3 レゾナントレプトジェネシス

一方, 右巻きニュートリノ  $N_1, N_2$  の質量が縮退している場合, CP 対称性の破れの大きさはツリーと自己エネルギーの 1 ループダイアグラムとの干渉項

$$\epsilon_1 \propto \frac{\text{Im}(h^\dagger h)_{21}^2}{(h^\dagger h)_{11}(h^\dagger h)_{22}} \frac{(M_1^2 - M_2^2)M_1\Gamma_{N_2}}{(M_1^2 - M_2^2)^2 + M_1^2\Gamma_{N_2}^2} \quad (4.39)$$

の寄与によって増大する [172]. ここで,  $\Delta \equiv \frac{M_2}{M_1} - 1$ ,  $\tilde{\Gamma}_{N_2} = \frac{\Gamma_{N_2}}{M_1}$  とおくと, 上式は

$$\epsilon_1 \simeq \frac{\text{Im}(h^\dagger h)_{21}^2}{(h^\dagger h)_{11}(h^\dagger h)_{22}} \frac{(M_1^2 - M_2^2)M_1\Gamma_{N_2}}{(M_1^2 - M_2^2)^2 + M_1^2\Gamma_{N_2}^2} \simeq \frac{\text{Im}(h^\dagger h)_{21}^2}{(h^\dagger h)_{11}(h^\dagger h)_{22}} \frac{2\Delta\tilde{\Gamma}_{N_2}}{4\Delta^2 + \tilde{\Gamma}_{N_2}^2} \quad (4.40)$$



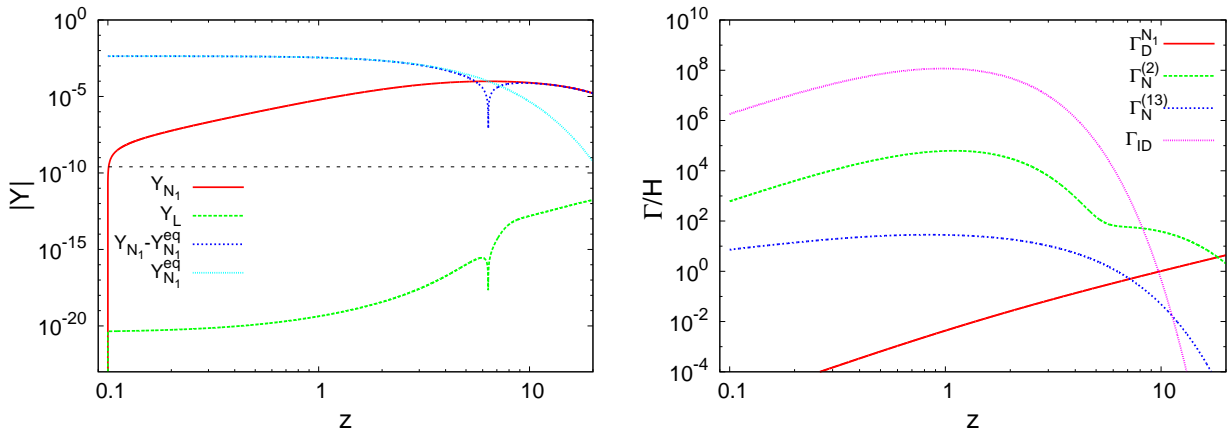


図 4.8  $Y_{N_1}, Y_L$  および  $Y_{N_1} - Y_{N_1}^{\text{eq}}$  の絶対値の時間発展 (左図). 黒点線は観測結果から要求されるレプトン数 (4.37). 右図はレプトン数を破る散乱過程および崩壊, 対生成過程の反応率とハッブルパラメーターの比  $\Gamma/H$  の時間変化を表す.

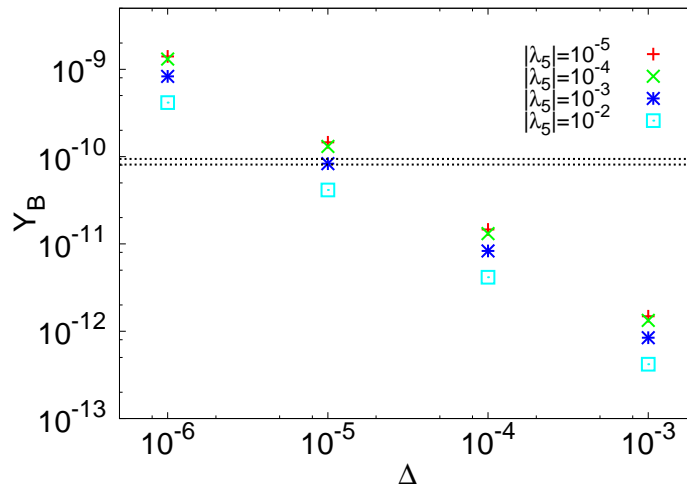


図 4.9 バリオン数の生成量と右巻きニュートリノ  $N_1, N_2$  の縮退の強さの関係.  $|\lambda_5|$  が小さくなるほど,  $\tilde{\Gamma}_{N_2}$  が大きくなるため, CP 対称性の破れも大きくなる. 一方で, レプトン数を破る散乱過程による洗い流し効果も大きくなる.  $|\lambda_5| = 10^{-5}$  と  $|\lambda_5| = 10^{-4}$  で生成量がほとんど変わらないのはそのためである.

となる. したがって, CP 対称性の破れの大きさは,  $\Delta = \tilde{\Gamma}_{N_2}/2$  のとき, 最大となることがわかる.

(4.40) に式 (4.2) で定義したフレーバー構造を代入して, 表 4.2 の (ii) の場合についてボルツマン方程式 (4.38) を解き, バリオン数の生成量を評価する. 湯川結合定数の複素位相は, 前節と同様,  $\sin 2(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$  とした. 図 4.9 は, 各  $|\lambda_5|$  の値に対して,  $N_1$  と  $N_2$  の縮退の強さと生成されたバリオン数の関係をプロットしたものである. ニュートリノ質量は, (4.20) より,  $\lambda_5 h_{\alpha i} h_{\beta i}$  に比例しているため,  $\lambda_5$  とニュートリノ湯川結合定数との間に,  $|h_2| = 3.23 \times \sqrt{10^{-11}/|\lambda_5|}$ ,  $|h_3| = 1.64 \times \sqrt{10^{-11}/|\lambda_5|}$  なる関係が要求される. これが成り立つ限り, ニュートリノ振動実験結果が実現される\*3. ただし, 上で述べたように,  $|\lambda_5|$  には下限値 (4.19) が与えられている. 図 4.9 から  $\Delta \sim \mathcal{O}(10^{-5})$  で十分なバリオン数が得られることがわかる.

\*3  $\Delta$  のニュートリノ振動パラメーターに対する寄与は十分小さい.

3.1.2 節で議論したマヨラナ質量生成模型 [98, 99, 100] の場合, ニュートリノの質量は式 (3.23) より,

$$m_\nu = \frac{Y_\nu^2 \langle \phi^0 \rangle^2}{M} \quad (4.41)$$

で与えられる. これより, 右巻きニュートリノ質量が  $\mathcal{O}(1)$  TeV の場合, ニュートリノ振動の実験値を満たす湯川結合定数は  $\mathcal{O}(10^{-6})$  と今の模型に比べて非常に小さくとる必要がある. この模型におけるレプトン数生成 [152] は, 右巻きニュートリノの質量が階層的な場合, ニュートリノ質量からその質量が,  $M_1 > 10^{8-9}$  GeV という制限が与えられている [173]. しかし, 上で述べたように, 右巻きニュートリノの質量が縮退した場合, TeV スケールでのレプトン数生成が可能となる [172, 174]. [172] によれば, 十分なバリオン数生成には  $\Delta \sim \mathcal{O}(10^{-10 \sim -9})$  が要求されるため, Ma 模型における右巻きニュートリノ間の質量の縮退の強さは, この模型に比べてかなり緩和されていることがわかる. これは Ma 模型のようにループ補正によってニュートリノ質量を生成する模型は湯川結合定数を比較的大きくとることができ, これによって式 (4.39) に現れる崩壊幅が大きくなったためである.



## 第 5 章

# 模型の拡張とインフレーションおよび非熱的レプトン数生成

第 4 章で Ma 模型がニュートリノ質量と暗黒物質の存在および宇宙のバリオン数非対称性を説明し得ることを確かめた。ここでは、インフレーションを説明するため、模型をさらに拡張する。この拡張模型はインフラトンの崩壊による非熱的レプトン数生成のシナリオが考えられるため、本章ではその詳細について議論する。

### 5.1 Ma 模型の拡張

Ma 模型の拡張として、表 5.1 のように  $Z_2$  奇パリティの実スカラー一重項  $S_a$  を新たに導入する [31]。このとき、ラグランジアンは

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{L} \supset & \sum_{\alpha,i} \left[ h_{\alpha i} \bar{N}_i \eta^\dagger \ell_\alpha + h_{\alpha i}^* \bar{\ell}_\alpha \eta N_i + \frac{M_i}{2} \bar{N}_i N_i^c + \frac{M_i}{2} \bar{N}_i^c N_i \right] \\
 & + m_\phi^2 \phi^\dagger \phi + m_\eta^2 \eta^\dagger \eta + \lambda_1 (\phi^\dagger \phi)^2 + \lambda_2 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_3 (\phi^\dagger \phi) (\eta^\dagger \eta) + \lambda_4 (\phi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \phi) \\
 & + \sum_{a=1,2} \left[ \frac{m_{S_a}^2}{2} S_a^2 + \frac{\kappa_1^{(a)}}{4} S_a^4 + \frac{\kappa_2^{(a)}}{4} S_a^2 (\phi^\dagger \phi) + \frac{\kappa_3^{(a)}}{4} S_a^2 (\eta^\dagger \eta) + \mu_a S_a \eta^\dagger \phi + \mu_a^* S_a \phi^\dagger \eta \right]
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$L$	$Z_2$
$\eta$	<b>2</b>	1	1	–
$N_{1,2}$	<b>1</b>	2	0	–
$S_{1,2}$	<b>1</b>	1	1	–

表 5.1 拡張模型における粒子の量子数

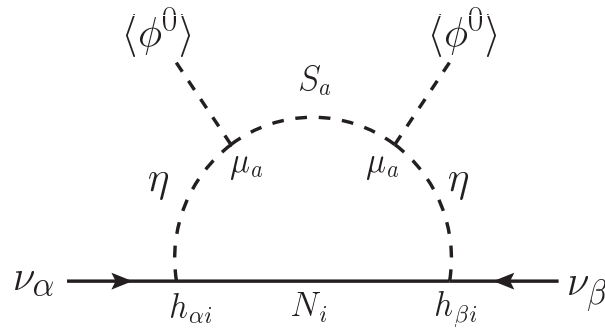


図 5.1 ニュートリノ質量生成ダイアグラム.

のようになる. ここで, 式 (4.1) の 4 次のスカラー結合  $\lambda_5 (\eta^\dagger \phi)^2$  はレプトン数を破るため, 禁止されている\*1.

## 5.2 ニュートリノ質量生成

第4章で見たように, 4 次のスカラー結合  $\lambda_5 (\eta^\dagger \phi)^2$  はニュートリノ質量生成に重要な役割を果たす. この模型の場合, この項は低エネルギーで重いスカラー場を積分した有効相互作用として実現される [42]. ニュートリノ質量生成についてのダイアグラムを図 5.1 に示す. このダイアグラムからニュートリノ質量行列は

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\nu = \sum_{i=1}^2 h_{\alpha i} h_{\beta i} \frac{M_i \langle \phi^0 \rangle^2}{8\pi^2} \sum_a \mu_a^2 I(M_\eta, M_i, m_{S_a}) \quad (5.2)$$

となり,  $I(M_\eta, M_i, m_{S_a})$  は

$$I(M_\eta, M_i, m_{S_a}) = \frac{1}{(M_\eta^2 - M_i^2)(M_\eta^2 - m_{S_a}^2)} + \frac{1}{M_i^2 - m_{S_a}^2} \left[ \frac{M_i^2}{(M_\eta^2 - M_i^2)^2} \ln \frac{M_i^2}{M_\eta^2} + \frac{m_{S_a}^2}{(M_\eta^2 - m_{S_a}^2)^2} \ln \frac{M_\eta^2}{M_i^2} \right] \quad (5.3)$$

のように表わされる. ここで,  $m_{S_a} \gg M_\eta, M_i$  とすると,

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta}^\nu = \sum_{a=1}^2 \frac{\mu_a^2}{m_{S_a}^2} \sum_{i=1}^2 h_{\alpha i} h_{\beta i} \frac{\langle \phi^0 \rangle^2}{8\pi^2} \frac{M_i}{M_\eta^2 - M_i^2} \left( 1 + \frac{M_i^2}{M_\eta^2 - M_i^2} \ln \frac{M_i^2}{M_\eta^2} \right) \quad (5.4)$$

となることわかる. この式は  $\sum_a \frac{\mu_a^2}{m_{S_a}^2}$  の部分を 4 次のスカラー結合定数  $\lambda_5$  に対応させると, Ma 模型におけるニュートリノ質量行列 (4.20) に一致していることがわかる. Ma 模型では, 小さなニュートリノ質量生成のため, 通常,  $|\lambda_5|$  を小さくとるが, この模型では, これは  $\mu_a$  と  $m_{S_a}$  間の階層性によるものと言うことができる\*2.

ニュートリノの湯川結合定数を (4.2) と同様,

$$\begin{aligned} h_{e1} &= 0, & h_{\mu 1} &= h_1, & h_{\tau 1} &= q_1 h_1, \\ h_{e2} &= h_2, & h_{\mu 2} &= q_2 h_2, & h_{\tau 2} &= -q_3 h_2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

\*1 レプトン数は式 (5.1) の第3行目の  $S_a$  のスカラー三点相互作用でソフトに破れる. "ソフトに破る項"とは対称性を破る項のうち二次発散を生じない項のことである.

\*2 この階層性の起源についてはここでは触れない.

のようにとると、ニュートリノ質量行列は

$$\mathcal{M}^\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q_1 \\ 0 & q_1 & q_1^2 \end{pmatrix} h_1^2 \Lambda_1 \frac{\mu_2^2}{m_{S_2}^2} + \begin{pmatrix} 1 & q_2 & -q_3 \\ q_2 & q_2^2 & -q_2 q_3 \\ -q_3 & -q_2 q_3 & q_3^2 \end{pmatrix} h_2^2 \Lambda_2 \frac{\mu_2^2}{m_{S_2}^2} \quad (5.6)$$

のように表わされる. ここで,  $\frac{\mu_1^2}{m_{S_1}^2} \ll \frac{\mu_2^2}{m_{S_2}^2}$  を仮定した\*3.  $\Lambda_i$  は式 (4.22) と同様,

$$\Lambda_i = \frac{\langle \phi^0 \rangle^2}{8\pi^2 \text{GeV}} \frac{1\text{GeV}}{M_i} \left[ 1 + \frac{M_i^2}{M_\eta^2 - M_i^2} \ln \frac{M_i^2}{M_\eta^2} \right] \equiv \frac{\langle \phi^0 \rangle^2}{8\pi^2 \text{GeV}} \tilde{\Lambda}_i \quad (5.7)$$

で定義される.

4.3 節での議論と同様, 式 (5.5) のフレーバー構造は,  $q_{1-3} = 1$  のとき, PMNS 行列が tribimaximal 構造

$$U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_2} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

となり, 質量行列 (5.6) を対角化すると,

$$U_{\text{PMNS}}^T \mathcal{M}^\nu U_{\text{PMNS}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3|h_2|^2 \Lambda_2 \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2|h_1|^2 \Lambda_1 \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2} \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

が得られる. このとき, マヨラナ位相  $\alpha_{1,2}$  は  $h_i$  と  $\mu_a$  の複素位相で決定され, それぞれの偏角を  $\varphi_i = \arg(h_i)$ ,  $\varphi_{\mu_a} = \arg(\mu_a)$  とすると,

$$\alpha_1 = \varphi_2 + \varphi_{\mu_2}, \quad \alpha_2 = \varphi_1 + \varphi_{\mu_2} \quad (5.10)$$

で表わされる. また, 今の模型の場合, 一つの質量固有値はゼロとなるため, (5.9) の質量二乗差と, 大気ニュートリノと太陽ニュートリノの振動実験 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10] で調べられている質量二乗差は

$$|h_1|^2 \Lambda_1 \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2} = \frac{\sqrt{\Delta m_{\text{atm}}^2}}{2}, \quad |h_2|^2 \Lambda_2 \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2} = \frac{\sqrt{\Delta m_{\text{sol}}^2}}{3} \quad (5.11)$$

のような関係が成り立つ.

ニュートリノ振動実験の結果 (3.1) を満たすパラメーターの組み合わせは, 4.3 節の図 4.4 と同様に求めることができ, 表 5.2 はその例を示したものである. ここでは,  $M_\eta \sim \mathcal{O}(10^3)$  GeV とし, 右巻きニュートリノの質量が  $\mathcal{O}(10^4)$  GeV と  $\mathcal{O}(10^8)$  GeV それぞれの場合について調べた. このとき,

$$q_1 = 0.77, \quad |h_1|^2 \tilde{\Lambda}_1 \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2} = 6.03 \times 10^{-14}, \quad |h_2|^2 \tilde{\Lambda}_2 \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2} = 1.04 \times 10^{-14} \quad (5.12)$$

なる関係が得られ, この条件が成り立つ限り, ニュートリノ振動実験結果が実現される.

ここまで新たに導入した実スカラー一重項  $S_a$  がニュートリノの質量生成に対して重要な役割を果たすことを見てきた. さらに, この模型では,  $S_a$  がインフラトンとして振る舞う. このことについては次章で議論する.

\*3 この仮定は後で非熱的レプトン数生成のシナリオを考える際に必要となる.

$M_\eta(\text{GeV})$	$\frac{ \mu_1 }{m_{S_1}}$	$\frac{ \mu_2 }{m_{S_2}}$	$ h_2 $	$ h_3 $	$M_1(\text{GeV})$	$M_2(\text{GeV})$	$ Y_B $
$10^3$ (a)	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	$1.12 \times 10^{-2}$	$5.13 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^3$	$9.0 \cdot 10^3$	$1.3 \cdot 10^{-9}$
(b)	$2 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$8.40 \times 10^{-3}$	$3.85 \cdot 10^{-3}$	$1.73 \cdot 10^8$	$2.19 \cdot 10^8$	$3.5 \cdot 10^{-10}$
600	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	$9.62 \cdot 10^{-3}$	$4.54 \cdot 10^{-3}$	$5.30 \cdot 10^3$	$9.00 \cdot 10^3$	$5.1 \cdot 10^{-10}$
$3 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	$2.15 \cdot 10^{-3}$	$8.94 \cdot 10^{-3}$	$2.67 \cdot 10^4$	$2.77 \cdot 10^4$	$3.4 \cdot 10^{-9}$

表 5.2 ニュートリノ振動実験結果から要求される条件 (5.12) を満たすパラメーターの組み合わせの例. ここでは  $m_{S_1} = 10^9 \text{ GeV}$ ,  $\frac{m_{S_2}}{m_{S_1}} = 1.1$  とした.

### 5.3 重力相互作用項によるインフレーション

スカラー場とリッチスカラーとの相互作用項は, 宇宙の指数関数的な膨張を実現することが知られており [175, 176], このスカラー場としてヒッグスを用いたヒッグスインフレーションのシナリオも考えられている [40, 41]. Ma 模型の枠組みでのインフレーションのシナリオは [177] で議論されているが, ここではゲージ重項実スカラー場  $S_a$  を用いたインフレーションのシナリオを考える\*4.

$S_a$  のみが重力との結合があると仮定すると, 作用のインフレーションに関わる部分はジョルダンフレームにおいて以下のように記述される.

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R - \sum_a \frac{1}{2} \xi_a S_a^2 R + \sum_a \frac{1}{2} \partial^\mu S_a \partial_\mu S_a - V(S_a) \right]. \quad (5.13)$$

$V(S_a)$  はラグランジアン (5.1) の  $S_a$  のポテンシャル項である. ここでは  $S_1$  をインフラトンとし, インフレーション中の場の値はその他の場の値より十分大きいものと仮定する. このとき, ポテンシャル項は  $V(S_a) \simeq \frac{\kappa_1^{(1)}}{4} S_1^4$  となることから, 共役変換 [40, 41, 175, 176]

$$g = \Omega^2 g_E, \quad \Omega^2 = 1 + \frac{\sum_a \xi_a S_a^2}{M_{\text{pl}}^2} \quad (5.14)$$

によって, アインシュタインフレームにおける作用が

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g_E} \left[ -\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R_E + \frac{1}{2\Omega^4} \sum_{a,b=1,2} \left( \delta_{ab} + \frac{\xi_a \delta_{ab} S_a^2 + 6\xi_a \xi_b S_a S_b}{M_{\text{pl}}^2} \right) \partial^\mu S_a \partial_\mu S_b - \frac{1}{\Omega^4} V(S_a) \right] \quad (5.15)$$

となることがわかる. 詳しい導出過程については付録 E.1 を参照.

