

流動体を介して衝撃的作用を受ける
構造物の動的応答解析手法に関する研究

2013 年 9 月

渡辺 高志

博 士 論 文

流動体を介して衝撃的作用を受ける
構造物の動的応答解析手法に関する研究

金沢大学大学院自然科学研究科

環境科学専攻 環境創成講座

学 籍 番 号 1023142423

氏 名 渡辺 高志

主任指導教員名 榊谷 浩

目 次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景と目的	1
1.2	流動体解析手法	2
1.2.1	有限差分法	2
1.2.2	有限体積法	2
1.2.3	CIP 法	3
1.2.4	有限要素法	4
1.2.5	個別要素法	4
1.2.6	粒子法	5
1.3	既往の流動体・構造間の連成手法の概要と課題	5
1.3.1	流体と構造の境界面の取り扱い	6
1.3.2	一体型解法と分離型解法	7
1.4	本論文の構成	7
	【参考文献】	9
第 2 章	個別要素法の解析理論	11
2.1	個別要素法の概要	11
2.1.1	個別要素の運動方程式	11
2.1.2	全体座標系と局所座標系の成分変換	14
2.1.3	振り回転を考慮しない場合の簡略計算手法	15
2.1.4	陽的差分による運動方程式の数値積分	16
2.2	壁境界の三角形壁面要素による計算	17
2.2.1	三角形壁境界と粒子の接触判定	17
2.2.2	壁面要素と粒子間の作用力	19
2.2.3	壁面要素を用いた個別要素法の計算例	20
2.3	粒子集合による剛体計算	21
2.3.1	剛体の質量と慣性テンソル	22
2.3.2	剛体運動の計算	23
2.3.3	剛体モデルの姿勢と回転行列の更新	23
2.4	多面体ブロックの剛体計算手法	24
2.4.1	多面体ブロックの質量と慣性テンソルの計算	25
2.4.2	多面体ブロックの剛体運動	26
2.4.3	多面体ブロックの接触判定	26
2.5	2 章のまとめ	27

【参考文献】	28
第3章 個別要素法による敷砂の衝撃応答解析	30
3.1 実物大サンドクッションの解析	30
3.1.1 実規模土槽への落石落下実験の概要	30
3.1.2 実規模実験解析の概要	32
3.1.3 再現解析の解析結果	35
3.1.4 まとめ	41
3.2 粒子径分布を考慮した敷砂の衝撃応答解析	41
3.2.1 重錘落下実験の概要	42
3.2.2 重錘落下実験解析の概要	45
3.2.3 再現解析の解析結果	50
3.2.4 まとめ	55
3.3 砂の摩擦抵抗に関する既往研究と考察	55
3.3.1 要素形状の再現性を向上した既往の研究	56
3.3.2 回転抵抗を導入した既往の研究	56
3.3.3 まとめ	57
3.4 3章のまとめ	57
【参考文献】	59
第4章 粒子法の解析理論	61
4.1 SPH法の概要	61
4.1.1 カーネル近似	61
4.1.2 空間微分表現	62
4.1.3 カーネル関数	64
4.2 連続体の支配方程式の離散化	66
4.2.1 圧縮性流体の解析	67
4.2.2 非圧縮性流体の解析	69
4.2.3 圧力のポアソン方程式の生成項（基本）	70
4.2.4 圧力のポアソン方程式の生成項（発展）	71
4.2.5 圧力のポアソン方程式の求解	73
4.3 SPH法の境界条件処理	75
4.3.1 自由表面境界	75
4.3.2 流体内の負圧発生領域の処理	76
4.3.3 壁面のノイマン境界条件	76
4.3.4 壁面の粘着条件	77
4.3.5 粘性項の陰解法による計算	79
4.4 SPH法の数値解析に関するその他の事項	80

4.4.1	時間増分の設定.....	80
4.4.2	人工粘性の導入.....	81
4.4.3	表面張力計算	82
4.4.4	人工斥力モデル.....	84
4.4.5	DEM 連成手法.....	85
4.5	三角形パッチによる壁境界の SPH 法への導入	85
4.5.1	壁境界のカーネル関数.....	86
4.5.2	最近接距離計算.....	87
4.5.3	壁境界の計算方法	88
4.5.4	曲率計算と体積補正	90
4.5.5	壁面表面に働く作用と壁面移動量の計算	93
4.6	4 章のまとめ	93
	【参考文献】	95
第 5 章	SPH 法による流体の動的応答解析	98
5.1	はじめに.....	98
5.1.1	スロッシング問題.....	98
5.1.2	流体衝突による波力	99
5.2	矩形タンクのスロッシング解析	99
5.2.1	スロッシング実験水槽のモデル化	99
5.2.2	スロッシング固有周期の確認解析	100
5.2.3	十勝沖地震条件のスロッシング解析.....	103
5.3	水柱崩壊問題における動水圧評価.....	107
5.3.1	水柱崩壊問題の実験水槽のモデル化.....	107
5.3.2	衝撃圧および液面高さの算出方法	108
5.3.3	水柱崩壊による衝撃応答の評価	109
5.4	大変形を考慮した壁境界モデルを用いた流動解析	116
5.4.1	円筒タンクの静水計算.....	116
5.4.2	高粘性流体のせん断シミュレーション	118
5.4.3	球形容器内の液体流動解析	121
5.5	5 章のまとめ	126
	【参考文献】	128
第 6 章	流体-構造連成解析	129
6.1	連成計算手法の概要.....	129
6.1.1	粒子型解法とメッシュ型解法の接続方法	130
6.1.2	連成解析に用いた動的 FEM コード(NOLA)の概要	132
6.1.3	MPI による双方向弱連成通信.....	133

6.1.4	通信用の荷重と変位の計算方法	134
6.2	円筒タンクの静水計算による動作検証	135
6.2.1	解析モデルと解析条件.....	135
6.2.2	四面体ソリッド要素の計算精度	137
6.2.3	連成解析による静水計算	138
6.2.4	まとめ	139
6.3	固定屋根式円筒タンクと貯蔵流体の相互応答	139
6.3.1	解析モデルと解析条件.....	140
6.3.2	流体・構造連成解析結果	141
6.3.3	まとめ	147
6.4	6章のまとめ	147
	【参考文献】	148
第7章	結論	150
付 録	154
A.1	効率の良い大域探索手法	154
A.1.1	古典的なバケットソート法	154
A.1.2	分布数え上げ処理による改良バケットソート法.....	156
A.1.3	リンクリスト法.....	157
A.2	粒子モデルの生成手法	158
A.2.1	境界面との交差回数を利用する手法.....	159
A.2.2	複数の四面体に分割して個別に距離計算を行う手法	160
A.2.3	ランダム配置の粒子配置作成法	162
謝 辞	165

第1章 序論

1.1 研究の背景と目的

土木構造物の設計では供用期間において想定される様々な荷重に耐え得るように設計する必要があり、一般には設計示方書で与えられる荷重条件に対して応力を照査する許容応力度設計が用いられている¹⁾。しかし、このような仕様規定型の構造設計は柔軟性に欠けるため、性能照査型の設計手法への移行が進められている。構造物の性能のみを規定し、要求性能を満足することを明示できれば、構造形式、材料、工法などに寄らない性能照査型の設計手法を用いることでより合理的な設計が可能となる。例えば、衝撃荷重を主たる設計荷重とする落石覆工などの防護構造物では、従来の許容応力度設計に基づく設計法では合理性と経済性に問題があり、性能照査型設計法の確立が希求されている。しかしながら、局所的に作用する大きな衝撃力の推定や、構造物の動的応答の予測は一般に困難であり、性能照査型設計法を確立する上での問題となっている。特に、防護構造物には緩衝機構が設けられることが多く²⁾、これらを介した衝撃力と構造物の動的応答の把握は極めて難しい問題となっている。

また、地震等の災害発生時には想定を上回る荷重を生じることがあり、構造物に甚大な被害を及ぼすことも多い。2011年に発生した東北地方太平洋沖地震では大津波が発生し、多くの防波堤は想定外の波力によって破壊し、押し寄せた津波により沿岸部に甚大な被害を生じたことは記憶に新しい³⁾。また、長周期地震動は広い範囲に渡って構造物を揺さぶり、タンクの貯蔵液体にスロッシング⁴⁾を生じさせた。石油タンクのような大型タンクのみならず、建物屋上や上水道施設の給水タンクに被害が生じることで⁵⁾、被災地において水が使用できなくなるライフライン上の問題を生じた。これらの地震等の災害によって生じる、津波やスロッシング、土石流などは流動体を介する複雑な現象であり、流動体と接触することによって構造物にかかる荷重の推定も困難な問題である。

土木構造物の合理的で且つ経済的な設計を実現するには、想定される荷重条件に対して性能を規定し性能照査型設計を用いる必要がある。荷重条件などの推定が困難な複雑な事象に対しては、原則的には実規模実験を用いた性能照査が好ましいが、すべての構造物に対して適用することは現実的ではない。そこで、数値解析手法を用いることが有効であるが、流動体と構造物の相互作用の計算手法はいまだ一般的ではなく、問題に応じて解析手法を検討する必要があると考えられる。

本研究では地震時に想定される落石やスロッシング、津波衝突などの問題に対して大変形・流動問題に適した解析手法を適用し、その有効性を確認するものである。流動体を介した複雑な問題に対する有効な解析手法を確立することで、個別の構造物に対する性能照査や限界耐力の把握を可能とし、設計に資する有効な技術的成果をあげることを目的とし

ている。

1.2 流動体解析手法

本研究における流動体とは、連続体である流体の中でも液体、または流動性を持つに至った離散体集合やそれらの混相流のことである。流体は連続体の支配方程式によってその挙動が記述でき、その微分方程式を直接解くことができるのであれば数値的な解析は不要である。しかし、現実の問題では方程式を立てることが出来ないか、または解くことができないことが一般的であり、今日までに様々な数値解析手法が用いられてきた。流体の運動は界面の大きな変化を生じるため、Euler 記述（空間表示）で離散化することが一般的であるが、Lagrange 記述（物質表示）による離散化も用いられており、特に粒子型解法による数値解析事例は汎用コードの普及により一般的になってきている。

本節では代表的な流動体の数値解析手法についてその概要をまとめる。なお、本研究では解析を適用する対象を非圧縮性が仮定できる液体と土槽に貯められた砂の流動問題に設定している。流体の解析手法としては粒子法の 1 つである SPH 法を適用し、砂層のような離散体集合に対しては個別要素法（DEM）を適用した。離散化の異なる粒子型解法の採用は、砂粒の集合体は外部的励起によって流動化するが、その性質は気体や液体とは大きく異なり、連続体の支配方程式をそのまま適用できないためである。粒径分布や粒子形状の影響が流れや散逸性に現れるような問題には、DEM のような離散体解析手法を採用する必要があると考えられる。

解析手法は本研究で対象とする流動体解析に適用される代表的なもののみを取り上げ、Euler 記述の計算手法から Lagrange 記述の計算手法、粒子型解法の順でその概略を述べる。

1.2.1 有限差分法

微分方程式の最も簡単な離散化は差分法（FDM）^{6,7)}によるものであり、計算機が発明されるよりはるか以前からある Euler 記述の計算手法である。18 世紀に Euler が考案したものであるが、本格的な適用は高速な計算機の登場した以降のことである⁷⁾。微分の定義は無限小の間隔でとった差分であることから、微分と差分の対応は非常に分かりやすく、空間および時間領域の離散化の最も基本的な手法である⁸⁾。FDM は計算手法が簡便であり、高階の微分項への適用や高次精度差分の適用が可能であるが、基本的に構造格子への適用に限られ複雑な境界面の取り扱いが出来ない。そのため、複雑流れへの適用が難しいことや、流体の保存原理におけるコントロールボリュームを導入していないため、特別な手続きを踏まなければ保存性を確保できない問題がある⁷⁾。

1.2.2 有限体積法

有限体積法（FVM）⁷⁾は Euler 記述の流体解析手法の代表的なものであり、有限個のコ

ントロールボリュームに対して積分型の保存方程式を適用する手法である。積分形で記述した保存方程式の変数をコントロールボリューム内の格子点に設定し、要素毎に積分を実行して釣り合い方程式を解く。コントロールボリュームはそれぞれ隣接しているため、各要素式の線形和は解析領域内側の界面の面積分が相殺することで全体として保存性が満たされる。このように FVM は、格子内に圧力などのスカラー変数を配置し、格子界面に流速などのベクトル変数を配置するスタガード格子を採用した手法である⁸⁾。面積分と体積分に適切な手法を用いることで非構造格子への適用も可能であり、複雑流れへの適用が可能である他、要素界面と格子点の物理量は補間により変換できるため境界条件の処理が容易である。FVM は流体解析手法の代表格であるが、高次精度差分の適用や移動境界処理、自由表面流れの計算に難がある。

流体の運動は移流拡散混合型の方程式で記述されるが、数値計算において移流方程式の 1 階微分項の取り扱い、数値安定性上の問題として知られている⁹⁾。1 階微分項は方向性があり非対称であるため、中心差分を適用するとしばしば数値発散を起こす。そのため、移流項に対して拡散項が小さい問題には風上差分が適用されている⁶⁾。

なお、Euler 記述の流体解析手法では気液や固液の界面を直接的に表現することはできない。そのため、自由表面流れなどの問題では格子の物理量から界面を評価する界面捕捉手法が用いられている。界面捕捉手法としては、界面関数を用いた VOF (Volume Of Fluid) 法¹⁰⁾ や Level set 法¹¹⁾ が用いられており、VOF 法は密度関数、Level set 法は符号付き距離関数を界面関数として使用する⁷⁾。このような格子内に界面を計算する陰的表現で複雑な液面や飛沫を再現するには高い格子分解能が必要であり、数値拡散を抑制する観点からは高精度な移流項計算手法が必要である。一方で、Lagrange 記述によって直接的に表面を定義する陽的表現手法ではこのような問題は生じないが、大変形によるメッシュの破綻や計算精度の低下が問題となる。

1.2.3 CIP 法

移流方程式を解く際に CIP (Cubic Interpolated Pseudo-particle) 法¹²⁾ では微分値もセットで移流させることで、数値拡散の影響を抑制し、高精度な差分計算を行う手法である。微分計算はスプライン関数に対して簡単に行うことができる。この考えは差分法における移流方程式の保存を満たせない問題の解決に利用可能であり、微分値ではなく積分値をセットとして扱うことで保存精度を向上する手法も開発されている。CIP 法による高精度移流項計算は FVM や後述の FEM にも応用されており、非構造格子への適用としては三角形や四面体要素へ CIP 法を適用する CIVA (Cubic Interpolation with Volume / Area coordinate) 法¹³⁾ が知られている。Euler 記述の流体解析手法では、上述のとおり界面捕捉に陰的表現を用いるため移流項の計算精度が重要であり、CIP 法の考えは広く利用されている。

1.2.4 有限要素法

FDM や FVM は Euler 記述による離散化手法であり、移動する界面の取り扱いに難があるが、Lagrange 記述の解析手法ではこの問題の解消が可能である。構造解析で一般的である有限要素法 (FEM) ¹⁴⁾ は流体解析においても用いられている ^{6),7),15)}。FEM は有限個の要素によって領域を分割し、FVM と同様に積分形の保存方程式を解く。要素内の値を構成節点値から補間する内挿関数を設定し、内挿関数の微分を用いることで保存方程式を離散化する。この離散化は一般に Galerkin 法による弱形式が用いられており、部分積分の過程で自然境界条件が現れることも含め、流体解析と構造解析に共通である。

Galerkin 法による離散化は中心差分と等価になるため、移流項の不安定性の問題があり、FVM などと同様に風上差分の考えが導入されている ⁹⁾。流体解析における FEM では風下の重みを風上に移すことによって安定化を図っており、これは人工拡散を加えることと等価な処理となっている。人工拡散が数値解に与える影響を抑制し、安定な計算を行うために様々な手法が開発されている ¹⁵⁾。

Lagrange 記述のメッシュ型解法である FEM の問題点は、流動によって要素に大変形が生じた際に積分精度が低下することや、メッシュ自体が破綻して計算不能に陥る問題があり、計算途中でリメッシング処理を施す必要がある。リメッシング処理は、一般に並列化効率が低く、大規模解析において長い処理時間を要し、またリメッシング時の物理量継承に際して関数近似と補間によって数値拡散が混入する問題がある。このため、流動解析では Euler 記述による FEM 計算も一般的であり、VOF 法や Level set 法による界面捕捉手法が用いられている。なお、Euler 記述による FEM では移流項が現れるため、CIP 法による移流項計算の高精度化が行われている。

1.2.5 個別要素法

粉体のように流動性を持つ離散体集合を扱う代表的な解析手法として個別要素法 (DEM) ^{16),17)} がある。この手法は個々の剛体要素の多体間の作用力伝達を解く手法であるが、剛体間の直接的な接触をばねとダッシュポットを介して僅かな貫入を許容するソフトな接触モデルを導入して計算する。個々の要素の剛体回転を考慮可能であり、また要素間の摩擦力を評価できるため、粉体の流動体の計算に向いている。また、一般に運動方程式の時間差分を陽解法で計算するため、大規模問題においても計算時間の増大が線形であることが特徴である。任意形状のブロックを要素とすることで落石などの要素形状の影響が大きい問題にも適用されているが、流動体を取り扱う問題では接触判定が簡便である球形要素が一般に用いられている。

なお、剛体回転を考慮可能な離散体の動的接触問題を扱う手法にはこの他に不連続変形法 (DDA) ¹⁸⁾ が知られている。この手法は DEM と同様にばねとダッシュポットによる計算を行うが、剛体重心点で応力ひずみテンソルを定義し、エネルギー最小化原理に基づく連立方程式を立てることで接触状態を反復計算する。連立方程式を繰り返し解く必要がある

ため DEM と比較して計算負荷が大きく、また接触状態とペナルティばねの剛性によっては反復計算が収束しない問題がある。そのため流動化した離散体集合の解析のように接触点数が極めて多い問題にはあまり用いられず、落石¹⁹⁾や岩盤崩落²⁰⁾などの離散体接触問題に適用されている。

1.2.6 粒子法

流れの解析に粒子を用いる試みは 1960 年代から行われており²¹⁾、格子と粒子の両方を取り扱う PIC(Particle In Cell)法が知られている。PIC 法の考えは構造解析分野にも導入されており、斜面の流動解析などへ MPM(Material Point Method)²²⁾が適用されている²³⁾。

このような手法と異なり、粒子のみで計算可能な方法として 1977 年に Lucy および Gingold と Monaghan によって SPH(Smoothed Particle Hydrodynamics)法^{24),25)}が開発された。この手法は滑らかな内挿関数を用いることで、格子を必要としない強形式のメッシュフリーな離散化を可能とした。流動により周囲の粒子が変わる度に内挿関数の影響半径内の粒子の組み合わせを更新するため、ステップ毎にリメッシングを行う手法と考えることができ、自由表面を持つ大変形・流動問題に適している。同様に格子の幾何接続関係に寄らない内挿関数の導入は今日のメッシュフリー解析手法において一般的である²⁶⁾。

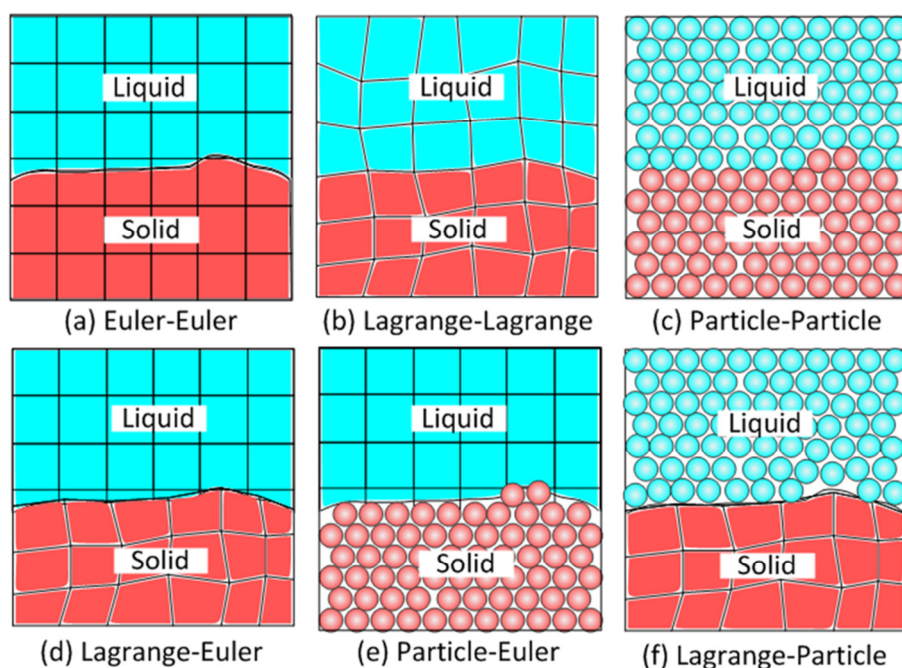
また、1990 年代に越塚ら²¹⁾は新しい粒子法として MPS(Moving Particle Semi-implicit)法を提案した。MPS 法は従来の粒子法とは異なり、微分方程式を差分近似によって計算する手法である。メッシュフリー化には重み関数を用いた重み付き平均を使用しており、重み付き平均を行う差分法と考えることができる。MPS 法は非圧縮性流体解析において、連続式を満たすために圧力のポアソン方程式を解いて粒子速度を修正する半陰解法を導入しており、この考えは後に SPH 法にも導入されている²⁷⁾。

1.3 既往の流動体-構造間の連成手法の概要と課題

本節では既往の研究にみられる代表的な流体-構造連成解析手法についてその概要を述べる。流体と構造の連成解析ではその境界面において、速度の釣り合い条件と表面力の釣り合い条件を満たす必要がある。従って、流体領域と固体領域で離散化手法が異なる場合には工夫が必要であり、また異なるのが一般的である。前節で述べたように、流動体の解析手法には様々なものがあり、流体-構造連成解析における流体解析手法と構造解析手法の組み合わせも実に多様である。運動の記述法にのみ着目して流体と構造解析に用いられる手法の組み合わせ例を図-1.1 に分類した。粒子型解法を Lagrange 記述とは独立した Particle 記述と考えると、3 種類の運動記述法の組み合わせは 9 通りあり、この他に粒子型解法以外のメッシュフリー法を含めると更に多様な組み合わせが考えられる。

流体-構造間の相互作用 (Fluid Structure Interaction : FSI) は、薄板タンクと貯蔵流体のスロッシング問題など構造躯体の変形が比較的大きい解析において考慮が必要であり、一般

に流体領域に境界面追跡型手法の 1 つである ALE 法²⁸⁾を適用し、構造解析には通常の FEM を用いる連成解析が行われている¹⁵⁾。本研究で開発を行った連成解析手法については 6 章で述べ、本節では既往の研究にみられる代表的な連成手法における基本的な事項として、流体と構造の境界面の取り扱いと、連成プログラムの一般的な構成手法に関する概要を述べる。



図－1.1 運動の記述法に着目した流動体と固体の連成解析法の分類

1.3.1 流体と構造の境界面の取り扱い

流体解析と構造解析でそれぞれ異なる離散化を行う場合は境界面の扱いが重要となる。境界面での適合条件を満たす直接的な方法は、流体領域と固体領域で界面形状が適合する格子を用いることである。代表的な方法として、流体領域に境界適合格子を用い、固体領域に非構造格子を用いて界面の流速と移動速度を適合させることができる Arbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法²⁸⁾がある。ALE 法は任意の速度で任意の変形をする ALE 座標系を用いて支配方程式を離散化する手法であり、ALE 座標系（参照座標系）は Lagrange 座標系（物質座標系）と Euler 座標系（空間座標系）から独立して設定できる。流体解析において Navier-Stokes 方程式を ALE 座標系による離散化を行うことで、境界部の構造の変形速度を流体領域に反映することができる。しかし、境界面追跡型の手法であるので構造の変形速度が大きい場合、流体メッシュが破綻する可能性があり、解析の継続が不能となる問題がある。

一方で、流体構造の境界面を VOF や Level set 法にみられる境界面捕捉型の手法を連成解析の境界面とすることでメッシュの破綻を避ける手法があるが、界面の近似精度が落ちる

ため収束性や安定性の面で問題がある。界面を追跡する手法と同等の精度を得るには非常に高い計算分解法が必要となるが、固定格子を用いることによって得られるロバスト性は自由表面を有する流動体問題にとって重要である。