今, 重力と結合したスカラー場が二つ存在するため, 式 (5.15) の第二項のように,  $S_1$  と  $S_2$  の混合がある. 一般に場の再定義によってこれを解消できず, カノニカル規格化することが困難であるが, この模型の場合,  $S_1$  と  $S_2$  は独立な場であるため, 重力との結合定数を  $\xi_1 \gg 1$ ,  $\xi_1 \xi_2 \ll 1$

\*4 複素スカラー場を用いたインフレーションのシナリオについては [29, 178, 30] で議論している.

のように階層的にとることができる。この時、アインシュタインフレームにおける作用は

$$S_E \simeq \int d^4x \sqrt{-g_E} \left[ -\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} R_E + \frac{1}{2\Omega^4} \left( 1 + \frac{\xi_1 S_1^2}{M_{\text{pl}}^2} \right) \partial^\mu S_1 \partial_\mu S_1 - \frac{1}{\Omega^4} V(S_a) \right], \quad (5.16)$$

となり、単一スカラー場  $S_1$  によるインフレーションのシナリオと考えることができる [179]。したがって、 $S_1$  についてカノニカル規格化された場  $\chi$  を

$$\frac{d\chi}{dS_1} = \frac{\sqrt{1 + (\xi_1 + 6\xi_1^2) \frac{S_1^2}{M_{\text{pl}}^2}}}{1 + \frac{\xi_1 S_1^2}{M_{\text{pl}}^2}} \quad (5.17)$$

と定義することができる。ここで、 $S_2$  のポテンシャル項  $V_E^{(2)} = \frac{1}{\Omega^4} V(S_2)$  は  $\xi_1 S_1^2 > M_{\text{pl}}^2$  のとき、

$$V_E^{(2)} = \frac{\kappa_1^{(2)} S_2^4}{2 \left( 1 + \frac{\xi_1 S_1^2}{M_{\text{pl}}^2} \right)^2} \simeq \frac{\kappa_1^{(2)} M_{\text{pl}}^4}{2\xi_1^2} \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^4 \ll V_E^{(1)}, \quad (5.18)$$

であるため、 $\chi$  のみがインフラトンの役割を果たすことがわかる。

式 (5.17) から、 $S_1 \ll \frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{\xi_1}}$  のとき、 $\chi$  は  $S_1$  に一致することがわかる。一方、 $S_1 \gg \frac{M_{\text{pl}}}{\sqrt{\xi_1}}$  の場合、ポテンシャル項  $V_E^{(1)} = \frac{1}{\Omega^4} V(S_1)$  を  $\chi$  で表わすと、

$$V_E^{(1)} \simeq \frac{\kappa_1^{(1)} M_{\text{pl}}^4}{4\xi_1^2} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{2\chi}{\sqrt{6 + 1/\xi_1} M_{\text{pl}}} \right) \right]^2, \quad (5.19)$$

となり、 $\chi$  が十分大きいところで平坦なポテンシャル  $V_E^{(1)} \simeq \frac{\kappa_1^{(1)} M_{\text{pl}}^4}{4\xi_1^2}$  が実現される。

式 (5.17) を用いると e-fold 数は

$$N = \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \int_{\chi_{\text{end}}}^{\chi} d\chi \frac{V_E^{(1)}}{V_E^{(1)'}} \simeq \frac{3}{4} \frac{S_1^2 - S_{1,\text{end}}^2}{M_{\text{pl}}^2/\xi_1}, \quad (5.20)$$

となる。ここで、 $V_E^{(1)'} = \frac{dV_E^{(1)}}{d\chi}$  である。また、スローロールパラメーターはそれぞれ

$$\varepsilon = \frac{1}{M_{\text{pl}}^2} \left( \frac{V_E^{(1)'}}{V_E^{(1)}} \right)^2 = \frac{4M_{\text{pl}}^4}{3\xi_1^2 S_1^4}, \quad \eta = M_{\text{pl}}^2 \left( \frac{V_E^{(1)''}}{V_E^{(1)}} \right) = -\frac{4M_{\text{pl}}^2}{3\xi_1 S_1^2}, \quad (5.21)$$

と表わされる。 $\varepsilon \simeq 1$  のときインフレーションが終了すると考えると、 $S_{1,\text{end}}^2 \simeq \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{M_{\text{pl}}^2}{\xi_1}$  となるため、 $S_{1,\text{end}}$  の式 (5.20) に対する寄与は  $S_1$  に比べて十分小さく、無視できる。したがって、スローロールパラメーターは  $N$  を用いて、 $\varepsilon \simeq \frac{3}{4} N^{-2}$ 、 $\eta \simeq -N^{-1}$  と表わすことができる。

模型が示唆する CMB の密度揺らぎのパワースペクトルは、(3.278) より、

$$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k) = A_s \left( \frac{k}{k_*} \right)^{n_s - 1}, \quad A_s = \frac{V_E^{(1)}}{24\pi^2 M_{\text{pl}}^4 \varepsilon} \Big|_{k_*} \quad (5.22)$$

で与えられ、観測結果は  $k_* = 0.002 \text{ Mpc}^{-1}$  のスケールで  $A_s = (2.445 \pm 0.096) \times 10^{-9}$  であることが知られている [36]。ここで、 $V_E^{(1)} \simeq \frac{\kappa_1^{(1)} M_{\text{pl}}^4}{4\xi_1^2}$  であるから、 $\kappa_1^{(1)} \simeq 10^{-6} \xi_1^2 N^2$  の関係が得ら



れ, 例えば,  $\xi_1 \simeq O(10^2)$ ,  $N = 60$  のとき  $\kappa_1^{(1)} \simeq O(10^{-6})$  となる.\*5

(3.279), (3.291) から, スペクトル指数  $n_s$  とテンソル・スカラー比  $r$  はスローロールパラメーターを用いて,

$$n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta, \quad r = 16\epsilon, \quad (5.23)$$

と表わされるため,  $N$  のみに依存する. したがって,  $N = 60$  で  $n_s \sim 0.968$ ,  $r = 3.0 \times 10^{-3}$  となり, 現在の Planck の制限とよく合っている.

式 (5.15) の第二項の  $S_1, S_2$  の混合項の寄与により, スカラー場  $S_a$  の二体散乱は,  $\Lambda_0 \simeq \frac{M_{\text{Pl}}}{\sqrt{\xi_1 \xi_2}}$  でユニタリティーが破れる [179]. 通常のヒッグスインフレーションのシナリオでは, 対称性により, スカラー場の各成分と重力との結合定数は共通 ( $\xi_1 = \xi_2$ ) となるため, 結合定数が大きくなるとインフレーションのスケールに到達する以前に, ユニタリティーが破れるという問題が生じる. しかし, 今の場合, 上で議論したように  $S_1, S_2$  は独立な場であり,  $\xi_1 \xi_2 \ll 1$  を満たすことから, スカラー二体散乱のユニタリティーが破れるスケールをインフレーションのスケール  $\Lambda \sim \frac{M_{\text{Pl}}}{\sqrt{\xi_1}}$  よりも大きくとることができる.

## 5.4 インフラトンの崩壊による非熱的レプトン数生成

インフレーションについて議論する際, 急膨張後の再加熱過程についても考慮する必要がある. この模型では, 第4章と同様, 暗黒物質を  $\eta$  の中性成分  $\eta_R^0$  とし, その質量は  $O(1)$  TeV と仮定する. 暗黒物質が熱的に残存するものとする, 再加熱温度は少なくとも暗黒物質の質量  $M_{\eta_R^0}$  より大きくなければならない.

今の場合, インフラトン  $S_1$  の崩壊  $S_1 \rightarrow \eta^\dagger \phi, \phi^\dagger \eta$  により宇宙を熱化させることができ, その崩壊幅は  $\Gamma_{S_1} = \frac{1}{8\pi} \frac{|\mu_1|^2}{m_{S_1}^2}$  となる. 瞬時に宇宙が熱化される近似の下では, 式 (3.302) を用いて再加熱温度を,

$$T_R \simeq 1.74 g_*^{-1/4} (\Gamma_{S_1} M_{\text{Pl}})^{1/2} \simeq 1.6 \times 10^{12} \left( \frac{|\mu_1|}{m_{S_1}} \right)^{1/2} \left( \frac{|\mu_1|}{10^8 \text{ GeV}} \right)^{1/2} \text{ GeV} \quad (5.24)$$

と見積もることができる. ここで, 有効自由度  $g_* = 116$  を用いた.  $T_R > M_{\eta_R^0}$  であれば暗黒物質  $\eta_R^0$  は熱平衡状態となる.

前章では, 右巻きニュートリノの崩壊によるレプトン数生成について議論した. このとき, 新たな場のレプトン数は  $L(\eta) = 0$ ,  $L(N_i) = 1$  である. 一方, 今の模型場合,  $L(\eta) = 1$ ,  $L(N_i) = 0$  となっており, 式 (5.1) のスカラーの三点相互作用項はレプトン数を破るため, インフラトンの崩壊によって非熱的にレプトン数を生成することができる [42, 30]. 図 5.2 はインフラトンの崩壊過程を示したものである. この模型では二つのスカラー場  $S_1, S_2$  が存在することから, ツリーと 1 ループ過程のダイアグラムの干渉項から CP 非対称性が生じ,

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{\Gamma(S_1 \rightarrow \eta \phi^\dagger) - \bar{\Gamma}(S_1 \rightarrow \eta^\dagger \phi)}{\Gamma(S_1 \rightarrow \eta \phi^\dagger) + \bar{\Gamma}(S_1 \rightarrow \eta^\dagger \phi)} \\ &= \frac{|\mu_2|^2}{8\pi} \left[ \frac{1}{m_{S_1}^2} \ln \left( \frac{m_{S_1}^2 + m_{S_2}^2}{m_{S_2}^2} \right) + \frac{m_{S_1}^2 - m_{S_2}^2}{(m_{S_1}^2 - m_{S_2}^2)^2 + m_{S_2}^2 \Gamma_{S_2}^2} \right] \sin 2(\theta_1 - \theta_2) \end{aligned} \quad (5.25)$$

\*5 ヒッグスインフレーションの場合, ヒッグスの質量が 125 GeV であることからヒッグスの 4 次の結合定数が制限されるため, 重力との結合定数は  $O(10^5)$  程度となる. 一方, 今の模型の場合, このような制限がないため,  $\kappa_1^{(1)}$  の値を自由にとることができる.

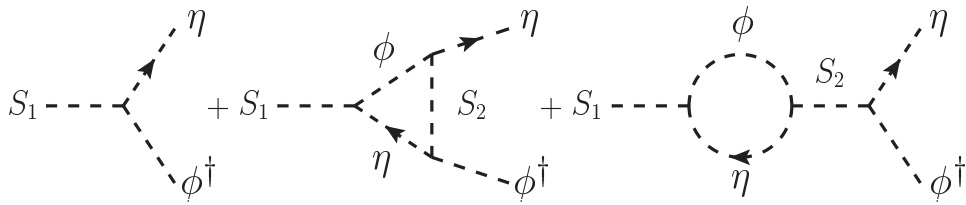


図 5.2 インフラトン崩壊過程のダイアグラム.

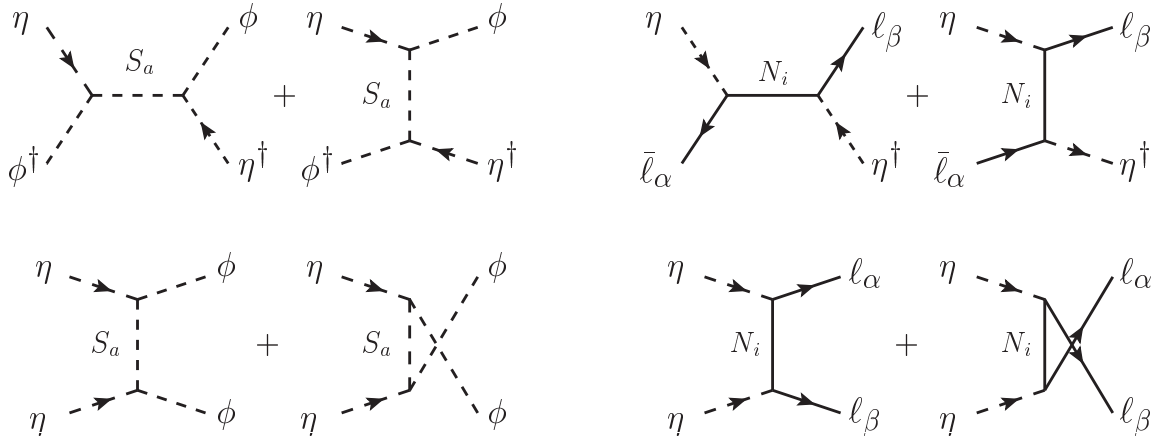


図 5.3 左図:レプトン数を破る ( $\Delta L = 2$ ) 散乱過程のダイアグラム. 反応密度をそれぞれ  $\gamma_x$ (左上図),  $\gamma_y$ (左下図) と表わす. 右図:レプトン数が保存する散乱過程のダイアグラム. 反応密度をそれぞれ  $\gamma_a$ (右上図),  $\gamma_b$ (右下図) と表わす.

となる. ここで,  $\theta_a = \arg(\mu_a)$ ,  $\Gamma_{S_2} = \frac{1}{8\pi} \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}}$  である. 以下では, CP 非対称性が最大値  $|\sin 2(\theta_1 - \theta_2)| = 1$  をとると仮定する.

インフラトンの崩壊によってレプトン数は  $\eta$  セクターに蓄えられる. これをスファレロン過程を通じてバリオン数に転化させるためには,  $\eta$  セクターに生じたレプトン数を標準模型のレプトン二重項に移す必要がある. 今の場合,  $\eta$  を暗黒物質と仮定していることから,  $\eta$  の崩壊によるレプトン数の転換は起こりえない. したがって, 図 5.3 の右側に示す散乱過程によってレプトン数非対称性が  $\eta$  から  $l$  に移ることになる.

共動体積中のレプトン数非対称性をエントロピー密度  $s$  を用いて, 標準模型レプトン二重項セクターについて  $\Delta Y_L \equiv \frac{n_l - n_{\bar{l}}}{s}$ ,  $\eta$  セクターについて  $\Delta Y_\eta \equiv \frac{n_\eta - n_{\eta^\dagger}}{s}$  のように表わすと, これらの時間発展を記述するボルツマン方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta Y_\eta}{dz} &= -\frac{z}{sH(M_\eta)} \left[ 2(\gamma_a + \gamma_b) \left( \frac{\Delta Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{\Delta Y_L}{Y_L^{\text{eq}}} \right) + 2(\gamma_x + \gamma_y) \frac{\Delta Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right], \\ \frac{d\Delta Y_L}{dz} &= \frac{z}{sH(M_\eta)} 2(\gamma_a + \gamma_b) \left( \frac{\Delta Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{\Delta Y_L}{Y_L^{\text{eq}}} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

で与えられる. ここで,  $z = \frac{M_\eta}{T}$  と定義した. また,  $Y_\eta^{\text{eq}}, Y_L^{\text{eq}}$  はそれぞれ  $\eta$  と  $l$  の熱平衡状態における数密度をエントロピー密度で割った量であり,  $Y_\eta^{\text{eq}}(z) = \frac{45}{\pi^4 g_*} z^2 K_2(z)$ ,  $Y_L^{\text{eq}} = \frac{81}{\pi^4 g_*}$  で与えられる.  $K_2(z)$  は第二種変形ベッセル関数である. ここでは,  $T_R < m_{S_{1,2}}$  の場合について考える. このとき, 熱浴中の  $S_{1,2}$  は非相対論的であるから, これらの対生成や散乱過程の寄与は無視することができる. このことから, 再加熱温度の式 (5.24) より,  $\frac{|\mu_1|}{m_{S_1}}$  は小さくなければならない. 一方,  $\frac{\mu_1^2}{m_{S_1}^2} + \frac{\mu_2^2}{m_{S_2}^2}$  は後述する暗黒物質の直接探査実験によってその大きさに下限値が与えられてい

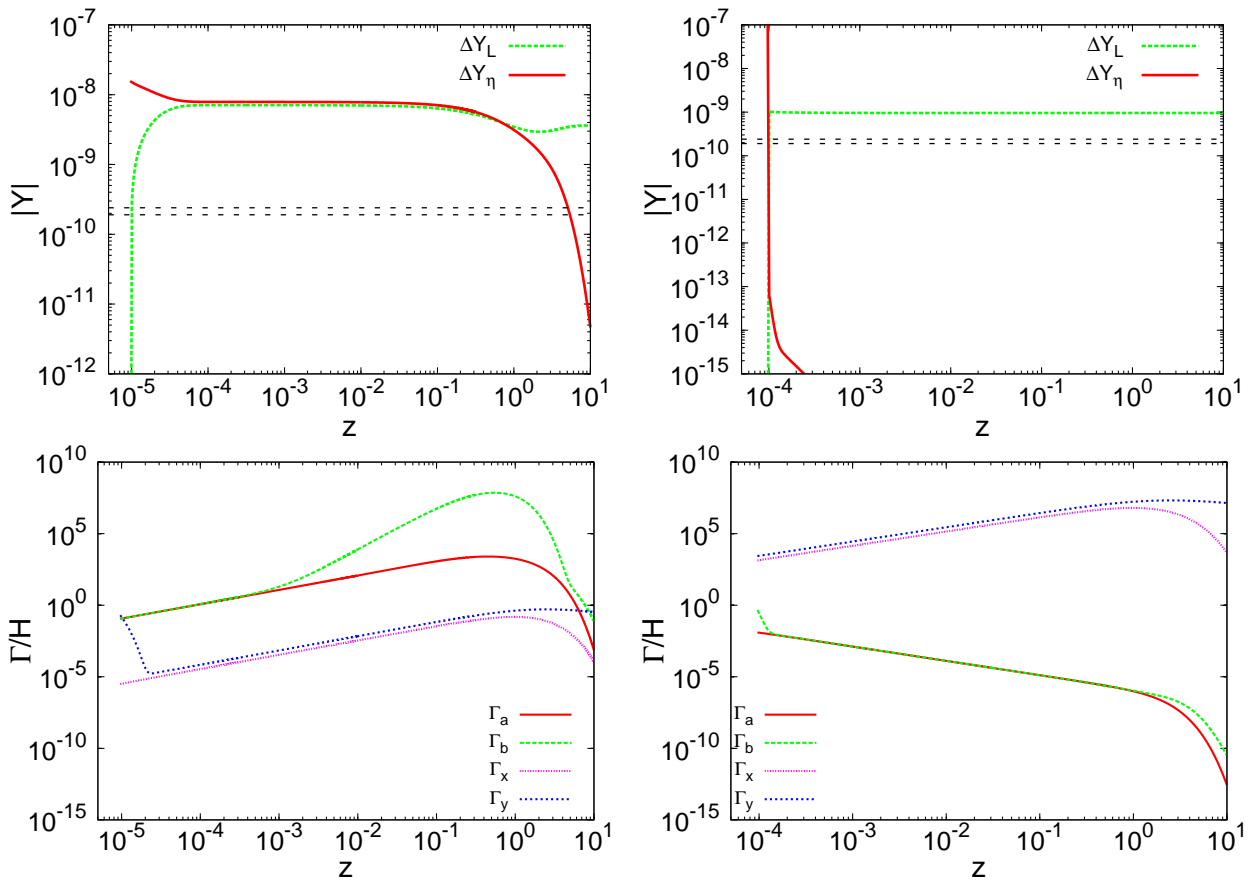


図 5.4 表 5.2 の (a)(左図) と (b)(右図) それぞれの場合における  $\Delta Y_L$ ,  $\Delta Y_\eta$  の時間発展 (上図) と各散乱過程の反応率とハッブルパラメーターの比の時間変化 (下図). 観測で要求されるレプトン数の生成量を黒点線で示した.