1.3.2 一体型解法と分離型解法

流体領域と固体領域の離散化手法が異なる場合、如何にして双方向の連成を達成するかは重要である。最も一般的な連成解析手法は1つの離散化手法に基づき、1つのプログラムで計算するものであり、対象問題の支配方程式はすべて一連の方程式に組み込まれる。しかし前述のとおり、流体と固体の離散化手法の組み合わせは多岐に渡り、複数のプログラムを組み合わせた連成解析もまた一般的なものである。本項では連成手法の分類について概略を述べる。

一体型解法は強連成解法であり、連成解析専用のプログラムによって流体・構造連成系の全体の釣り合い方程式を解くことで解析を行う。高い安定性と収束性を示すが、釣り合い方程式の規模が大きくなること、方程式系の代数的な性質の悪さから、連立方程式の求解に反復ソルバーを適用しにくい問題があり、大規模解析への適用性には難がある²⁹⁾。また、簡便な定式とするために一般にポテンシャル流体のモデルが組まれており、粘性流体や大揺動の問題を扱うことについては計算精度上の問題がある。

分離型解法は、流体解析部分と構造解析部分を切り離して計算する解法であり、それぞれに専用コードを用いることができる。時間増分が細かい場合や相互作用が小さい場合には、境界条件に関係なく時間進行を行う弱連成が採用され、流体側と構造側で通信する際の時刻断面が異なるため時差解法と呼ばれる¹⁵⁾。6章でも述べるが、時差解法には相互に並行して計算を進める並列時差解法と、片方の計算が終了した後に情報を受信して計算を開始する逐次時差解法があり、境界部の変形が大きい問題においては逐次時差解法の方が安定している。また、相互作用が大きい問題に対しては、安定性の問題から境界部で釣り合いを満たすまで反復計算を行う手法が取られる。これは基本的には時差式解法であるが、強連成としての連成効果を漸近的に満たすことができ、分離型反復解法と区別される。

分離型解法は一体型解法に比べ連成計算が容易であるが、境界面の連成を強連成とするか弱連成とするかは解法により異なり、対象とする問題に応じて適切な手法を選択する必要がある。

1.4 本論文の構成

本研究の構成は、図-1.2に示すように本章も含めて7つの章からなり、ここで各章の内容を以下にまとめて示す。

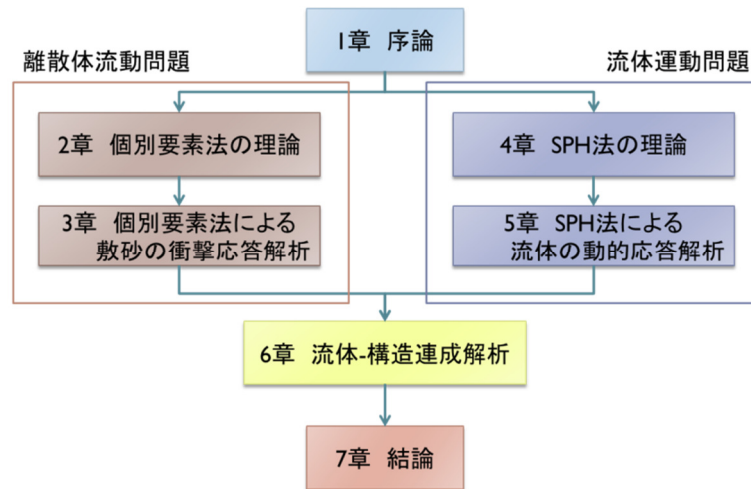


図-1.2 本論文の構成

第 1 章では，研究の背景と既往の解析手法の概要を示した．流動体を構造格子もしくは非構造格子で離散化する手法では複雑な自由表面の再現に限界があり，また流動値と構造の連成解析においても同様の問題がある．本研究では粒子型の解法を用いることでこの問題に対応し，従来のメッシュ型解法との連成解析を行った．

第 2 章では，本研究において砂のような流動性を持つ離散体集合に適用を行った個別要素法についてその基礎理論と応用手法について詳細を述べる．本研究では粒状体に用いる球形要素，滑らかな壁境界のモデル化，任意形状の剛体を計算に導入する手法を論じた．

第 3 章では，個別要素法の応用としてサンドクッションの衝撃応答解析の事例を示す．サンドクッションは落石の衝突貫入によってその表面形状を大きく変形し，内部に流動を生じる複雑な現象であり，個別要素法を適用することの有効性を示した．

第 4 章では，本研究において液体を対象とする流体解析に適用した SPH 法の解析理論について詳細を述べる．SPH 法において MPS 法にみられる射影法による圧力計算を行う方法や，メッシュ型解法との連成計算を可能とする変形を考慮可能な境界壁面の計算手法について論じた．

第 5 章では，SPH 法をスロッシング問題や水柱崩壊問題に適用し，その精度を検証し結果を示した．また，変形を考慮した壁境界モデルの計算精度の検証を行い，壁境界が大変形する条件下で安定した解析が可能であることを示した．

第 6 章では，流体を SPH 法で計算し，構造を FEM で計算し，動的な相互応答を弱連成で計算する手法を示した．本手法を固定屋根式の円筒タンクのスロッシング問題に適用し，本手法の有効性を示した．

第 7 章では，本研究で行った流動体と構造物の動的相互応答作用に関する一連の研究成果について総括を行い結論として示した．

【参考文献】

- 1) 土木学会：構造工学シリーズ 22 防災・安全対策技術者のための衝撃作用を受ける土木構造物の性能設計，2013
- 2) 日本道路協会：落石対策便覧，丸善，2000
- 3) 佐竹 健治，堀 宗朗：東日本大震災の科学，東京大学出版会，2012
- 4) 堀 郁夫，川端 鋭憲：地震による石油タンク火災の技術的考察と社会問題，社会技術研究論文集，Vol.2，pp.414-424，2004
- 5) 遠田 豊，曾根 龍太，小野 泰介，井田 剛史，平野 廣和：実機貯水槽を用いたスロッシング挙動の把握，防衛施設学会平成 24 年度年次研究発表会，2013
- 6) 保原 充，大宮司 久明：数値流体力学，東京大学出版会，1992
- 7) J.H.ファーツィガー，M.ペリッチ：コンピュータによる流体力学，丸善出版，2012
- 8) 越塚 誠一：数値流体力学，培風館，1997
- 9) 土木学会応用力学委員会計算力学小委員会：計算力学の常識，丸善，2008
- 10) C. W. Hirt, B. D. Nichols : Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries, Journal of Computational Physics, 39, pp.201-225, 1981
- 11) M. Sussman, P. Smereka, S. Osher : A Level Set Approach for Computing Solutions to Incompressible Two-Phase Flow, Journal of Computational Physics, 114, Issue 1, pp.146-159, 1994
- 12) 矢部 孝，内海 隆行，尾形 陽一：CIP 法，森北出版，2003
- 13) 田中 伸厚：数値流体力学のための高精度メッシュフリー手法の開発，日本機械学会論文 集 B 編，Vol.64 No.620，pp.1071-1078，1998
- 14) O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor : マトリックス有限要素法，科学技術出版，1996
- 15) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会：続・有限要素法による流れのシミュレーション，丸善出版，2012
- 16) P. A. Cundall, O. D. L. Strack : A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, 29, pp.47-65, 1979
- 17) 伯野 元彦：破壊のシミュレーション，森北出版，1997
- 18) 日本計算工学会 編：不連続変形法 (DDA)，丸善，2005
- 19) 馬 貴臣，松山 裕幸，西山 哲，大西 有三：落石シミュレーションのための解析手法の研究，土木学会論文集 C，Vol.63 No.3，pp.913-922，2007
- 20) 門間 敬一，千田 容嗣，馬 貴臣，進士 正人，大西 有三：岩盤崩壊メカニズムを評価するための不連続変形法の適用に関する研究，土木学会論文集，No.757/III-66，pp.45-55，2004
- 21) 越塚 誠一：粒子法，丸善，2005
- 22) D. Sulsky, Z. Chen, H. L. Schreyer : A particle method for history-dependent

- materials, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 118, Issue 1-2, pp.179-196, 1994
- 23) 阿部 慶太, J. Jörgen, 小長井 一男 : MPM を応用した高速長距離土砂流動の運動範囲予測のための数値解析手法, 土木学会論文集 C, Vol.63 No.1, pp.93-109, 2007
- 24) L. B. Lucy : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, The Astronomical Journal, 82, pp.1013-1024, 1977
- 25) R. A. Gingold, J. J. Monaghan : Smoothed Particle Hydrodynamics : Theory and Application to Non Spherical Stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 181, pp.375-389, 1977
- 26) 鈴木 克幸, 長嶋 利夫, 萩原 世也 : メッシュフリー解析法, 丸善, 2006
- 27) S. J. Cummins, M. Rudman : An SPH projection method, Journal of Computational Physics, 152, pp.584-607, 1999
- 28) C. W. Hirt, A. A. Amsden, J. L. Cook : An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds, Journal of Computational Physics, 14, Issue 3, pp.227-253, 1974
- 29) 石原 大輔, 吉村 忍, 矢川 元基 : 非圧縮性粘性流体-弾性体相互作用系の多段型強連成解法, 日本機械学会論文集 B 編, 68 巻 673 号, pp.2451-2459, 2002

第2章 個別要素法の解析理論

2.1 個別要素法の概要

個別要素法 (DEM) は Cundall らによって開発され、土粒子や岩盤などの不連続性をもつ問題に適用されてきた解析法であり、1970 年代以降、様々な不連続体解析に用いられてきた^{1),2)}。近年の計算機の性能向上や商用コードの整備により益々盛んに研究が行われているが、大規模計算における計算時間の問題は依然として解決していない。そのため、細かな粒子群を解析対象とする粉体工学の分野では、低粒子濃度の問題に対して粒子衝突を確率論的に扱う DSMC 法を適用するなど、効率化がなされている³⁾。本研究では砂礫のような離散粒状体の堆積層の動的応答を取り扱うため、個々の接触と運動を評価できる解析手法が必要であり、DEM による解析を行った。この手法は、剛体回転を含む流動運動を生じる問題に適している不連続体解析手法の中でも、陰的な釣り合い方程式を解く必要のない点から衝撃問題などの極めて進行速度の速い問題に適している。なお、不連続体解析手法として発展してきた DEM であるが、引っ張りに抵抗するばねを挿入することで連続体解析に適用する研究も行われており⁴⁾、一部の商用コードに同様の解析機能が組み込まれている。しかしながら、個別要素間の相互作用力をばねとダッシュポットによる作用力伝達系でモデル化するため、連続体の構成式を満たす運動を厳密に計算することはできず⁴⁾、連続体解析に関しては4章で解説する SPH 法などの適用事例^{5),6)}が多くなってきている。

本章では砂や岩石を対象とした不連続体解析手法としての DEM の計算手法について説明する。DEM は要素を個別の粒子や多面体ブロックとしてモデル化し、その運動を時間差分の陽的な時間発展によって計算を進めて行く手法である。本研究では個別の粒子を用いたモデルの他、粒子集合による剛体モデル、三角形パッチによる壁境界モデルおよび多面体ブロック剛体モデルを用いた数値解析を行った。以降に本研究における DEM の計算方法の概要を説明する。

2.1.1 個別要素の運動方程式

最も基本的な個別要素である粒子の並進と回転の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{k}\mathbf{u} = 0 \quad (2.1)$$

$$I\ddot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{c}r^2\dot{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{k}r^2\boldsymbol{\phi} = 0 \quad (2.2)$$

ここで m は粒子質量、 I は慣性モーメントであり、 \mathbf{u} と $\boldsymbol{\phi}$ はそれぞれ接触粒子間に定義される局所座標系における相対変位量と回転量である。局所座標系は接触する粒子 i と j の相対位置ベクトルを法線軸として定義される。回転の釣り合い式における r は粒子半径を意味しており、粒子回転によって生じるトルクの釣り合いを意味している。また、 \mathbf{c} と \mathbf{k} は個別要素間の接触面におけるパラメータであり、それぞれ接触面に挿入されるダッシュポットの減衰

係数とばね定数を意味しており，これらの接触面パラメータは接触物性間毎に定義され，それぞれ法線方向成分と接線方向成分および振り回転成分を持つ．ここで接触する粒子*i*と*j*間の局所座標系の直交軸の向きを大文字 **X,Y,Z** で示し，振り回転を **R** で表すことで個別要素法に用いられる Kelvin-Voigt モデル型の作用力伝達系を方向成分毎に図-2.1 に示す．

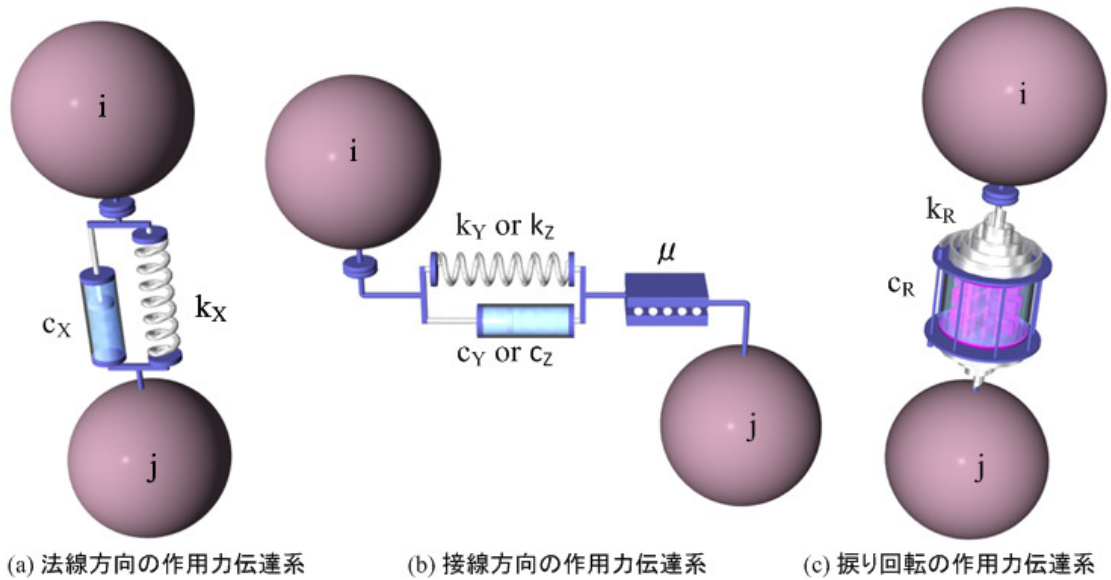


図-2.1 接触面における作用力伝達系 (Kelvin-Voigt モデル)

DEM の要素は剛体であるが，計算上は剛体間の貫入を許すソフトな接触モデルを採用しており，完全剛体の多体接触問題において生じる解の不確定性の問題は生じない．更に，DEM の作用力伝達系では摩擦スライダを設けており，摩擦係数 μ で与えられる限界耐力を超える力らに対しては摂動する摩擦法則の再現が可能である．このような利点から同様の接触モデルは様々な解析手法に用いられている．

個々の接触面における作用力伝達系に着目すると，作用力 \mathbf{F} と作用トルク \mathbf{T} は接触粒子間の相対変位増分 $\Delta \mathbf{u}$ および相対回転変位増分 $\Delta \boldsymbol{\phi}$ を用いて次式で示される．

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c} \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{k} r^2 \Delta \boldsymbol{\phi} + \mathbf{c} r^2 \frac{\Delta \boldsymbol{\phi}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

作用力 \mathbf{F} の法線方向成分を \mathbf{F}_n ，接線方向成分を \mathbf{F}_s として，離散体接触において引っ張りに抵抗しない条件は式(2.5)，クーロンの摩擦限界の制約条件は式(2.6)に示すように考慮できる．ただし，法線方向は圧縮を正として定義した．

$$\text{if } (\mathbf{F}_n \leq 0) \quad \mathbf{F} = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{if } (|\mathbf{F}_s| > \mu|\mathbf{F}_n|) \quad \mathbf{F}_s = \mu|\mathbf{F}_n| \frac{\mathbf{F}_s}{|\mathbf{F}_s|} \quad (2.6)$$

それぞれの粒子の全体座標系における運動は式(2.1)および式(2.2)の局所的な釣り合い方程式の重ね合わせによって導かれる．この全体座標系における連立方程式を実際に解く試みは後藤らの研究にみられるが，通常の DEM では以下のような陽的差分が用いられており，本研究においても陽解法による計算を行った．

$$m\ddot{\mathbf{u}}^{k+1} = -c\dot{\mathbf{u}}^k - k\mathbf{u}^k \quad (2.7)$$

$$I\ddot{\boldsymbol{\phi}}^{k+1} = -cr^2\dot{\boldsymbol{\phi}}^k - kr^2\boldsymbol{\phi}^k \quad (2.8)$$

なお，全体座標系における作用力の重ね合わせ時には重力項などの物体力の作用も同時に考慮する必要がある．陽解法を用いることにより，時間増分には以下のような制約条件が必要となる．

(1) 作用力伝達系のばねの固有周期による制約

全ての粒子運動の固有周期のうち，最も短い周期より時間増分を細かくする必要がある．しかし，多自由度多質点の系の局所的な固有周期を把握することは困難であるため，作用力伝達系のばねの固有周期を基準に時間増分を設定する．1 自由度 1 質点系の振動を考え，両側の固定端からばねで拘束された質点の固有周期 T は次式で求まる．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (2.9)$$

解析において想定される最小の固有周期を基準として数十分の一の時間増分を設定すると安定して計算可能である．安定性の限界は陽的差分方法によって異なり，1 次精度の Euler 法は簡便であるが最も小さい時間増分が要求される．本研究では 2 次精度の Leapfrog 法と Euler 法を併用した．

(2) 縦波の伝搬速度による制約

個別要素の集合体を連続体として捉えた場合，弾性波の伝搬速度で粒子移動が発生することから，所謂 Courant 数の安定性条件を満たす必要がある．この速度が現象を支配する速度と比べて非常に速い場合，釣り合い方程式を解くことでこの制約を回避することが可能である．しかし，衝撃解析においては現象の速度が速く，一般には陽解法による計算が適しており，次式に示す縦波の伝搬速度による制約を考慮する必要がある．

$$c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (2.10)$$

ここで， E は弾性係数であり， ρ は密度， ν はポアソン比である．個別要素法では連続体のポアソン効果を考慮することはできないので， $\nu = 0$ であると考え $c = \sqrt{E/\rho}$ と計算することができる．安定性の限界は時間増分 Δt と最小の空間スケール Δx ，および最大の縦波の伝搬速度 c_{max} から Courant 数 C を計算することで次式に示される．

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x} c_{max} < 1 \quad (2.11)$$

2.1.2 全体座標系と局所座標系の成分変換

前項の振り回転を含む作用力伝達系を 3 次元解析へ適用する計算方法としては、全体系と局所系の成分変換を行う回転行列を用いる吉田ら⁷⁾による方法があり、以下に具体的な計算を説明する。

最初に全体座標系と局所座標系を変換するための回転行列を求める。全体系の成分を局所系成分へ変換する回転行列は x , y , z の 3 軸回り回転の積として次式で示される。

$$[R_{GL}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & \sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

3 次元回転は 2 つの回転角で記述可能であり、ここで局所座標系の接線軸の 1 つが常に xy 平面と平行であるように定義すると角 α は不要となり、 $\alpha = 0$ と置くと次の行列を得る。

$$[R_{GL}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta & \sin \gamma \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ -\sin \gamma \cos \beta & -\sin \gamma \sin \beta & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

ここで β は局所座標系の基底となる単位法線ベクトルを xy 平面に投影したベクトルが x 軸と成す角であり、 γ はこの法線ベクトルが xy 平面と成す角である。この単位法線ベクトルの成分を方向余弦 L , M , N として次式で表すと、

$$L = \cos \gamma \cos \beta ; M = \cos \gamma \sin \beta ; N = \sin \gamma \quad (2.14)$$

回転行列は次のように表すことができる。

$$[R_{GL}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2}} & \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2}} & N \\ \mp M & \pm L & 0 \\ \frac{\mp LN}{\sqrt{L^2+M^2}} & \frac{\mp MN}{\sqrt{L^2+M^2}} & \pm \sqrt{L^2+M^2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

式中の \mp と \pm は角 γ の符号により 2 通りの回転行列が定義できることを意味している。どちらの場合においても、単位法線ベクトルが z 軸と平行になる場合において $\cos \gamma = 0$ となり、 $L = M = 0$ が成立するため上式では回転行列が計算できない。この場合、単位法線ベクトルを xy 平面に投影したベクトルの長さが 0 であり、角 β は任意に設定することができる。ここで、 $\beta = 0$ とすると回転行列は次式で表すことができる。

$$[R_{GL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mp 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

なお、粒子 i と j 間の局所座標系の基底となる方向余弦は粒子座標から次式で示される。

$$L = \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} ; M = \frac{y_j - y_i}{|y_j - y_i|} ; N = \frac{z_j - z_i}{|z_j - z_i|} \quad (2.17)$$

(1) 全体座標系から局所座標系への変換

回転行列 $[R_{GL}]$ を用いると、粒子 i と j 間の局所座標系における相対変位増分 $\Delta \mathbf{u} = \{\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z\}^T$ および相対回転増分 $\Delta \boldsymbol{\phi} = \{\Delta \phi_x, \Delta \phi_y, \Delta \phi_z\}^T$ は次式から計算できる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_x \\ \Delta u_y \\ \Delta u_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}_{GL}] \begin{Bmatrix} \Delta u_{xi} - \Delta u_{xj} \\ \Delta u_{yi} - \Delta u_{yj} \\ \Delta u_{zi} - \Delta u_{zj} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \Delta \phi_{yi} & \Delta \phi_{yj} \\ \Delta \phi_{zi} & \Delta \phi_{zj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \phi_x \\ \Delta \phi_y \\ \Delta \phi_z \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}_{GL}] \begin{Bmatrix} \Delta \phi_{xi} - \Delta \phi_{xj} \\ \Delta \phi_{yi} - \Delta \phi_{yj} \\ \Delta \phi_{zi} - \Delta \phi_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

ここで、 x, y, z は全体座標系の成分を表し、 i と j は粒子の添え字である。振り回転に抵抗するばねは局所座標系の法線軸回りにのみ挿入されており、考慮することのできない接線軸回りの相対回転変位増分は式(2.18)の右辺第2項に示されるように、並進の相対変位増分に加えて計算する。

(2) 局所座標系から全体座標系への変換

局所座標系で計算した作用力を全体座標系成分として重ね合わせる際に用いる、回転行列 $[\mathbf{R}_{GL}]$ の逆行列 $[\mathbf{R}_{LG}]$ は次式で求まる。

$$[\mathbf{R}_{LG}] = [\mathbf{R}_{GL}]^{-1} = [\mathbf{R}_{GL}]^T \quad (2.20)$$

この回転行列を用いて粒子 i に働く粒子間作用力の合計 $\mathbf{F}_i = \{F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}\}^T$ およびトルクの合計 $\mathbf{T}_i = \{T_{xi}, T_{yi}, T_{zi}\}^T$ は次式で計算できる。なお、式(2.22)の右辺第2項で接線軸の添え字が入れ替わっているが、これは一方の接線軸方向の作用力によって生じる回転は、他方の接線軸回りに作用するためである。

$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \end{Bmatrix} = -\sum_j [\mathbf{R}_{LG}] \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \\ T_{zi} \end{Bmatrix} = -\sum_j [\mathbf{R}_{LG}] \begin{Bmatrix} T_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - r_i \sum_j [\mathbf{R}_{LG}] \begin{Bmatrix} 0 \\ F_z \\ F_y \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

2.1.3 振り回転を考慮しない場合の簡略計算手法

振り回転による作用力の伝達は評価が難しく、一般には影響が小さいと考えられることから本研究では、振り回転のばね定数は0とした。法線軸回りの回転を考慮しない場合は、回転行列を用いずに前項の計算を行うことが可能である。このことはプログラムを高速化する上で重要であり、計算処理が簡素なものとなることで並列計算の効率改善に有効である。本項では酒井らによる個別要素法の計算法¹⁰⁾に倣い、前項の成分変換と同様の処理を行う方法をここで説明する。

酒井らの方法では局所座標系への変換は行わず、全体座標系成分を法線成分のベクトルと接線成分のベクトルに分解して計算を行っている。相対変位増分 $\Delta \mathbf{u}_n$ および $\Delta \mathbf{u}_s$ は次式で計算できる。

$$\Delta \mathbf{u}_{ij} = \Delta \mathbf{u}_j - \Delta \mathbf{u}_i \quad (2.23)$$

$$\Delta \mathbf{u}_n = (\Delta \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} \quad (2.24)$$

$$\Delta \mathbf{u}_s = \Delta \mathbf{u}_{ij} - \Delta \mathbf{u}_n + (r_i \Delta \phi_i + r_j \Delta \phi_j) \times \mathbf{n}_{ij} \quad (2.25)$$

ここで $\Delta \mathbf{u}_{ij}$ は全体座標系における粒子 ij 間の相対変位増分であり, \mathbf{n}_{ij} は単位法線ベクトルとし, その成分は方向余弦と同じである. 式(2.25)は相対変位増分から法線相対変位増分を差し引き, 抽出された並進増分の接線成分に対して, 粒子回転増分を並進成分に置き換えた接線方向成分を加えたものである. 単位法線ベクトルによる内積と外積では大きさが保存され, その向きは単位法線ベクトルの向きとその外積によって定義される.

合力の合算処理は, 並進成分は全体座標系成分であるためそのまま合計するだけであり, トルクについては接触点までの相対位置ベクトルと接線方向の作用力の外積から計算できる.

$$\mathbf{F}_i = \sum_j (\mathbf{F}_n + \mathbf{F}_s) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{T}_i = r_i \sum_j (\mathbf{n}_{ij} \times \mathbf{F}_s) \quad (2.27)$$

この手法では作用力計算は全て全体座標系成分で行うため, 回転行列を用いた手法と異なり, 合力合算時の成分変換の処理が必要ない. そのためプログラムの簡略化と高速化に有効である.

2.1.4 陽的差分による運動方程式の数値積分

粒子 i の運動は Euler 法を用いて以下のように計算できる.

$$\ddot{\mathbf{u}}_i^{k+1} = \frac{\mathbf{F}_i^k}{m_i} + \mathbf{g}^k \quad (2.28)$$

$$\ddot{\phi}_i^{k+1} = \frac{r_i^k}{l_i} \quad (2.29)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_i^k + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i^{k+1} \quad (2.30)$$

$$\dot{\phi}_i^{k+1} = \dot{\phi}_i^k + \Delta t \ddot{\phi}_i^{k+1} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i^{k+1} \quad (2.32)$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \Delta t \dot{\phi}_i^{k+1} \quad (2.33)$$

ここで \mathbf{g}^k は重力項であり, \mathbf{x} と θ は粒子座標および粒子姿勢(回転角)である. Euler 法は 1 次精度であり, より数値安定性の良い積分手法として 2 次精度の Leapfrog 法があり¹¹⁾, 本研究においても導入した. この手法は, 位置と速度を定義する時間断面をそれぞれ 1/2 時刻ずらすことで中心差分近似による 2 次精度化を行っており, 速度と位置の更新について具体的に以下のような計算を行う.

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{k+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^{k-1/2} + \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_i^{k+1} \quad (2.34)$$

$$\dot{\phi}_i^{k+1/2} = \dot{\phi}_i^{k-1/2} + \Delta t \ddot{\phi}_i^{k+1} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_i^{k+1/2} \quad (2.36)$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \Delta t \dot{\phi}_i^{k+1/2} \quad (2.37)$$

Leapfrog 法はそのまま時間増分を可変とすることが出来ないが, 本研究では簡便のため速度の計算に用いる時間増分を平均することで対応した.

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{k+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^{k-1/2} + \frac{1}{2}(\Delta t^k + \Delta t^{k-1})\ddot{\mathbf{u}}_i^{k+1} \quad (2.38)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_i^{k+1/2} = \dot{\boldsymbol{\phi}}_i^{k-1/2} + \frac{1}{2}(\Delta t^k + \Delta t^{k-1})\ddot{\boldsymbol{\phi}}_i^{k+1} \quad (2.39)$$

また, 初期時刻においては次式を用いて速度を計算する.

$$\dot{\mathbf{u}}_i^{k+1/2} = \dot{\mathbf{u}}_i^k + \frac{1}{2}\Delta t^k \ddot{\mathbf{u}}_i^{k+1} \quad (2.40)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_i^{k+1/2} = \dot{\boldsymbol{\phi}}_i^k + \frac{1}{2}\Delta t^k \ddot{\boldsymbol{\phi}}_i^{k+1} \quad (2.41)$$

2.2 壁境界の三角形壁面要素による計算

個別要素法の計算において壁境界は固定粒子でモデル化されることが多い. 粒子によるモデル化は接触判定が容易であり, 粒子 i と j の接触はそれぞれの位置ベクトル \mathbf{x} と粒子半径 r から次式で判定できる.

$$|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| < r_i + r_j \quad (2.42)$$

また, 他の離散体の粒子群と同じ手続きで処理することが可能であり, 特別なモデルの導入が不要である点が理由として挙げられる. しかしながら, 粒子による壁境界モデルは表面に粒子径によって凹凸が生じるため, 滑らかな曲面や複雑形状の再現性に問題があり, また境界面が変形するような問題への適用は困難である. 本研究では流動体と構造物の動的相互作用の計算手法を確立に役立てるため, 三角形パッチから構成される壁境界面モデルを導入し, その計算方法の検討を行った. なお, 同様のモデルは 4 章で述べる SPH 法の解析においても導入を行った. この節では個別要素法に導入した壁境界モデルの計算方法について述べる.

2.2.1 三角形壁境界と粒子の接触判定

本研究において導入した壁境界は, 三角形壁面要素の集合としてモデル化を行う. 個々の壁面要素は 3 つの頂点 $\mathbf{v}_1 \sim \mathbf{v}_3$ から構成され, 面法線ベクトルは各頂点の位置ベクトル $\mathbf{x}_1 \sim \mathbf{x}_3$ を用いて次式で計算できる.

$$\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)}{|(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \times (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1)|} \quad (2.43)$$

また, 面の方程式より原点から壁面要素までの最短距離は次式で計算される.

$$d_0 = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (2.44)$$

従って, 任意の粒子 i と着目壁面 j の距離 d_{ij} は次式で計算できる.

$$d_{ij} = \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{x}_i + d_{j0} \quad (2.45)$$

ここで, \mathbf{x}_i は粒子の位置ベクトルであり \mathbf{n}_j は壁面要素の単位法線ベクトル, d_{j0} は壁面要素と原点 0 の最短距離である. 壁面粒子間 d_{ij} は符号付きの距離であり, 正の場合は面法線の向きに粒子があり, 負の場合には粒子は反対外に存在する. 本研究では計算の省力化の観

点から d_{ij} が負の場合、すなわち裏面側に粒子がある場合は接触判定を行わないように処理した。距離のみによる接触判定は次式で行う。

$$d_{ij} < r_i \quad (2.46)$$

この段階では壁面要素を包含する無限平面との接触判定に過ぎず、図-2.2 に示されるように、粒子点の平面への投影点が壁面要素の内側に存在することを確認する必要がある。

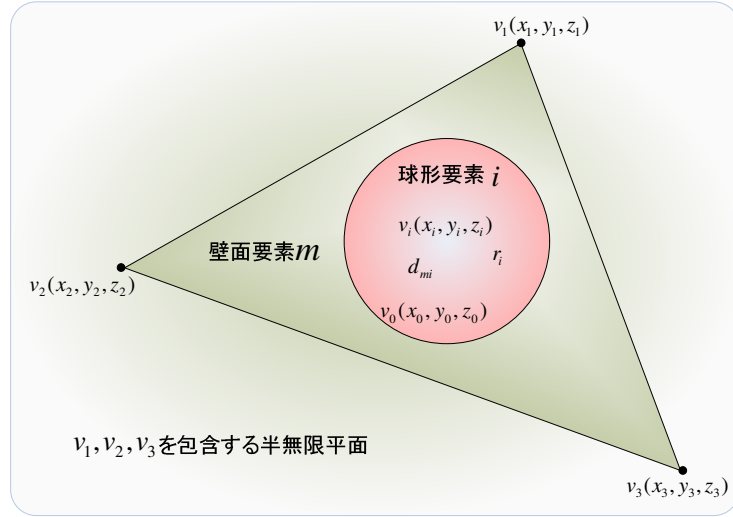


図-2.2 粒子投影点の内外判定

この判定は投影点を計算することなく次式を用いて判定可能である。

$$J_k = ((\mathbf{v}_k - \mathbf{x}_i) \times (\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{x}_i)) \cdot \mathbf{n}_j \quad (2.47)$$

ここで、 \mathbf{v}_k は壁面の構成頂点座標であり k は1～3で循環する。 J_k の符号によって粒子投影点の内外判定は表-2.1 に示すように判別される。表中の辺1とは \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 から構成される辺のことであり、頂点の番号と同様に1～3で循環する。

表-2.1 壁面への粒子投影点の内外判定結果

J_1	J_2	J_3	判定結果
+	+	+	三角形の内点であり面接触している
-	+	+	辺1の外点であり辺接触判定が必要
+	-	+	辺2の外点であり辺接触判定が必要
+	+	-	辺3の外点であり辺接触判定が必要
-	+	-	頂点1の外点であり点接触判定が必要
-	-	+	頂点2の外点であり点接触判定が必要
+	-	-	頂点3の外点であり点接触判定が必要
-	-	-	裏面の内点であり通常は起こらない

上記の判定の結果，面接触および裏面内点以外だった場合は追加の判定処理が必要である．隣接する複数の壁面要素が凸面を形成する場合，図-2.3 より明らかであるように粒子投影点が壁面要素の領域外にある場合においても辺接触および点接触が成立する．式(2.47)と表-2.1 は追加で必要となる接触判定とその対象を一意に判別でき，それぞれの判定処理を排他的に実行できる点で優れている．

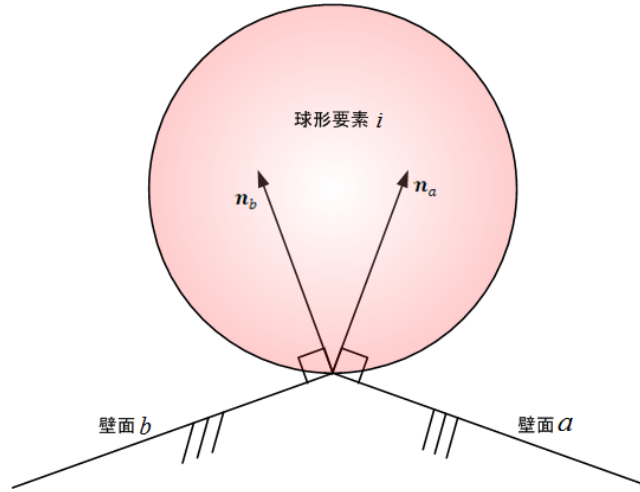


図-2.3 凸面接触時の内外判定

(1) 辺接触判定

粒子座標 x_i を辺 k に投影した座標 x_k は次式で計算できる．

$$x_k = v_k + (v_{k+1} - v_k) \frac{(v_{k+1} - v_k) \cdot (x_i - v_k)}{|v_{k+1} - v_k|^2} \quad (2.48)$$

よって辺接触は次式で判定できる．

$$|x_k - x_i| < r_i \quad (2.49)$$

(2) 点接触判定

頂点 k と粒子 i の接触は次式で判定した．

$$|v_k - x_i| < r_i \quad (2.50)$$

2.2.2 壁面要素と粒子間の作用力

壁面要素と粒子間に働く作用力は，2.1.1 項と 2.1.2 項で述べた通常の粒子間接触と同じ方法によって計算した．相対変位増分を計算する際に用いる壁の変位増分は壁面要素中心の移動増分とし，作用力計算においては壁面の回転は考慮せず，壁の半径は 0 として計算を行った．また，壁面は粒子と比べて慣性および剛性が大きい境界と考えることができ，壁面・粒子間接触の作用力計算におけるばね定数は，粒子間接触における値の 2 倍と設定した．壁面・粒子間のベクトルの成分変換に用いる回転行列は粒子間の場合と同様に，壁面要

素の方向余弦 L , M , N を用いて次式で計算できる.

$$[\mathbf{R}_{GL}] = \begin{bmatrix} \frac{L}{\pm M} & \frac{M}{\pm L} & N \\ \frac{\pm L}{\sqrt{L^2+M^2}} & \frac{\pm M}{\sqrt{L^2+M^2}} & 0 \\ \frac{\pm LN}{\sqrt{L^2+M^2}} & \frac{\pm MN}{\sqrt{L^2+M^2}} & \pm\sqrt{L^2+M^2} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

ただし, $L = M = 0$ の場合は次式で計算する.

$$[\mathbf{R}_{GL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm N \\ 0 & -N & 0 \\ \pm N & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

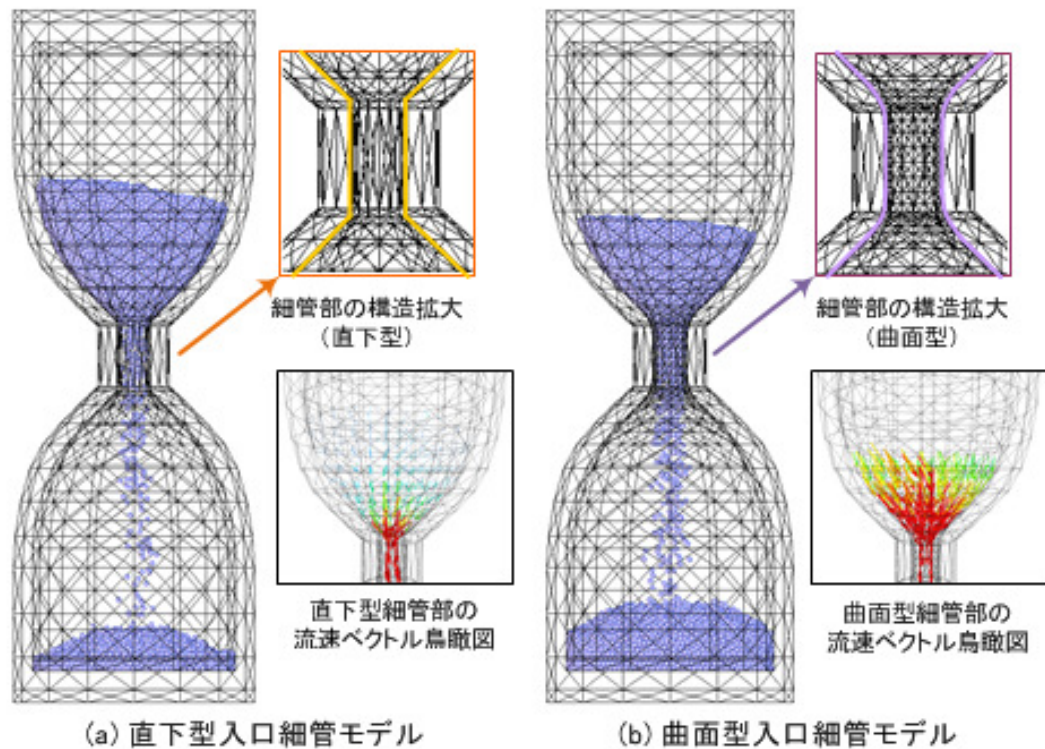
粒子は同時に複数の壁面要素と接触することがあり, この場合の作用力は同時に接触状態にある全ての壁との作用力の算術平均として計算した. つまり壁面-粒子間の作用力の方向は, 作用力の大きさを重みとして計算する頂点法線ベクトルの向きとなる. この計算方法では同時接触状態にある全ての壁面との作用力を計算する必要がある. また, 壁に沿って移動中の粒子が別の壁面領域内に侵入した際に元の壁面との接触関係が切れ, 作用力の連続性が失われる問題があり今後の改良が必要と考えている.

2.2.3 壁面要素を用いた個別要素法の計算例

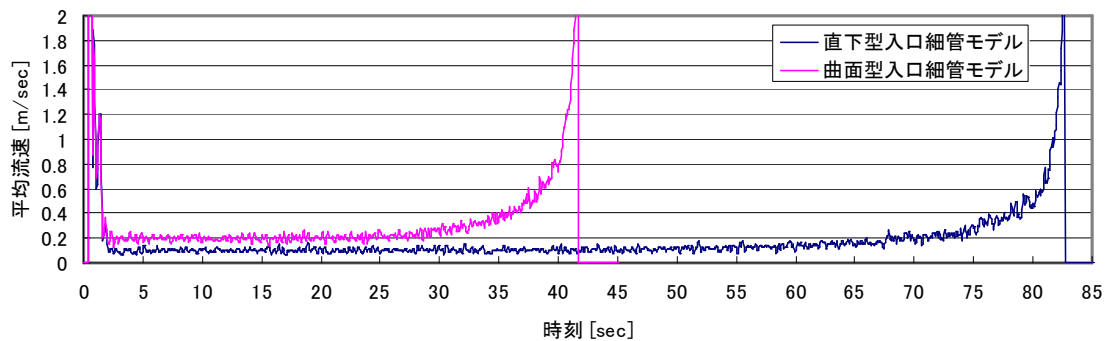
本節において説明した壁面要素による壁境界モデルを用いた個別要素法の計算例として砂時計模型の粒状体流下解析を示す. この解析では, 細管部の形状が異なる 2 種類の大型砂時計模型を作成し, 離散粒状体の集合を重力落下させてその流動過程を計算した.

図-2.4 は両モデルの同一時間断面における流動状況を示している. なお, モデルの違いの確認のために, それぞれの細管部分を拡大して図中に示しており, 直下型は管のくびれ部分が鋭利に尖っており, 曲面型はその角を丸めてモデル化した. また, それぞれの鉛直断面の形状を分かりやすくするため, 黄色(直下型)と紫(曲面型)の太線で示した.

直下型モデルでは細管部の入口でつまりが生じやすく, 構造の違いによって流下速度が大きく異なることが確認できる. 細管入口部の平均流下速度の時刻歴を比較したものを図-2.5 に示す. 直下型と曲面型の砂時計模型のモデル形状以外の計算条件は同一であるが, 全ての粒子が落下するまでに要する時間には約 2 倍の差が生じていることが確認できた. この解析例の壁境界のように, 滑らかな曲面の再現は従来の固定粒子の壁境界の弱点であり, 本手法の有効性が解析結果から確認できる.



図ー2.4 砂時計模型内の粒状体流下解析



図ー2.5 粒状体の平均流下速度の時刻歴（細管入口部）

2.3 粒子集合による剛体計算

個別要素法においては粒子もしくは多面体ブロックを要素モデルとして用いられており、特に接触判定が容易である点から粒子モデルの利用例が多い。粒子モデルは2次元解析では円筒であり、3次元解析では球形状であり、粒子径を変えることで巨礫や重錘などの粒状体より大きなスケールのモデル化も可能である。しかしながら、粒子によるモデル化では形状や慣性テンソルが実構造と乖離するため、接触時の応答や跳躍飛翔の再現性が低いという問題がある。

粒子法による流体解析では、固体と流体の相互作用の簡便な評価手法として粒子集合による剛体モデルが用いられており、本研究においても同様の粒子集合による剛体計算手法を個別要素法および SPH 法の計算手法に導入した。なお、個別要素法では引っ張りに抵抗するばねモデルを用いることで連続体構造解析が可能であり、剛なばねを挿入することで同様の計算を行うことが可能である。しかしながら、剛なばねを用いることで式(2.9)に示される接触応答の固有周期が小さくなるため、時間増分の制約から現実的な計算が困難となる問題がある。

本研究では田中ら¹²⁾が MPS 法に導入した粒子集合による剛体モデルの運動の計算手法を導入した。なお、個別の粒子間の接触判定や作用力計算手法は 2.1 節で述べた従来の計算手法を用いた。

2.3.1 剛体の質量と慣性テンソル

剛体の運動を運動方程式から計算するためには質量と慣性テンソルが必要である。剛体の質量 M は集合内の個々の粒子 i の質量を m_i として次式から計算できる。

$$M = \sum_i m_i \quad (2.53)$$

剛体重心 \mathbf{x} は集合内の個々の粒子 i の位置ベクトルを \mathbf{x}_i として次式で計算できる。

$$\mathbf{x} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{x}_i}{M} \quad (2.54)$$

剛体の重心まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}]$ は個々の粒子 i の粒子重心まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}_{c}]_i$ と剛体重心まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}_p]_i$ を用いて次式で計算できる。

$$[\mathbf{I}] = \sum_i ([\mathbf{I}_c]_i + [\mathbf{I}_p]_i) \quad (2.55)$$

粒子重心まわりの慣性テンソルは、球の慣性テンソルを用いると剛体内部に隙間が生じて誤差が大きくなることから、田中らは直径を 1 辺の長さとする立方体の慣性テンソルを用いることを提案した。立方体の重心まわりの慣性テンソルは次式で計算できる。

$$[\mathbf{I}_c]_i = \frac{m_i}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

また、粒子 i の剛体の重心まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}_p]_i$ は個々の粒子 i と剛体重心間の相対位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = \{r_{xi}, r_{yi}, r_{zi}\}^T$ として次式で計算できる。

$$[\mathbf{I}_p]_i = m_i \begin{bmatrix} r_{yi}^2 + r_{zi}^2 & -r_{xi}r_{yi} & -r_{xi}r_{zi} \\ -r_{yi}r_{xi} & r_{xi}^2 + r_{zi}^2 & -r_{yi}r_{zi} \\ -r_{zi}r_{xi} & -r_{zi}r_{yi} & r_{xi}^2 + r_{yi}^2 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

慣性テンソルは回転による剛体姿勢の変化によって更新が必要であり、剛体の構成粒子数や剛体数が多い場合に、ステップ毎の更新負荷は大きなものとなる。しかしながら、テンソルであることから回転行列による成分変換が可能であり、ステップ k における剛体重心まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}^k]$ は、剛体重心まわりの初期慣性テンソル $[\mathbf{I}^0]$ と初期姿勢に対する回転行列 $[\mathbf{R}^k]$ を用いて次式から計算できる。

$$[\mathbf{I}^k] = [\mathbf{R}^k][\mathbf{I}^0][\mathbf{R}^k]^T \quad (2.58)$$

同様に慣性テンソルの逆行列 $[I^k]^{-1}$ も初期姿勢の行列 $[I^0]^{-1}$ から次式で計算できる。

$$[I^k]^{-1} = [R^k][I^0]^{-1}[R^k]^T \quad (2.59)$$

2.3.2 剛体運動の計算

剛体の運動は剛体を構成する全粒子の作用力を重心点に合算して計算を行う。構成粒子と他の粒子間に生じる作用力計算は上述の個別要素法の計算手法をそのまま適用し、構成粒子間における接触判定を省略するため、個々の粒子には剛体番号を付与し、同一の剛体モデル内では作用力計算を行わないようにした。剛体重心に作用する並進力 \mathbf{F} とトルク \mathbf{T} は次式から計算した。

$$\mathbf{F} = \sum_i (\mathbf{F}_i + m_i \mathbf{g}^k) \quad (2.60)$$

$$\mathbf{T} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times (\mathbf{F}_i + m_i \mathbf{g}^k)) \quad (2.61)$$

ここで、 \mathbf{F}_i は構成粒子 i の作用力であり、 \mathbf{g}^k はステップ k における重力項、 \mathbf{r}_i は剛体重心に対する構成粒子 i の相対位置ベクトルである。この剛体重心にかかる作用によって生じる加速度 $\ddot{\mathbf{U}}$ および角加速度 $\ddot{\boldsymbol{\Phi}}$ は陽的差分に Euler 法を適用して次式で計算できる。

$$\ddot{\mathbf{U}} = \frac{\mathbf{F}}{M} \quad (2.62)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\Phi}} = [I^k]^{-1} \mathbf{T} \quad (2.63)$$

剛体重心の並進および回転運動については 2.1 節で述べた粒子要素の計算方法をそのまま適用することができ、Euler 法や Leapfrog 法を用いて $\dot{\mathbf{U}}$ と $\dot{\boldsymbol{\Phi}}$ を計算し、剛体重心座標 \mathbf{X} を更新する。剛体モデルに回転がない場合は、各粒子の変位増分は剛体重心の変位増分と一致するため、剛体を構成する個別の粒子 i の座標は次式で更新できる。

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{x}_i^k + \Delta t \dot{\mathbf{U}} \quad (2.64)$$

剛体に回転が生じている場合、剛体重心からの距離によって、構成粒子間には速度差が生じており、粒子 i の並進速度は次式から計算できる。

$$\dot{\mathbf{x}}_i^{k+1} = \dot{\mathbf{U}} + \dot{\boldsymbol{\Phi}} \times \mathbf{r}_i \quad (2.65)$$

ただし、本研究では回転があるときの粒子座標を重心に対する初期相対位置ベクトル \mathbf{r}_i^0 と更新後の剛体重心座標 \mathbf{X}^{k+1} および回転行列 $[\mathbf{R}^{k+1}]$ を用いて次式で計算した。なお、この計算によるメリットは誤差が蓄積しない点にある。

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \mathbf{X}^{k+1} + [\mathbf{R}^{k+1}] \mathbf{r}_i^0 \quad (2.66)$$