ることから,  $\frac{|\mu_1|^2}{m_{S_1}^2} \ll \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2}$  なる関係が要求される. レプトン数を破る散乱過程  $\eta\phi^\dagger \leftrightarrow \phi\eta^\dagger$  および  $\eta\eta \leftrightarrow \phi\phi$  の反応密度  $\gamma_x, \gamma_y$  とレプトン数を保存する散乱過程  $\eta\bar{l}_\alpha \leftrightarrow l_\beta\eta^\dagger$  および  $\eta\eta \leftrightarrow l_\alpha l_\beta$  の反応率  $\gamma_a, \gamma_b$  については付録 C.2 で与える. インフラトンの数密度は  $n_{S_1}(T_R) = \frac{\rho_{S_1}(T_R)}{m_{S_1}}$  で与えられ, このときインフラトンの崩壊によって生成された粒子が瞬時に熱平衡状態となる近似の下では, 崩壊によって生じた粒子が相対論的な場合, エネルギー保存則より,  $\rho_{S_1}(T_R) = \frac{\pi^2}{30} g_* T_R^4$  となる. したがって, 再加熱時の  $\eta$  セクターにおけるレプトン数の生成量は (5.25) を用いて,  $\Delta Y_\eta(T_R) = \frac{3}{4} \epsilon \frac{T_R}{m_{S_1}}$  と見積もることができる. 一方, 標準模型のレプトン二重項における正味のレプトン数に関しては, 再加熱時に  $\Delta Y_L(T_R) = 0$  として, ボルツマン方程式 (5.26) を解く. 生成されたレプトン数は, スファレロン過程を通じてバリオン数に転化される. その割合は,  $\eta$  がレプトン数を持つことを考慮し, (3.93) の導出過程と同様に見積もると

$$Y_B = -\frac{7}{19} \Delta Y_L(E_{EW}) \quad (5.27)$$

で与えられることがわかる.

付録 C.2 にて与えられる各散乱過程の反応密度に対して (5.5) で与えたフレーバー構造を代入し, 表 5.2 の (a), (b) それぞれの場合についてボルツマン方程式 (5.26) を数値的に解いた結果を図 5.4 に示した. このとき,  $q_2 = -0.4$ ,  $q_3 = 2.1$  として解析した. 上図は  $\Delta Y_L$  および  $\Delta Y_\eta$  の  $z$  依存性についてプロットしたもので, 黒点線は  $\Delta Y_L(z_{EW})$  の観測結果から要求される生成量を示しており, ここから十分なバリオン数を実現されていることがわかる. 表 5.2 に各場合につい

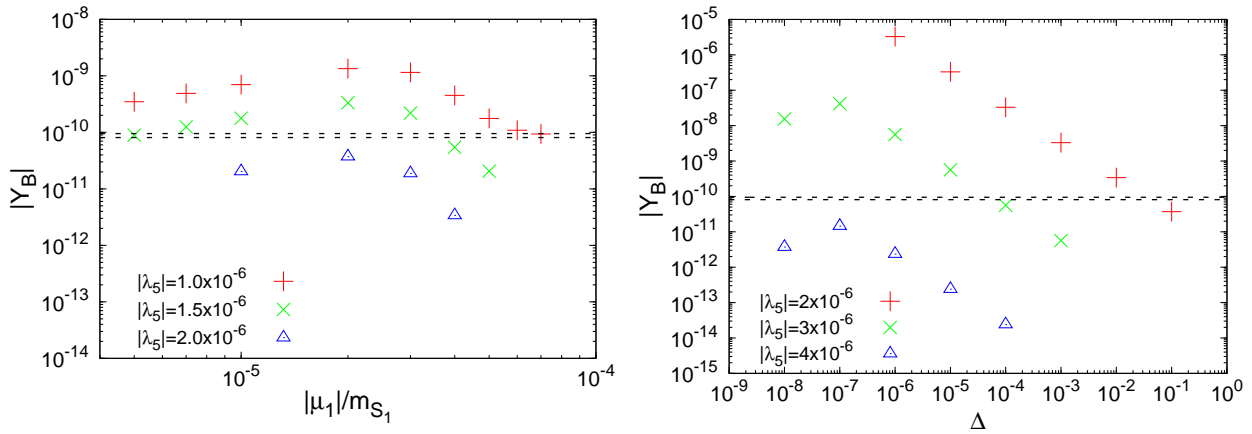


図 5.5 左図:  $\frac{|\mu_1|}{m_{S_1}}, \frac{|\mu_2|}{m_{S_2}} \simeq \sqrt{\lambda_5}$  に対する  $Y_B$  の依存性.  $\frac{|\mu_1|}{m_{S_1}}, \frac{|\mu_2|}{m_{S_2}}$  はそれぞれ  $\Delta Y_\eta$  の初期値と散乱過程による洗い流し効果に寄与する. ここでは  $m_{S_2} = 1.1m_{S_1}$  とした. 右図:  $Y_B$  の  $\Delta (\equiv \frac{m_{S_2}}{m_{S_1}} - 1)$  依存性をプロットしたもの. ここでは  $\frac{|\mu_1|}{m_{S_1}} = 2 \cdot 10^{-5}$  と仮定した. 上の計算で用いたのその他のパラメーターについては, 共に  $m_{S_1} = 10^9$  GeV,  $M_\eta = 1$  TeV であり, ニュートリノ振動実験結果を満たすようにとっている.

てバリオン数の生成量を示した. 一方, 下図はボルツマン方程式 (5.26) で用いられる各散乱過程の反応率とハッブルパラメーターの時間発展を示したものである.

図 5.4 から, (a) と (b) の場合でレプトン数遷移の振舞が大きく異なることがわかる. この違いはレプトン数を保存する散乱過程が熱平衡状態にあるか否かに起因し, これはニュートリノ湯川結合定数の大きさと右巻きニュートリノの質量に依存する. さらに, ニュートリノ質量行列の式 (5.4) から, これらの値と有効結合定数  $\lambda_5 (\simeq \frac{\mu_2^2}{m_{S_2}^2})$  がニュートリノ振動実験結果によって制限されることがわかる. (a) の場合,  $T_R \gg M_i$  であり, レプトン数を保存する散乱過程が熱平衡状態にあるため, 再加熱後は  $\Delta Y_L \simeq \Delta Y_\eta$  が実現される. そして, 電弱スケール付近でこれらの散乱が非平衡状態となると,  $\Delta Y_L$  の値が凍結する. 一方, (b) については, これらの散乱過程が常に非平衡状態となる場合である. このような場合,  $T_R \ll M_i$  であり, 最終的な  $\Delta Y_L$  の値は再加熱時におけるレプトン数を保存する散乱過程の反応率で決定される.

次にバリオン数生成量のパラメーター依存性について考える. (a) の場合,  $\lambda_5$  の値を固定すれば, 条件 (5.12) を満たす限りレプトン数を保存する散乱過程が非平衡状態となる時刻があまり変化しないため,  $h_{1,2}$  および  $M_{1,2}$  に対して  $Y_B$  の変化は小さい. その一方で,  $Y_B$  は  $\mu_1$  と  $\mu_2$  に大きく依存する.  $\mu_1$  は  $\Delta Y_\eta$  の初期値に寄与し,  $\mu_2$  はレプトン数を破る散乱過程による  $\Delta Y_\eta$  の洗い流し効果に寄与するパラメーターである. これらの依存性を見るための例を図 5.5 に示した. 再加熱温度の式 (5.24) より,  $|\mu_1|$  が小さい場合, 再加熱温度が低くなるため,  $\Delta Y_\eta(T_R)$  も小さくなる. 一方,  $|\mu_1|$  を大きくすると  $\Delta Y_\eta(T_R)$  は大きくなるが,  $T_R \sim m_{S_{1,2}}$  になると, レプトン数を破る過程  $\eta\phi^\dagger \leftrightarrow \phi\eta^\dagger$  の s チャンネルの共鳴効果による洗い流し効果が増大するため, 図 5.5 のように,  $Y_B$  は減少に転じている. 図 5.4 の左下図のように,  $z$  が小さいところで  $\Gamma/H$  が増大しているのはこの共鳴効果によるものである. また, 付録 C.2 からわかるように,  $\lambda_5$  はレプトン数を破る散乱過程に寄与するため, 十分なバリオン数の生成量を得るための上限値が与えられる. 今の場合, 図 5.5 の左図から  $\lambda_5 < 2 \cdot 10^{-6}$  が得られる.  $S_1$  と  $S_2$  の質量差は CP 対称性の破れの大きさに寄与し, 図 5.5 の右図は  $Y_B$  の  $\Delta (\equiv \frac{m_{S_2}}{m_{S_1}} - 1)$  依存性について示したものである. 二つのスカラー場の質量が縮退した場合, ツリーと 1 ループの自己エネルギーダイアグラムの干渉項の寄

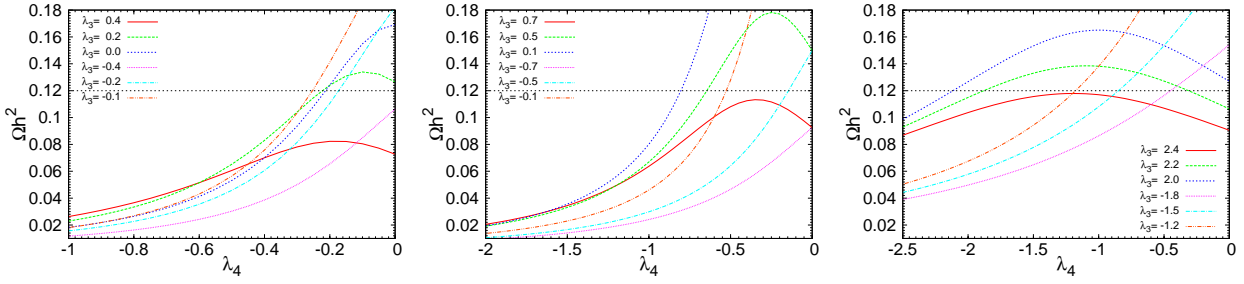


図 5.6 暗黒物質  $\eta_R^0$  の残存量. 左から  $M_\eta = 600$  GeV, 1 TeV, 3 TeV である. 黒点線は  $\Omega_{\text{DM}} h^2 = 0.12$  を表している [38].

与 (5.25 の二項目) によって, CP 対称性の破れが増大する. 図 5.5 の右図に見られるピークは, (5.25) より,  $\Delta \simeq \frac{\Gamma_{S_2}}{2m_{S_2}}$  となるところである. しかし今の場合, 上で述べたように,  $\lambda_5$  の大きさを十分小さくしておけば観測結果から要求される  $Y_B$  を実現することができる.

(b) の場合, (a) のパラメーター依存性と異なり,  $\lambda_5$  の大きさを固定した時の  $h_{1,2}$  および  $M_{1,2}$  の値によって得られる  $Y_B$  が大きく変化する.  $M_i < T_R$  の場合, レプトン数を保存する過程  $\eta \bar{\ell}_\alpha \leftrightarrow \eta^\dagger \ell_\beta$  が s チャンネルの共鳴効果によってその反応率が大きくなるため,  $T \sim M_i$  ではほぼ熱平衡状態となる. このとき,  $\lambda_5$  の値が大きく, レプトン数を破る散乱過程による洗い流し効果が大きいため,  $\Delta Y_\eta$  と共に  $\Delta Y_L$  も瞬時に減少する. したがって, これを回避するために  $M_i \gg T_R$  が要求され, このような場合, 十分なバリオン数が生成される.

## 5.5 暗黒物質直接探査実験による制限

今の模型の場合,  $Z_2$  対称性の下で奇パリティの中性粒子は  $S_{1,2}$  と右巻きニュートリノ  $N_{1,2}$  および  $\eta$  の中性成分が存在するが, 前章と同様, ここでは  $\eta_R^0$  を暗黒物質とする. このとき, 暗黒物質の性質については 4.2 節で議論したものと全く同様である.

上で述べたように, この模型におけるレプトン数生成過程において有効結合定数  $\lambda_5$  は重要な役割を果たす. 一方で, 4.2 節では暗黒物質の直接探査実験により,  $Z^0$  を媒介する非弾性散乱過程に制限が与えられており, ここから  $\lambda_5$  の下限値が得られることを述べた. そのため, ここではレプトン数の生成量と暗黒物質に対する実験との整合性について定量的に評価する. 図 5.6 は  $M_\eta = 600$  GeV, 1 TeV, 3 TeV の場合について, 4.2.2 節と同様の手順で暗黒物質の残存量を計算し, 各  $\lambda_3$  の値に対する  $\Omega_{\eta_R^0} h^2$  の  $\lambda_4$  依存性についてプロットしたものである. 図中の黒点線が観測による実験結果  $\Omega_{\text{DM}} = 0.12$  を示している [38]. ここから, 実験結果を満たす  $\lambda_{3,4}$  の組み合わせが存在することがわかる.

4.2.3 節で議論したように,  $\eta_R^0$  と核子が  $Z^0$  を媒介して反応する非弾性散乱過程  $\eta_R^0 N \rightarrow \eta_I^0 N$  の散乱断面積は, 現在の直接探査実験の感度 [126] に比べてかなり大きい, そのシグナルは今のところ観測されていないことから,  $\eta_R^0$  と  $\eta_I^0$  の質量差によって非弾性散乱過程が運動学的に制限されていると考えられる. 今の模型の場合,  $\frac{|\mu_1|^2}{m_{S_1}^2} \ll \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2}$  であるから,  $\eta_R^0$  と  $\eta_I^0$  の質量差は, (4.18) に  $|\lambda_5| \simeq \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2}$  を用いて,

$$\delta = M_{\eta_I^0} - M_{\eta_R^0} \simeq \frac{\langle \phi^0 \rangle^2 |\mu_2|^2}{M_{\eta_R^0} m_{S_2}^2} \quad (5.28)$$

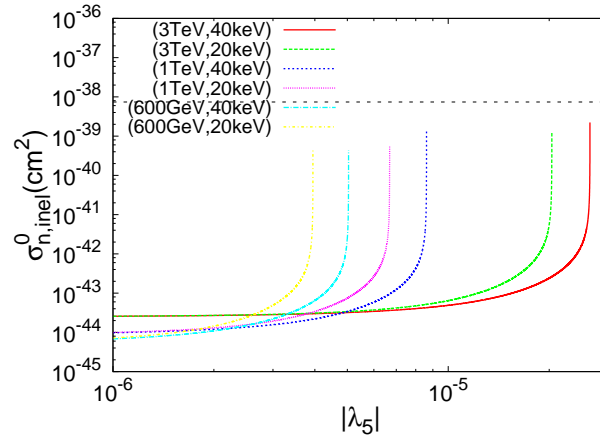


図 5.7 直接探査実験による  $|\lambda_5|$  の制限. 各  $(M_\eta, E_R)$  に対する  $\sigma_{n,inel}^0$  の境界線をプロットした.

と表わされる. これが十分大きくなければならないため, レプトン数生成量を評価する上で重要なレプトン数を破る散乱過程に寄与するパラメーター  $\frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2}$  に下限値が与えられる.

図 5.7 は, 実験による弾性散乱過程の断面積に対する制限を (4.17) を用いて非弾性散乱過程の断面積に対する制限に書き換え, 各  $M_\eta$  と  $E_R$  の値に対してその  $|\lambda_5|$  依存性について示したものである. このとき,  $v_{esc} = 544 \text{ km/s}$  とした. また, 弾性散乱過程の断面積  $\sigma_{n,el}^0$  に対する制限には LUX 実験 [126] の結果を用いた. 各境界線より上の領域が排除されている領域であり, 境界線の端点は  $v_{min} = v_{esc}$  となる点である.  $v_{esc}$  と  $E_R$  の不定性があるが, ここから大まかに  $\lambda_5 \simeq \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2}$  に対する制限を見積もることができ,

$$\frac{\mu_2^2}{m_{S_2}^2} \gtrsim \begin{cases} (2-3) \times 10^{-5} & (M_{\eta_R}^0 = 3 \text{ TeV}), \\ (6-8) \times 10^{-6} & (M_{\eta_R}^0 = 1 \text{ TeV}), \\ (3-5) \times 10^{-6} & (M_{\eta_R}^0 = 600 \text{ GeV}), \end{cases} \quad (5.29)$$

が与えられる. したがって, 表 5.2 の (b) は上の条件を満たすが, (a) の場合については排除されていることがわかる. しかし,  $|\lambda_5|$  に対する制限の評価にはいくつかの仮定と不定性を含んでおり, さらに, 前節で述べたように,  $S_1$  と  $S_2$  の質量が縮退した場合には, CP 対称性の破れが増大するため,  $|\lambda_5|$  を比較的大きくとることができる. 図 5.5 の右図から,  $\frac{|\mu_1|}{m_{S_1}} = 2 \cdot 10^{-5}$  のとき,  $\Delta = 10^{-7}$  で  $|\lambda_5| \simeq (3-4) \times 10^{-6}$  となることがわかる.



## まとめと展望

本研究では、輻射ニュートリノ質量生成モデルによるニュートリノ質量と暗黒物質、宇宙のバリオン数非対称性の同時説明可能性について議論し、更なるモデルの拡張によって、インフレーションを実現する拡張モデル構築を試みた。このモデルは新たに  $Z_2$  奇パリティの実スカラー一重項を導入したもので、このスカラー場は輻射補正によるニュートリノ質量生成に重要な役割を果たす。さらに、リッチスカラーとの結合  $\sum_a \xi_a S_a^2 R$  において、 $\xi_1 \gg 1 \gg \xi_2$  のような階層的な結合定数を仮定すると、 $S_1$  の場の値が大きいところでポテンシャルが平坦になり、十分なインフレーションが実現可能になる。このモデルのテンソル・スカラー比およびスペクトル指数は、ヒッグスによるインフレーションのシナリオと同様、観測結果とよく合っている。さらに、 $\xi_1, \xi_2$  が独立なパラメーターであることから、ユニタリティーを破るエネルギースケールをインフレーションスケールに比べて十分に大きくとれるという点でヒッグスによるインフレーションモデルと異なる。したがって、今のモデルの場合、ユニタリティーを回復させるために導入した新たな場によってポテンシャルの平坦性が損なわれるというような問題が生じない。

さらに、このモデルでは、第4章で議論した右巻きニュートリノの崩壊によるバリオン数生成の他に、再加熱期のインフラトンの崩壊時にバリオン数生成が実現されるシナリオが考えられる。この場合、インフラトンの崩壊によってまず  $\eta$  セクターに非対称性が生じ、これがレプトン数を保存する散乱過程を通じて、レプトンセクターに移転する。そして、スファレロン過程によってバリオン数に転化される。このとき重要なパラメーターはニュートリノ振動実験や暗黒物質探査実験によって制限されており、本研究ではバリオン数生成とこれらの実験結果との整合性について評価を行った。その結果、この拡張モデルが上に挙げた4つの問題を同時に解決し得ることがわかった。

今のモデル場合、暗黒物質の候補として最も軽い右巻きニュートリノと  $\eta$  の中性成分が考えられるが、ここでは  $\eta$  の中性成分を暗黒物質として議論した。本論文で議論したように、この場合、暗黒物質の直接探査実験によってバリオン数生成に重要なパラメーターである  $\lambda_5$  に下限値が与えられるため、(a) のようなシナリオについては非常に厳しく制限される。一方、右巻きニュートリノが暗黒物質の場合、 $\lambda_5$  に対する制限はないが、暗黒物質の残存量説明のため、ニュートリノ湯川結合定数がある程度大きくとる必要があり、レプトンフレーバーを破る過程との整合性が重要となる。また、このような大きな結合定数の場合、 $T \simeq T_R$  でレプトン数を保存する仮定が常に熱平衡状態となり、(b) のようなシナリオは実現しないと考えられる。Ma 模型では右巻きニュートリノ暗黒物質とすると、バリオン数生成は困難であるため、今後、この拡張モデルについて定量的な評価を行いたい。





# 謝辞

本研究を取り組むにあたって、指導・助言して下さった方々に心より感謝申し上げます。特に末松大二郎教授には学部四年時から暖かい指導をいただきました。青木健一教授には夏の学校の準備等の相談に親切に乗ってくださいました。また、末松大二郎教授と共に私生活では大変お世話になり、とても楽しい研究生活を送ることができました。久保治輔教授には様々なことに積極的に挑戦する大切さを教えていただきました。博士前期課程ではインドネシアへの短期留学プログラムへの参加を奨めていただき、国際的な視野を広げることができたと思います。青木真由美准教授、武田真滋助教、石渡弘浩助教には研究はもちろん私生活についても気軽に話すことができ、楽しい時間を過ごすことができました。秘書の西川涼子さんには旅費の手続きや物品購入など大変お世話になりました。研究室の卒業生である岡田寛さん、荒木威さん、藤間崇さん、高野浩さんにはゼミや研究会等でお世話になり、たくさんのことを学ばせていただきました。また、私が研究室に配属された時から面倒見てくださった佐藤大輔さん、小林玉青さんをはじめ、研究室のみなさまにこの場をお借りして深く感謝申し上げます。