2.3.3 剛体モデルの姿勢と回転行列の更新

剛体モデルの初期姿勢からの回転を記述する方法として、Euler 角や回転行列、複素数の拡張であるクォータニオン（四元数）などがあり¹⁴⁾、一般にはクォータニオンが用いられることが多い。その理由として、Euler 角と異なり一意に回転を定義できること、回転行列に比べて記憶容量が小さいこと、特に姿勢の更新にともない生じる計算誤差を毎ステップ修正できることが知られている。しかし、実際の剛体モデルの運動計算に用いるには回転

行列に変換する必要がある、その計算方法についてこの項で簡単に説明する。

クォータニオンは4成分からなり、 $\mathbf{q} = (s, v_x, v_y, v_z)$ と表せられる。回転がない状態を表す初期値は $\mathbf{q} = (1, 0, 0, 0)$ である。 s は回転角の大きさを表し、 v_x, v_y, v_z は回転軸を表す。規格化された回転軸 $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ のまわりを θ だけ回転するときのクォータニオン増分 $\Delta\mathbf{q}$ は次式で表せられる。

$$\Delta\mathbf{q} = \left(\cos \frac{\theta}{2}, v_x \sin \frac{\theta}{2}, v_y \sin \frac{\theta}{2}, v_z \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.67)$$

ここで、回転角 θ と回転軸 \mathbf{v} は剛体の角速度 $\boldsymbol{\Phi}$ から次式で計算できる。

$$\mathbf{v} = \frac{\boldsymbol{\Phi}}{|\boldsymbol{\Phi}|} \quad (2.68)$$

$$\theta = \Delta t |\boldsymbol{\Phi}| \quad (2.69)$$

剛体の回転による姿勢の変化はクォータニオンの積を用いて次式で計算される。

$$\mathbf{q}^{k+1} = \Delta\mathbf{q}\mathbf{q}^k \quad (2.70)$$

ただし、クォータニオンの積は次式で定義される。

$$\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} s_1s_2 - v_{x1}v_{x2} - v_{y1}v_{y2} - v_{z1}v_{z2} \\ s_1v_{x2} + v_{x1}s_2 + v_{y1}v_{z2} - v_{z1}v_{y2} \\ s_1v_{y2} - v_{x1}v_{z2} + v_{y1}s_2 + v_{z1}v_{x2} \\ s_1v_{z2} + v_{x1}v_{y2} - v_{y1}v_{x2} + v_{z1}s_2 \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

また、クォータニオンのノルムは必ず1であり計算誤差は修正後のクォータニオンを $\hat{\mathbf{q}}$ としてステップ毎に次式で修正できる。このことは、計算誤差の蓄積が問題となる回転行列に対する大きな利点である。

$$\hat{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \quad (2.72)$$

剛体回転を計算するための回転行列 $[\mathbf{R}^k]$ はクォータニオン \mathbf{q}^k の回転軸ベクトル \mathbf{v} の成分を用いて次式より計算できる。

$$[\mathbf{R}^k] = \begin{bmatrix} 1 - 2v_y^2 - 2v_z^2 & 2v_xv_y - 2sv_z & 2v_xv_z + 2sv_y \\ 2v_xv_y + 2sv_z & 1 - 2v_x^2 - 2v_z^2 & 2v_yv_z - 2sv_x \\ 2v_xv_z - 2sv_y & 2v_yv_z + 2sv_x & 1 - 2v_x^2 - 2v_y^2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

2.4 多面体ブロックの剛体計算手法

前節で述べた粒子集合による剛体計算はそのまま多面体ブロックの計算にも適用でき、滑らかな表面や複雑な表面に対する形状再現性の観点からも、本研究では多面体ブロックに対しても剛体計算手法を適用した。多面体ブロックは2.2節で述べた壁面要素によって閉じた構造とし、粒子との間の接触判定や作用力計算は壁面要素による壁境界と共通とした。多面体ブロック間や壁面要素による壁境界間の接触計算については本研究では必要ないため導入していないが、将来的には必要と考えられ、本節の最後にて簡単に述べる。

2.4.1 多面体ブロックの質量と慣性テンソルの計算

粒子集合による剛体モデルと同様に，剛体の運動を運動方程式から計算するためには質量と慣性テンソルが必要である．しかし，本研究において定義する多面体ブロックは表面形状のみモデル化するため，剛体の質量 M は解析条件として直接与えるか，剛体の密度 ρ を定義して体積から計算する．多面体ブロックの体積 V と質量 M は次式で計算できる．

$$V = \frac{1}{6} \sum_i (\mathbf{v}_{1i} \times \mathbf{v}_{2i}) \cdot \mathbf{v}_{3i} \quad (2.74)$$

$$M = \rho V \quad (2.75)$$

ここで $\mathbf{v}_{1i} \sim \mathbf{v}_{3i}$ は多面体の構成壁面 i の構成頂点座標である．体積の符号は右手系で構成壁面の裏側に原点がある場合を正とし，正負を考慮した個々の四面体体積 $V_i = (\mathbf{v}_{1i} \times \mathbf{v}_{2i}) \cdot \mathbf{v}_{3i}$ の合計は構成壁面で閉じた領域の体積となる．

多面体ブロックの重心座標 \mathbf{x} は多面体内の密度分布が一様だとすると，個々の四面体重心座標と体積の一次モーメントより次式が求まる．

$$\mathbf{x} = \frac{1}{12V} \sum_i V_i (\mathbf{v}_{1i} + \mathbf{v}_{2i} + \mathbf{v}_{3i}) \quad (2.76)$$

ここで $\mathbf{v}_{1i} \sim \mathbf{v}_{3i}$ は多面体の構成壁面 i の構成頂点座標である．個々の四面体の 4 つ目の構成頂点は原点であり，式中ではその座標を省略しているが，四面体重心座標の計算においては 1/4 倍する必要がある．

剛体の重心まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}]$ は原点まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}_0]$ を並行軸の定理により重心まわりに平行移動して計算する． $[\mathbf{I}_0]$ は個々の四面体 i の原点まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}_0]_i$ の合計として計算できる．

$$[\mathbf{I}_0] = \sum_i [\mathbf{I}_0]_i \quad (2.77)$$

個々の四面体 i の原点まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}_0]_i$ は底面の壁面要素の構成頂点座標の成分を $\mathbf{v}_1 = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1})$ と表記して次式で計算できる¹⁵⁾．

$$[\mathbf{I}_0]_i = \frac{\rho V_i}{20} \begin{bmatrix} k_y^2 - k_{yy} + r_z^2 - k_{zz} & -\frac{1}{2}(-k_x k_y + k_{xy}) & -\frac{1}{2}(-k_x k_z + k_{zx}) \\ -\frac{1}{2}(-k_x k_y + k_{xy}) & k_x^2 - k_{xx} + r_z^2 - k_{zz} & -\frac{1}{2}(-k_y k_z + k_{yz}) \\ -\frac{1}{2}(-k_x k_z + k_{zx}) & -\frac{1}{2}(-k_y k_z + k_{yz}) & k_x^2 - k_{xx} + r_y^2 - k_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} k_x &= v_{x1} + v_{x2} + v_{x3} & k_{xx} &= v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 & k_{xy} &= v_{x1}v_{y1} + v_{x2}v_{y2} + v_{x3}v_{y3} \\ k_y &= v_{y1} + v_{y2} + v_{y3} & k_{yy} &= v_{y1}^2 + v_{y2}^2 + v_{y3}^2 & k_{yz} &= v_{y1}v_{z1} + v_{y2}v_{z2} + v_{y3}v_{z3} \\ k_z &= v_{z1} + v_{z2} + v_{z3} & k_{zz} &= v_{z1}^2 + v_{z2}^2 + v_{z3}^2 & k_{zx} &= v_{z1}v_{x1} + v_{z2}v_{x2} + v_{z3}v_{x3} \end{aligned} \quad (2.79)$$

剛体の重心座標 \mathbf{x} まわりの慣性テンソル $[\mathbf{I}]$ は並行軸の定理より， \mathbf{x} の成分 (x, y, z) を用いて次式で計算できる．

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{I}_0] - M \begin{bmatrix} -y^2 - z^2 & xy & xz \\ yx & -z^2 - x^2 & yz \\ zx & zy & -x^2 - y^2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

2.4.2 多面体ブロックの剛体運動

多面体ブロックの表面を構成する壁面要素と粒子間の作用力は、2.2 節で説明した手法をそのまま用いて計算する。その段階で面に働いた作用力は壁面要素の構成頂点に等分配し、剛体運動の計算に使用する。構成頂点への作用力の分配方法としては、この他に距離を重みとする分配などが考えられるが、このような重みを考慮した作用力の分配手法については 4 章の SPH 法の理論にて取扱い説明する。

多面体ブロックの運動は前節で述べた粒子剛体の運動計算手法と同様であり、構成粒子を構成頂点に置き換えることで計算できる。

2.4.3 多面体ブロックの接触判定

本研究では多面体ブロック間の接触は考慮しておらず、ブロック間の接触判定処理は導入しなかった。しかし、問題によっては多面体ブロック間の接触判定が必要となるため、ここで既往の研究にみられる代表的な接触判定手法を述べる。

最も一般的な接触判定手法は、多面体の全ての頂点・辺・面に対して相互に接触判定を行い、その全ての組み合わせを網羅するものである。個別の接触判定については、本研究の壁面-粒子間接触で取り扱ったような計算を行う。このような接触判定は不連続変形法 (DDA) の研究例¹⁶⁾にみられ、DDA では頂点が接触面と成す三角錐体積や、接触辺と成す三角形面積を計算することで貫入量を算定し、ペナルティばねを挿入して全体の釣り合い方程式を解くことで貫入を解消する計算を行っている¹⁷⁾。このような接触判定においては多面体ブロックの構成頂点が増えると接触関係の組み合わせが非常に多くなる問題がある。

Cundall は上記の問題を解消する接触判定手法として **common-plane**¹⁹⁾を用いた手法を提案しており、3 次元 DEM の商用コードである 3DEC^{19),20)}に組み込まれている。この手法では接触の可能性のある 2 つの多面体ブロックの重心間の中心に **common-plane** を定義し、それぞれの多面体の構成頂点の内、**common-plane** との距離が最小となるものを検索する。最小距離は負値も考慮し、**common-plane** の裏側に頂点が食い込んでいる場合は負値となるため、両ブロック間の最小距離の合計が負値であれば接触と判定される。接触時は最小距離の合計の絶対値を計算し貫入量として処理する。凸なブロックだけでなく、凹なブロックについても幾つかのサブブロックに分割することで同様の計算が可能である。接触判定の計算回数は両方のブロックの頂点数の合計であり、組み合わせが増大する問題がない。また、**common-plane** は必ず定義可能であり、滑動によって接触法線軸がずれた場合にも貫入量が急激に変化しないため安定である。

Cundall らが用いている **common-plane** 法を採用するにあたっては、境界壁面との接触判定手法を考える必要がある。最も簡単な方法は、境界壁面の裏側に仮想の頂点を考慮して四面体を生成し、**common-plane** 法を用いることで計算が可能であると考えられる。本研究においても多面体ブロック間の接触が生じる問題については、本項で説明したアルゴリズムの導入を今後検討する。

2.5 2章のまとめ

本章では本研究で用いた解析手法の一つである個別要素法の概要を説明し，本研究で導入した壁境界や粒子集合剛体，多面体ブロックの計算手法について述べた．以下に本章における要点をまとめる．また，表－2.2に本研究で採用した計算手法をまとめて示した．

- 1) 本研究では回転行列を用いた全体座標系と局所座標系の成分変換による 3 次元解析を行っている．他の研究例として成分変換を行わない計算手法があり，具体的な比較は行っていないが，今後大幅に計算効率を改善することが期待できる．
- 2) 三角形パッチによる壁境界の計算手法を個別要素法に導入し，壁面要素と粒子間の接触判定と作用力計算の方法を説明した．本手法は滑らかな境界面や複雑な境界面のモデル化に適していることを具体的に示した．
- 3) 粒子集合による剛体モデルの導入方法について示した．剛体の質量と慣性テンソルは初期時刻において構成粒子の質量と位置ベクトルから計算し，慣性テンソルはクォータニオンによる姿勢の更新と回転行列の計算により，初期時刻の値を回転することによって計算する．剛体の運動は構成粒子に働く作用力を合計し，剛体重心に作用させることで個別の粒子と同じ方法によって計算できる．
- 4) 粒子集合による剛体モデルにおいて生じると考えられる表面の凹凸を解消するため，多面体ブロックによる剛体計算手法を導入し，その計算方法を示した．質量と慣性テンソルの計算方法以外の基本的な計算は粒子集合による剛体と同じである．なお，ここで示した多面体ブロック間の接触判定を用いることで，ブロック間接触問題への応用が今後可能である．

表－2.2 本研究で採用した計算手法のまとめ

個別要素法の機能項目	本研究で採用した計算手法
3次元計算における成分変換	回転行列を用いた吉田らによる手法
運動方程式の時間積分法	Euler法 / Leapfrog法による陽解法
壁面境界の取り扱い	開発した三角形壁面要素を用いた計算手法(粒子壁も利用可能)
任意形状の粒子集合剛体計算	田中らによる手法を採用し剛体姿勢は四元数で扱う
任意形状の多面体剛体計算	粒子集合剛体の手法を多面体に適用(接触判定は未導入)

【参考文献】

- 1) 伯野 元彦：破壊のシミュレーション，森北出版，1997
- 2) 粉体工学会：粉体シミュレーション入門，産業図書，1998
- 3) 粉体工学会：粉体層の操作とシミュレーション，日刊工業新聞社，2009
- 4) 小国 健二，堀 宗朗，阪口 秀：破壊現象の解析に適した有限要素法の提案，土木学会論文集，第 766 号/I-68，pp.203-217，2004
- 5) 酒井 譲，山下 彰彦：SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討，日本機械学会論文集(A 編)，第 67 巻 659 号，pp.1093-1102，2001
- 6) 小野 祐輔，西田 真悟，清野 純史：SPH 法による土構造物の弾塑性解析，応用力学論文集，Vol.9，pp.717-723，2006
- 7) 吉田 博，榎谷 浩，今井 和昭：個別要素法による敷砂上の落石の衝撃特性に関する解析，土木学会論文集，第 392 号/I-9，pp.297-306，1988
- 8) 後藤 仁志：数値流砂水理学，森北出版，2004
- 9) 後藤 仁志，鷺見 崇，酒井 哲郎：個別要素法への陰解法の導入による数値移動床の改良，土木学会論文集 B，Vol.62 No.2，pp.201-209，2006
- 10) 酒井 幹夫：粉体の数値シミュレーション，丸善，2012
- 11) 吉田 郁政，大庭 啓輔，中瀬 仁：MPS 法による地震応答解析の安定性限界となる時間刻みに関する検討，応用力学論文集，Vol.13，pp.545-554，2010
- 12) 田中 正幸，酒井 幹夫，越塚誠一：粒子ベース剛体シミュレーションと流体との連成，日本計算工学会論文集，No.20070007，2007
- 13) 越塚 誠一：粒子法シミュレーション，培風館，2008
- 14) Fletcher Dunn, Ian Parberry, 松田 晃一 訳：ゲーム 3D 数学，オライリー・ジャパン，2008
- 15) F. Tonon : Explicit Exact Formulas for the 3-D Tetrahedron Inertia Tensor in Terms of its Vertex Coordinates, Journal of Mathematics and Statistics 1 (1), pp.8-11, 2004
- 16) 呉 建宏，大西 有三，門間 敬一，西山 哲：3 次元不連続変形法 (3D DDA) による岩盤斜面崩落のシミュレーション，材料，Vol.52 (5)，pp.488-493，2003
- 17) 日本計算工学会 編：不連続変形法 (DDA)，丸善，2005
- 18) 中川 光雄，山田 正雄，中谷 紀行，近重 朋晃：合理的な接触判定法に基づく 3 次元個別要素法による落石・岩盤崩落シミュレーション，日本地すべり学会誌，Vol.47 (3)，pp.147-154，2010
- 19) P.A. Cundall : Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Volume 25, Issue 3, pp.107-116, 1988

- 20) R. Hart, P.A. Cundall, J. Lemos : Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part II. Mechanical calculations for motion and interaction of a system composed of many polyhedral blocks, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Volume 25, Issue 3, pp.107–116, 1988

第3章 個別要素法による敷砂の衝撃応答解析

3.1 実物大サンドクッションの解析

山間部の道路に設けられている落石防護構造物は、想定される落石・崩土に対して、人命、道路構造物を保護することが求められている。このような現象において予想される荷重は衝撃作用により非常に大きく、できるだけ衝撃荷重を小さくするために、一般に敷砂やEPS等の緩衝材を構造物上面に設けている^{1),2),3)}。しかし、流動や大変形によって衝撃力を緩衝する材料の運動は複雑であり、構造物に伝達される衝撃力の評価は十分明らかにされているわけではない。合理的な設計を行う上では、衝撃力が緩衝材を介して空間的または時間的にどのように伝達され、構造物のどの部位にどのような大きさで作用するのかを把握することは重要であり、性能照査型設計を行うためにも実験・解析的研究の進展が望まれている^{4),5),6)}。

本研究では、敷砂材に落石等の衝撃荷重が作用した際の衝撃挙動と構造物への伝達荷重の推定に3次元個別要素法を適用し、離散体集合が呈する複雑な流動挙動と衝撃力の伝達特性の推定精度に関する検討を行った。この解析においては、防護構造物上の土槽を三角形パッチによる滑らかな壁境界でモデル化し、局所的な土圧分布の推定を可能とした。解析対象としては、斜め入射落石を受ける防護構造物の設計に役立つ知見を得るために行った、実規模の土槽への重錘落下実験データを利用した。

3.1.1 実規模土槽への落石落下実験の概要

既往の研究で不足している斜め入射に対する実験データを得ること、底面および側面の伝達衝撃力を精度良く計測することで設計上に役立つ定量的な知見を得ることを目的とし、2006年12月より日本サミコン株式会社の研究所において、**写真-3.1**に示す一連の衝撃実験を行った。この実験は実物大のロックシェッド上の土槽を対象とした我が国で最初の斜め入射落石実験であり、複雑なサンドクッションの応答を把握する上で貴重なデータが得られている。

実験は、底面および側面に計72個の土圧計を配置した6m四方の土槽に、厚さ150cmの敷砂材を敷設した緩衝機構へ、重量51.79kNの重錘を入射角度45度、60度、75度および90度、落下高さ10mおよび15mから落下位置を変更しながら落下させることで行った。そのときの、重錘衝撃力および敷砂材を介して生じる底面土圧、側面土圧を測定し、重錘衝撃力と伝達衝撃土圧を記録した。

敷砂材は胎内産の川砂を使用し、既往の実験に基づいて30cmごとに9回転圧を行った。入射角は、一端を支点として可動するレールの他端に重錘落下装置を設け、クレーンで吊り上げることで制御し、落下位置はレールの支点部材をスライドさせることで調節し、側

壁から 1m, 2m, 3m 地点に落下させた。重錘は落下装置の電磁石を切ることにより落下させ、レール先端部に 2 箇所設置したレーザー変位計により落下速度を計測した。重錘衝撃力は重錘の重心付近に設けた三軸加速度計の測定値から求め、伝達衝撃力は各土圧計の測定値を受圧面積で除した土圧応力度に、各部の有効面積を乗じて算出した。実験の概要図を図-3.1 に、土槽の構造図を図-3.2 に、重錘の形状を図-3.3 に示す。



写真-3.1 実規模実験の写真

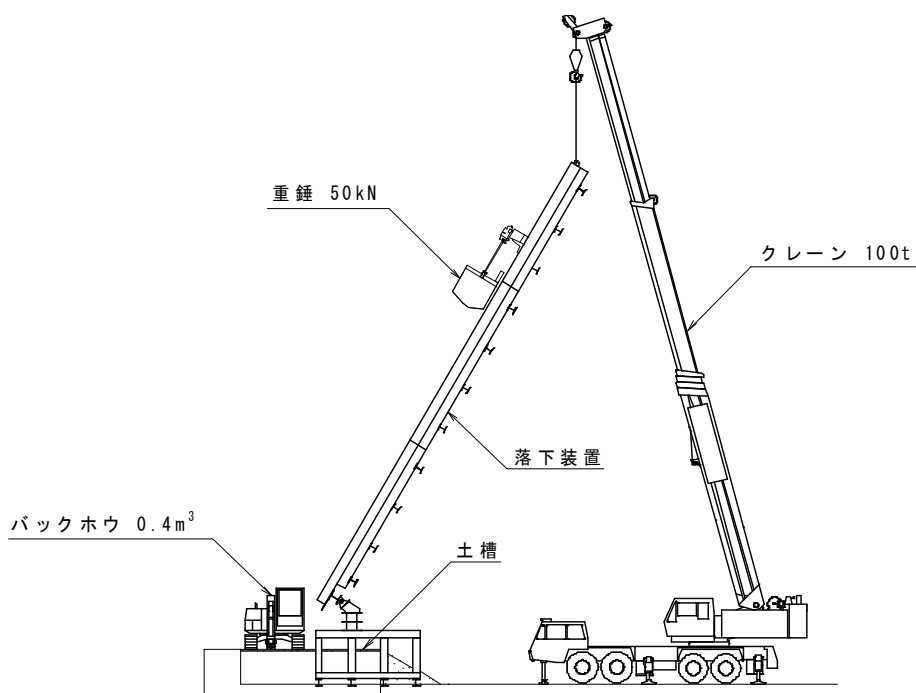
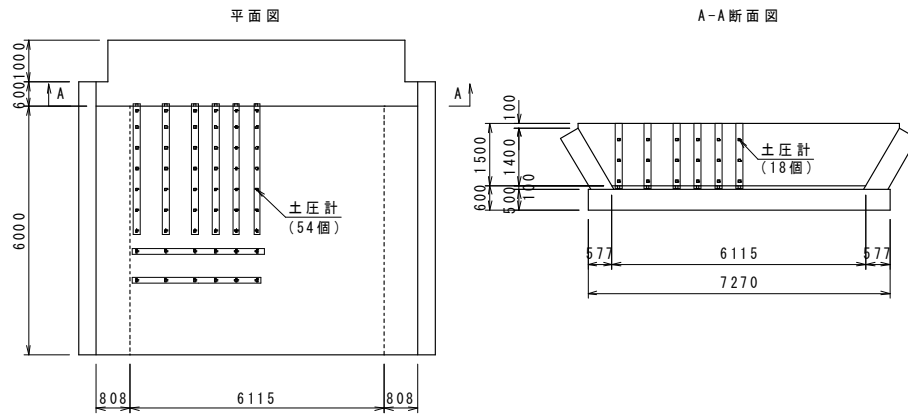
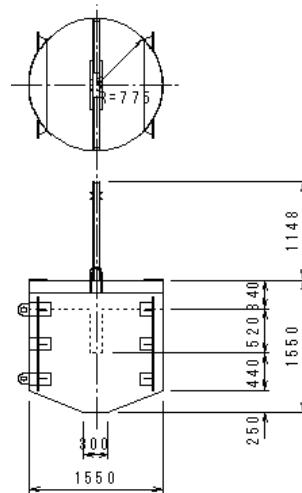


図-3.1 実規模実験の概要図



図－3.2 実規模実験の土槽の構造図



図－3.3 実規模実験の重錘形状図

3.1.2 実規模実験解析の概要

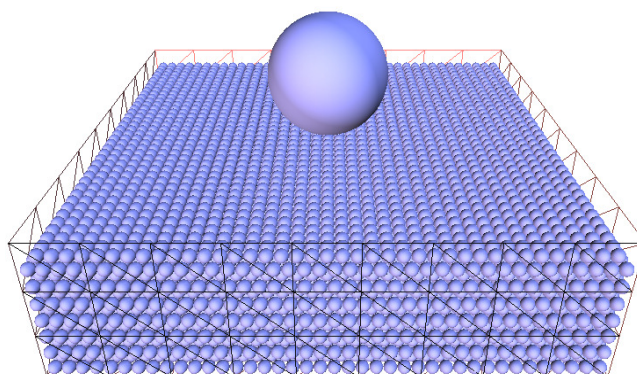
前章で述べた三角形パッチによる壁境界計算手法を導入した 3 次元個別要素法プログラムを用いて、実際の問題への適用性について検討を行った。滑らかな平面である土槽の表面を再現することが可能であり、固定粒子を用いて壁面をモデル化する際に問題となる、粒子の凸凹の影響を取り除くことが可能である。また、三角形パッチの表面にかかる土圧を直接計算できることはメッシュ型解法との連成を簡便に行うことが可能である。

本解析では実験で得られた重錘衝撃力および底面と側面の伝達衝撃力の時刻歴応答に着目し、実験波形と解析波形の比較を行った。

(1) 解析モデル

前項で説明したように、敷砂を十分に締め固めて行っていることから、敷砂は等粒子径

の最密配列でモデル化した。また、実験で用いた土槽は図－3.2の断面図から確認できるように、向かい合う側壁面の1組が底面と成す角が直角ではないものであったが、最密配列で充填する都合、これを完全に対称な箱型として扱った。解析モデルを図－3.4に示す。



図－3.4 実規模実験の解析モデル図

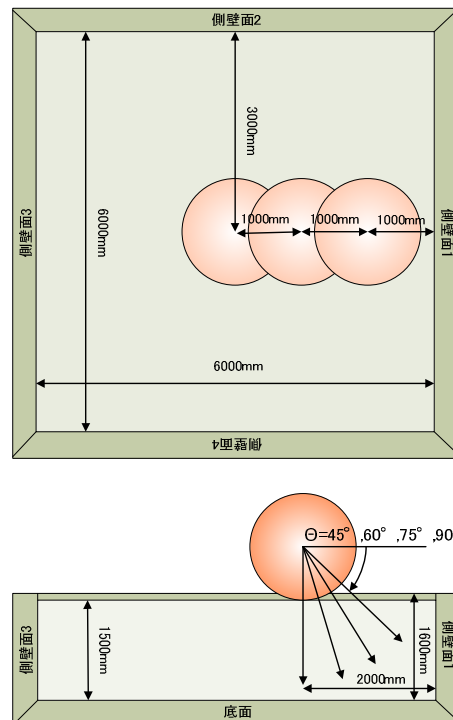
敷砂は $6000\text{mm} \times 6000\text{mm} \times 1500\text{mm}$ の範囲に配置し、これを囲う土槽の寸法を $6000\text{mm} \times 6000\text{mm} \times 1600\text{mm}$ とした。実験で用いた土槽の高さは 1500mm であるが、解析モデルの粒子径は実際の砂より非常に大きく、解析において粒子が溢れ出るのを防ぐために大きめの寸法を採用した。実験で用いた重錘は図－3.3に示すように球形ではないが、簡単のため直径 1550mm の球形要素として扱った。敷砂は要素数 21847 個（奇数段 $7 \times 40 \times 40$ ，偶数段 $7 \times 39 \times 39$ ）の最密配列でモデル化し、土槽は底面を 9×9 分割、各側面を 9×3 分割して 378 枚の三角形壁面要素でモデル化した。

(2) 解析ケース

重錘の落下位置、落下高さ（入射速度）、入射角度を変更しながら解析を行なった。解析ケースは実験ケースの一部に相当し、主として落下高さ 10m 、落下位置が側壁面 1 から 3m （土槽の中心）のケースを行った。解析ケース一覧を表－3.1に示す。落下位置と入射角度に関しては図－3.5に詳細を示す。

表－3.1 実規模実験の解析ケース一覧

解析例	落下位置－側壁面1間距離	落下高さ	入射角度
CASE 1 (3H15A90)	3m	15m	90°
CASE 2 (1H10A90)	1m	10m	90°
CASE 3 (2H10A90)	2m	10m	90°
CASE 4 (3H10A90)	3m	10m	90°
CASE 5 (2H10A75)	2m	10m	75°
CASE 6 (2H10A60)	2m	10m	60°
CASE 7 (2H10A45)	2m	10m	45°



図－3.5 実規模実験の重錘落下位置と入射角度

(3) 解析パラメータの設定

DEM の解析で最も重要なパラメータはばね定数の設定であり，ばね剛性によって接触時間が変化するため最大衝撃力にも大きな影響がある．既往の吉田らの研究⁷⁾と本実験に対し事前に行ったパラメトリックスタディにより，法線方向ばね定数の影響が接線方向のばね定数に比べ非常に大きいことが判明しており，本研究では **CASE1(3H15A90)** を基本解析対象として，衝撃力のピークを合わせるように，法線方向ばね定数を試行錯誤することで定めた．なお，接線方向ばね定数は既往の研究に従い，法線方向ばね定数の 1/4 とし，減衰定数は粒状体の解析に一般的に使用される臨界減衰を仮定した．時間増分は解に影響を及ぼさなくなる大きさの刻み幅とし，砂要素の一質点系の固有周期 1/100 程度とした^{7)~10)}．全ての解析ケースにおいて用いた解析パラメータを表－3.2 に示す．

表－3.2 実規模実験の解析パラメータ

要素半径	75.0(mm)
要素質量	4.70(kg)
重錘要素半径	775(mm)
重錘要素質量	5280(kg)
法線方向ばね定数	3.20(kN/mm)
接線方向ばね定数	0.80(kN/mm)
減衰定数	1
内部摩擦角	30.0度

3.1.3 再現解析の解析結果

(1) 衝撃力波形

重錘衝撃力は重錘要素の作用力波形とし、底面および側面衝撃力はそれぞれ壁面の法線方向に作用する作用力の合計を波形として算出した。なお、図-3.5 における側壁面 1 を以後側面と表現する。図-3.6 から図-3.12 に実験と解析を比較した衝撃力応答波形を示す。ばね定数のパラメトリックな算定にて基本ケースとした CASE1 では、底面衝撃力と側面衝撃力の最大値は概ね良好に一致しており、落下位置や入射角度の異なるケースでは実験と解析の差が認められるが、底面衝撃力波形が重錘衝撃力波形の 2 倍程度の大きさとなる実験的事実を解析により再現できていることが分かる。なお、解析モデルでは伝播速度がやや大きいことがわかるが、この点については、ばね定数、要素の大きさや形状再現性、粒子配置が影響する興味深い問題と考えている。

図-3.7 から図-3.9 より、実験では壁からの距離が離れるに従い、底面での伝達衝撃力最大値の低下が実験で認められるが、解析では要素分割や要素配置の影響のためかほとんど相違は見られない。図-3.10 から図-3.12 より、斜め衝突の角度が小さくなるほど、どの衝撃力にも認められる低下傾向を再現していることが分かる。底面衝撃力でその傾向は顕著であるが、側面衝撃力は解析結果がやや大きくなっている。実験では、斜め衝突時に、衝突点を中心として円柱状の重錘の側壁方向への大きな回転が生じ、これは入射角が小さいほど顕著であった。入射角が小さいほど横方向力が小さくなり、結果として側面衝撃力が小さくなったと考えられる。一方、解析では重錘を球として取り扱っているため、斜め衝突に対しそのような大きな回転は生じなかった。そのため、入射角が小さいほど側面衝撃力の実験値との差が大きくなったと考えられる。

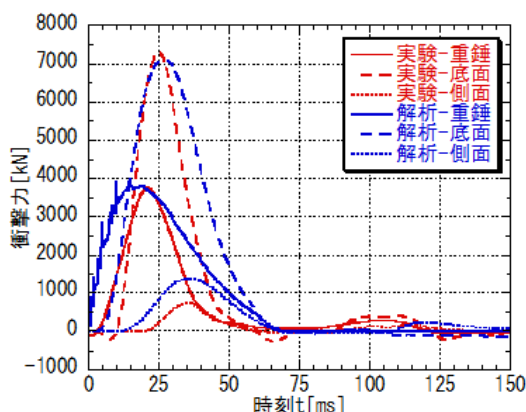


図-3.6 CASE1(3H15A90)衝撃力時刻歴

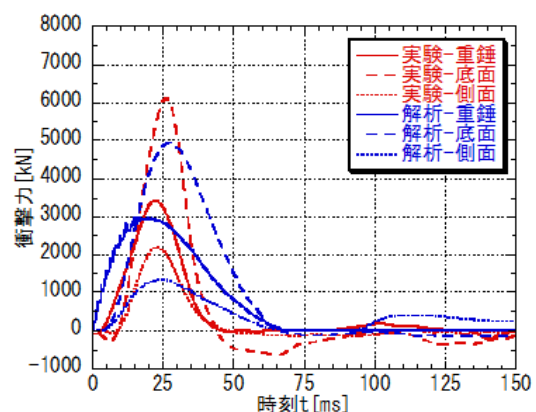


図-3.7 CASE2(1H10A90) 衝撃力時刻歴

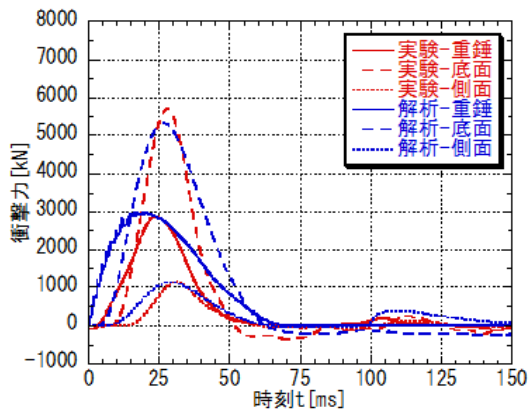


図-3.8 CASE3(2H10A90) 衝撃力時刻歴

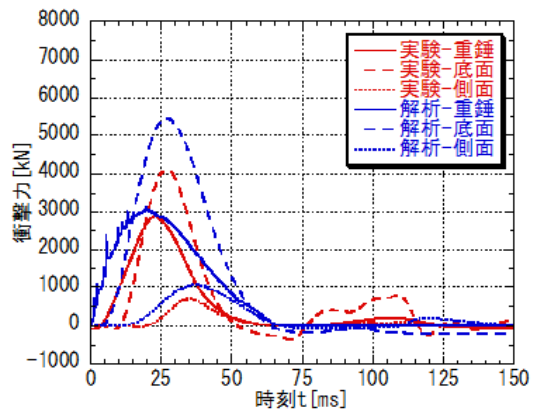


図-3.9 CASE4(3H10A90) 衝撃力時刻歴

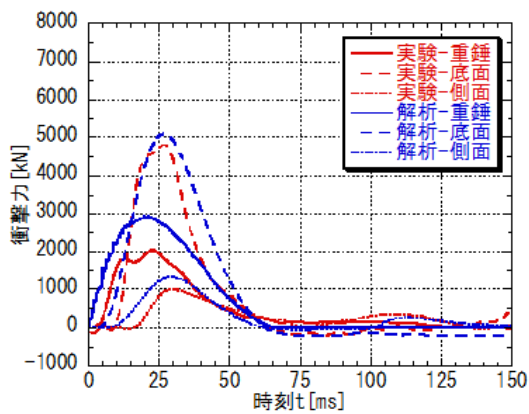


図-3.10 CASE5(2H10A75) 衝撃力時刻歴

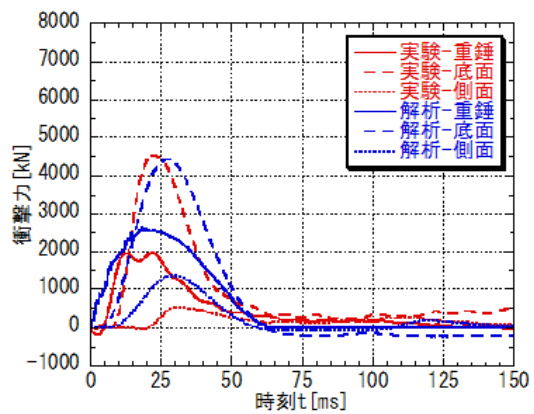


図-3.11 CASE6(2H10A60) 衝撃力時刻歴

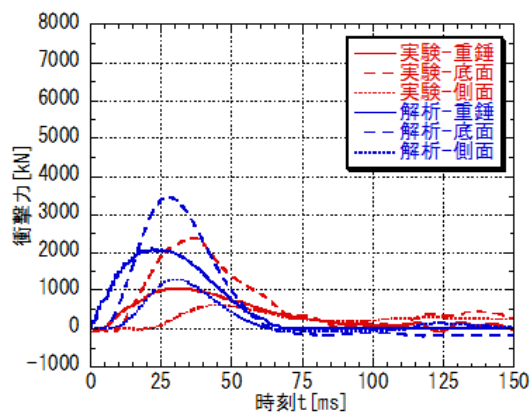
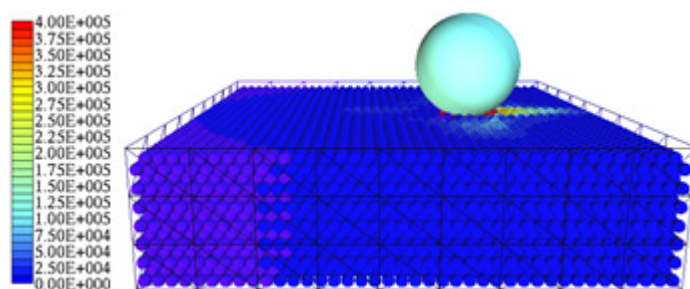


図-3.12 CASE7(2H10A45) 衝撃力時刻歴

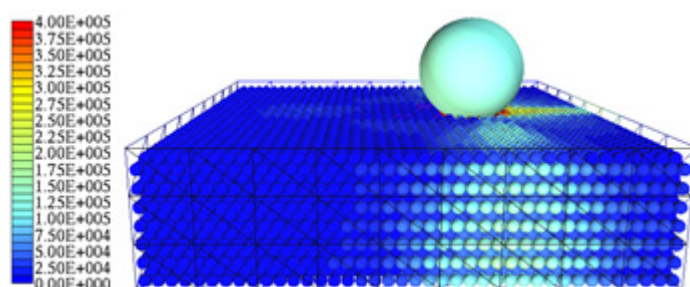
(2) 敷砂の衝撃応答

敷砂を伝わる衝撃圧の伝搬と挙動を、各要素の圧力の大きさをコンター表示を行い描画した。この圧力値は各要素が接触により受けた全法線方向作用力の内、最大の成分を球の

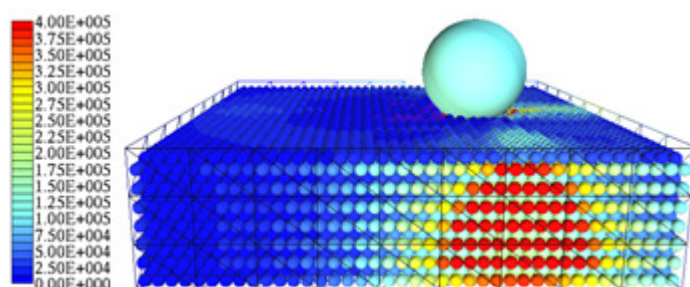
断面積で除することで算定した．1例として，CASE6(2H10A60)の10ms経過時から90ms経過時までの衝撃圧の伝搬過程を図－3.13から図－3.21に示す．斜め入射の重錘落下直後は進行方向と側面方向へ弾性波動が伝播し，側壁面で大きな応力を生じていることが視認できる．時刻50ms以降，進行方向と逆方向へ弾性波動が伝播し，収束して行く様子が図から確認できる．図化することにより重錘衝突の定性的な評価が可能であるが，本解析における簡易なモデルでは，重錘の貫入や跳躍挙動を正確には再現できていない．主な理由としては粒子モデルを等粒径の最密配置で作成していることと，重錘形状の再現性にあると考えられる．



図－3.13 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布（10ms経過時）



図－3.14 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布（20ms経過時）



図－3.15 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布（30ms経過時）

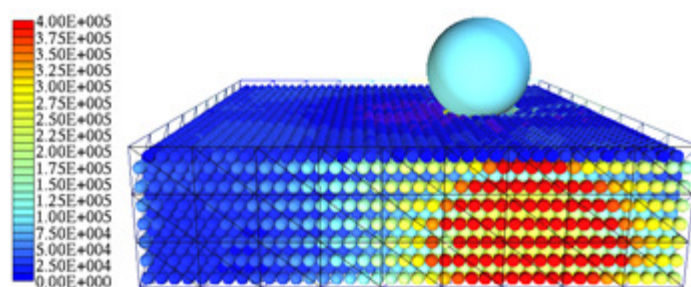


図-3.16 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布 (40ms 経過時)

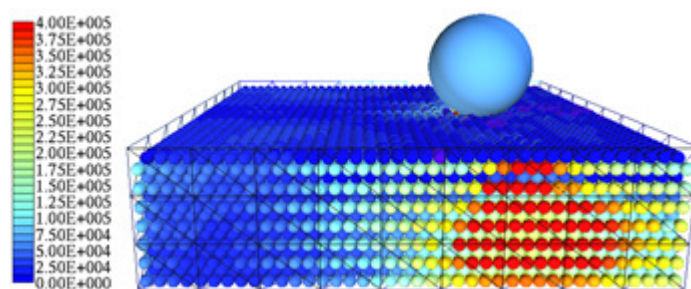


図-3.17 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布 (50ms 経過時)

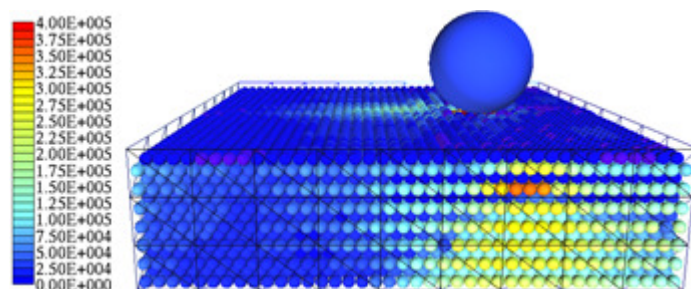


図-3.18 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布 (60ms 経過時)

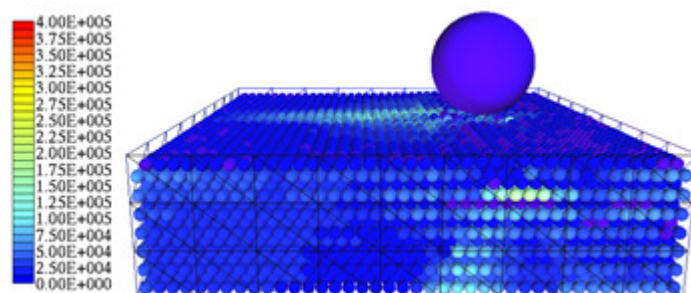


図-3.19 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布 (70ms 経過時)

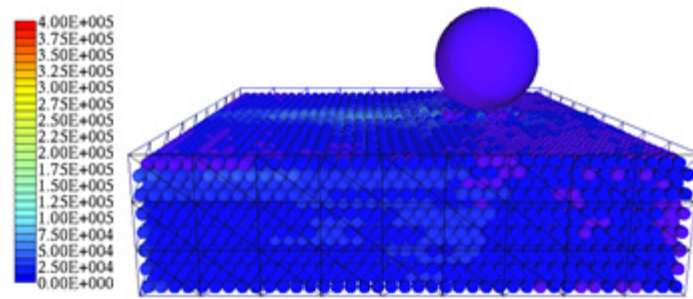


図-3.20 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布 (80ms 経過時)

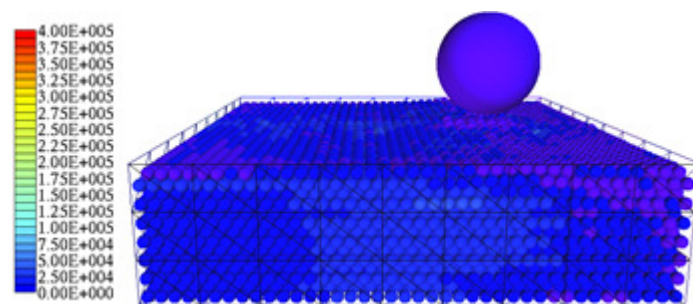


図-3.21 CASE6(2H10A60)の敷砂の衝撃応答と要素圧力分布 (90ms 経過時)

(3) 土槽壁面の作用圧

敷砂と同様に土槽モデルについても同様のコンター表示を行った．CASE6(2H10A60)の土槽を構成する各壁面要素に生じた応力の時刻歴応答を図-3.22 から図-3.25 に示す．これらの図は土槽上方から画角 45 度の透視投影で見た図であり，輪郭線で境界を示す底面と側面の全てが 1 枚の図で確認できる．単一の壁面要素に作用する作用力は全て法線の向きが等しいため，法線方向の全作用力合計を要素面積で除してその要素の応力とした．また，各壁面要素は小さな三角形平面であるが，図化した際の外観の問題から，対となる辺を共有する要素と平均して描画していることから，四角形要素の集合に見える．

図から重錘落下地点直下に伝達衝撃力が到達し，進行方向と側方向の側壁面へ衝撃力が伝達される過程が認識できる．衝撃力は $t = 30 \text{ ms}$ 秒付近にピークがあり，その後は消散して行く．実験においては，直径 4m 程度の範囲に荷重分散が認められ，概ねそれを再現できている．重錘落下地点直下に比較的応力の小さい部分が見られるのは，敷砂を等粒子径の最密配列でモデル化しているため，鉛直方向の作用力が直下ではなく斜め 45 度方向へ伝達される特性が強くなるためである．このように解析結果を図化することによって，時々刻々と土槽のどの部位に力が集中するのかなどが容易に把握でき，緩衝材の性能に関する有意な情報を得ることができる．

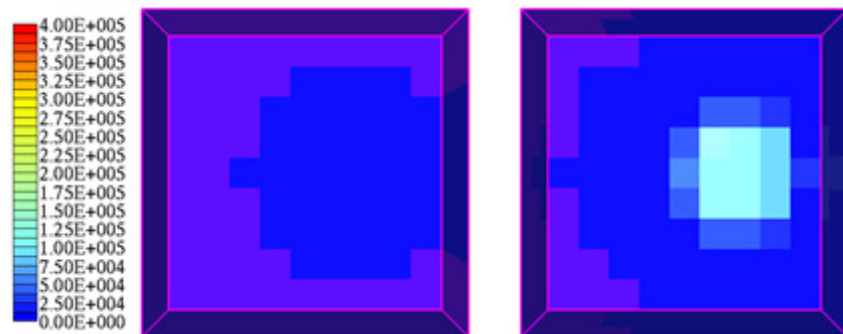


図-3.22 CASE6(2H10A60)の土槽の壁面圧分布 (左: 5ms 経過時, 右: 10ms 経過時)

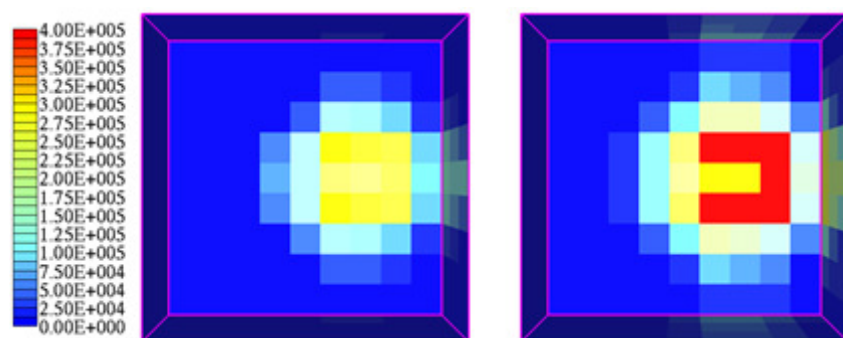


図-3.23 CASE6(2H10A60)の土槽の壁面圧分布 (左: 15ms 経過時, 右: 20ms 経過時)

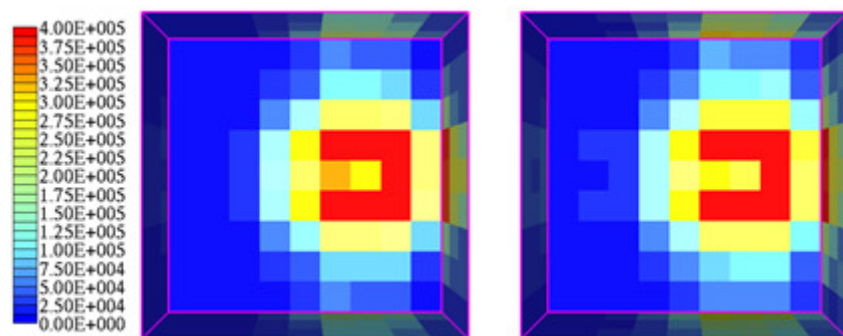
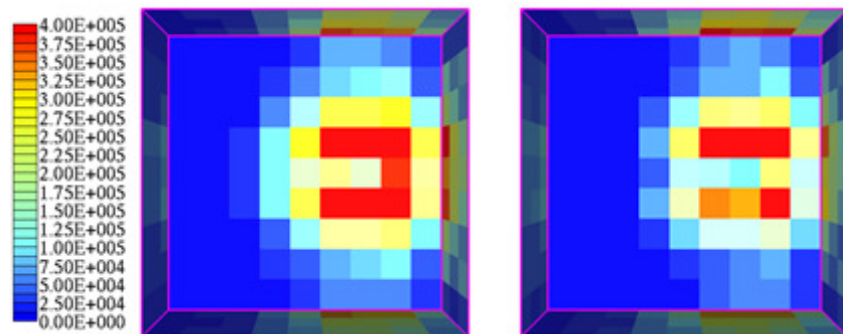