他大学の方では富山大学の兼村晋哉准教授、新潟大学の浅賀岳彦准教授、島根大学の波場直之教授にたくさんのご助言をいただきました。兼村晋哉准教授には数々の研究会に呼んでいただき、たくさんの研究者との交流を通じて、研究の視野を広げる機会をいただきました。浅賀岳彦准教授との議論は非常に楽しく、貴重な時間を過ごすことができました。波場直之教授には金沢夏の学校の講師として参加していただきました。セミナーでは、お忙しい中、長時間じっくり話を聞いてくださいました。また、新潟大学の卒業生である石田裕之さんには研究会等で大変お世話になりました。研究会、夏の学校等では多くの学生との交流あり、特に、富山大学、新潟大学、信州大学の学生の方々と共に切磋琢磨できたことは、大切な思い出です。

最後に、物理を教えてくださった当大学の先生方、そして、長い時間を共に過ごした同級生たち、本当にありがとうございました。



## 付録 A

# 摂動アインシュタインテンソルの導出

計量の摂動成分 (3.119), (3.121) を考慮し, 摂動を含むアインシュタインテンソルを導出する. クリストッフェル記号  $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g_{\sigma\rho,\nu} + g_{\sigma\nu,\rho} - g_{\nu\rho,\sigma})$  は一次の摂動までで,

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}(\bar{g}^{\mu\sigma} + \delta g^{\mu\sigma}) [(\bar{g}_{\sigma\rho} + \delta g_{\sigma\rho})_{,\nu} + (\bar{g}_{\sigma\nu} + \delta g_{\sigma\nu})_{,\rho} - (\bar{g}_{\nu\rho} + \delta g_{\nu\rho})_{,\sigma}] \\ &\simeq \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\sigma}(\bar{g}_{\sigma\rho,\nu} + \bar{g}_{\sigma\nu,\rho} - \bar{g}_{\nu\rho,\sigma}) + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\sigma}(\delta g_{\sigma\rho,\nu} + \delta g_{\sigma\nu,\rho} - \delta g_{\nu\rho,\sigma}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta g^{\mu\sigma}(\bar{g}_{\sigma\rho,\nu} + \bar{g}_{\sigma\nu,\rho} - \bar{g}_{\nu\rho,\sigma})\end{aligned}\tag{A.1}$$

となる. このとき, 各成分は

$$\Gamma^0{}_{00} = \frac{1}{2}\bar{g}^{00}\bar{g}_{00,0} + \frac{1}{2}\bar{g}^{00}\delta g_{00,0} + \frac{1}{2}\delta g^{00}\bar{g}_{00,0} = \mathcal{H} + A',\tag{A.2}$$

$$\Gamma^0{}_{0i} = \Gamma^0{}_{i0} = \frac{1}{2}\bar{g}^{00}\delta g_{00,i} + \frac{1}{2}\delta g^{0j}\bar{g}_{ji,0} = A_{|i} + \mathcal{H}V_i,\tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^0{}_{ij} &= -\frac{1}{2}\bar{g}^{00}\bar{g}_{ij,0} + \frac{1}{2}\bar{g}^{00}(\delta g_{0j,i} + \delta g_{0i,j} - \delta g_{ij,0}) - \frac{1}{2}\delta g^{00}\bar{g}_{ij,0} + \frac{1}{2}\delta g^{0k}(\bar{g}_{kj,i} + \bar{g}_{ki,j} - \bar{g}_{ij,k}) \\ &= \mathcal{H}(1 - 2A)\gamma_{ij} - \frac{1}{2}(V_{i,j} + V_{j,i}) + V_l^{(3)}\Gamma^l{}_{ij} + \frac{1}{2}C'_{ij} + \mathcal{H}C_{ij} \\ &= \mathcal{H}(1 - 2A)\gamma_{ij} - \frac{1}{2}(V_{i|j} + V_{j|i}) + \frac{1}{2}C'_{ij} + \mathcal{H}C_{ij},\end{aligned}$$

$$\Gamma^i{}_{00} = \frac{1}{2}\bar{g}^{ij}(2\delta g_{j0,0} - \delta g_{00,j}) + \frac{1}{2}\delta g^{i0}\bar{g}_{00,0} = V^i + \mathcal{H}V^i + A^i,\tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^i{}_{j0} = \Gamma^i{}_{0j} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{ik}\bar{g}_{kj,0} + \frac{1}{2}\bar{g}^{ik}(\delta g_{kj,0} + \delta g_{k0,j} - \delta g_{j0,k}) + \frac{1}{2}\delta g^{ik}\bar{g}_{kj,0} \\ &= \mathcal{H}\delta^i{}_j + \frac{1}{2}\gamma^{ik}(C'_{kj} + V_{k|j} + V_l^{(3)}\Gamma^l{}_{kj} - V_{j|k} - V_l^{(3)}\Gamma^l{}_{jk}) \\ &= \mathcal{H}\delta^i{}_j + \frac{1}{2}(C^i{}_j + V^i{}_{|j} - V_j{}^{|i}),\end{aligned}\tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}\Gamma^i{}_{jk} &= \frac{1}{2}\bar{g}^{il}(\bar{g}_{lk,j} + \bar{g}_{lj,k} - \bar{g}_{jk,l}) + \frac{1}{2}\bar{g}^{il}(\delta g_{lk,j} + \delta g_{lj,k} - \delta g_{jk,l}) - \frac{1}{2}\delta g^{i0}\bar{g}_{jk,0} \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta g^{il}(\bar{g}_{lk,j} + \bar{g}_{lj,k} - \bar{g}_{jk,l}) \\ &= \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lk,j} + \gamma_{lj,k} - \gamma_{jk,l}) + \frac{1}{2}\gamma^{il}(C_{lk|j} + C_{mj}^{(3)}\Gamma^m{}_{lk} + C_{ml}^{(3)}\Gamma^m{}_{jk} \\ &\quad + C_{l|j|k} + C_{mk}^{(3)}\Gamma^m{}_{lj} + C_{ml}^{(3)}\Gamma^m{}_{kj} - C_{jk|l} - C_{mk}^{(3)}\Gamma^m{}_{jl} - C_{mj}^{(3)}\Gamma^m{}_{kl}) \\ &\quad - \gamma^{il}C_{lm}^{(3)}\Gamma^m{}_{kj} - \frac{1}{2}V^i\gamma_{jk,0}\end{aligned}$$

$$= {}^{(3)}\Gamma^i{}_{jk} - \mathcal{H}V^i\gamma_{jk} + \frac{\gamma^{il}}{2}C_{lj|k} + \frac{\gamma^{il}}{2}C_{lk|j} - \frac{\gamma^{il}}{2}C_{jk|l} \quad (\text{A.6})$$

となる. ここで, 線素の時間成分は共形時間を用いているので, 時間微分  $\cdot_0$  は  $\tau$  での微分を意味しており, これを  $'$  に書き換えた. また,  $\mathcal{H} \equiv a'/a$  とした. さらに,  $|$  は三次元背景空間の共変微分であり, 上付き添え字と下付き添え字のベクトル, それぞれの場合について

$$\begin{aligned} V_{i|j} &= V_{i,j} - V_l^{(3)}\Gamma^l{}_{ij}, \\ V^i{}_{|j} &= V^i{}_{,j} + V^l{}^{(3)}\Gamma^i{}_{jl} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

のように定義される.  ${}^{(3)}\Gamma^i{}_{jk}$  は三次元クリストッフエル記号  ${}^{(3)}\Gamma^i{}_{jk} \equiv \frac{1}{2}\gamma^{il}(\gamma_{lj,k} + \gamma_{lk,j} - \gamma_{jk,l})$  である. 次に, リーマンテンソル  $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu,\rho} - \Gamma^\mu{}_{\rho\nu,\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\rho\nu}$  について求める. 対称性から明らかでないものは以下の通りである.

$$R^0{}_{00i} = -R^0{}_{0i0} = \partial_0\Gamma^0{}_{i0} - \partial_i\Gamma^0{}_{00} + \Gamma^0{}_{0j}\Gamma^j{}_{i0} - \Gamma^0{}_{ij}\Gamma^j{}_{00} \simeq \mathcal{H}'V_i, \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} R^0{}_{0ij} &= \partial_i\Gamma^0{}_{j0} - \partial_j\Gamma^0{}_{i0} + \Gamma^0{}_{ik}\Gamma^k{}_{j0} - \Gamma^0{}_{jk}\Gamma^k{}_{i0} \\ &\simeq \mathcal{H} \left( A_{|ji} + A_{|l}{}^{(3)}\Gamma^l{}_{ji} + V_{j|i} + V_l^{(3)}\Gamma^l{}_{ji} - A_{|ij} - A_{|l}{}^{(3)}\Gamma^l{}_{ij} - V_{i|j} - V_l^{(3)}\Gamma^l{}_{ij} \right) \\ &\quad + \mathcal{H} (V_{i|j} - V_{j|i}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} R^0{}_{i0j} &= -R^0{}_{ij0} = \partial_0\Gamma^0{}_{ij} - \partial_j\Gamma^0{}_{0i} + \Gamma^0{}_{00}\Gamma^0{}_{ij} + \Gamma^0{}_{0k}\Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^0{}_{j0}\Gamma^0{}_{0i} - \Gamma^0{}_{jk}\Gamma^k{}_{0i} \\ &\simeq \mathcal{H}'(1-2A)\gamma_{ij} - 2\mathcal{H}A'\gamma_{ij} - \frac{1}{2}(V'_{i|j} + V'_{j|i}) + \frac{1}{2}C''_{ij} + \mathcal{H}'C_{ij} + \mathcal{H}C'_{ij} - (A_{|i})_{,j} - \mathcal{H}V_{i,j} \\ &\quad + \mathcal{H}^2(1-2A)\gamma_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{H}(V_{i|j} + V_{j|i}) + \frac{1}{2}\mathcal{H}C'_{ij} + \mathcal{H}^2C_{ij} + \mathcal{H}A'\gamma_{ij} + (A_{|k} + \mathcal{H}V_k)^{(3)}\Gamma^k{}_{ij} \\ &\quad - \mathcal{H}^2(1-2A)\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}(V_{j|i} + V_{i|j}) - \frac{1}{2}\mathcal{H}C'_{ij} - \mathcal{H}^2C_{ij} - \frac{1}{2}\mathcal{H}(C'_{ij} + V_{j|i} - V_{i|j}) \\ &\simeq [\mathcal{H}'(1-2A) - \mathcal{H}A']\gamma_{ij} - A_{|ij} - \frac{1}{2}(V'_{i|j} + V'_{j|i}) - \frac{1}{2}\mathcal{H}(V_{i|j} + V_{j|i}) \\ &\quad + \frac{1}{2}C''_{ij} + \frac{1}{2}\mathcal{H}C'_{ij} + \mathcal{H}'C_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} R^i{}_{00j} &= -R^i{}_{0j0} = \partial_0\Gamma^i{}_{0j} - \partial_j\Gamma^i{}_{00} + \Gamma^i{}_{00}\Gamma^0{}_{0j} + \Gamma^i{}_{0k}\Gamma^k{}_{0j} - \Gamma^i{}_{j0}\Gamma^0{}_{00} - \Gamma^i{}_{jk}\Gamma^k{}_{00} \\ &\simeq \mathcal{H}'\delta_j^i + \frac{1}{2}(C''^i{}_j + V'^i{}_{|j} - V_j{}^{\prime i}) - V'^i{}_{,j} - \mathcal{H}V^i{}_{,j} - A^{|i}{}_{,j} + (\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}A')\delta_j^i - \mathcal{H}^2\delta_j^i \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathcal{H}(C'^i{}_j + V^i{}_{|j} - V_j{}^{|i}) - {}^{(3)}\Gamma^i{}_{jk}(V'^k + \mathcal{H}V^k + A'^k) \\ &= (\mathcal{H}' - \mathcal{H}A')\delta_j^i - A^{|i}{}_{|j} - \frac{1}{2}(V'^i{}_{|j} + V_j{}^{\prime i}) - \frac{1}{2}\mathcal{H}(V^i{}_{|j} + V_j{}^{|i}) \\ &\quad + \frac{1}{2}C''^i{}_j + \frac{1}{2}\mathcal{H}C'^i{}_j, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned}
R^0_{ijk} &= \partial_j \Gamma^0_{ki} - \partial_k \Gamma^0_{ji} + \Gamma^0_{j0} \Gamma^0_{ki} + \Gamma^0_{jl} \Gamma^l_{ki} - \Gamma^0_{k0} \Gamma^0_{ji} - \Gamma^0_{kl} \Gamma^l_{ji} \\
&\simeq -2A_{|j} \mathcal{H} \gamma_{ki} + \mathcal{H} (1 - 2A) \gamma_{ki,j} - \frac{1}{2} (V_{k|i} + V_{i|k})_{,j} + \frac{1}{2} C'_{ki,j} + \mathcal{H} C_{ki,j} \\
&\quad + 2A_{|k} \mathcal{H} \gamma_{ji} - \mathcal{H} (1 - 2A) \gamma_{ji,k} + \frac{1}{2} (V_{j|i} + V_{i|j})_{,k} - \frac{1}{2} C'_{ji,k} - \mathcal{H} C_{ji,k} \\
&\quad + (A_{|j} + \mathcal{H} V_j) \mathcal{H} \gamma_{ki} + \left[ \mathcal{H} (1 - 2A) \gamma_{jl} - \frac{1}{2} (V_{j|l} + V_{l|j}) + \frac{1}{2} C'_{jl} + \mathcal{H} C_{jl} \right] {}^{(3)}\Gamma^l_{ki} \\
&\quad - \mathcal{H}^2 V_j \gamma_{ki} + \frac{1}{2} \mathcal{H} C_{jk|i} + \frac{1}{2} \mathcal{H} C_{ji|k} - \frac{1}{2} \mathcal{H} C_{ki|j} \\
&\quad - (A_{|k} + \mathcal{H} V_k) \mathcal{H} \gamma_{ji} - \left[ \mathcal{H} (1 - 2A) \gamma_{kl} - \frac{1}{2} (V_{k|l} + V_{l|k}) + \frac{1}{2} C'_{kl} + \mathcal{H} C_{kl} \right] {}^{(3)}\Gamma^l_{ji} \\
&\quad + \mathcal{H}^2 V_k \gamma_{ji} - \frac{1}{2} \mathcal{H} C_{kj|i} - \frac{1}{2} \mathcal{H} C_{ki|j} + \frac{1}{2} \mathcal{H} C_{ji|k} \\
&\quad - 2A_{|j} \mathcal{H} \gamma_{ki} + \mathcal{H} (1 - 2A) \gamma_{ki,j} - \frac{1}{2} (V_{k|i} + V_{i|k})_{,j} + \frac{1}{2} C'_{ki,j} + \mathcal{H} C_{ki,j} \\
&= \mathcal{H} (A_{|j} \gamma_{ki} - A_{|k} \gamma_{ji}) + \frac{1}{2} \left[ - (V_{k|i} + V_{i|k})_{,j} + (V_{k|l} + V_{l|k}) {}^{(3)}\Gamma^l_{ji} + (V_{i|l} + V_{l|i}) {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} \right. \\
&\quad \left. + (V_{j|i} + V_{i|j})_{,k} - (V_{j|l} + V_{l|j}) {}^{(3)}\Gamma^l_{ki} - (V_{i|l} + V_{l|i}) {}^{(3)}\Gamma^l_{kj} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( C'_{ki,j} - C'_{kl} {}^{(3)}\Gamma^l_{ji} - C'_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} + C'_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} - C'_{ji,k} + C'_{jl} {}^{(3)}\Gamma^l_{ki} + C'_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{kj} - C'_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{kj} \right) \\
&\quad + \mathcal{H} \left( C_{ki,j} - C_{kl} {}^{(3)}\Gamma^l_{ji} - C_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} - C_{ji,k} + C_{jl} {}^{(3)}\Gamma^l_{ki} + C_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{kj} - C_{il} {}^{(3)}\Gamma^l_{kj} \right) \\
&\quad + \mathcal{H} (C_{ij|k} - C_{ik|j}) \\
&= \mathcal{H} (A_{|j} \gamma_{ki} - A_{|k} \gamma_{ji}) + \frac{1}{2} (V_{j|i} + V_{i|j})_{,k} - \frac{1}{2} (V_{k|i} + V_{i|k})_{,j} + \frac{1}{2} (C'_{ki|j} - C'_{ji|k}), \tag{A.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^i_{0jk} &= \partial_j \Gamma^i_{0k} - \partial_k \Gamma^i_{0j} + \Gamma^i_{j0} \Gamma^0_{k0} + \Gamma^i_{jl} \Gamma^l_{k0} - \Gamma^i_{k0} \Gamma^0_{j0} - \Gamma^i_{kl} \Gamma^l_{j0} \\
&\simeq \frac{1}{2} \left( C'^i_k + V^i_{|k} - V_k{}^{|i} \right)_{,j} - \frac{1}{2} \left( C'^i_j + V^i_{|j} - V_j{}^{|i} \right)_{,k} + \frac{1}{2} \left( C''^l_k + V^l_{|k} - V_k{}^{|l} \right) {}^{(3)}\Gamma^i_{jl} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left( C''^l_j + V^l_{|j} - V_j{}^{|l} \right) {}^{(3)}\Gamma^i_{kl} - \frac{1}{2} \left( C'^i_l + V^i_{|l} - V_l{}^{|i} \right) {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} + \frac{1}{2} \left( C'^i_l + V^i_{|l} - V_l{}^{|i} \right) {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} \\
&\quad + \mathcal{H} (A_{|k} \delta^i_j - A_{|j} \delta^i_k) + \mathcal{H}^2 (V_k \delta^i_j - V_j \delta^i_k) \\
&= \mathcal{H} (A_{|k} \delta^i_j - A_{|j} \delta^i_k) + \frac{1}{2} \left( V^i_{|kj} - V_k{}^{|i}{}_{|j} - V^i_{|jk} + V_j{}^{|i}{}_{|k} \right) + \mathcal{H}^2 (V_k \delta^i_j - V_j \delta^i_k) \\
&\quad + \frac{1}{2} (C'^i_{k|j} - C'^i_{j|k}), \tag{A.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^i_{j0k} &= \partial_j \Gamma^i_{0k} - \partial_k \Gamma^i_{0j} + \Gamma^i_{j0} \Gamma^0_{k0} + \Gamma^i_{jl} \Gamma^l_{k0} - \Gamma^i_{k0} \Gamma^0_{j0} - \Gamma^i_{kl} \Gamma^l_{j0} \\
&\simeq -\mathcal{H}' V^i \gamma_{jk} + \frac{1}{2} C'^i_{j|k} + \frac{1}{2} C'^i_{k|j} - \frac{1}{2} C'^i_{jk}{}^{|i} + \mathcal{H}^2 V^i \gamma_{jk} + \mathcal{H} A^{|i} \gamma_{jk} - \mathcal{H} (A_{|j} + \mathcal{H} V_j) \delta^i_k \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ \left( C'^i_j + V^i_{|j} - V_j{}^{|i} \right)_{,k} - \left( C'^i_l + V^i_{|l} - V_l{}^{|i} \right) {}^{(3)}\Gamma^l_{jk} + \left( C''^l_j + V^l_{|j} - V_j{}^{|l} \right) {}^{(3)}\Gamma^i_{kl} \right] \\
&= \mathcal{H} \left( A^{|i} \gamma_{jk} - A_{|j} \delta^i_k \right) + \mathcal{H}^2 (V^i \gamma_{jk} - V_j \delta^i_k) - \mathcal{H}' V^i \gamma_{jk} - \frac{1}{2} \left( V^i_{|jk} - V_j{}^{|i}{}_{|k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left( C'^i_{k|j} - C'^i_{j|k} \right), \tag{A.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^i_{jkl} &= \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \Gamma^i_{k0} \Gamma^0_{jl} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{l0} \Gamma^0_{kj} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{kj} \\
&\simeq {}^{(3)}\Gamma^i_{jl,k} - \mathcal{H} V^i_{,k} \gamma_{jl} - \mathcal{H} V^i \gamma_{jl,k} + \frac{1}{2} \left( C^i_{j|l} + C^i_{l|j} - C_{lj}{}^{i|} \right)_{,k} \\
&\quad - {}^{(3)}\Gamma^i_{kj,l} + \mathcal{H} V^i_{,l} \gamma_{kj} + \mathcal{H} V^i \gamma_{kj,l} - \frac{1}{2} \left( C^i_{k|j} + C^i_{j|k} - C_{kj}{}^{i|} \right)_{,l} \\
&\quad + \mathcal{H}^2 (1 - 2A) \delta_k^i \gamma_{jl} - \frac{1}{2} \mathcal{H} \delta_k^i (V_{j|l} + V_{l|j}) + \frac{1}{2} \mathcal{H} \delta_k^i C'_{jl} + \mathcal{H}^2 \delta_k^i C_{jl} \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathcal{H} \left( C'^i_k + V^i_{|k} - V_k{}^{i|} \right) \gamma_{jl} + \left[ {}^{(3)}\Gamma^i_{km} - \mathcal{H} V^i \gamma_{km} + \frac{1}{2} \mathcal{H} \left( C^i_{k|m} + C^i_{m|k} - C_{km}{}^{i|} \right) \right] {}^{(3)}\Gamma^m_{jl} \\
&\quad + \left[ -\mathcal{H} V^m \gamma_{jl} + \frac{1}{2} \left( C^m_{j|l} + C^m_{l|j} - C_{lj}{}^{m|} \right) \right] {}^{(3)}\Gamma^i_{km} \\
&\quad - \mathcal{H}^2 (1 - 2A) \delta_l^i \gamma_{kj} + \frac{1}{2} \mathcal{H} \delta_l^i (V_{k|j} + V_{j|k}) - \frac{1}{2} \mathcal{H} \delta_l^i C'_{kj} - \mathcal{H}^2 \delta_l^i C_{kj} \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{H} \left( C'^i_l + V^i_{|l} - V_l{}^{i|} \right) \gamma_{kj} - \left[ {}^{(3)}\Gamma^i_{lm} - \mathcal{H} V^i \gamma_{lm} + \frac{1}{2} \mathcal{H} \left( C^i_{l|m} + C^i_{m|l} - C_{lm}{}^{i|} \right) \right] {}^{(3)}\Gamma^m_{kj} \\
&\quad - \left[ -\mathcal{H} V^m \gamma_{kj} + \frac{1}{2} \left( C^m_{k|j} + C^m_{j|k} - C_{jk}{}^{m|} \right) \right] {}^{(3)}\Gamma^i_{lm} \\
&= {}^{(3)}\Gamma^i_{jl,k} - {}^{(3)}\Gamma^i_{kj,l} + {}^{(3)}\Gamma^i_{km} {}^{(3)}\Gamma^m_{jl} - {}^{(3)}\Gamma^i_{lm} {}^{(3)}\Gamma^m_{kj} \\
&\quad - \mathcal{H} \gamma_{jl} \left( V^i_{,k} + V^m {}^{(3)}\Gamma^i_{km} \right) + \mathcal{H} \gamma_{kj} \left( V^i_{,l} + V^m {}^{(3)}\Gamma^i_{lm} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[ \left( C^i_{j|l} + C^i_{l|j} - C_{lj}{}^{i|} \right)_{,k} + \left( C^m_{j|l} + C^m_{l|j} - C_{lj}{}^{m|} \right) {}^{(3)}\Gamma^i_{km} \right. \\
&\quad - \left( C^i_{l|m} + C^i_{m|l} - C_{ml}{}^{i|} \right) {}^{(3)}\Gamma^m_{kj} - \left( C^i_{j|m} + C^i_{m|j} - C_{mj}{}^{i|} \right) {}^{(3)}\Gamma^m_{kl} \\
&\quad - \left( C^i_{k|j} + C^i_{j|k} - C_{kj}{}^{i|} \right)_{,l} - \left( C^m_{k|j} + C^m_{j|k} - C_{kj}{}^{m|} \right) {}^{(3)}\Gamma^i_{lm} \\
&\quad \left. + \left( C^i_{k|m} + C^i_{m|k} - C_{mk}{}^{i|} \right) {}^{(3)}\Gamma^m_{jl} + \left( C^i_{j|m} + C^i_{m|j} - C_{mj}{}^{i|} \right) {}^{(3)}\Gamma^m_{kl} \right] \\
&\quad + \mathcal{H}^2 (1 - 2A) (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{kj}) - \frac{1}{2} \mathcal{H} [\delta_k^i (V_{j|l} + V_{l|j}) - \delta_l^i (V_{k|j} + V_{j|k})] + \frac{1}{2} \mathcal{H} (\delta_k^i C'_{jl} - \delta_l^i C'_{kj}) \\
&\quad + \mathcal{H}^2 (\delta_k^i C_{jl} - \delta_l^i C_{kj}) + \frac{1}{2} \mathcal{H} \left( C'^i_k + V^i_{|k} - V_k{}^{i|} \right) \gamma_{jl} - \frac{1}{2} \mathcal{H} \left( C'^i_l + V^i_{|l} - V_l{}^{i|} \right) \gamma_{kj} \\
&= {}^{(3)}R^i_{jkl} + \mathcal{H}^2 (1 - 2A) (\delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{kj}) - \frac{1}{2} \mathcal{H} [\delta_k^i (V_{j|l} + V_{l|j}) - \delta_l^i (V_{k|j} + V_{j|k})] \\
&\quad + \frac{1}{2} \mathcal{H} \left[ \gamma_{kj} \left( V^i_{|l} + V_l{}^{i|} \right) - \gamma_{jl} \left( V^i_{|k} + V_k{}^{i|} \right) \right] + \frac{1}{2} \mathcal{H} (\delta_k^i C'_{jl} - \delta_l^i C'_{kj} + \gamma_{jl} C'^i_k - \gamma_{kj} C'^i_l) \\
&\quad + \mathcal{H}^2 (\delta_k^i C_{jl} - \delta_l^i C_{kj}) + \frac{1}{2} \left( C^i_{j|lk} + C^i_{l|jk} + C_{jk}{}^{i|}{}_{|l} - C^i_{k|jl} - C^i_{j|kl} - C_{lj}{}^{i|}{}_{|k} \right). \tag{A.15}
\end{aligned}$$