図-3.24 CASE6(2H10A60)の土槽の壁面圧分布 (左: 25ms 経過時, 右: 30ms 経過時)



図－3.25 CASE6(2H10A60)の土槽の壁面圧分布（左：35ms 経過時，右：40ms 経過時）

3.1.4 まとめ

ロックシェッドの上部に設けられる実規模土槽への斜め入射落石実験を対象に，DEM による数値解析を行い，実験結果との比較検討を行った．ばね定数を実験結果から得られる最大荷重を再現するようにパラメトリックに設定し，ある条件下の重錘衝撃力と伝達衝撃力のある程度再現することは可能である．しかし，重錘の落下位置や入射角度が異なるケースについては，そのままのばね定数では再現性は低い．また，ピーク値を合わせても衝撃力の応答波形は異なるため，実現現象を再現できていないわけではない．

土槽の壁面を三角形パッチでモデル化することによって，砂粒子・壁面間の滑らかな接触状態を再現し，伝達衝撃力の分布を明らかにした．砂層のモデル化を最密格子配列で行っているため，作用力の伝達経路が単調であるが，放射状に広がる様子を解析結果から確認できた．このような境界面を設定することで，比較的容易に FEM などのメッシュ型解法との連成解析を行うことができる．

実験結果と解析結果にみられる差異は，砂モデルを最密格子配置で作成していることや，重錘を 1 要素でモデル化したため，衝突体の形状が実際と合っていないことが大きいと考えられる．次節ではこれらのモデル化による現象の違いを小さくするために，より詳細なモデル化による解析を行った．

3.2 粒子径分布を考慮した敷砂の衝撃応答解析

前節ではロックシェッド上に設けられる実規模土槽への重錘落下実験に対して，DEM による衝撃応答解析を行った．しかし，最密格子配置による砂層のモデル化や，重錘を 1 つの大径粒子でモデル化することによって，実現現象との間に大きな差が生じ，衝撃力応答の十分な再現を行うことができなかった．そこで本節では，金沢大学にて行った重錘落下実験を対象とし，解析モデルの高度化を図り行った DEM 解析について述べる．

解析モデルの作成において実施した改良点は以下の 2 項目である．

1. 粒子集合剛体による重錘の形状再現性と剛体運動の計算精度向上
2. 粒子径分布を考慮した砂層のモデル化

3.2.1 重錘落下実験の概要

写真－3.2 は、金沢大学構造工学研究室ハードラボに設置された自由落下式実験装置の全体を示したものである。幅 2.35m，奥行き 3.5m，高さ 4.5m の重錘落下用フレームを用いて重錘を中心に設置した土槽に自由落下させる装置である。なお土槽は図－3.26 と図－3.27 に平面図と立面図を示すように，1.1m 四方の面積に砂を敷くことができ，敷厚は 0.75m まで可能である。土槽底面には写真－3.3 に示すように土圧計を配置しており，側壁面については土圧を計測していない。

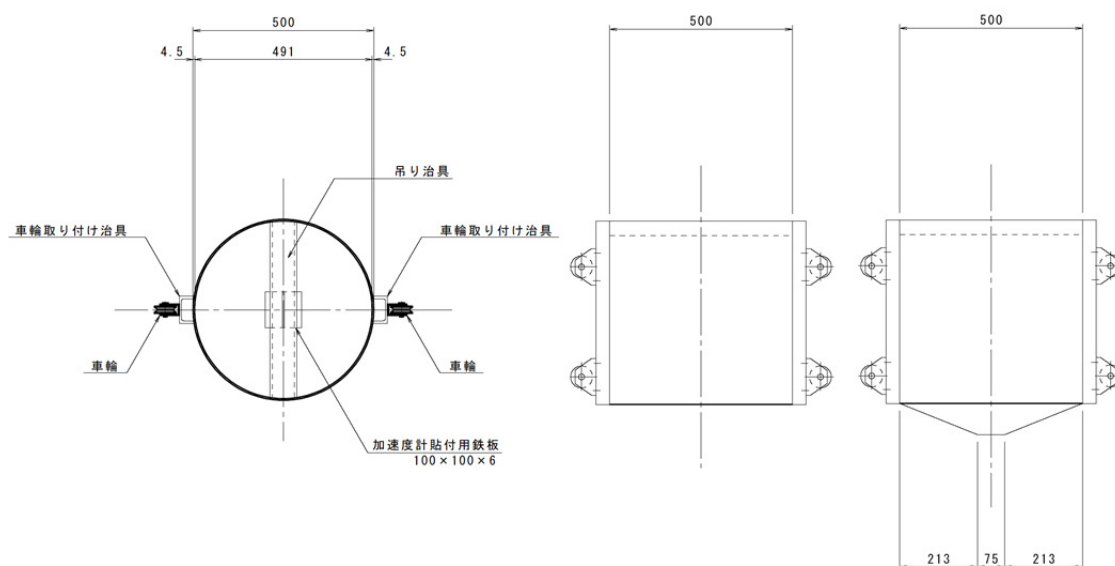


写真－3.2 重錘落下実験装置の写真



写真－3.3 実験装置の土槽底面に配置した土圧計

図－3.28 は用いた 2 種類の重錘を示したものである．底面が平らな円であるもの（以後，平底と呼ぶ）と円錐形状であるもの（以後，錐底と呼ぶ）の 2 種類を使用した．いずれも重量は 2kN であり，断面の直径が 0.5m である鋼殻にコンクリート充填した円筒形状の重錘である．



図－3.28 重錘落下実験の重錘構造図

測定項目は重錘に生じる衝撃力と土槽底面の伝達衝撃力である．重錘衝撃力は重錘に 3 次元加速度計を設置することで測定し，底面伝達衝撃力は土槽底面に土圧計を設置することで測定した．土槽の底面は一辺 1.1m の正方形であり，重錘は中央位置へのみ落下させるため，対称性を考慮して四分の一の正方形の領域に 36 個の土圧計を設置した（写真－3.3 及び図－3.26 参照）．本実験装置の測定システムでは，各計測器より得られた出力を 100 μ s のサンプリング間隔（サンプリング周波数：10kHz）で測定している．

土槽には緩衝材として厚さ 30cm，50cm，70cm の敷砂材を敷設し，2.0kN の重錘をそれぞれ落下高さ 0.5m，1.0m，1.5m，2.0m，2.5m，3.0m から 3 回ずつ全てスパン中央位置に落下させた．使用した砂は新潟県胎内市黒川地内川砂であり、その特性値は表－3.3 に示す．本研究で報告する実験で実施したケース一覧を表－3.4 に示す．

表－3.3 実験に使用した砂の特性値

D ₁₀ (mm)	D ₃₀ (mm)	D ₆₀ (mm)	有効粒径 (mm)	均等係数	曲率係数	最大間隙比 e _{max}	最小間隙比 e _{min}
0.20	0.34	0.61	0.49	3.1	0.95	0.784	0.488

表－3.4 実験のケース一覧

重錘の形状	砂厚 [cm]	落下高さ [m]
平底	30	0.5, 1.0, 1.5
	50	0.5, 1.0, 1.5, 2.0
	70	0.5, 1.0, 1.5, 2.0
錐底	30	0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
	50	0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0
	70	0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5

3.2.2 重錘落下実験解析の概要

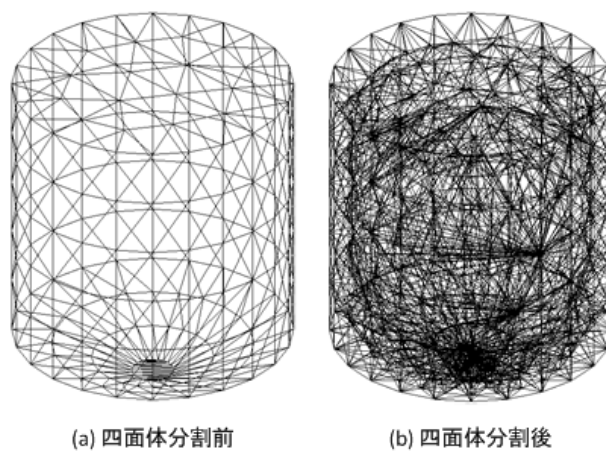
3次元個別要素法に用いる要素として球形要素を採用した場合、モデルを構成する球形要素の配列としては、規則配列かランダム配列が考えられる。規則配列は等粒子径の粒子でモデル化する際に用いられ、多くの場合、格子配列と最密配列が採用されている。ランダム配列は多粒子径のモデルや規則配列では充填が難しい形状のモデル化に用いられ、重力落下等の手法によるパッキング計算により作成できる。

前節で述べた実規模実験の解析においては規則配列によるモデル化を用いていたが、これらの配列は作用力の伝達が単調であり、モデル配列が解析挙動に与える影響が極めて大きいことから、解析においては問題となる衝撃形式などの違いによって配列の決定を行う必要があった。本解析については、重錘は格子配列の粒子集合による剛体モデルとし、緩衝材はランダム配列でモデル化した。

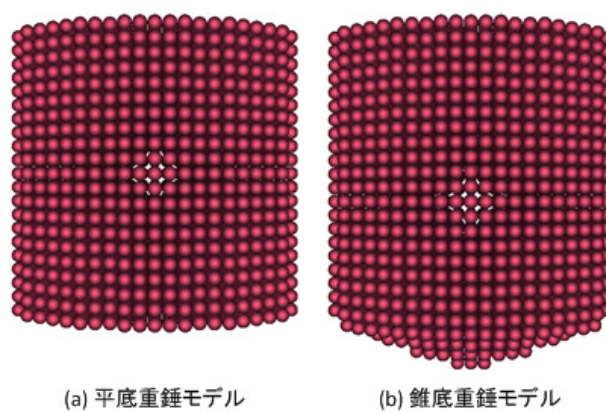
本解析では実験で得られた重錘衝撃力および底面の伝達衝撃力の時刻歴応答に着目し、実験波形と解析波形の比較を行った。

(1) 重錘のモデル化

前節の検討より、重錘を大径粒子で置き換える簡易的なモデル化では、平底重錘のような形状効果を表現しにくいことが明らかになっている。そこで、実際の重錘形状データを用いて格子配列の複数粒子で構成される重錘モデルの作成を行った。格子配列粒子による重錘のモデル化は粒子座標が形状表面の内側にあることを判定し実現した。本解析における重錘モデルは凸な形状であるため、全ての表面三角形に対して内外判定を実施するだけで実現可能である。しかし、完全に凸な形状でない場合には問題があり、より複雑な形状に対応するために、表面形状を凸な形状である四面体要素に分解し四面体毎に処理を実行することにした。四面体分解には3次元デローニー分割^{12),13)}を利用した。図－3.29に錐底重錘の表面形状データと四面体分解後のメッシュ図を示す。また、図－3.30に格子配列で粒子化した平底と錐底の重錘モデルを示す。それぞれの重錘モデルは、外殻が鋼製であり厳密には中に充填されたコンクリートと密度が異なるが、影響は小さいと考えて構成粒子に質量を等分配した。表－3.5に作成した重錘モデルの詳細を示す。



図－3.29 重錘の表面形状データの四面体分割



図－3.30 重錘の粒子集合剛体によるモデル化

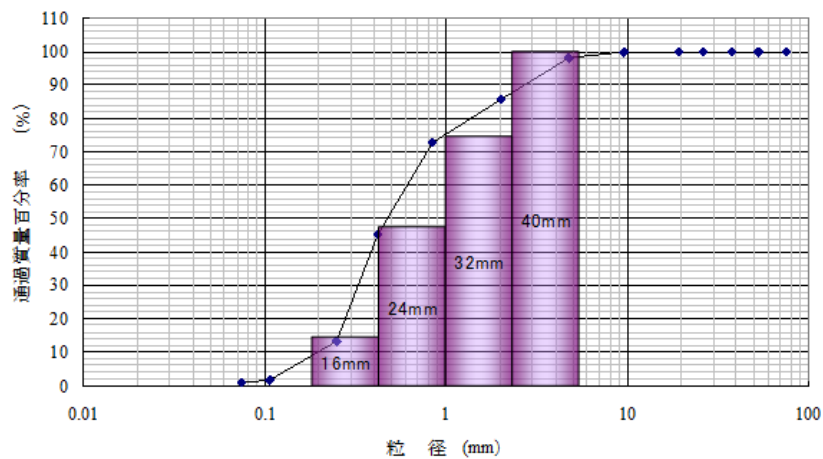
表－3.5 粒子集合剛体による重錘モデルの詳細

	平底重錘	錐底重錘
質量[kg]	200.6	202.5
粒子半径[mm]	12	12
粒子数[個]	7161	7681
粒子密度[kg/m ³]	3869.7	3642.6

(2) 緩衝材のモデル化

本解析では、緩衝材モデルをパッキング計算によりランダム配列として作成した。実際の緩衝材の粒度分布をモデルで忠実に再現することは現時点では困難であるが、本研究では、ある粒度分布モデルを設定した。モデルは供試体の粒度分布を参考に4階級に分級し、重力落下解析によるパッキング計算により作成した。緩衝材モデルは実際の供試体の粒径

分布を大胆に単純化して粒子径を決定したが、モデル規模に対して最大径粒子が大きくなり過ぎたため、粒径差が一様になるように粒径を修正して作成した。実際に作成した緩衝材モデルの粒子径と質量分率を図－3.31 に、緩衝材モデルの粒子半径別粒子数を表－3.6 に示す。また、供試体の湿潤単位体積重量を元に、全体の質量が一致するように算出した緩衝材モデル粒子の密度を表－3.7 に示す。図－3.32 に層厚 70cm の緩衝材モデルと錐底重錘モデルの組み合わせを示す。



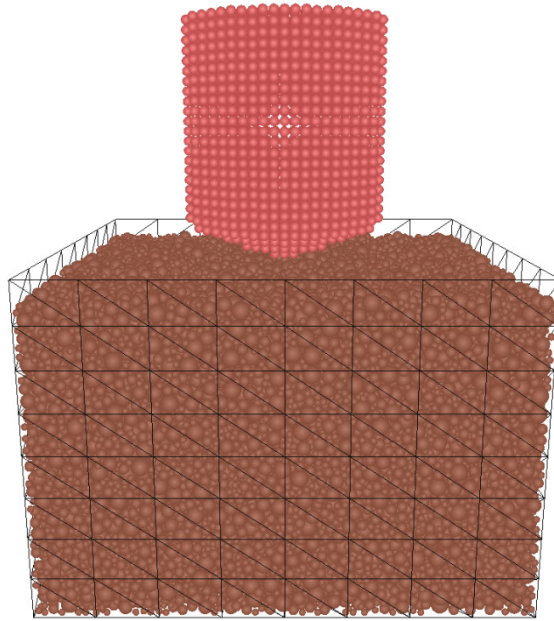
図－3.31 実験試料と緩衝材モデルの通過質量百分率

表－3.6 緩衝材モデルの粒子半径別粒子数

層厚[cm]		粒子半径				合計
		8.0mm	12mm	16mm	20mm	
h=70	個数	37486	24302	8613	4130	74531
	質量比[%]	14.82	32.43	27.24	25.51	100.00
h=50	個数	27026	17501	6145	2972	53644
	質量比[%]	14.87	32.51	27.06	25.56	100.00
h=30	個数	16379	10650	3745	1770	32544
	質量比[%]	14.90	32.69	27.25	25.16	100.00

表－3.7 緩衝材モデルの粒子密度

層厚[cm]	緩衝材質量[kg]	粒子総体積[m ³]	粒子密度[kg/m ³]
h=70	1460	0.542472	2691.386
h=50	1040	0.389662	2668.979
h=30	620	0.235782	2629.549



図－3.32 層厚 70cm の緩衝材モデルと錐底重錘モデル

粒子径分布を考慮しない解析では，同一粒子径同士でのばね定数を設定し，解析を行っていたが，本解析では粒子径が異なる粒子同士で作用力を伝達するため，接触時に設定するばね定数には以下の 2 つの仮定を導入した．

1 つ目は，同一粒子径粒子間に設定するばね定数は，基準粒子径粒子間に設定する基準ばね定数に対して粒子径に比例すると考えた．この仮定は，ポアソン効果のない単位立法体を格子配列の等粒子径粒子でモデル化した際に，一定の外力を加えて生じる変形量が，粒子分割数に依存しないようにばね定数を設定する際の考え方に基づいている．

2 つ目は，異なるばね定数を設定した粒子間で作用力を伝達する際に，計算上のばね定数は直列合成されると考えた．この際に，設定する基準ばね定数は同一の剛性を持つ粒子間のばね定数であるので，直列合成によって合成ばね定数を設定した．すなわち，粒子*i*と粒子*j*の接触時のばね定数 k_{ij} はそれぞれのばね定数 k_i および k_j を用いて次式で計算される．

$$k_{ij} = \frac{k_i \cdot k_j}{k_i + k_j} \quad (3.1)$$

(3) 解析ケース

解析ケースは実施した実験の条件に沿うように設定し，全てのケースを網羅すると数が多くなるため，落下高を 1.0m と 1.5m に限定して解析ケースを設定した．緩衝材の層厚によってランダム配置の影響により若干間隙比が異なるため，粒子密度はケース毎に異なる値を設定している．解析ケースの一覧を表－3.8 に示す．

表－3.8 重錘落下実験の解析ケース一覧

解析ケース	重錘型	層厚[cm]	落下高[m]
JHT30F10	平底	30	1.0
JHT30F15	平底	30	1.5
JHT50F10	平底	50	1.0
JHT50F15	平底	50	1.5
JHT70F10	平底	70	1.0
JHT70F15	平底	70	1.5
JST30F10	錐底	30	1.0
JST30F15	錐底	30	1.5
JST50F10	錐底	50	1.0
JST50F15	錐底	50	1.5
JST70F10	錐底	70	1.0
JST70F15	錐底	70	1.5

(4) 解析パラメータの設定

前節で述べたように、法線方向ばね定数の影響が接線方向のばね定数に比べ非常に大きいことが判明している。そこで、接線方向ばね定数は法線方向ばね定数の 1/4 に固定し、法線方向ばね定数を重錘衝撃力波形と比較して決定した。ばね定数算出の基本ケースとして層厚 70cm のケースを選定し、最小粒子径の粒子間ばね定数を基準ばね定数としてパラメトリックに設定した。減衰係数は臨界減衰を基準に設定したが、波形への影響を考慮して経験的に臨界減衰の 5%（反発係数で 0.854）とした。時間増分は解に影響を及ぼさなくなる大きさの刻み幅とし、最小径の緩衝材粒子の一質点系の固有周期 1/100 程度とした。全ての解析ケースにおいて共通で用いた解析パラメータを表－3.9 に示す。

実験結果から得られる弾性波伝播速度は 150m/sec であり、1 次元波動論からばね定数を近似すると、法線方向基準ばね定数は 4.92kN/mm となり、本解析ではそれより小さい値を設定している。また、粒子間摩擦角は供試体の一面せん断試験より得た値を設定した。単体の球形要素を用いた個別要素法解析においては、バルクの摩擦抵抗が粒子間摩擦に対して小さくなることが知られているが、本解析においては特に対策^{25),28),21)}は行っていない。

表－3.9 重錘落下実験の解析パラメータ

法線方向基準ばね定数	3.20(kN/mm)
接線方向基準ばね定数	0.80(kN/mm)
減衰定数	0.05
粒子間摩擦角	44.5 度

3.2.3 再現解析の解析結果

(1) 衝撃力波形

実験と解析の衝撃力波形の比較を行った。平底重錘落下ケースの比較を図-3.33 から図-3.38 に、錐底重錘落下ケースの比較を図-3.39 から図-3.44 に示す。平底重錘落下ケースについては、実験波形と解析波形は良く一致しており、特に層厚 70cm と 50cm のケースで再現性が高い。JHT50F15 では波形がほぼ重なっており、立ち上がりだけでなくその後の重錘の浮き上がり過程も再現出来ていることが分かる。これは、重錘を大径粒子 1 つでモデル化した場合は得られなかった結果であり、重錘を正確にモデル化する有効性が確認できた。また、平底重錘のケースでは土槽面積に対して貫入面積が占める割合が大きいため、バルク内部の変形が拘束される条件下にあり、球形要素を用いた解析においても十分な摩擦抵抗が得られたことも重要である。

錐底重錘落下ケースでは、継続時間は概ね再現出来ているが、最大荷重が全ケースで小さいことが確認できる。この原因について、重錘を格子配列でモデル化したため、重錘先端部の円錐形の斜面部分の凹凸の影響によるものと考え、粒子集合剛体を多面体ブロックに置き換えた検討を行ったが有意な差は認められなかった（図-3.51）。この他に考えられる原因として、緩衝材の流動時に生じる滑りによる損失が考えられる。DEM の解析では、球形要素を用いた場合に実際の形状粒子と比較して滑りやすい問題が知られており、平底重錘のケースと比べて流動が生じやすい錐底重錘ケースでこの影響が現れたと考えられる。

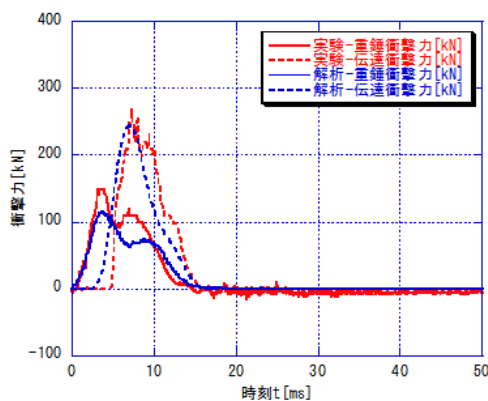


図-3.33 ケース JHT30F10 衝撃力時刻歴

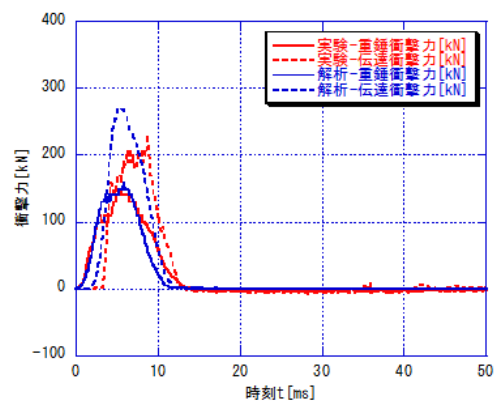


図-3.34 ケース JHT50F10 衝撃力時刻歴

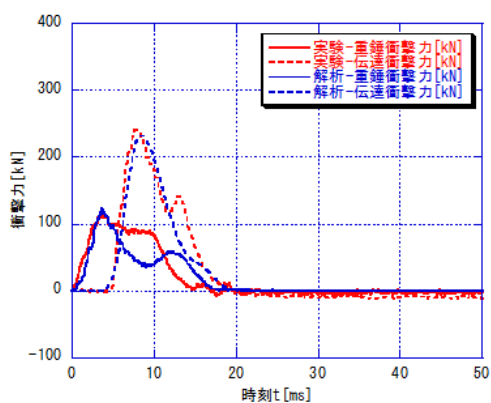


図-3.35 ケース JHT70F10 衝撃力時刻歴

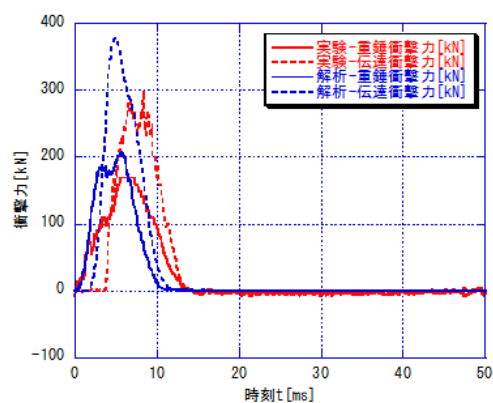


図-3.36 ケース JHT30F15 衝撃力時刻歴

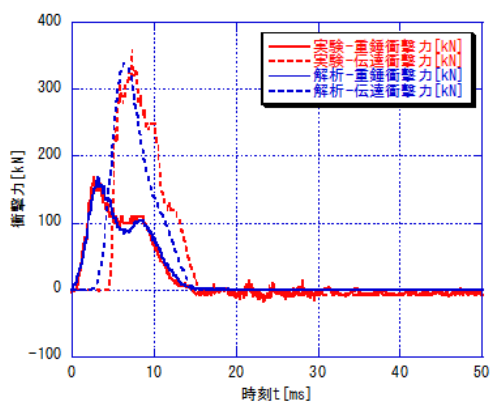


図-3.37 ケース JHT50F15 衝撃力時刻歴

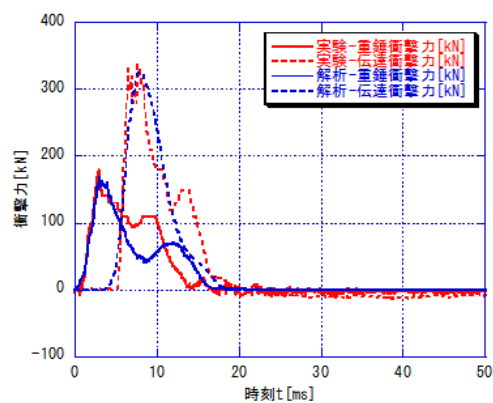


図-3.38 ケース JHT70F15 衝撃力時刻歴

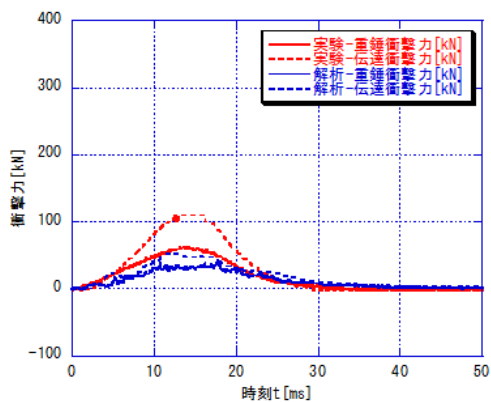


図-3.39 ケース JST30F10 衝撃力時刻歴

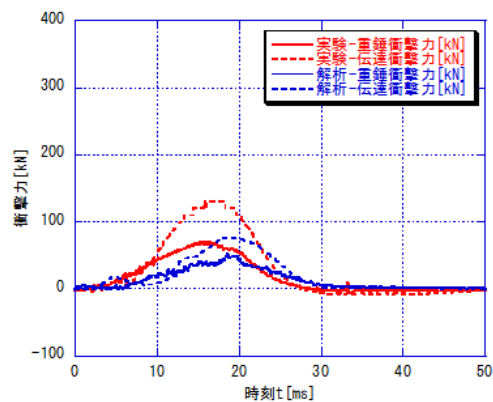


図-3.40 ケース JST50F10 衝撃力時刻歴

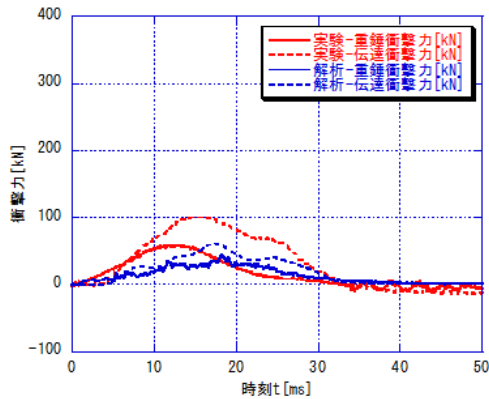


図-3.41 ケース JST70F10 衝撃力時刻歴

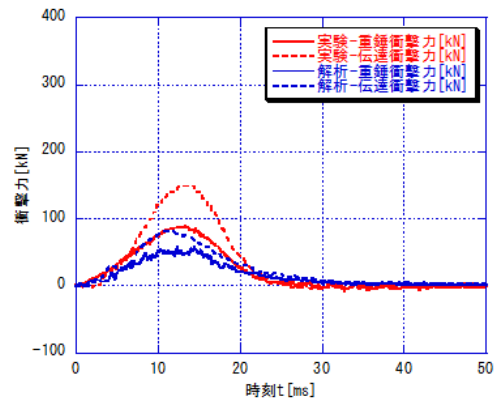


図-3.42 ケース JST30F15 衝撃力時刻歴

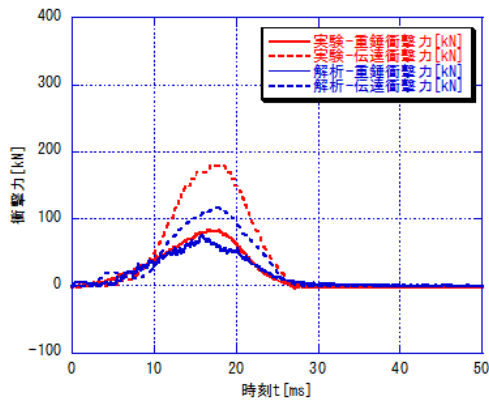


図-3.43 ケース JST50F15 衝撃力時刻歴

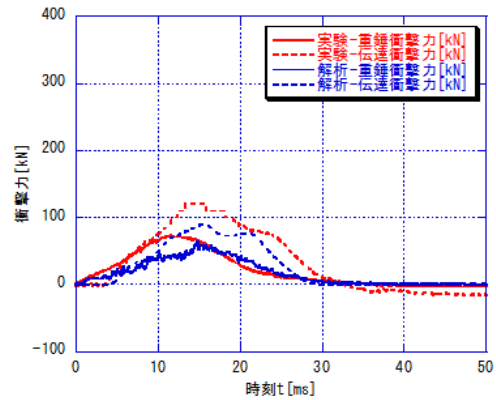
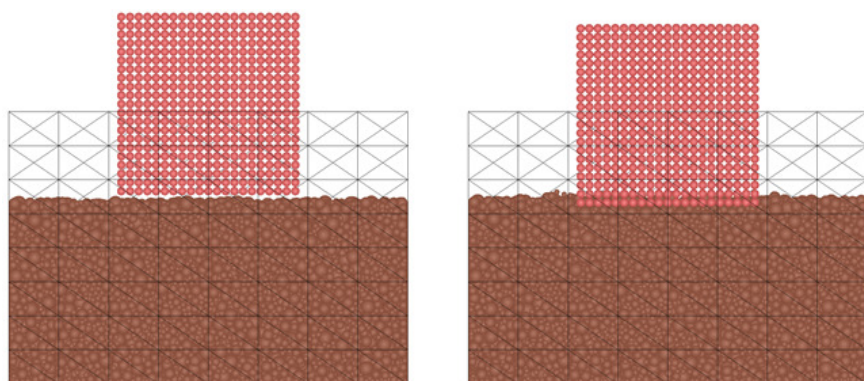


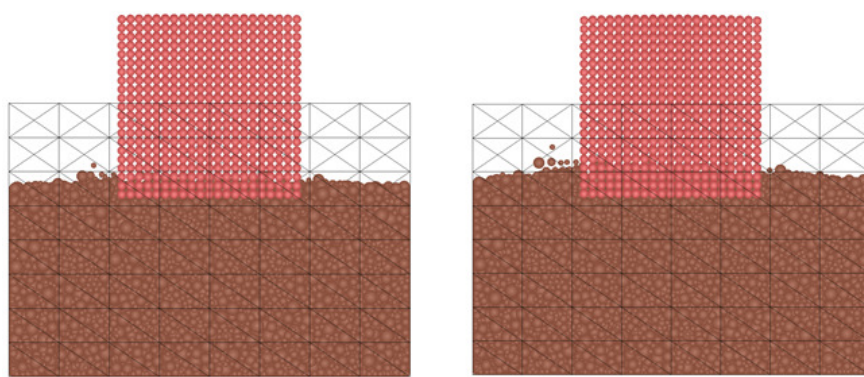
図-3.44 ケース JST70F15 衝撃力時刻歴

(2) 重錘の貫入過程

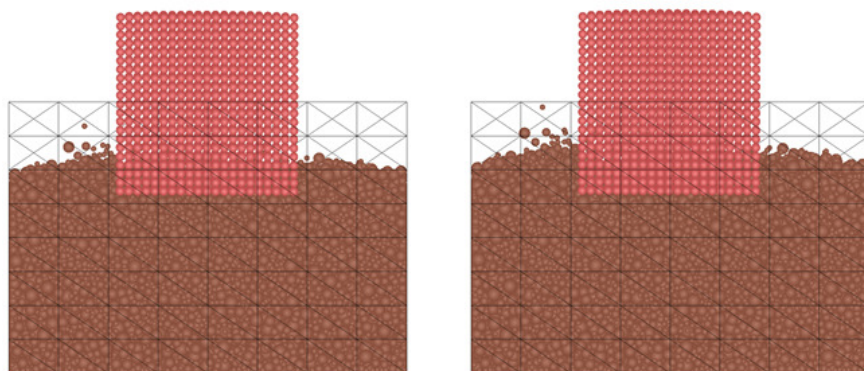
前節の実規模実験の解析ではサンドクッションを規則配列でモデル化していたため、重錘が砂層に貫入していく過程の再現が特に最密配列モデルで困難であった。衝撃力波形より、最も現象の再現性が高いと考えられる JHT50F15 のケースについて、重錘の貫入過程を正面より奥行き方向中央断面を描画することで確認した。図-3.45 から図-3.48 に粒子の移動を時間断面毎の画像で示す。先端がフラットな形状のため、一般に他の形状の重錘に比べ貫入量の小さい平底重錘でも敷砂層へ潜り込んでいることが確認できる。



図－3. 45 JHT50F15 の重錘貫入過程の中央断面図（左：0ms 経過時，右：10ms 経過時）



図－3. 46 JHT50F15 の重錘貫入過程の中央断面図（左：20ms 経過時，右：30ms 経過時）

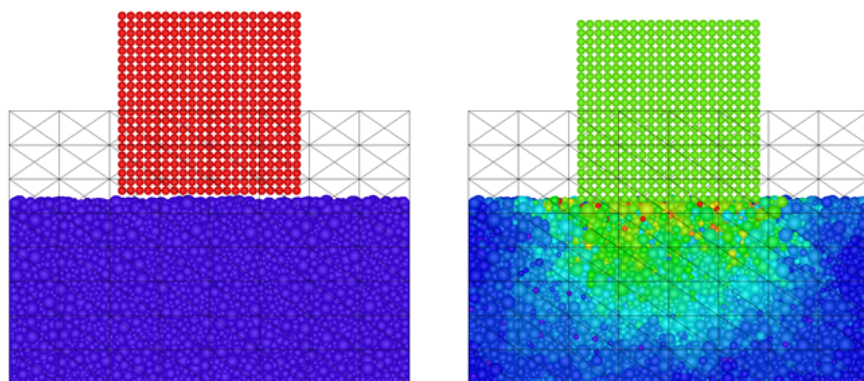


図－3. 47 JHT50F15 の重錘貫入過程の中央断面図（左：40ms 経過時，右：50ms 経過時）

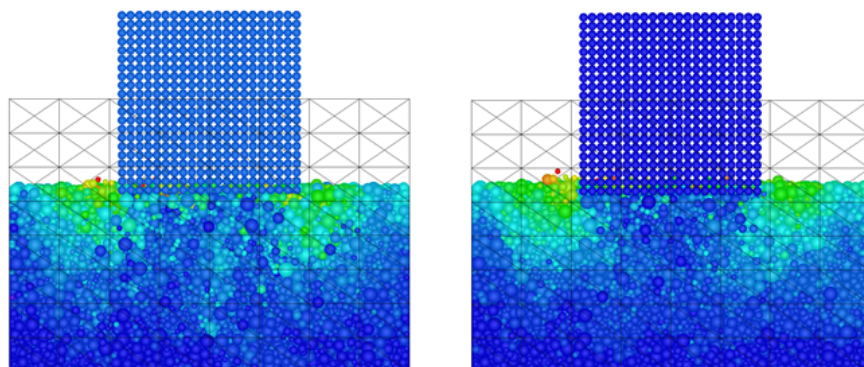
JHT50F15 のケースについて，重錘の貫入過程における奥行き方向中央断面の粒子速度分布時刻歴を図－3. 48 から図－3. 50 に示す．粒子の色は速度の大きさを意味しており，暖色ほど粒子速度が大きい．剛体である重錘の構成粒子は重心での並進速度を全構成粒子で出力しており，剛体回転により生じる速度差は出力していない．

重錘は初速度でサンドクッションに衝突し，時刻 3.3ms で最大衝撃力を発生する．その後 6.6ms で最大の伝達衝撃力を発生する反射波と衝突し，重錘衝撃力の第 2 波を生じ，重錘直

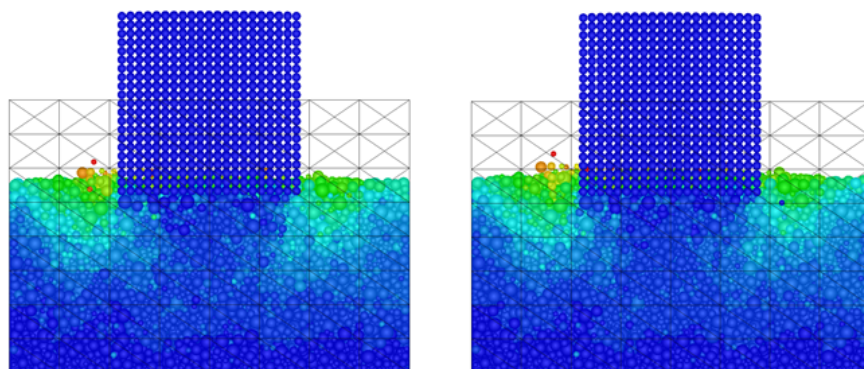
下の砂粒子の運動は時刻 10.0ms には散逸傾向にあることが断面図より確認できる。15.0ms には重錘はほぼ速度を失い貫入したまま停止する。重錘の直下になく砂粒子は、その後盛り上がり重錘を覆っていく過程が粒子の運動量の変化を観察することで確認できる。このように本解析手法は、実験では確認しづらい、クッション材と重錘の細かな現象の理解に有効である。



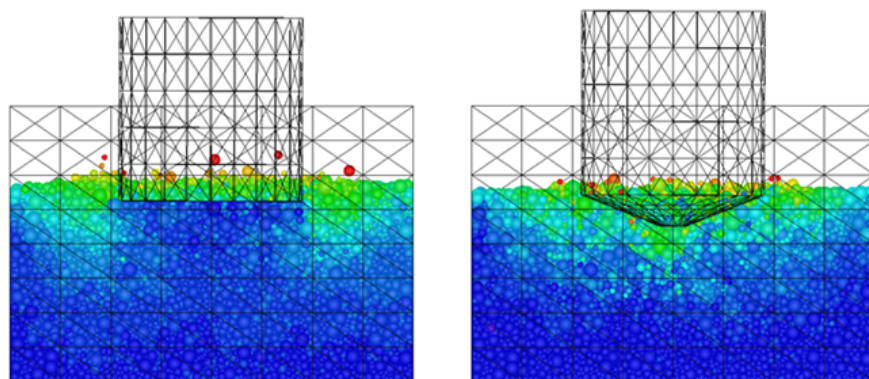
図－3. 48 JHT50F15 の速度分布の中央断面図（左：0ms 経過時，右：5ms 経過時）



図－3. 49 JHT50F15 の速度分布の中央断面図（左：10ms 経過時，右：15ms 経過時）



図－3. 50 JHT50F15 の速度分布の中央断面図（左：20ms 経過時，右：25ms 経過時）



図－3.51 多面体重錘による 25ms 経過時の速度分布断面図 (左:JHT50F15, 右:JST50F15)

3.2.4 まとめ

本節の重錘落下解析では，複数粒子の剛体を用いることで，任意の重錘形状を表現する手法を開発し，詳細にモデル化することで，高い精度で衝撃力波形を再現できることを示した．重錘形状の高精度化は，特に重錘衝撃力波形の立ち上がりの再現性向上に寄与があると考えられる．また，重力落下によるパッキング計算を行うことにより，規則的な配列ではなくランダム性のある実物に則したサンドクッション解析モデルの作成方法を開発した．粒子径の異なる複数の要素を使用することで，作用力の伝搬経路を複雑にし，解析結果よりその有用性を確認した．

実験と解析の衝撃力波形を比較し，ある程度の一致が認められた．特に平底重錘のケースに関しては条件付きではあるが十分な再現性があるといえる．錐底重錘のケースでは衝撃力を小さく評価しており，実現象と比較して過剰な滑りを生じている可能性がある．平底重錘のケースでは問題となっていないことについては，サンドクッションの表面積に占める衝突時の接触面積が大きいいため，砂の流動が抑制されていると考えられる．過剰な滑りは球形要素間の接触が点接触であるために，実際の砂形状要素間の接触と比較して摩擦抵抗が小さくなることに起因する．今後は，解析精度を向上させるため摩擦抵抗の再現性を改善する必要がある．

3.3 砂の摩擦抵抗に関する既往研究と考察

前節では個別要素法解析モデルの高精度化を図り，重錘形状や砂の粒径分布をある程度考慮した解析を行うことにより，3.1節で行った実規模サンドクッションの解析と比較して実験と良い一致が得られた．しかしながら錐底重錘を用いた実験との比較では，球形要素を用いることに起因すると考えられる摩擦耐力の不足により，サンドクッションの流動性を大きく評価し，結果的に錐底重錘を用いた実験との比較では衝撃力が小さく評価することを確認した．球形要素の接触は常に点接触となるため，回転抵抗が十分に得られないこ

とが以前から指摘されている^{14),15)}。

サンドクッションの衝撃応答解析の精度改善には、砂粒子の摩擦抵抗を精度良く評価する手法が必要であり、本節では既往の研究を整理し高精度化のための考察を行った。既往の研究は大きく分けて、要素形状の再現性を向上することにより摩擦抵抗を発現する手法と、円筒や球形要素に回転抵抗を導入することで摩擦抵抗を考慮する手法に大別される。以下に既往の研究を整理し、今後の摩擦抵抗の再現性向上に向けた考察を行う。

3.3.1 要素形状の再現性を向上した既往の研究

要素形状を非球とする研究としては、米粒のモデル化に楕円要素や2球の剛体連結モデルを用いた坂口ら¹⁶⁾の研究があり、報告の中で流下実験との比較による再現の向上のためには、むしろ回転の拘束が有効であったことが指摘されている。また、要素形状が重要と考えられるモデル化対象では、Cundall¹⁷⁾による3次元ブロックによる個別要素法が適用されており、落石問題への適用については山田ら¹⁸⁾の研究、鉄道軌道のバラスト集合の振動解析を行った浦川ら¹⁹⁾の研究などがある。しかしながら、非球要素の接触判定は複雑であり、砂粒のモデル化には適していないと考えられる。

球形要素を連結して任意形状を再現する研究としては、砂粒形状を詳細にモデル化したMatsushimaら²⁰⁾の研究があり、近年は少数の粒子を重ねて砂粒形状をモデル化する研究が増えてきている。例えば、2次元円筒要素を重ねた連結要素によるせん断試験への適用した榊原ら²¹⁾の研究や、3次元球を重ねて礫材の安息角の再現に成果を挙げた堀口ら²²⁾の研究が挙げられる。これらの研究のように砂粒1つ1つの形状をある程度モデル化することで精度の良い計算が可能になると考えられるが、サンドクッションの衝撃応答解析への適用を考慮するとより簡易なモデルが必要であると考えられる。

3.3.2 回転抵抗を導入した既往の研究

円筒または球要素を用いることで接触判定や作用力計算時間を抑制したまま、摩擦耐力の改善を図った研究例としては、回転抵抗として転がり摩擦や回転ばねを導入した研究例がみられる。転がり摩擦は阪口ら²³⁾が導入した法線作用力に長さの次元を持つ転がり摩擦係数を乗じて抵抗モーメントを計算する手法が広く用いられている^{24),25)}。この転がり摩擦係数は粒子接触点から乗り上げる突起までの距離や砂粒形状の隅角部までの距離と考えると分かり易い。また、接線軸回りの回転ばねおよびダッシュポットを導入した研究は、2次元円筒要素への適用として岩下ら²⁶⁾の研究があり、3次元球への適用としては瀬戸内²⁷⁾の研究がある。2章で述べた本研究における手法では、法線軸回りには回転ばねが挿入されているが、接線軸回りは並進成分へ合算して評価しており、回転抵抗としては有効に機能していないものと考えられる。接線軸回りの回転ばねは転がりモーメントに抵抗し、またダッシュポットは回転を減衰させる効果が期待できる。

この他に、接触判定は円筒要素で実施するが回転抵抗の計算では多角形の形状を評価す

るモデルが山田ら²⁸⁾の研究にみられる。この手法は非球要素を用いた手法と同様の効果が得られるが、転がり摩擦や回転ばねの導入に比べると計算負荷が大きいと考えられ、3次元問題への適用も行われていない。要素毎に幾何的な回転抵抗の説明がつく手法であるが、仮想的な要素形状を仮定する必要がある点や、計算負荷の観点から現段階における導入の優先順位は低い。

摩擦抵抗や回転ばねの挿入は比較的計算負荷の増加を抑えられる手法であるが、より簡便な方法も採用されており、笠原ら²⁹⁾は要素間の相対回転増分に一律の低減係数を乗じることで安息角を再現し、移動床水路の乱流と砂層の連成問題に適用している。低減係数を0とした場合は全く回転を考慮しないことに相当するが、回転を考慮しないことで摩擦耐力を向上する試みは以前から行われている¹⁵⁾。大規模問題への適用性という観点からは低減係数を用いた手法が最も適しているが、対象とする動的な問題への適用性については十分な検討が必要である。

3.3.3 まとめ

本節では3.2節のサンドクッションの衝撃応答解析でみられた摩擦抵抗の不足を改善するために、円筒や球形要素を用いた際の点接触に起因する回転を抑制する既往の研究を整理し、サンドクッション材の衝撃応答解析への適用性について考察を行った。要素形状の再現性を向上することによって要素回転を抑制する手法は、非球形要素を用いた手法は接触判定の複雑さ、複数球形要素を連結する手法は要素数の増加に伴う計算負荷の増大が問題である。実際の砂形状を再現すると2章で述べた慣性テンソルの計算が必要となるが、既往の研究にみられる複数要素を重ねる手法では、体積の重複部分があるため工夫が必要であると考えられる。一方で、回転抵抗として回転摩擦や回転ばねの導入は実規模問題への適用性が高いと考えられる。特に、相対回転増分を一律に低減する方法は導入が容易であり、砂粒子間の面接触の発生確率が安息角と対応すると考えると理論的な説明もつくのではないかと考えられる。今後は解析精度改善のため、低減係数を用いた手法や転がり摩擦の導入など簡便なモデルを中心に検討する。

3.4 3章のまとめ

本章では個別要素法をサンドクッション材の衝撃応答解析に適用し、その有効性の検討を行った。3.1節では、屋外の実験施設にて行った実規模サンドクッションへの重錘斜め入射実験を模擬した解析を行い、3.2節では実験室にて実施した重錘落下実験を対象として解析を行った。また、3.3節では球形要素を用いた個別要素法解析で用いられる摩擦抵抗の精度改善（回転抑制）手法について既往の研究を整理し検討を行った。以下に本章における要点をまとめる。

- 1) 実規模実験を対象とした解析では重錘を大径球要素，敷砂を最密配列の粒子群でモデル化し，実験結果よりばね定数をパラメトリックに決定して解析を行った．重錘衝撃力と伝達衝撃力について，ピーク値についてはある程度の再現が可能である．
- 2) 実験室で実施した重錘落下実験を対象にした解析では，重錘を粒子集合剛体で詳細にモデル化し，粒径分布を考慮したランダムパッキングにより作成することで，概ね衝撃力波形を再現することができた．
- 3) 錐底重錘の解析結果では衝撃力波形を小さく見積もる傾向があり，粒子集合剛体の表面で滑りが生じるためでないかと考え，多面体ブロックによる重錘モデルの解析も実施したが有意な違いは確認できなかった．
- 4) 衝撃力波形が小さくなる問題は球形要素間の接触が点接触となるため，実際の形状より摩擦耐力が小さく評価され，滑りの発生によって伝達される作用力が失われていると考えられる．
- 5) 既往の研究では砂粒が非球であることによって発揮する摩擦耐力を再現するために，要素形状の再現性向上や回転抵抗の導入が行われている．計算負荷の観点からは，回転抵抗の導入が実問題への適用性が高く，サンドクッションの衝撃応答解析の精度向上に役立つ可能性がある．