$(^3)R^i_{jkl}$  は三次元リーマンテンソルであり,  $(^3)R^i_{jkl} \equiv (^3)\Gamma^i_{jl,k} - (^3)\Gamma^i_{kj,l} + (^3)\Gamma^i_{km} (^3)\Gamma^m_{jl} - (^3)\Gamma^i_{lm} (^3)\Gamma^m_{kj}$  で定義される. リッチテンソル  $R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}$  は

$$R_{00} = -3(\mathcal{H}' - \mathcal{H}A') + A^{|i}_{|i} + V^{|i}_{|i} + \mathcal{H}V^i_{|i} - \frac{1}{2}C''^i_i - \frac{1}{2}\mathcal{H}C'^i_i, \quad (\text{A.16})$$

$$R_{0i} = R_{i0} = 2\mathcal{H}A_{|i} + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) V_i + \frac{1}{2} \left( V^j_{|ij} - V_i^{|j}_{|j} \right) + \frac{1}{2} \left( C'^j_{i|j} - C'^j_{j|i} \right), \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} R_{ij} = & (^3)R_{ij} + [(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(1 - 2A) - \mathcal{H}A'] \gamma_{ij} - A_{|ij} - \frac{1}{2} \left( V'^i_{|j} + V'^j_{|i} \right) \\ & - \mathcal{H} \left( V_{i|j} + V_{j|i} \right) - \mathcal{H} \gamma_{ij} V^k_{|k} + \frac{1}{2} C''_{ij} + \mathcal{H}C'_{ij} + \frac{1}{2} \mathcal{H}C'^k_k \gamma_{ij} \\ & + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2) C_{ij} + \frac{1}{2} \left( C^k_{i|jk} + C^k_{j|ik} - C^k_{k|ij} - C_{ij}^{|k}_{|k} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

さらに, 添え字を上げると,

$$R^0_0 = g^{0\mu} R_{\mu 0} \simeq \frac{1}{a^2} \left[ -3\mathcal{H}'(1 - 2A) + 3\mathcal{H}A' + A^{|i}_{|i} + V^{|i}_{|i} + \mathcal{H}V^i_{|i} - \frac{1}{2}C''^i_i - \frac{1}{2}\mathcal{H}C'^i_i \right], \quad (\text{A.19})$$

$$R^0_i = g^{0\mu} R_{\mu i} \simeq \frac{1}{a^2} \left[ 2\mathcal{H}A_{|i} - V^j (^3)R_{ji} + \frac{1}{2} \left( V_j^{|j}_{|i} - V_i^{|j}_{|j} \right) + \frac{1}{2} \left( C'^j_{i|j} - C'^j_{j|i} \right) \right], \quad (\text{A.20})$$

$$R^i_0 = g^{i\mu} R_{\mu 0} \simeq -\frac{1}{a^2} \left[ 2\mathcal{H}A^{|i}_{|i} - 2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2) V^i + \frac{1}{2} \left( V^j_{|ij} - V^i_{|j} \right) + \frac{1}{2} \left( C'^{ji}_{|j} - C'^j_{j|i} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} R^i_j = & g^{i\mu} R_{\mu j} \simeq -\frac{1}{a^2} \left\{ (^3)R^i_j + [(\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)(1 - 2A) - \mathcal{H}A'] \delta_j^i - A^{|i}_{|j} - \frac{1}{2} \left( V^{|i}_{|j} + V^j_{|i} \right) \right. \\ & - \mathcal{H} \left( V^i_{|j} + V_j^{|i}_{|i} + \delta_j^i V^k_{|k} \right) - C^{ik} (^3)R_{kj} + \frac{1}{2} C''^i_j + \mathcal{H}C'^i_j + \frac{1}{2} \mathcal{H}C'^k_k \delta_j^i \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( C^{ki}_{|jk} + C^k_{j|ik} - C^k_{k|ij} - C_{ij}^{|k}_{|k} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

したがって, リッチスカラーは

$$\begin{aligned} R = R^\mu_{\mu} = & \frac{1}{a^2} \left[ -(^3)R - 6(\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)(1 - 2A) + 6\mathcal{H}A' + 2A^{|i}_{|i} + 2V^{|i}_{|i} + 6\mathcal{H}V_i^{|i}_{|i} \right. \\ & \left. + C^{ij} (^3)R_{ji} - C''^i_i - 3\mathcal{H}C'^i_i - C^{ji}_{|ij} + C^i_{i|j} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

となる. ここで,  $(^3)\Gamma^i_{jk}$  を具体的に計算すると, 有限の値を持つ成分は

$$\begin{aligned} (^3)\Gamma^r_{rr} &= \frac{Kr}{1 - Kr^2}, & (^3)\Gamma^r_{\theta\theta} &= -r(1 - Kr^2), & (^3)\Gamma^r_{\phi\phi} &= -r(1 - Kr^2) \sin^2 \theta, \\ (^3)\Gamma^\theta_{\theta r} &= (^3)\Gamma^\theta_{r\theta} = (^3)\Gamma^\phi_{\phi r} = (^3)\Gamma^\phi_{r\phi} = \frac{1}{r}, \\ (^3)\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin \theta \cos \theta, & (^3)\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= (^3)\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot \theta \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

となる. これらを用いて三次元リーマンテンソル  $(^3)R^i_{jkl}$  およびリッチテンソル  $(^3)R_{ij}$ , リッチスカラー  $(^3)R$  を計算すると,

$$\begin{aligned} (^3)R^i_{jkl} &= K \left( \delta_k^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{jk} \right), \\ (^3)R_{ij} &= 2K \gamma_{ij}, & (^3)R &= 6K \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$



となることがわかる. 以上を用いて, 一次の摂動を含むアインシュタインテンソル

$$G^0_0 = \bar{G}^0_0 + \frac{1}{a^2} \left[ -6\mathcal{H}^2 A - 2\mathcal{H}V^i_{|i} + \mathcal{H}C'^i_{|i} - KC^i_{|i} + \frac{1}{2} \left( C^{ji}_{|ij} - C^i_{|j}{}^j \right) \right], \quad (\text{A.25})$$

$$G^0_i = \bar{G}^0_i + \frac{1}{a^2} \left[ 2\mathcal{H}A_{|i} - KV_i + \frac{1}{2} \left( V_j{}^{|j}{}_{|i} - V_i{}^{|j}{}_{|j} \right) + \frac{1}{2} \left( C'^j_{|ij} - C'^j_{|ji} \right) \right], \quad (\text{A.26})$$

$$G^i_0 = \bar{G}^i_0 - \frac{1}{a^2} \left[ 2\mathcal{H}A^{|i} - 2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)V^i + \frac{1}{2} \left( V_j{}^{|ij} - V^i{}_{|j}{}^j \right) + \frac{1}{2} \left( C'^{ji}_{|j} - C'^j_{|j}{}^i \right) \right], \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} G^i_j = \bar{G}^i_j - \frac{1}{a^2} \left\{ \right. & \left[ 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)A + 2\mathcal{H}A' + A^{|k}{}_{|k} + V'^k{}_{|k} + 2\mathcal{H}V^k{}_{|k} - \frac{1}{2}C''^k{}_{|k} - \mathcal{H}C'^k{}_{|k} \right. \\ & + KC^k{}_{|k} - \frac{1}{2}C^{lk}{}_{|kl} + \frac{1}{2}C^k{}_{|k}{}^l{}_{|l} \left. \right] \delta_j^i - A^{|i}{}_{|j} - \frac{1}{2} \left( V'^i{}_{|j} + V_j{}^{|i} \right) - \mathcal{H} \left( V^i{}_{|j} + V_j{}^{|i} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2}C''^i{}_{|j} + \mathcal{H}C'^i{}_{|j} - 2KC^i{}_{|j} + \frac{1}{2} \left( C^{ki}{}_{|jk} + C^k{}_{|j}{}^i{}_{|k} - C^k{}_{|k}{}^i{}_{|j} - C^i{}_{|j}{}^k{}_{|k} \right) \right\} \quad (\text{A.28}) \end{aligned}$$

が得られる.

## 付録 B

# 崩壊幅と散乱断面積の熱平均

崩壊過程  $a \rightarrow XY$  において熱平均化した  $a$  の崩壊幅は, その熱平衡状態での反応密度  $\gamma_D^{\text{eq}}$  と数密度  $n_a^{\text{eq}}$  を用いて

$$\langle \Gamma_D \rangle \equiv \frac{\gamma_D^{\text{eq}}}{n_a^{\text{eq}}} \quad (\text{B.1})$$

で与えられる.  $\gamma_D^{\text{eq}}$  は (3.36) より

$$\begin{aligned} \gamma_D^{\text{eq}} &= \int \frac{g_a}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_a}{2E_a} \frac{g_X}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_X}{2E_X} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_Y}{2E_Y} (2\pi)^4 \delta^4(p_a - p_X - p_Y) |\mathcal{M}|_{a \rightarrow XY}^2 e^{-E_a/T} \\ &= \frac{g_a}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_a}{2E_a} \Gamma_D e^{-E_a/T} \\ &= \frac{g_a m_a}{2\pi^2} \int_{m_a}^{\infty} dE_a \sqrt{E_a^2 - m_a^2} \Gamma_D e^{-E_a/T} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

と書くことができる.  $\Gamma_D$  は静止粒子の崩壊幅であり,

$$\Gamma_D = \frac{1}{2m_a} \int \frac{g_X}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_X}{2E_X} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_Y}{2E_Y} (2\pi)^4 \delta(p_a - p_X - p_Y) |\mathcal{M}|_{a \rightarrow XY}^2 \quad (\text{B.3})$$

である. ここで,  $z = E_a/T$  とおくと, (B.2) は

$$\frac{g_a m_a}{2\pi^2} \int_{m_a/T}^{\infty} T dz \sqrt{z^2 T^2 - m_a^2} \Gamma_D e^{-z} = \frac{g_a m_a T^2}{2\pi^2} \int_{m_a/T}^{\infty} dz \sqrt{z^2 - \frac{m_a^2}{T^2}} \Gamma_D e^{-z}$$

となる. さらに, 修正ベッセル関数

$$K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^n}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_1^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dt \quad (\text{B.4})$$

を用いて上の式を書き直すと, 式 (B.2) は最終的に

$$\gamma_D^{\text{eq}} = n_a^{\text{eq}} \frac{K_1(m_a/T)}{K_2(m_a/T)} \Gamma_D \quad (\text{B.5})$$

となる. また, 式 (B.4) を用いると熱平衡状態における数密度 (2.40) が

$$n^{\text{eq}} = \frac{gm^2 T}{2\pi^2} K_2\left(\frac{m}{T}\right) \quad (\text{B.6})$$

と表せるから、熱平均化した  $a$  の崩壊幅 (B.1) は

$$\langle \Gamma_D \rangle = \frac{K_1(m_a/T)}{K_2(m_a/T)} \Gamma_D \quad (\text{B.7})$$

となる.

次に、2 体散乱過程  $ab \rightarrow XY$  について扱う.  $\gamma_{ab \rightarrow XY}^{\text{eq}}$  は、再び (3.36) より、

$$\begin{aligned} \gamma_{ab \rightarrow XY}^{\text{eq}} &= \int \frac{g_a}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_a}{2E_a} \frac{g_b}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_b}{2E_b} \frac{g_X}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_X}{2E_X} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_Y}{2E_Y} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_X - p_Y) |\mathcal{M}|_{ab \rightarrow XY}^2 e^{-E_a/T} e^{-E_b/T}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

ここで、

$$\sigma|v| = \frac{1}{2E_a 2E_b} \int \frac{g_X}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_X}{2E_X} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_Y}{2E_Y} (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_X - p_Y) |\mathcal{M}|_{ab \rightarrow XY}^2 \quad (\text{B.9})$$

を用いると、

$$\gamma_{ab \rightarrow XY}^{\text{eq}} = \frac{g_a g_b}{(2\pi)^6} \int d^3 p_a d^3 p_b e^{-E_a/T} e^{-E_b/T} \sigma|v|. \quad (\text{B.10})$$

運動量空間  $\int d^3 p_a d^3 p_b$  の部分に注目すると

$$\int d^3 p_a d^3 p_b = 8\pi^2 \int E_a E_b |\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}_b| dE_a dE_b d\cos\theta.$$

と書くことができる. ここで、次のような変数変換を行う.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_a + E_b, & E_2 &= E_a - E_b, \\ s &= (p_a + p_b)^2 = m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b - 2|\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}_b| \cos\theta. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

このとき、ヤコビアンは  $1/4|\mathbf{p}_a| |\mathbf{p}_b|$  となるから

$$\int d^3 p_a d^3 p_b = 2\pi^2 \int E_a E_b dE_1 dE_2 ds$$

のように変換される. 積分範囲は、 $E_a \geq m_a$ ,  $E_b \geq m_b$ ,  $|\cos\theta| \leq 1$  であるから、

$$\begin{aligned} E_1 &\geq \sqrt{s}, & s &\geq (m_a + m_b)^2, \\ -\frac{(m_a^2 - m_b^2)E_1}{s} - A &\leq E_2 \leq -\frac{(m_a^2 - m_b^2)E_1}{s} + A \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

となる. ここで、

$$A \equiv \frac{1}{s} \sqrt{\{s - (m_a - m_b)^2\} \{s - (m_a + m_b)^2\}} \sqrt{E_1^2 - s} \quad (\text{B.13})$$

とした、したがって、 $E_a E_b \sigma|v|$  は  $s$  にのみ依存するので  $E_2$  の積分が実行でき、

$$\begin{aligned} \gamma_{a,b \rightarrow X,Y}^{\text{eq}} &= \frac{g_a g_b}{32\pi^4} \int dE_1 dE_2 ds e^{-(E_1+E_2)/2T} e^{-(E_1-E_2)/2T} w(s) \\ &= \frac{g_a g_b}{16\pi^4} \int dE_1 ds e^{-E_1/T} w(s) \frac{1}{s} \sqrt{\{s - (m_a - m_b)^2\} \{s - (m_a + m_b)^2\}} \sqrt{E_1^2 - s}. \end{aligned}$$

さらにこれを修正ベッセル関数 (B.4) を用いて書けば

$$\gamma_{ab \rightarrow XY}^{\text{eq}} = \frac{T}{64\pi^4} \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \hat{\sigma}(s) \sqrt{s} K_1\left(\frac{\sqrt{s}}{T}\right) \quad (\text{B.14})$$

と表わされる. ここで, 運動学的制限から  $s_{\min} = \max[(m_a^2 + m_b^2)^2, (m_X^2 + m_Y^2)^2]$  であり,  $\hat{\sigma}(s)$  は換算散乱断面積で,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(s) \equiv & \frac{g_a g_b}{s} \sqrt{\{s - (m_a - m_b)^2\} \{s - (m_a + m_b)^2\}} \int \frac{g_X}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_X}{2E_X} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_Y}{2E_Y} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(p_a + p_b - p_X - p_Y) |\mathcal{M}|_{ab \rightarrow XY}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

で定義される.



## 付録 C

# レプトン数生成量評価のための崩壊および散乱過程の反応密度

ここでは、第4章および第5章でレプトン数生成量を見積もる際に用いた反応密度を与える。

### C.1 右巻きニュートリノ崩壊によるレプトン数生成シナリオの場合

まず、第4章でのレプトン数生成量評価に必要な図4.6, 4.7のファインマンダイアグラムで与えられる崩壊および散乱過程についての反応密度をまとめておく。ここで

$$x = \frac{s}{M_1^2}, \quad a_i = \frac{M_i^2}{M_1^2}, \quad a_\tau = \frac{M_\eta^2}{M_1^2}, \quad (\text{C.1})$$

とおく。\$s\$ は二乗重心系エネルギーである。\$N\_i\$ の崩壊過程に関する反応率は式 (B.6), (B.5), (4.29) から

$$\gamma_D^{N_i} = \frac{(h^\dagger h)_{ii}}{8\pi^3} M_1^4 a_i \sqrt{a_i} \left(1 - \frac{a_\eta}{a_i}\right)^2 \frac{\sqrt{a_i} K_1(z)}{z} \quad (\text{C.2})$$

で与えられる。ここで \$K\_1(z)\$ は第二種修正ベッセル関数である。

散乱過程に関する反応密度は式 (B.14)

$$\gamma_{ab \rightarrow XY}^{\text{eq}} = \frac{T}{64\pi^4} \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \hat{\sigma}(s) \sqrt{s} K_1\left(\frac{\sqrt{s}}{T}\right) \quad (\text{C.3})$$

で与えられる。ここで、\$s\_{\min} = \max[(m\_a^2 + m\_b^2)^2, (m\_X^2 + m\_Y^2)^2]\$ である。各散乱過程における換算散乱断面積 \$\hat{\sigma}(s)\$ を以下で与える。

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_i(x)} &= \frac{x - a_i}{(x - a_i)^2 + a_i^2 c_i}, \quad c_i = \frac{1}{64\pi^2} \left( \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} |h_{\alpha i}|^2 \right)^2 \left(1 - \frac{a_\eta}{a_i}\right)^4, \\ \lambda_{ij} &= [x - (\sqrt{a_i} + \sqrt{a_j})^2] [x - (\sqrt{a_i} - \sqrt{a_j})^2], \\ L_{ij} &= \ln \left( \frac{x - a_i - a_j + 2a_\eta + \sqrt{\lambda_{ij}}}{x - a_i - a_j + 2a_\eta - \sqrt{\lambda_{ij}}} \right), \\ L'_{ij} &= \ln \left[ \frac{\sqrt{x}(x - a_i - a_j - 2a_\eta) + \sqrt{\lambda_{ij}}(x - 4a_\eta)}{\sqrt{x}(x - a_i - a_j - 2a_\eta) - \sqrt{\lambda_{ij}}(x - 4a_\eta)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

とおく.

まず, レプトン数を破る ( $\Delta L = 2$ ) 過程の換算散乱断面積について,  $\ell_\alpha \eta^\dagger \leftrightarrow \bar{\ell}_\beta \eta$  過程は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^{(2)}(x) = & \frac{1}{2\pi} \frac{(x - a_\eta)^2}{x^2} \left[ \sum_{i=1}^3 (h^\dagger h)_{ii}^2 \frac{a_i}{x} \left\{ \frac{x^2}{xa_i - a_\eta^2} + \frac{x}{D_i(x)} + \frac{(x - a_\eta)^2}{2D_i(x)^2} \right. \right. \\ & - \frac{x^2}{(x - a_\eta)^2} \left( 1 + \frac{x + a_i - 2a_\eta}{D_i(x)} \right) \ln \left( \frac{x(x + a_i - 2a_\eta)}{xa_i - a_\eta^2} \right) \left. \right\} \\ & + \sum_{i>j} \text{Re}[(h^\dagger h)_{ij}^2] \frac{\sqrt{a_i a_j}}{x} \left\{ \frac{x}{D_i(x)} + \frac{x}{D_j(x)} + \frac{(x - a_\eta)^2}{D_i(x)D_j(x)} \right. \\ & + \frac{x^2}{(x - a_\eta)^2} \left( \frac{2(x + a_i - 2a_\eta)}{a_j - a_i} - \frac{x + a_i - 2a_\eta}{D_j(x)} \right) \ln \left( \frac{x(x + a_i - 2a_\eta)}{xa_i - a_\eta^2} \right) \\ & \left. \left. + \frac{x^2}{(x - a_\eta)^2} \left( \frac{2(x + a_j - 2a_\eta)}{a_i - a_j} - \frac{x + a_j - 2a_\eta}{D_i(x)} \right) \ln \left( \frac{x(x + a_j - 2a_\eta)}{xa_j - a_\eta^2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

で与えられ,  $\ell_\alpha \ell_\beta \leftrightarrow \eta\eta$  に関しては

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_N^{(13)}(x) = & \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{i=1}^3 (h^\dagger h)_{ii}^2 \left\{ \frac{a_i(x^2 - 4xa_\eta)^{1/2}}{a_i x - (a_i - a_\eta)^2} + \frac{a_i}{x + 2a_i - 2a_\eta} \ln \left( \frac{x + (x^2 - 4xa_\eta)^{1/2} + 2a_i - 2a_\eta}{x - (x^2 - 4xa_\eta)^{1/2} + 2a_i - 2a_\eta} \right) \right\} \right. \\ & + \sum_{i>j} \frac{\text{Re}[(h^\dagger h)_{ij}^2] \sqrt{a_i a_j}}{x + a_i + a_j - 2a_\eta} \left\{ \frac{2x + 3a_i + a_j - 4a_\eta}{a_j - a_i} \ln \left( \frac{x + (x^2 - 4xa_\eta)^{1/2} + 2a_i - 2a_\eta}{x - (x^2 - 4xa_\eta)^{1/2} + 2a_i - 2a_\eta} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2x + a_i + 3a_j - 4a_\eta}{a_i - a_j} \ln \left( \frac{x + (x^2 - 4xa_\eta)^{1/2} + 2a_j - 2a_\eta}{x - (x^2 - 4xa_\eta)^{1/2} + 2a_j - 2a_\eta} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

が得られる. ここで CP 対称性の破れが最大となるように  $\sin 2(\varphi_{2,3} - \varphi_1) = 1$ ,  $\varphi_1 = 0$  とすると, 交差項の寄与はゼロとなる. 簡単のため, ここではこのような場合をあつかう.

レプトン数を保存する散乱過程については,  $N_i N_j \leftrightarrow \ell_\alpha \bar{\ell}_\beta$  は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{N_i N_j}^{(2)}(x) = & \frac{1}{4\pi} \left[ \sum_{i=1}^3 (h^\dagger h)_{ii} (h^\dagger h)_{jj} \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_{ij}}}{x} \left( 1 + \frac{(a_i - a_\eta)(a_j - a_\eta)}{(a_i - a_\eta)(a_j - a_\eta) + xa_\eta} \right) + \frac{a_i + a_j - 2a_\eta}{x} L_{ij} \right\} \right. \\ & \left. - \text{Re}[(h^\dagger h)_{ij}^2] \frac{2\sqrt{a_i a_j} L_{ij}}{x - a_i - a_j + 2a_\eta} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

となり,  $N_i N_j \leftrightarrow \eta\eta^\dagger$  は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{N_i N_j}^{(3)}(x) = & \frac{1}{4\pi} \left( \frac{x - 4a_\eta}{x} \right)^{1/2} \left[ |(hh^\dagger)_{ij}|^2 \left\{ \frac{\sqrt{\lambda_{ij}}}{x} \left( -2 + \frac{a_\eta(a_i - a_j)^2}{(a_\eta - a_i)(a_\eta - a_j)x + (a_i - a_j)^2 a_\eta} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{x}{x - 4a_\eta} \right)^{1/2} \left( 1 - 2\frac{a_\eta}{x} \right) L'_{ij} \right\} - 2\text{Re}[(hh^\dagger)_{ij}^2] \frac{\sqrt{a_i a_j} (a_i + a_j - 2a_\eta) L'_{ij}}{x(x - a_i - a_j - 2a_\eta)} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

という結果が得られる. 上と同様の理由で交差項の寄与はゼロとなる.

## C.2 インフラトン崩壊によるレプトン数生成シナリオの場合

次に、第5章で議論したインフラトンの崩壊によるレプトン数生成で用いた散乱過程 (図 4.7) 反応密度についてまとめる。

上の議論と同様に、散乱過程の反応密度は式 (C.2) で与えられる。今の場合、

$$x = \frac{s}{M_\eta^2}, \quad a_i = \frac{M_i^2}{M_\eta^2}, \quad b_a = \frac{m_{S_a}^2}{M_\eta^2}, \quad c_a = \frac{|\mu_a|^2}{M_\eta^2} \quad (\text{C.9})$$

と定義する。

レプトン数を保存する散乱過程  $\eta\eta \leftrightarrow \ell\ell$  の換算散乱断面積は

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_a(x) = & \frac{1}{2\pi} \left[ \sum_{i=1}^2 (h^\dagger h)_{ii}^2 \left\{ \frac{a_i(x^2 - 4x)^{1/2}}{a_i x + (a_i - 1)^2} + \frac{a_i}{x + 2a_i - 2} \ln \left( \frac{x + (x^2 - 4x)^{1/2} + 2a_i - 2}{x - (x^2 - 4x)^{1/2} + 2a_i - 2} \right) \right\} \right. \\ & + \sum_{i>j} \frac{\text{Re}[(h^\dagger h)_{ij}^2] \sqrt{a_i a_j}}{x + a_i + a_j - 2} \left\{ \frac{2x + 3a_i + a_j - 4}{a_j - a_i} \ln \left( \frac{x + (x^2 - 4x)^{1/2} + 2a_i - 2}{x - (x^2 - 4x)^{1/2} + 2a_i - 2} \right) \right. \\ & \left. \left. + \frac{2x + a_i + 3a_j - 4}{a_i - a_j} \ln \left( \frac{x + (x^2 - 4x)^{1/2} + 2a_j - 2}{x - (x^2 - 4x)^{1/2} + 2a_j - 2} \right) \right\} \right] \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

で与えられ、 $\eta\ell^\dagger \leftrightarrow \eta^\dagger\ell$  の場合、

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_b(x) = & \frac{1}{2\pi} \frac{(x-1)^2}{x^2} \left[ \sum_{i=1}^2 (h^\dagger h)_{ii}^2 \frac{a_i}{x} \left\{ \frac{x^2}{x a_i - 1} + \frac{2x}{D_k(x)} + \frac{(x-1)^2}{2D_i(x)^2} \right. \right. \\ & - \left. \frac{x^2}{(x-1)^2} \left( 1 + \frac{2(x+a_k-2)}{D_i(x)} \right) \ln \left( \frac{x(x+a_k-2)}{x a_i - 1} \right) \right\} \\ & + \sum_{i>j} \text{Re}[(h^\dagger h)_{ij}^2] \frac{\sqrt{a_i a_j}}{x} \left\{ \frac{x}{D_i(x)} + \frac{x}{D_j(x)} + \frac{(x-1)^2}{D_i(x)D_j(x)} \right. \\ & + \frac{x^2}{(x-1)^2} \left( \frac{2(x+a_i-2)}{a_j - a_i} - \frac{x+a_i-2}{D_j(x)} \right) \ln \frac{x(x+a_i-2)}{x a_i - 1} \\ & \left. \left. + \frac{x^2}{(x-1)^2} \left( \frac{2(x+a_j-2)}{a_i - a_j} - \frac{x+a_j-2}{D_i(x)} \right) \ln \frac{x(x+a_j-2)}{x a_j - 1} \right\} \right] \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $D_i(x)$  を

$$\frac{1}{D_i(x)} = \frac{x - a_i}{(x - a_i)^2 + a_i^2 d_i}, \quad d_i = \frac{1}{64\pi^2} \left( \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} |h_{\alpha i}|^2 \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{a_i} \right)^4. \quad (\text{C.12})$$

のように定義した。

一方、 $\frac{|\mu_1|^2}{m_{S_1}^2} \ll \frac{|\mu_2|^2}{m_{S_2}^2}$  の下で、レプトン数を破る散乱過程  $\eta\eta \leftrightarrow \phi\phi$  の換算散乱断面積は、

$$\hat{\sigma}_x(x) \simeq \frac{c_2^2}{\pi} \frac{1}{(x^3(x-4))^{1/2}} \left( \frac{2}{P_2^2 - 1} + \frac{1}{P_2} \ln \frac{P_2 + 1}{P_2 - 1} \right) \quad (\text{C.13})$$

で与えられ、 $\eta\phi^\dagger \leftrightarrow \eta^\dagger\phi$  については、

$$\hat{\sigma}_y(x) \simeq \frac{c_2^2}{\pi} \left[ \frac{2}{(x-1)^2} \frac{1}{Q_2^2 - 1} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} \frac{1}{\tilde{D}_2(x)} + \frac{1}{x} \frac{x - b_2}{\tilde{D}_2(x)} \ln \frac{Q_2 + 1}{Q_2 - 1} \right] \quad (\text{C.14})$$



となる. ここで,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{D}_a(x)} &= \frac{1}{(x - b_a)^2 + b_a^2 \tilde{d}_a}, & \tilde{d}_a &= \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{c_a}{b_a}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{b_a}\right)^2, \\ P_a &= \frac{2(1 - b_a) - x}{[x(x - 4)]^{1/2}}, & Q_a &= -1 + \frac{2(1 - xb_a)}{(x - 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

とした.

## 付録 D

# レプトン数生成のボルツマン方程式の導出

### D.1 熱的レプトン数生成過程におけるボルツマン方程式

ここでは第 4 章で議論した熱的レプトン数生成過程を評価するためのボルツマン方程式を導出する。

右巻きニュートリノの崩壊過程において、CP 対称性の破れはツリーと 1 ループ干渉項から生じる。そのため、右巻きニュートリノ  $N_1$  の崩壊振幅は、ツリーレベルの崩壊の不変振幅  $\mathcal{M}_0$  とその補正項  $\epsilon_1$  を用いて、

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|_{N_1 \rightarrow \ell \eta^\dagger}^2 &= |\mathcal{M}|_{\bar{\ell} \eta \rightarrow N_1}^2 \simeq \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon_1\right) |\mathcal{M}_0|^2, \\ |\mathcal{M}|_{N_1 \rightarrow \bar{\ell} \eta}^2 &= |\mathcal{M}|_{\ell \eta^\dagger \rightarrow N_1}^2 \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon_1\right) |\mathcal{M}_0|^2 \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

と表わされる。これを用いて崩壊反応密度を計算し、さらに図 4.7 の散乱過程についての反応密度を求めることで、式 (3.39) から、右巻きニュートリノとレプトン数に対するボルツマン方程式が得られる。

右巻きニュートリノについては、今の模型の場合、 $N_2, N_3$  は熱平衡状態であるから、 $N_1$  に対するボルツマン方程式を導出する。このとき、 $N_1 N_1 \leftrightarrow \ell \bar{\ell}$ ,  $N_1 N_1 \leftrightarrow \eta \eta^\dagger$  のような散乱過程は、 $N_1$  の湯川結合定数が非常に小さいため無視した。よって、式 (3.39) から、

$$\frac{dY_{N_1}}{dz} = -\frac{z}{sH(M_1)} \left( \frac{Y_{N_1}}{Y_{N_1}^{\text{eq}}} - 1 \right) \left[ \gamma_D^{N_1} + \sum_{i=2,3} \left( \gamma_{N_1 N_i}^{(2)} + \gamma_{N_1 N_i}^{(3)} \right) \right] \quad (\text{D.2})$$

が得られる。ここで、 $z = \frac{M_1}{T}$  とした。また、 $\ell, \eta$  は熱平衡状態なので  $Y_{\ell(\eta)} = Y_{\ell(\eta)}^{\text{eq}}$  となることを用いた。

次にレプトン数非対称性に対するボルツマン方程式を求める。このとき、散乱過程  $\ell \eta^\dagger \leftrightarrow \bar{\ell} \eta$  においては、その  $s$  チャンネルで  $N_i$  がオンシェルであるような場合の寄与は、 $N_i$  の崩壊過程でカウントされているため、この分を除いてやる必要がある。右巻きニュートリノのオンシェルの寄与は、ブライト・ウィグナー伝播関数において  $\Gamma_{N_i}/M_i \rightarrow 0$  の極限をとることで得られる [181]。

つまり,

$$\frac{1}{(s - M_i^2)^2 + M_i^2 \Gamma_{N_i}^2} \rightarrow \frac{\pi}{M_i \Gamma_{N_i}} \delta(s - M_i^2) \quad (\Gamma_{N_i}/M_i \rightarrow 0) \quad (\text{D.3})$$

となる\*1. また,  $s = q^2$  とすると, このとき伝播関数の分子部分は  $\not{q} + M_i = \sum_s u_s(q) \bar{u}_s(q)$  となる. したがって, オンシェル過程の二乗散乱振幅は

$$|\mathcal{M}_{\ell\eta^\dagger \leftrightarrow \bar{\ell}\eta}^{\text{OS}}|^2 = \sum_{s_{N_i}, s'_{N_i}} \left[ |\mathcal{M}_{N_i \rightarrow \bar{\ell}\eta}|^2 \frac{\pi}{M_i \Gamma_{N_i}} \delta(q^2 - M_i^2) |\mathcal{M}_{\ell\eta^\dagger \rightarrow N_i}|^2 \right] \quad (\text{D.4})$$

となる. したがって, 反応密度は式 (B.8) より,

$$\begin{aligned} \gamma_{\ell\eta^\dagger \rightarrow \bar{\ell}\eta}^{\text{OS}} &= \int \frac{g_\ell}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{g_{\eta^\dagger}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_{\eta^\dagger}}{2E_{\eta^\dagger}} \frac{g_{\bar{\ell}}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_{\bar{\ell}}}{2E_{\bar{\ell}}} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{2E_\eta} (2\pi)^4 \delta^4(p_\ell + p_{\eta^\dagger} - p_{\bar{\ell}} - p_\eta) \\ &\times \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} \left[ |\mathcal{M}_{N_i \rightarrow \bar{\ell}\eta}|^2 \frac{\pi}{M_i \Gamma_{N_i}} \delta(q^2 - M_i^2) |\mathcal{M}_{\ell\eta^\dagger \rightarrow N_i}|^2 \right] e^{-(E_\ell + E_{\eta^\dagger})/T} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

で与えられる. ここで, 上式に (D.1) を代入し,

$$2M_i \Gamma_{N_i} = \int \frac{g_{\bar{\ell}}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_{\bar{\ell}}}{2E_{\bar{\ell}}} \frac{g_Y}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\eta}{2E_\eta} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_{\bar{\ell}} - p_\eta) \frac{1}{2} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_0|^2 \quad (\text{D.6})$$

を用いると, 式 (D.5) は

$$\begin{aligned} \gamma_{\ell\eta^\dagger \rightarrow \bar{\ell}\eta}^{\text{OS}} &= \left(1 - \frac{\epsilon_i}{2}\right)^2 \int \frac{g_\ell}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{g_{\eta^\dagger}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_{\eta^\dagger}}{2E_{\eta^\dagger}} d^4 q \delta^4(q - p_\ell - p_{\eta^\dagger}) \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_0|^2 2\pi \delta(q^2 - M_i^2) e^{-E_{N_i}/T} \\ &= \left(1 - \frac{\epsilon_i}{2}\right)^2 \int \frac{g_\ell}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_\ell}{2E_\ell} \frac{g_{\eta^\dagger}}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_{\eta^\dagger}}{2E_{\eta^\dagger}} \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{2E_q} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_\ell - p_{\eta^\dagger}) \sum_{\text{spin}} |\mathcal{M}_0|^2 e^{-E_{N_i}/T} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\epsilon_i}{2}\right)^2 \gamma_D^{N_i} \simeq \frac{1}{2} (1 - \epsilon_i) \gamma_D^{N_i} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

となる, 逆過程についても同様に,

$$\gamma_{\bar{\ell}\eta \rightarrow \ell\eta^\dagger}^{\text{OS}} \simeq \frac{1}{2} (1 + \epsilon_i) \gamma_D^{N_i}. \quad (\text{D.8})$$

したがって, レプトン数  $\ell$  に関するボルツマン方程式は式 (3.39) より,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\ell}{dz} &= \frac{z}{sH(M_1)} \left\{ \sum_i \left[ \left(1 + \frac{\epsilon_i}{2}\right) \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - \left(1 - \frac{\epsilon_i}{2}\right) \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \right] \gamma_D^{N_i} - \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \left[ \gamma_N^{(2)} - \sum_i \frac{1}{2} (1 - \epsilon_i) \gamma_D^{N_i} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \left[ \gamma_N^{(2)} - \sum_i \frac{1}{2} (1 + \epsilon_i) \gamma_D^{N_i} \right] - \left( \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} - 1 \right) \gamma_N^{(13)} \right\} \end{aligned}$$

となることがわかる. 一方, 反レプトン数に関するボルツマン方程式は

$$\begin{aligned} \frac{dY_{\bar{\ell}}}{dz} &= \frac{z}{sH(M_1)} \left\{ \sum_i \left[ \left(1 - \frac{\epsilon_i}{2}\right) \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - \left(1 + \frac{\epsilon_i}{2}\right) \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \right] \gamma_D^{N_i} - \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \left[ \gamma_N^{(2)} - \sum_i \frac{1}{2} (1 + \epsilon_i) \gamma_D^{N_i} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \left[ \gamma_N^{(2)} - \sum_i \frac{1}{2} (1 - \epsilon_i) \gamma_D^{N_i} \right] - \left( \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} - 1 \right) \gamma_N^{(13)} \right\} \end{aligned}$$

\*1 これは  $\epsilon \rightarrow 0$  で  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} dp^2 = \pi$  より,  $\frac{\epsilon}{(p^2 - m^2)^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(p^2 - m^2)$  となることから導出できる.

となる. 以上の二式の差をとることでレプトン数の非対称性 ( $L = \ell - \bar{\ell}$ ) についてのボルツマン方程式を導出することができる. このとき,  $Y_\ell + Y_{\bar{\ell}} \simeq 2Y_\ell^{\text{eq}}$  となることを用いると,

$$\frac{dY_L}{dz} = \frac{z}{sH(M_1)} \left[ \sum_i \epsilon_i \left( \frac{Y_{N_i}}{Y_{N_i}^{\text{eq}}} - 1 \right) \gamma_D^{N_i} - \frac{2Y_L}{Y_\ell^{\text{eq}}} \left( \gamma_N^{(2)} + \gamma_N^{(13)} + \sum_i \frac{\gamma_D^{N_i}}{4} \right) \right] \quad (\text{D.9})$$

となる. さらに,  $N_2, N_3$  が熱平衡状態にあることを用いると

$$\frac{dY_L}{dz} = \frac{z}{sH(M_1)} \left[ \epsilon_1 \left( \frac{Y_{N_1}}{Y_{N_1}^{\text{eq}}} - 1 \right) \gamma_D^{N_1} - \frac{2Y_L}{Y_\ell^{\text{eq}}} \left( \gamma_N^{(2)} + \gamma_N^{(13)} + \sum_i \frac{\gamma_D^{N_i}}{4} \right) \right] \quad (\text{D.10})$$

が得られる.

## D.2 非熱的レプトン数生成過程におけるボルツマン方程式

第5章ではインフラトンの崩壊によって非熱的に生成された  $\eta$  セクターのレプトン数が図 5.3 の散乱過程によって標準模型レプトンに転化することができる. これを定量的に評価するためのボルツマン方程式 (5.26) を導出する.

$\eta$  に関するボルツマン方程式は  $z = \frac{M_\eta}{T}$  とすると, 式 (3.39) より,

$$\begin{aligned} \frac{dY_\eta}{dz} = -\frac{z}{sH(M_\eta)} & \left\{ \left( \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \right) \gamma_a + \left[ \left( \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right)^2 - \left( \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \right)^2 \right] \gamma_b \right. \\ & \left. + \left( \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} \right) \gamma_x + \left[ \left( \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right)^2 - 1 \right] \gamma_y \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

で与えられる. ここで,  $\phi$  が熱平衡状態であることを用いた. 同様に,  $\eta^\dagger$  については

$$\begin{aligned} \frac{dY_{\eta^\dagger}}{dz} = -\frac{z}{sH(M_\eta)} & \left\{ \left( \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} - \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \right) \gamma_a + \left[ \left( \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} \right)^2 - \left( \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \right)^2 \right] \gamma_b \right. \\ & \left. + \left( \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} - \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right) \gamma_x + \left[ \left( \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} \right)^2 - 1 \right] \gamma_y \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

となるから,  $\Delta Y_\eta = Y_\eta - Y_{\eta^\dagger}$  に関するボルツマン方程式は, 上の二式の差をとることで得られ,

$$\frac{d\Delta Y_\eta}{dz} = -\frac{z}{sH(M_\eta)} \left[ 2(\gamma_a + \gamma_b) \left( \frac{\Delta Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{\Delta Y_L}{Y_L^{\text{eq}}} \right) + 2(\gamma_x + \gamma_y) \frac{\Delta Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right] \quad (\text{D.13})$$

となる. このとき,  $Y_\eta + Y_{\eta^\dagger} \simeq Y_\eta^{\text{eq}}$  とした.  $\Delta L$  についても同様に,  $\ell, \bar{\ell}$  に関するボルツマン方程式はそれぞれ

$$\frac{dY_\ell}{dz} = \frac{z}{sH(M_\eta)} \left\{ \left( \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} \right) \gamma_a + \left[ \left( \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right)^2 - \left( \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \right)^2 \right] \gamma_b \right\}, \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{dY_{\bar{\ell}}}{dz} = \frac{z}{sH(M_\eta)} \left\{ \left( \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} - \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} \right) \gamma_a + \left[ \left( \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} \right)^2 - \left( \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \right)^2 \right] \gamma_b \right\} \quad (\text{D.15})$$

で与えられるから, これらの差をとると,

$$\frac{d\Delta Y_L}{dz} = \frac{z}{sH(M_\eta)} \left[ 2 \left( \frac{Y_{\bar{\ell}}}{Y_{\bar{\ell}}^{\text{eq}}} \frac{Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{Y_\ell}{Y_\ell^{\text{eq}}} \frac{Y_{\eta^\dagger}}{Y_{\eta^\dagger}^{\text{eq}}} \right) \gamma_a + 2 \left( \frac{\Delta Y_\eta}{Y_\eta^{\text{eq}}} - \frac{\Delta Y_L}{Y_L^{\text{eq}}} \right) \gamma_b \right] \quad (\text{D.16})$$

となる. ここで, 第一項目が

$$\begin{aligned} 2(Y_{\bar{\ell}}Y_{\eta} - Y_{\ell}Y_{\eta^{\dagger}}) &= (Y_{\ell} + Y_{\bar{\ell}})(Y_{\eta} - Y_{\eta^{\dagger}}) - (Y_{\ell} - Y_{\bar{\ell}})(Y_{\eta} + Y_{\eta^{\dagger}}) \\ &\simeq 2(Y_{\ell}^{\text{eq}}\Delta Y_{\eta} - \Delta Y_L Y_{\eta}^{\text{eq}}) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

となることを用いると,

$$\frac{d\Delta Y_L}{dz} = \frac{z}{sH(M_{\eta})} 2(\gamma_a + \gamma_b) \left( \frac{\Delta Y_{\eta}}{Y_{\eta}^{\text{eq}}} - \frac{\Delta Y_L}{Y_L^{\text{eq}}} \right) \quad (\text{D.18})$$

が得られる.

## 付録 E

# 実スカラー場と重力との相互作用によるインフレーション

ここでは、第 5 章で議論した実スカラー場と重力の相互作用によるインフレーションについて詳しく説明する。

### E.1 複数の実スカラー場が存在する場合の共形変換について

$N$  個の実スカラー場  $\phi_i$ , ( $i = 1 - N$ ) の作用は

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -f(\phi_1, \dots, \phi_N) R + \frac{1}{2} \delta_{ij} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi_i \nabla_\nu \phi_j - V(\phi_1, \dots, \phi_N) \right] \quad (\text{E.1})$$

で与えられる。ここで、 $f(\phi_1, \dots, \phi_N)$  は正定値であると仮定する。また、 $\nabla$  は四次元の共変微分を表す。一般にこの作用はアインシュタイン・ヒルベルト作用\*1になっていないが、共形変換

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} \quad (\text{E.2})$$

によって、アインシュタイン・ヒルベルト作用の形に変形することができる。この変換前後の系をそれぞれジョルダンフレーム、アインシュタインフレームと呼ぶ。逆行列  $g^{\mu\nu}$  および  $\sqrt{-g}$  の変換は

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2(x)} g^{\mu\nu}, \quad \sqrt{-\hat{g}} = \Omega^4(x) \sqrt{-g} \quad (\text{E.3})$$

となる。このとき、クリストッフェル記号は

$$\hat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu = \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \frac{1}{\Omega} (\delta_\nu^\mu \nabla_\rho \Omega + \delta_\rho^\mu \nabla_\nu \Omega - g_{\nu\rho} \nabla^\mu \Omega) \quad (\text{E.4})$$

\*1 最小作用の原理からアインシュタイン方程式を導く作用。

となるから、これよりリーマンテンソルの変換性を求めると、

$$\begin{aligned}
\hat{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} &= R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} - \frac{1}{\Omega^2} (\delta_\sigma^\mu \nabla_\rho \Omega \nabla_\nu \Omega - g_{\sigma\nu} \nabla_\rho \Omega \nabla^\mu \Omega - \delta_\rho^\mu \nabla_\sigma \Omega \nabla_\nu \Omega + g_{\rho\nu} \nabla_\sigma \Omega \nabla^\mu \Omega) \\
&\quad + \frac{1}{\Omega} \left[ \delta_\sigma^\mu (\partial_\rho \nabla_\nu \Omega - \Gamma^\lambda{}_{\rho\nu} \nabla_\lambda \Omega) - \delta_\rho^\mu (\partial_\sigma \nabla_\nu \Omega - \Gamma^\lambda{}_{\sigma\nu} \nabla_\lambda \Omega) \right. \\
&\quad \left. + g_{\rho\nu} (\partial_\sigma \nabla^\mu \Omega + \Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} \nabla^\lambda \Omega) - g_{\sigma\nu} (\partial_\rho \nabla^\mu \Omega + \Gamma^\mu{}_{\rho\lambda} \nabla^\lambda \Omega) \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Omega^2} [\delta_\rho^\mu \nabla_\sigma \Omega \nabla_\nu \Omega - \delta_\sigma^\mu \nabla_\rho \Omega \nabla_\nu \Omega + g_{\sigma\nu} \nabla_\rho \Omega \nabla^\mu \Omega - g_{\rho\nu} \nabla_\sigma \Omega \nabla^\mu \Omega \\
&\quad + (g_{\rho\nu} \delta_\sigma^\mu - g_{\sigma\nu} \delta_\rho^\mu) \nabla^\lambda \Omega \nabla_\lambda \Omega] \\
&= R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \frac{1}{\Omega^2} \left[ 2\delta_\rho^\mu \nabla_\sigma \Omega \nabla_\nu \Omega - 2\delta_\sigma^\mu \nabla_\rho \Omega \nabla_\nu \Omega + 2g_{\sigma\nu} \nabla_\rho \Omega \nabla^\mu \Omega - 2g_{\rho\nu} \nabla_\sigma \Omega \nabla^\mu \Omega \right. \\
&\quad \left. + (g_{\rho\nu} \delta_\sigma^\mu - g_{\sigma\nu} \delta_\rho^\mu) \nabla^\lambda \Omega \nabla_\lambda \Omega \right] \\
&\quad + \frac{1}{\Omega} (\delta_\sigma^\mu \nabla_\rho \nabla_\nu \Omega - \delta_\rho^\mu \nabla_\sigma \nabla_\nu \Omega + g_{\rho\nu} \nabla_\sigma \nabla^\mu \Omega - g_{\sigma\nu} \nabla_\rho \nabla^\mu \Omega) \tag{E.5}
\end{aligned}$$

が得られる。したがって、リッチテンソル、リッチスカラーそれぞれの変換性は縮約をとって、

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{\Omega^2} (4\nabla_\mu \Omega \nabla_\nu \Omega - g_{\mu\nu} \nabla_\rho \Omega \nabla^\rho \Omega) - \frac{1}{\Omega} (2\nabla_\nu \nabla_\mu \Omega + g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla^\rho \Omega), \tag{E.6}$$

$$\hat{R} = \frac{1}{\Omega^2} \left( R - \frac{6}{\Omega} \nabla_\mu \nabla^\mu \Omega \right) \tag{E.7}$$

となることがわかる。

(E.3) および (E.7) を用いてジョルダンフレームの作用 (E.1) をアインシュタインフレームに移す。(E.1) の最初の項は共形変換で、

$$\int d^4x \sqrt{-g} f(\phi_i) R = \int d^4x \frac{\sqrt{-\hat{g}}}{\Omega^4} f(\phi_i) \left( \Omega^2 \hat{R} + \frac{6}{\Omega} \nabla_\mu \nabla^\mu \Omega \right) \tag{E.8}$$

のように変換される。このとき、右辺二項目の共変微分は共形変換前の計量で書かれており、

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu \nabla^\mu \Omega &= \partial_\mu \nabla^\mu \Omega + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} \nabla^\lambda \Omega \\
&= \partial_\mu \nabla^\mu \Omega + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\sigma g_{\mu\nu} \nabla^\sigma \Omega \tag{E.9}
\end{aligned}$$

となるから、その共形変換による変換性は

$$\begin{aligned}
\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega &= \partial_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\rho \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}^\rho \Omega \\
&= \partial_\mu \left( \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\nu \Omega \right) + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} \partial_\rho (\Omega^2 g_{\mu\nu}) \hat{\nabla}^\rho \Omega \\
&= \partial_\mu \left( \frac{g^{\mu\nu}}{\Omega^2} \hat{\nabla}_\nu \Omega \right) + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} (2\Omega \partial_\rho \Omega g_{\mu\nu} + \Omega^2 \partial_\rho g_{\mu\nu}) \hat{\nabla}^\rho \Omega \\
&= -\frac{2}{\Omega^3} \partial_\mu \Omega g^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\nu \Omega + \frac{1}{\Omega^2} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \nabla_\nu \Omega) + \Omega \hat{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \partial_\rho \Omega \hat{\nabla}^\rho \Omega + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} \hat{g}^{\rho\sigma} \hat{\nabla}_\sigma \Omega \\
&= -\frac{2}{\Omega} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\nu \Omega + \frac{1}{\Omega^2} \partial_\mu \nabla^\mu \Omega + \frac{1}{\Omega} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{\nabla}_\rho \Omega \hat{\nabla}^\rho \Omega + \frac{1}{2\Omega^2} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\sigma \Omega \\
&= \frac{2}{\Omega} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega + \frac{1}{\Omega^2} \left( \partial_\mu \nabla^\mu \Omega + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\rho g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \nabla_\sigma \Omega \right) \\
&= \frac{2}{\Omega} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega + \frac{1}{\Omega^2} \nabla_\mu \nabla^\mu \Omega \tag{E.10}
\end{aligned}$$

であることがわかる. ここで,  $\hat{\nabla}_\mu \Omega = \nabla_\mu \Omega$  が成り立つことを用いた. これは,  $x^\mu$  は共形変換で不変であるから,  $\partial_\mu = \hat{\partial}_\mu$  であり, さらに,  $\Omega$  はスカラー量であるから,  $\partial_\mu \Omega = \nabla_\mu \Omega$  となることからわかる. これを (E.8) に代入すると,

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} f(\phi_i) R &= \int d^4x \frac{\sqrt{-\hat{g}}}{\Omega^4} f(\phi_i) \left[ \Omega^2 \hat{R} + \frac{6}{\Omega} \left( \Omega^2 \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - 2\Omega \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega \right) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left( \frac{f(\phi_i)}{\Omega^2} \hat{R} + \frac{6}{\Omega^3} f(\phi_i) \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - \frac{12}{\Omega^4} f(\phi_i) \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega \right) \end{aligned}$$

となる. ここで, 第一項目に注目し, 共形変換後に正準なアインシュタイン・ヒルベルト作用を得るため,

$$\frac{f(\phi_i)}{\Omega^2} = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \quad (\text{E.11})$$

とおくと,

$$\begin{aligned} \int d^4x \sqrt{-g} f(\phi_i) R &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left( \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{pl}}^2}{\Omega} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - \frac{6M_{\text{pl}}^2}{\Omega^2} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \hat{R} + 3M_{\text{pl}}^2 \hat{\nabla}_\mu \left( \frac{1}{\Omega} \hat{\nabla}^\mu \Omega \right) - \frac{3M_{\text{pl}}}{\Omega^2} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left( \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \hat{R} - \frac{3M_{\text{pl}}^2}{\Omega^2} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega \right) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

を得る. 上の計算で  $\frac{1}{\Omega} \hat{\nabla}^\mu \Omega$  は無限遠面上でゼロに収束するとした. 一方, 運動項およびポテンシャル項については

$$\int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{2} \delta_{ij} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi_i \nabla_\nu \phi_j - V \right) = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left( \frac{1}{2\Omega^2} \delta_{ij} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \phi_i \hat{\nabla}_\nu \phi_j - \hat{V} \right)$$

であることが容易に確かめられる. ここで,  $\hat{V} \equiv \frac{V}{\Omega^4}$  とした. したがって,

$$\begin{aligned} &\int d^4x \sqrt{-g} \left( -f(\phi_i) R + \frac{1}{2} \delta_{ij} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi_i \nabla_\nu \phi_j - V \right) \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left( -\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{pl}}^2}{\Omega^2} \hat{\nabla}_\mu \Omega \hat{\nabla}^\mu \Omega + \frac{1}{2\Omega^2} \delta_{ij} \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \phi_i \hat{\nabla}_\nu \phi_j - \hat{V} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

が得られる. 今, (E.11) より,  $\Omega^2 = \frac{2f}{M_{\text{pl}}^2}$  であり,  $f = f(\phi_1, \dots, \phi_N)$  であるから,

$$\hat{\nabla}_\mu \Omega = \left( \hat{\nabla}_\mu \phi_i \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \phi_i} \quad (\text{E.14})$$

のように変形すると, アインシュタインフレームでの作用は最終的に

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ -\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \hat{R} + \frac{1}{2\Omega^2} \left( \delta_{ij} + 6M_{\text{pl}}^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \phi_i} \frac{\partial \Omega}{\partial \phi_j} \right) \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \phi_i \hat{\nabla}_\nu \phi_j - \hat{V} \right]$$

となることがわかる.



## E.2 ユニタリティーの破れ

ここでは 5.3 節で議論したように、二つのスカラー場が重力と以下のように結合した場合について取り扱う。

$$f(\phi_1, \phi_2) = \frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \left( 1 + \frac{\xi_i \phi_i^2}{M_{\text{pl}}^2} \right). \quad (\text{E.15})$$

この時、

$$\Omega^2 = 1 + \sum_{i=1}^2 \frac{\xi_i \phi_i^2}{M_{\text{pl}}^2} \quad (\text{E.16})$$

より、アインシュタインフレームにおける作用は

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[ -\frac{M_{\text{pl}}^2}{2} \hat{R} + \frac{1}{2\Omega^4} \sum_{i=1}^2 \left( \Omega^2 + \frac{6\xi_i^2 \phi_i^2}{M_{\text{pl}}^2} \right) \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \phi_i \hat{\nabla}_\nu \phi_i + \frac{6\xi_2 \xi_1}{M_{\text{pl}}^2 \Omega^4} \phi_2 \phi_1 \hat{g}^{\mu\nu} \hat{\nabla}_\mu \phi_2 \hat{\nabla}_\nu \phi_1 - \hat{V} \right] \quad (\text{E.17})$$

となる。ここで、第三項目はジョルダンフレームにおける重力との結合項に起因する項であり、この項によってスカラー場のツリーレベルの  $2 \rightarrow 2$  散乱のユニタリティーがあるスケールで破れる。この説ではそのスケールについて議論する。

$\phi_1 \phi_2 \leftrightarrow \phi_1 \phi_2$  散乱は、ツリーレベルでは第三項目の寄与のみであるから、その散乱振幅は  $\Omega \rightarrow 1$  として

$$\mathcal{M} = -\frac{24i\xi_1 \xi_2 E^2}{M_{\text{pl}}^2} \quad (\text{E.18})$$

となる。これはツリーレベルであるから、散乱振幅の部分波展開

$$\mathcal{M} = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) a_l \quad (\text{E.19})$$

の  $l=0$  の場合に対応し、

$$a_0 = \frac{3\xi_1 \xi_2 E^2}{8\pi M_{\text{pl}}^2} \quad (\text{E.20})$$

となる。したがって、ユニタリティー条件

$$|\text{Re}(a_1)| \leq \frac{1}{2} \quad (\text{E.21})$$

より、運動項において、ツリーレベルでユニタリティーを破るスケールは、アインシュタインフレームで

$$\Lambda_0 = \sqrt{\frac{4\pi}{3} \frac{M_{\text{pl}}^2}{\xi_1 \xi_2}} \quad (\text{E.22})$$

と見積もることができる。

## 参考文献

- [1] ATLAS, G. Aad *et al.*, Phys. Lett. **B716**, 1 (2012), arXiv:1207.7214.
- [2] CMS, S. Chatrchyan *et al.*, Phys. Lett. **B716**, 30 (2012), arXiv:1207.7235.
- [3] Super-Kamiokande, Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998), arXiv:hep-ex/9807003.
- [4] SNO, Q. R. Ahmad *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 011301 (2002), arXiv:nucl-ex/0204008.
- [5] KamLAND, K. Eguchi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003), arXiv:hep-ex/0212021.
- [6] K2K, M. H. Ahn *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 041801 (2003), arXiv:hep-ex/0212007.
- [7] T2K, K. Abe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **107**, 041801 (2011), arXiv:1106.2822.
- [8] Double Chooz, Y. Abe *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108**, 131801 (2012), arXiv:1112.6353.
- [9] RENO, J. K. Ahn *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108**, 191802 (2012), arXiv:1204.0626.
- [10] Daya Bay, F. P. An *et al.*, Phys. Rev. Lett. **108**, 171803 (2012), arXiv:1203.1669.
- [11] WMAP, D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003), arXiv:astro-ph/0302209.
- [12] SDSS, M. Tegmark *et al.*, Phys. Rev. **D69**, 103501 (2004), arXiv:astro-ph/0310723.
- [13] A. Riotto and M. Trodden, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **49**, 35 (1999), arXiv:hep-ph/9901362.
- [14] W. Bernreuther, Lect. Notes Phys. **591**, 237 (2002), arXiv:hep-ph/0205279, [,237(2002)].
- [15] M. Dine and A. Kusenko, Rev. Mod. Phys. **76**, 1 (2003), arXiv:hep-ph/0303065.
- [16] E. Ma, Phys. Rev. **D73**, 077301 (2006), arXiv:hep-ph/0601225.
- [17] E. Ma, Annals Fond. Broglie **31**, 285 (2006).
- [18] J. Kubo, E. Ma, and D. Suematsu, Phys. Lett. **B642**, 18 (2006), arXiv:hep-ph/0604114.
- [19] D. Suematsu, T. Toma, and T. Yoshida, Phys. Rev. **D79**, 093004 (2009), arXiv:0903.0287.
- [20] J. Kubo and D. Suematsu, Phys. Lett. **B643**, 336 (2006), arXiv:hep-ph/0610006.
- [21] D. Suematsu, Eur. Phys. J. **C56**, 379 (2008), arXiv:0706.2401.
- [22] D. Aristizabal Sierra, J. Kubo, D. Restrepo, D. Suematsu, and O. Zapata, Phys. Rev. **D79**, 013011 (2009), arXiv:0808.3340.
- [23] H. Fukuoka, J. Kubo, and D. Suematsu, Phys. Lett. **B678**, 401 (2009),

arXiv:0905.2847.

- [24] D. Suematsu and T. Toma, Nucl. Phys. **B847**, 567 (2011), arXiv:1011.2839.
- [25] H. Fukuoka, D. Suematsu, and T. Toma, JCAP **1107**, 001 (2011), arXiv:1012.4007.
- [26] D. Suematsu, Eur. Phys. J. **C72**, 1951 (2012), arXiv:1103.0857.
- [27] S. Kashiwase and D. Suematsu, Phys. Rev. **D86**, 053001 (2012), arXiv:1207.2594.
- [28] S. Kashiwase and D. Suematsu, Eur. Phys. J. **C73**, 2484 (2013), arXiv:1301.2087.
- [29] R. H. Budhi, S. Kashiwase, and D. Suematsu, Phys. Rev. **D90**, 113013 (2014), arXiv:1409.6889.
- [30] S. Kashiwase and D. Suematsu, Phys. Lett. **B749**, 603 (2015), arXiv:1507.06782.
- [31] R. H. S. Budhi, S. Kashiwase, and D. Suematsu, (2015), arXiv:1509.05841.
- [32] S. Kashiwase and D. Suematsu, (2015), arXiv:1512.07961.
- [33] D. Suematsu, T. Toma, and T. Yoshida, Phys. Rev. **D82**, 013012 (2010), arXiv:1002.3225.
- [34] L. Lopez Honorez, E. Nezri, J. F. Oliver, and M. H. G. Tytgat, JCAP **0702**, 028 (2007), arXiv:hep-ph/0612275.
- [35] T. Hambye, F. S. Ling, L. Lopez Honorez, and J. Rocher, JHEP **07**, 090 (2009), arXiv:0903.4010, [Erratum: JHEP05,066(2010)].
- [36] Planck, P. A. R. Ade *et al.*, Astron. Astrophys. **571**, A22 (2014), arXiv:1303.5082.
- [37] BICEP2, Planck, P. Ade *et al.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 101301 (2015), arXiv:1502.00612.
- [38] Planck, P. A. R. Ade *et al.*, (2015), arXiv:1502.01589.
- [39] Planck, P. A. R. Ade *et al.*, (2015), arXiv:1502.02114.
- [40] F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B659**, 703 (2008), arXiv:0710.3755.
- [41] F. L. Bezrukov, A. Magnin, and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B675**, 88 (2009), arXiv:0812.4950.
- [42] D. Suematsu, Phys. Rev. **D85**, 073008 (2012), arXiv:1202.0656.
- [43] R. N. Lerner and J. McDonald, Phys. Rev. **D80**, 123507 (2009), arXiv:0909.0520.
- [44] R. N. Lerner and J. McDonald, Phys. Rev. **D83**, 123522 (2011), arXiv:1104.2468.
- [45] J. L. F. Barbon and J. R. Espinosa, Phys. Rev. **D79**, 081302 (2009), arXiv:0903.0355.
- [46] C. P. Burgess, H. M. Lee, and M. Trott, JHEP **07**, 007 (2010), arXiv:1002.2730.
- [47] M. P. Hertzberg, JHEP **11**, 023 (2010), arXiv:1002.2995.
- [48] D. I. Kaiser, Phys. Rev. **D81**, 084044 (2010), arXiv:1003.1159.
- [49] Particle Data Group, K. A. Olive *et al.*, Chin. Phys. **C38**, 090001 (2014).
- [50] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973).
- [51] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley (1990).
- [52] 辻川信二, 現代宇宙論講義, サイエンス社 (2014).
- [53] K. A. Olive and E. D. Skillman, Astrophys. J. **617**, 29 (2004), arXiv:astro-ph/0405588.
- [54] B. E. Wood *et al.*, Astrophys. J. **609**, 838 (2004), arXiv:astro-ph/0403606.
- [55] F. Spite and M. Spite, Astron. Astrophys. **115**, 357 (1982).
- [56] P. Bonifacio *et al.*, Astron. Astrophys. **462**, 851 (2007), arXiv:astro-ph/0610245.

- 
- [57] A. Hosford, S. G. Ryan, A. E. G. Perez, J. E. Norris, and K. A. Olive, *Astron. Astrophys.* **493**, 601 (2009), arXiv:0811.2506.
- [58] W. Aoki *et al.*, *Astrophys. J.* **698**, 1803 (2009), arXiv:0904.1448.
- [59] L. Sbordone *et al.*, *Astron. Astrophys.* **522**, A26 (2010), arXiv:1003.4510.
- [60] E. Caffau *et al.*, *Nature* **477**, 67 (2011), arXiv:1203.2612.
- [61] Planck, P. A. R. Ade *et al.*, *Astron. Astrophys.* **571**, A16 (2014), arXiv:1303.5076.
- [62] Super-Kamiokande, Y. Ashie *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 101801 (2004), arXiv:hep-ex/0404034.
- [63] Super-Kamiokande, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 241801 (2011), arXiv:1109.1621.
- [64] GALLEX, P. Anselmann *et al.*, *Phys. Lett.* **B285**, 376 (1992).
- [65] Kamiokande, Y. Fukuda *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1683 (1996).
- [66] B. T. Cleveland *et al.*, *Astrophys. J.* **496**, 505 (1998).
- [67] GALLEX, W. Hampel *et al.*, *Phys. Lett.* **B447**, 127 (1999).
- [68] SNO, Q. R. Ahmad *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 071301 (2001), arXiv:nucl-ex/0106015.
- [69] Super-Kamiokande, S. Fukuda *et al.*, *Phys. Lett.* **B539**, 179 (2002), arXiv:hep-ex/0205075.
- [70] GNO, M. Altmann *et al.*, *Phys. Lett.* **B616**, 174 (2005), arXiv:hep-ex/0504037.
- [71] SAGE, J. N. Abdurashitov *et al.*, *Phys. Rev.* **C80**, 015807 (2009), arXiv:0901.2200.
- [72] KamLAND, T. Araki *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801 (2005), arXiv:hep-ex/0406035.
- [73] K2K, M. H. Ahn *et al.*, *Phys. Rev.* **D74**, 072003 (2006), arXiv:hep-ex/0606032.
- [74] MINOS, D. G. Michael *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 191801 (2006), arXiv:hep-ex/0607088.
- [75] MINOS, P. Adamson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 131802 (2008), arXiv:0806.2237.
- [76] MINOS, P. Adamson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 181801 (2011), arXiv:1103.0340.
- [77] T2K, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev.* **D85**, 031103 (2012), arXiv:1201.1386.
- [78] T2K, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 211803 (2013), arXiv:1308.0465.
- [79] T2K, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev.* **D91**, 072010 (2015), arXiv:1502.01550.
- [80] T2K, K. Abe *et al.*, (2015), arXiv:1512.02495.
- [81] MINOS, P. Adamson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 191801 (2012), arXiv:1202.2772.
- [82] T2K, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev.* **D88**, 032002 (2013), arXiv:1304.0841.
- [83] T2K, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 061802 (2014), arXiv:1311.4750.
- [84] MINOS, P. Adamson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 181802 (2011), arXiv:1108.0015.
- [85] MINOS, P. Adamson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 171801 (2013), arXiv:1301.4581.
- [86] Double Chooz, Y. Abe *et al.*, *Phys. Rev.* **D86**, 052008 (2012), arXiv:1207.6632.
- [87] Super-Kamiokande, K. Abe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 181802 (2013), arXiv:1206.0328.
- [88] OPERA, N. Agafonova *et al.*, *Phys. Rev.* **D89**, 051102 (2014), arXiv:1401.2079.

- [89] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D22**, 2227 (1980).
- [90] A. Zee, Phys. Lett. **B93**, 389 (1980), [Erratum: Phys. Lett.B95,461(1980)].
- [91] A. Zee, Nucl. Phys. **B264**, 99 (1986).
- [92] K. S. Babu, Phys. Lett. **B203**, 132 (1988).
- [93] R. Foot, H. Lew, X. G. He, and G. C. Joshi, Z. Phys. **C44**, 441 (1989).
- [94] L. M. Krauss, S. Nasri, and M. Trodden, Phys. Rev. **D67**, 085002 (2003), arXiv:hep-ph/0210389.
- [95] M. Aoki, S. Kanemura, and O. Seto, Phys. Rev. **D80**, 033007 (2009), arXiv:0904.3829.
- [96] S. Kashiwase, H. Okada, Y. Orikasa, and T. Toma, (2015), arXiv:1505.04665.
- [97] D. V. Forero, M. Tortola, and J. W. F. Valle, Phys. Rev. **D90**, 093006 (2014), arXiv:1405.7540.
- [98] P. Minkowski, Phys. Lett. **B67**, 421 (1977).
- [99] T. Yanagida, Conf. Proc. **C7902131**, 95 (1979), [Conf. Proc.C7902131,95(1979)].
- [100] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, Conf. Proc. **C790927**, 315 (1979), arXiv:1306.4669.
- [101] AMoRE, V. Alenkov *et al.*, (2015), arXiv:1512.05957.
- [102] CUORE, K. Alfonso *et al.*, Phys. Rev. Lett. **115**, 102502 (2015), arXiv:1504.02454.
- [103] EXO-200, M. Auger *et al.*, Phys. Rev. Lett. **109**, 032505 (2012), arXiv:1205.5608.
- [104] M. Agostini *et al.*, Physics Procedia **61**, 828 (2015).
- [105] KamLAND-Zen, A. Gando *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 062502 (2013), arXiv:1211.3863.
- [106] A. Faessler, V. Rodin, and F. Simkovic, J. Phys. **G39**, 124006 (2012), arXiv:1206.0464.
- [107] F. Zwicky, Helvetica Physica Acta **6**, 110 (1933).
- [108] D. H. Rogstad and G. S. Shostak, Astrophysical Journal **176**, 315 (1972).
- [109] M. S. Roberts and A. H. Rots, Astronomy and Astrophysics **26**, 483 (1973).
- [110] V. C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. J. Ford, Astrophysical Journal **225**, L107 (1978).
- [111] M. Milgrom, Astrophys. J. **270**, 365 (1983).
- [112] R. Massey *et al.*, Nature **445**, 286 (2007), arXiv:astro-ph/0701594.
- [113] M. Markevitch *et al.*, Astrophys. J. **606**, 819 (2004), arXiv:astro-ph/0309303.
- [114] D. Clowe, A. Gonzalez, and M. Markevitch, Astrophys. J. **604**, 596 (2004), arXiv:astro-ph/0312273.
- [115] W. Hu and S. Dodelson, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **40**, 171 (2002), arXiv:astro-ph/0110414.
- [116] L. Roszkowski, Pramana **62**, 389 (2004), arXiv:hep-ph/0404052.
- [117] R. D. Peccei and H. R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).
- [118] T. Asaka and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B620**, 17 (2005), arXiv:hep-ph/0505013.
- [119] T. Asaka, S. Blanchet, and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. **B631**, 151 (2005), arXiv:hep-ph/0503065.

- 
- [120] R. Catena and P. Ullio, *JCAP* **1008**, 004 (2010), arXiv:0907.0018.
- [121] XENON100, E. Aprile *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 181301 (2012), arXiv:1207.5988.
- [122] SuperCDMS, R. Agnese *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 241302 (2014), arXiv:1402.7137.
- [123] SuperCDMS, R. Agnese *et al.*, Submitted to: *Phys. Rev. Lett.* (2015), arXiv:1509.02448.
- [124] DarkSide, P. Agnes *et al.*, (2015), arXiv:1510.00702.
- [125] PandaX, X. Xiao *et al.*, *Phys. Rev.* **D92**, 052004 (2015), arXiv:1505.00771.
- [126] LUX, D. S. Akerib *et al.*, (2015), arXiv:1512.03506.
- [127] DAMA, LIBRA, R. Bernabei *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C67**, 39 (2010), arXiv:1002.1028.
- [128] CoGeNT, C. E. Aalseth *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 131301 (2011), arXiv:1002.4703.
- [129] AMS, M. Aguilar *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 141102 (2013).
- [130] PAMELA, O. Adriani *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 081102 (2013), arXiv:1308.0133.
- [131] Fermi-LAT, A. A. Abdo *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 181101 (2009), arXiv:0905.0025.
- [132] PAMELA, O. Adriani *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 121101 (2010), arXiv:1007.0821.
- [133] M. Cirelli, M. Kadastik, M. Raidal, and A. Strumia, *Nucl. Phys.* **B813**, 1 (2009), arXiv:0809.2409, [Addendum: *Nucl. Phys.*B873,530(2013)].
- [134] HESS, F. Aharonian *et al.*, *Astrophys. J.* **636**, 777 (2006), arXiv:astro-ph/0510397.
- [135] Fermi-LAT, M. Ajello *et al.*, (2015), arXiv:1511.02938.
- [136] HESS, F. Aharonian and F. Aharonian, *Astron. Astrophys.* **503**, 817 (2009), arXiv:0906.1247.
- [137] HESS, F. Acero, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **402**, 1877 (2010), arXiv:0911.1912.
- [138] M. Su, T. R. Slatyer, and D. P. Finkbeiner, *Astrophys. J.* **724**, 1044 (2010), arXiv:1005.5480.
- [139] Super-Kamiokande, K. Choi *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 141301 (2015), arXiv:1503.04858.
- [140] Super-Kamiokande, S. Desai *et al.*, *Phys. Rev.* **D70**, 083523 (2004), arXiv:hep-ex/0404025, [Erratum: *Phys. Rev.*D70,109901(2004)].
- [141] IceCube, M. G. Aartsen *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 131302 (2013), arXiv:1212.4097.
- [142] K. Griest and D. Seckel, *Phys. Rev.* **D43**, 3191 (1991).
- [143] A. Sakharov, *Pizma ZhETF* **5**, 32 (1967).
- [144] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [145] J. Bell and J. R., *Nuovo Cimento* **51**, 47 (1969).
- [146] G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976).
- [147] G. 't Hooft, *Phys. Rev.* **D14**, 3432 (1976), [Erratum: *Phys. Rev.*D18,2199(1978)].
- [148] N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D28**, 2019 (1983).
- [149] F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *Phys. Rev.* **D30**, 2212 (1984).
- [150] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **B155**, 36 (1985).
- [151] J. Ambjorn and A. Krasnitz, *Phys. Lett.* **B362**, 97 (1995), arXiv:hep-ph/9508202.
- [152] M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett.* **B174**, 45 (1986).

- [153] R. Barbieri, L. J. Hall, and V. S. Rychkov, *Phys. Rev.* **D74**, 015007 (2006), arXiv:hep-ph/0603188.
- [154] N. G. Deshpande and E. Ma, *Phys. Rev.* **D18**, 2574 (1978).
- [155] S. Kanemura, T. Kubota, and E. Takasugi, *Phys. Lett.* **B313**, 155 (1993), arXiv:hep-ph/9303263.
- [156] I. F. Ginzburg and I. P. Ivanov, *Phys. Rev.* **D72**, 115010 (2005), arXiv:hep-ph/0508020.
- [157] E. Lundstrom, M. Gustafsson, and J. Edsjo, *Phys. Rev.* **D79**, 035013 (2009), arXiv:0810.3924.
- [158] L. Lopez Honorez and C. E. Yaguna, *JCAP* **1101**, 002 (2011), arXiv:1011.1411.
- [159] A. Goudelis, B. Herrmann, and O. Stl, *JHEP* **09**, 106 (2013), arXiv:1303.3010.
- [160] A. Arhrib, Y.-L. S. Tsai, Q. Yuan, and T.-C. Yuan, *JCAP* **1406**, 030 (2014), arXiv:1310.0358.
- [161] T. Abe, R. Kitano, and R. Sato, *Phys. Rev.* **D91**, 095004 (2015), arXiv:1411.1335.
- [162] G. Belanger *et al.*, *Phys. Rev.* **D91**, 115011 (2015), arXiv:1503.07367.
- [163] D. Tucker-Smith and N. Weiner, *Phys. Rev.* **D72**, 063509 (2005), arXiv:hep-ph/0402065.
- [164] S. Chang, G. D. Kribs, D. Tucker-Smith, and N. Weiner, *Phys. Rev.* **D79**, 043513 (2009), arXiv:0807.2250.
- [165] Y. Cui, D. E. Morrissey, D. Poland, and L. Randall, *JHEP* **05**, 076 (2009), arXiv:0901.0557.
- [166] C. Arina, F.-S. Ling, and M. H. G. Tytgat, *JCAP* **0910**, 018 (2009), arXiv:0907.0430.
- [167] D. Tucker-Smith and N. Weiner, *Phys. Rev.* **D64**, 043502 (2001), arXiv:hep-ph/0101138.
- [168] M. C. Smith *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **379**, 755 (2007), arXiv:astro-ph/0611671.
- [169] MEG, J. Adam *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 201801 (2013), arXiv:1303.0754.
- [170] BaBar, B. Aubert *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 021802 (2010), arXiv:0908.2381.
- [171] A. Pilaftsis, *Phys. Rev.* **D56**, 5431 (1997), arXiv:hep-ph/9707235.
- [172] A. Pilaftsis and T. E. J. Underwood, *Nucl. Phys.* **B692**, 303 (2004), arXiv:hep-ph/0309342.
- [173] S. Davidson and A. Ibarra, *Phys. Lett.* **B535**, 25 (2002), arXiv:hep-ph/0202239.
- [174] A. Pilaftsis and T. E. J. Underwood, *Phys. Rev.* **D72**, 113001 (2005), arXiv:hep-ph/0506107.
- [175] B. L. Spokoiny, *Phys. Lett.* **B147**, 39 (1984).
- [176] D. S. Salopek, J. R. Bond, and J. M. Bardeen, *Phys. Rev.* **D40**, 1753 (1989).
- [177] S. Kanemura, T. Matsui, and T. Nabeshima, *Phys. Lett.* **B723**, 126 (2013), arXiv:1211.4448.
- [178] R. H. S. Budhi, S. Kashiwase, and D. Suematsu, *JCAP* **1509**, 039 (2015),

---

arXiv:1505.05955.

[179] R. N. Lerner and J. McDonald, *JCAP* **1211**, 019 (2012), arXiv:1112.0954.

[180] V. F. Mukhanov, *Sov. Phys. JETP* **67**, 1297 (1988), [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.*94N7,1(1988)].

[181] T. M. P. Tait, *TASI Lectures on Resonances* (2009).