【参考文献】

- 1) 日本道路協会：落石対策便覧，丸善，2000
- 2) 園田佳巨，松葉美晴，彦坂熙：緩衝材を介して伝達する衝撃荷重の簡易推定法に関する研究，構造工学論文集，Vol.46A, pp.1885-1892, 2000
- 3) 土木学会：ロックシェットの耐衝撃設計，構造工学シリーズ 8，土木学会，1998
- 4) 土木学会：構造工学技術シリーズ No.52 性能設計の概念に基づく構造物の耐衝撃設計法，2007
- 5) 香月智：構造設計の国際化標準化と性能設計法（その 2 性能設計法の概要），砂防学会誌，Vol.52, No.5, pp.57-64, 2000
- 6) 土木学会：構造工学シリーズ 15 衝撃実験・解析の基礎と応用，2004
- 7) 吉田 博，榎谷 浩，今井 和昭：個別要素法による敷砂上の落石の衝撃特性に関する解析，土木学会論文集，第 392 号/I-9, pp.297-306, 1988
- 8) 榎谷浩，中田吉彦，梶川康男：個別要素法の衝撃問題への適用に関する一考察，構造工学論文集，土木学会，Vol.38A, pp.1477-1487, 1992
- 9) 伯野元彦：破壊のシミュレーション，森北出版，1997
- 10) 後藤仁志：数値流砂水理学，森北出版，2004
- 11) 榎谷浩，中田吉彦：DEM と FEM の結合解析手法の開発と落石覆工解析への適用について，土木学会論文集，No.710/I-60, pp.113-128, 2002.7
- 12) 谷口健男，森脇清明：3 次元 FEM のための自動要素分割法，森北出版，2006
- 13) 山下優耶，森脇清明，谷口健男：3 次元体表面上の点座標が与えられた場合の形状生成法，日本計算工学会論文集，No.20010032, 2001
- 14) 中瀬 仁，安中 正，片平 冬樹，興野 俊也：平面ひずみ圧縮試験に対する個別要素法の適用，土木学会論文集，No.454/III-20, pp.55-64, 1992
- 15) 栗田 哲史，中瀬 仁，安中 正，嶋田 昌義，藤谷 昌弘：ケーソン式護岸の模型振動実験に対する個別要素法シミュレーション，土木学会論文集，No.525/I-33, pp.299-308, 1995
- 16) 坂口 栄一郎，川上 昭太郎，田村 聡，飛田 布美子：離散要素法による穀粒排出現象のシミュレーション，農業機械学会誌，58(4), pp.9-17, 1996
- 17) P.A. Cundall : Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, Volume 25, Issue 3, pp.107–116, 1988
- 18) 山田 正雄，中川 光雄，江角 淳，近重 明晃，鵜飼 恵三：岩塊の接触形態を考慮した 3 次元個別要素法による岩盤斜面崩落シミュレーション，土木学会論文集 C, Vol.65 No.2, pp.480-491, 2009

- 19) 浦川 文寛, 相川 明: バラスト砕石集合体の弾性体モデル構築と振動解析, 土木学会論文集 A2, Vol.67 No.2, pp.I_395-I_404, 2011
- 20) T. Matsushima, H. Saomoto: Discrete element modeling for irregularly-shaped sand grains, Numerical Methods in Geotechnical Engineering, Proc. NUMGE2002, pp.239-246, 2002
- 21) 榊原 辰雄, 加藤 正司, 吉村 優治, 澁谷 啓: 砂のような粒状材料のせん断挙動およびせん断層に与える粒子形状の影響, 土木学会論文集 C, Vol.64 No.3, pp.456-472, 2008
- 22) 堀口 俊行, 澁谷 一, 香月 智, 田附 正文: 集合体要素の形状特性が安息角に及ぼす影響に関する解析的検討, 構造工学論文集, Vol.57A, pp.136-146, 2011
- 23) 阪口 秀, 尾崎 叡司, 五十嵐 徹: 円形要素を用いた DEM における回転の抑制に関する研究, 神戸大学農学部研究報告, 20 巻 2 号, pp.239-246, 1993
- 24) 岩下 和義, 小田 匡寛: 粒子接点での転がり抵抗を考慮した個別要素法によるせん断帯の微視的変形機構, 応用力学論文集, Vol.2, pp.401-411, 1999
- 25) 長田 健吾, 清水 義彦, 若井 明彦: 個別要素法における粒子の回転と転がり摩擦が土石流の流動・堆積過程に及ぼす影響, 水工学論文集, 第 49 巻, pp.889-894, 2005
- 26) 岩下 和義, 松浦 浩, 小田 匡寛: 粒子接点でのモーメント伝達を考慮した個別要素法の研究, 土木学会論文集, No.529/III-33, pp.145-154, 1995
- 27) 瀬戸内 秀規: 球要素間の回転剛性を導入した個別要素モデル, 土木学会論文集 A2, Vol.68 No.1, pp.18-29, 2012
- 28) 山田 祥徳, 酒井 幹夫, 茂渡 悠介, 土屋 将夫, 平山 修一: 離散要素法における回転抵抗モデルの開発, 粉体工学会誌, 第 47 号, pp.214-221, 2010
- 29) 笠原 孟, 清水 康行, 木村 一郎, 山口 里実: DEM-URANS カップリングアプローチによる Dune 発生過程の数値シミュレーション, 土木学会論文集 B1, Vol.67 No.4, pp.I_835-I_840, 2011

第4章 粒子法の解析理論

4.1 SPH 法の概要

SPH 法は宇宙物理学分野における圧縮性流体解析手法として、1977 年に Lucy¹⁾および Gingold と Monaghan²⁾によって開発された手法である。メッシュフリー解析手法の 1 つに数えられ³⁾、また MPS 法などとともに粒子法の 1 つである⁴⁾。FEM が要素内の状態量を節点の値から内挿する形状関数を用いるのに対し、SPH 法では影響半径内の粒子点値から着目粒子の状態量を補間するカーネル近似を行う。従って、格子を用いる Lagrange 手法とは異なり、離散化に要素-節点関係のような幾何構造を必要としない。

影響半径内の粒子は粒子運動とともに時々刻々と更新され、これは FEM などのリメッシング処理と同様の処理を毎ステップ実行していることに相当する。メッシュが破たんすることなく計算を継続できることから大変形問題に向いている手法といえる一方で、リメッシングによる計算精度の悪化や、Gauss-Legendre 公式のような高精度積分を採用できないため、格子ベースの手法と比較すると精度が悪いという問題点がある⁶⁾。

本節では以下に SPH 法の基本的な計算方法⁵⁾について述べる。

4.1.1 カーネル近似

任意の連続関数 $f(x)$ に関して以下の恒等式を考える。

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx' \quad (4.1)$$

dx' は任意点の支配体積である。 δ は Dirac のデルタ関数であり次式で与えられる。

$$\delta(x - x') = \begin{cases} \infty & (x = x') \\ 0 & (x \neq x') \end{cases} \quad (4.2)$$

ここで、デルタ関数を滑らかな関数 $W(x - x', h)$ で置き換えると次の近似式が成立する。

$$f(x) \approx \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx' \quad (4.3)$$

関数 W は計算分解能の基準となる任意の幅 h （初期粒子間距離）を持ち、 h の定数倍の影響半径に渡って状態量を滑らかに補間する関数であり、カーネル関数と呼称されるものである。 $f(x)$ の定義域全体に渡って上記近似式は成立し、評価点の物理量はカーネル関数によって連続体の物理量に置き換えられる。

このような内挿関数を用いる補間処理は FEM における形状関数の補間に似ているが、SPH においては要素-節点の区別はなく、領域全体に渡って粒子のカーネル近似が連続している点で異なる。SPH 法は強形式の離散化であり、計算対象の状態量は領域全体に渡って連続であり、粒子点とは実際の粒子を指すのではなく連続体内の 1 計算点に過ぎない。

カーネル関数は以下の 3 つの条件を満たす必要がある。

$$\int_{\Omega} W(x - x', h) dx' = 1 \quad (4.4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x') \quad (4.5)$$

$$W(x - x', h) = 0 \quad \text{when } |x - x'| > \alpha h \quad (4.6)$$

最初の条件は FEM の形状関数などと同様に影響領域で積分した際に重みの合計が 1.0 となることを要求している。この条件を満たすことは容易であり、任意の影響半径に対して積分した際の総和で正規化すれば満足する。事実、粒子法の 1 つである MPS 法では影響半径の大きさで重みの合計が変化するため、粒子点が均等な初期配置における重み関数の積分値を初期粒子数密度と定義し、積分値を正規化することでこの条件を満たしている。

2 番目の条件は計算格子間隔が無限小の際にカーネル関数がデルタ関数と等価であることを意味し、連続関数 $f(x)$ とカーネル近似の分布が一致するための条件である。

3 番目の条件は必ずしも満たす必要はないが、計算効率の観点からもカーネル関数の影響半径は有限であり大きくなく、影響半径外で重みが 0 となることが好ましい。この条件は compact support 条件として知られている。なお、SPH 法が開発された宇宙物理学の分野では n 体問題のように影響半径が無限大であり、この条件を満たさない Gauss 型の関数がカーネル関数として採用されることもある。

また、 W は距離 $(x - x')$ の偶関数であることが好ましい。任意の座標軸に対して対称であることは計算の簡素化に重要である。多くの場合、カーネル関数は距離に対して等方の関数が用いられる。

$$\int_{\Omega} (x - x') W(x - x', h) dx' = 0 \quad (4.7)$$

4.1.2 空間微分表現

連続関数 $f(x)$ の空間微分は次式で示されるようにカーネル近似できる。

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \int_{\Omega} \frac{\partial f(x')}{\partial x} W(x - x', h) dx' \quad (4.8)$$

微分演算則より上式右边を部分積分すると、

$$\frac{\partial f(x')}{\partial x} W(x - x', h) = \frac{\partial}{\partial x} [f(x') W(x - x', h)] - f(x') \frac{\partial W(x - x', h)}{\partial x} \quad (4.9)$$

となり、次式が得られる。

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} [f(x') W(x - x', h)] dx' - \int_{\Omega} f(x') \frac{\partial W(x - x', h)}{\partial x} dx' \quad (4.10)$$

上式右边第 1 項は Gauss の発散定理より積分領域表面の積分に置き換えることができ、compact support 条件から結局のところ 0 になる。つまり連続関数 $f(x)$ の空間微分は次式に示される通りカーネル関数のみの微分によって表現することができる。

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx - \int_{\Omega} f(x') \frac{\partial W(x-x',h)}{\partial x} dx' \quad (4.11)$$

つまり、FEM で要素内ひずみの計算を形状関数の微分を利用して行うことと同様の計算を行う。

一方で同じ粒子法であっても MPS 法は微分表現が異なり、重み関数はそのままに空間微分は粒子点間の差分で計算する。つまりは差分値の重み付き平均を計算するのであり、内挿関数は単に重み関数と呼称されている。MPS 法で用いられる重み関数は一般に複数回の微分に適したものではなく、非圧縮性流体の解析に都合の良い関数が用いられている。このように SPH 法と MPS 法は離散化の考え方が異なるが、微分の表現以外に計算手法としての違いは殆どなく、解析プログラムは良く似たものとなる。また、当然のことながら SPH 法と MPS 法の計算結果は等価なものである。

・勾配

連続関数 $f(x)$ がスカラー値関数であるとき勾配は次式で示される。

$$\nabla f(x) \equiv \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \vec{i} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \vec{j} + \frac{\partial f(x)}{\partial x_3} \vec{k} \quad (4.12)$$

上述のとおり空間微分はカーネルの微分で置き換えられるので次式が得られる。

$$\nabla f(x) \approx - \int_{\Omega} f(x') \nabla W(x-x',h) dx' \quad (4.13)$$

カーネル関数が等方関数である場合は距離 r と方向余弦を用いて次式で計算できる。

$$\nabla f(x) \approx - \int_{\Omega} f(x') \frac{x-x'}{r} \frac{\partial W(r,h)}{\partial r} dx' \quad (4.14)$$

・発散

連続関数 $f(x)$ がベクトル値関数であるとき発散は次式で示される。

$$\nabla \cdot f(x) \equiv \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_3} \quad (4.15)$$

したがってカーネル近似により次式が得られる。

$$\nabla \cdot f(x) \approx \int_{\Omega} \nabla \cdot f(x') W(x-x',h) dx' \quad (4.16)$$

更に、右辺の部分積分と Gauss の発散定理により次式が得られる。

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \int_{\Omega} f(x') \cdot \frac{\partial W(x-x',h)}{\partial x} dx' \quad (4.17)$$

カーネル関数が等方関数である場合は距離 r と方向余弦を用いて次式で計算できる。

$$\nabla \cdot f(x) \approx - \int_{\Omega} f(x') \cdot \frac{x-x'}{r} \frac{\partial W(r,h)}{\partial r} dx' \quad (4.18)$$

・ラプラシアン

連続関数 $f(x)$ がスカラー値関数であるときラプラシアンは次式で示される．

$$\nabla^2 f(x) \equiv \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_3^2} \quad (4.19)$$

カーネル近似により次式が得られる．

$$\nabla^2 f(x) \approx \int_{\Omega} f(x') \nabla^2 W(x - x', h) dx' \quad (4.20)$$

カーネル関数が等方関数である場合は距離 r を用いて次式で計算できる．

$$\nabla^2 f(x) \approx \int_{\Omega} f(x') \frac{\partial^2 W(r, h)}{\partial r^2} dx' \quad (4.21)$$

カーネル関数の微分について等方関数を採用した場合に気を付ける事項は、距離 r の関数を微分する際には座標系が極座標である点である．1 階微分についてはデカルト座標系と極座標系の結果は同じとなるが、ラプラシアンについては異なり、ラプラシアン演算子は 2 次元および 3 次元の極座標ではそれぞれ次式で示される 7)．

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.22)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4.23)$$

等方関数である場合、 θ および ϕ のかかる項は対称性から無視することが可能であり、結論として r のみによる 1 階微分と 2 階微分を求めておけばラプラシアンが導出可能である．なお、 r の除算については距離が 0 である場合には極小値で置き換えることで計算が可能である．

4.1.3 カーネル関数

カーネル関数としては複数回微分可能な滑らかな関数を設定する必要がある．Exponential 型による Gauss 関数やそれを模擬した高次の B-Spline 関数がよく用いられているが、それ以外にも色々なカーネル関数が提案されている．B-Spline 関数としては 3 次、4 次、5 次の関数がよく用いられ、それぞれ初期粒子間距離に対して 2 倍、2.5 倍、3 倍の積分半径が設定されている．計算精度が比較的良好ことから SPH 法の計算でよく用いられている 5 次の B-Spline 関数 8) を次式に示す．

$$W(r, h) = C_d \begin{cases} \left(3 - \frac{r}{h}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r}{h}\right)^5 + 15\left(1 - \frac{r}{h}\right)^5 & \left(0 \leq \frac{r}{h} < 1\right) \\ \left(3 - \frac{r}{h}\right)^5 - 6\left(2 - \frac{r}{h}\right)^5 & \left(1 \leq \frac{r}{h} < 2\right) \\ \left(3 - \frac{r}{h}\right)^5 & \left(2 \leq \frac{r}{h} < 3\right) \end{cases} \quad (4.24)$$

ここで、係数 C_d は次元数による補正係数であり、1, 2, 3 次元についてそれぞれ $\frac{1}{120\pi h}$, $\frac{7}{478\pi h^2}$,

$\frac{3}{359\pi h^3}$ である．この補正係数は 0 階の関数の積分値を 1.0 に修正するためのものであり，実用上は格子配置した仮想粒子に対して影響半径内の $W(r)$ の総和を計算し，その逆数を C_d とすることで全ての次元とカーネル関数に対して共通化を図ることができる．MPS 法においても同様の正規化がなされており，初期格子配置における重み関数の総和を初期粒子数密度と定義し，差分量の重み付き総和は全てこの値で除することで正規化が行われている．

カーネル関数の 1 階微分は以下の通りであり，勾配は上述のとおり方向余弦を乗じて計算される．微分は極座標系において行う必要があるが 1 階微分については直交座標系と違いは生じない．

$$\frac{\partial W(r,h)}{\partial r} = \frac{C_d}{h} \begin{cases} 5\left(3 - \frac{r}{h}\right)^4 - 30\left(2 - \frac{r}{h}\right)^4 + 75\left(1 - \frac{r}{h}\right)^4 & \left(0 \leq \frac{r}{h} < 1\right) \\ 5\left(3 - \frac{r}{h}\right)^4 - 30\left(2 - \frac{r}{h}\right)^4 & \left(1 \leq \frac{r}{h} < 2\right) \\ 5\left(3 - \frac{r}{h}\right)^4 & \left(2 \leq \frac{r}{h} < 3\right) \end{cases} \quad (4.25)$$

カーネル関数の 2 階微分は以下の通りであり，ラプラシアンは上述のとおり極座標系の微分であることから，2 次元の場合には式(4.27)，3 次元の場合で式(4.28)となる．

$$\frac{\partial^2 W(r,h)}{\partial r^2} = \frac{C_d}{h^2} \begin{cases} 20\left(3 - \frac{r}{h}\right)^3 - 120\left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 + 300\left(1 - \frac{r}{h}\right)^3 & \left(0 \leq \frac{r}{h} < 1\right) \\ 20\left(3 - \frac{r}{h}\right)^3 - 120\left(2 - \frac{r}{h}\right)^3 & \left(1 \leq \frac{r}{h} < 2\right) \\ 20\left(3 - \frac{r}{h}\right)^3 & \left(2 \leq \frac{r}{h} < 3\right) \end{cases} \quad (4.26)$$

$$\nabla^2 W(r,h) = \frac{\partial^2 W(r,h)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(r,h)}{\partial r} \quad (4.27)$$

$$\nabla^2 W(r,h) = \frac{\partial^2 W(r,h)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W(r,h)}{\partial r} \quad (4.28)$$

なお，SPH 法の計算では Morris ら 8) の提案に従い，ラプラシアンの計算を簡略化して次式のような置き換えが行われることが多い．

$$\nabla^2 W(r,h) = \frac{1}{r} \frac{\partial W(r,h)}{\partial r} \quad (4.29)$$

カーネル関数の 0 階，勾配，ラプラシアンおよび近似によるラプラシアンの重みの大きさをスケール調整して図に示す．0 階，勾配，ラプラシアンにはそれぞれ L_0^3 ， L_0^4 ， L_0^5 をスケール調整のために乗じており，粒子間距離や微分階数に寄らない表示とした．

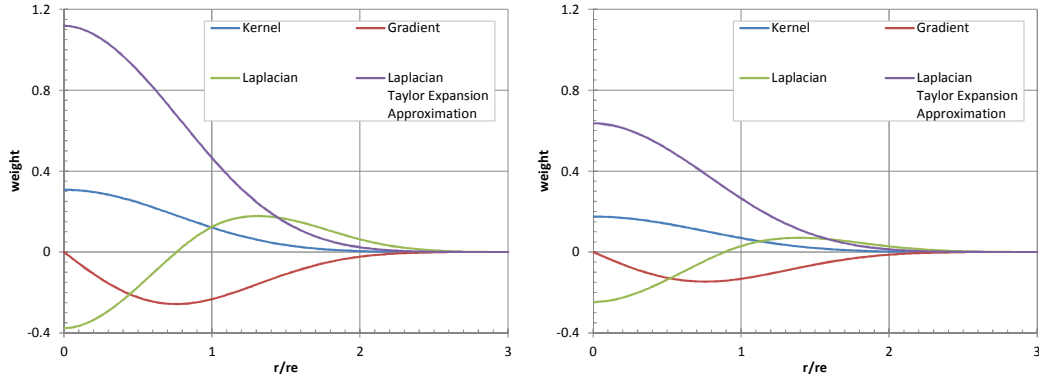


図-4.1 5 次の B-Spline 関数

本来のラプラシアンと Morris らの近似によるラプラシアンは大きく異なっており，近似精度に問題がないかについては検討が必要であるが，影響半径内の外周部ではある程度近い値となっており，積分することで近い値が得られると考えられる．数値安定性に関しては近似版の方が良いと考えられ，これは定義域の全域で正となることと近傍の寄与がより大きくなることが理由である．

カーネル関数の検算および正規化に役立つ性質として，距離に対する 1 次モーメントを影響半径内で積分すると一定値になる点が挙げられる．ここで， N_{dim} は次元数である．

$$M^0 = \int_{\Omega} (x - x')^0 W(x - x', h) dx' = 1 \quad (4.30)$$

$$M^1 = \int_{\Omega} (x - x')^1 \frac{\partial W(r, h)}{\partial r} dx' = N_{dim} \quad (4.31)$$

$$M^2 = \int_{\Omega} (x - x')^2 \nabla^2 W(x - x', h) dx' = 2N_{dim} \quad (4.32)$$

境界部や誤差の蓄積によって粒子密度が十分でなくなった粒子については上記の積分値が得られないため，物理量の修正を行うことで計算安定性を改善する試みがなされている

9)．数値安定性の改善のためには有益な検討であるが，本研究においては取り扱わずに将来的な検討事項とした．

4.2 連続体の支配方程式の離散化

粒子法は計算点が粒子として直接移動するため質量が保存することは自明であり，連続体の密度は影響半径内粒子の質量からカーネル関数を用いて計算される¹⁰⁾．

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h) \quad (4.33)$$

つまり，カーネル関数は体積の逆数の次元を持っており， m_j/ρ_j は粒子片の支配体積と考えることができる．自由表面などの境界部では影響半径内粒子が不足するため上記密度は小

さくなるため、粒子密度は自由表面の判定基準として一般に用いられている。

連続の式は次のように離散化される。

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j \nabla W(r_{ij}, h) \quad (4.35)$$

$$\nabla W(r_{ij}, h) = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r} \quad (4.36)$$

なお、粒子配置が均質であり対称性があればカーネルが偶関数であり次式が成立する。

$$\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_i \nabla W(r_{ij}, h) = 0 \quad (4.37)$$

上式を離散化した連続式から差し引けば速度が差の形で得られる。

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = -\rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \nabla W(r_{ij}, h) \quad (4.38)$$

一般に SPH 法では差の形を用いた方が高精度であることが知られている。

運動方程式は次のように離散化できる。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \quad (4.39)$$

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \frac{1}{\rho_i} \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \boldsymbol{\sigma}_j \nabla W(r_{ij}, h) + \mathbf{F} \quad (4.40)$$

連続式で用いた差の形と同様にして以下の和の形を得る。次式は粒子間の作用が対称化されている。

$$\frac{D\mathbf{v}_i}{Dt} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (\boldsymbol{\sigma}_j + \boldsymbol{\sigma}_i) \nabla W(r_{ij}, h) + \mathbf{F} \quad (4.41)$$

上記のような運動方程式の時間差分に対して陽的な数値積分を行うことで粒子運動を解き進めて行くことができる。運動の結果としてひずみが生じ、構成則により応力テンソルを更新することで時々刻々と運動を解き明かすことが可能である。時間積分には Euler や Leapfrog 法が良く用いられている¹¹⁾。

4.2.1 圧縮性流体の解析

圧縮性流体の解析は SPH 法の起源であり、宇宙物理分野ではガスの計算に用いられていた。Monaghan¹²⁾によって水のように圧縮性の小さい流体解析にも導入されるようになり、その後非圧縮性流体の解法も導入されている^{13),14)}。

流体は構造解析分野における連続体（固体）とは異なり、せん断抵抗が非常に小さいことから無視するか分離して考えることができ、ポアソン効果もないため応力テンソルは退化した形で表現できる。圧力に異方性はないことから応力テンソルの対角項は全て同じ圧力となり、非対角項は 0 と考えられる。なお、高粘度流体の低レイノルズ数流れについて

は、圧力とは分離して粘性項の考慮が必要である。流体運動の運動保存式は Navier-Stokes 方程式であり、粒子法には現れない対流項を省略して次式に示される⁴⁾。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (4.42)$$

ここで P は圧力であり、応力が退化したことでスカラーによって表現できる。一方で非対角項成分は粘性項として分離され、 μ を粘度として動粘度 $\nu = \mu/\rho$ を比例定数として速度に比例する項が運動方程式に追加されている。流体の構成式は固体の構成式に比べて簡素であり、変形に関しては体積ひずみにのみ影響する形で示せる。

体積ひずみと密度は比例関係にあり、初期密度 ρ_0 と初期圧力 P_0 を用いると、圧力は状態方程式を模擬して次式のように計算できる¹²⁾。

$$P = P_0 \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha - 1 \right) = \rho_0 c \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha - 1 \right) \quad (4.43)$$

ここで α は密度依存性に関するパラメータであり、 $\alpha = 1$ とすることで線形の構成モデルとなる。 c は縦波の速度であるが大きく設定すると時間増分を細かくする必要があり、計算する上で現象を特徴づける速度の10倍程度を設定する。 α や c を小さく設定すると圧力は安定するが大きな圧縮性が生じ、水のような非圧縮性流体の解析には適していない。

粒子法による非圧縮性流体の解析手法が開発されて以降は、流体解析では後述する半陰解法による手法がよく用いられるようになり、本研究においても半陰解法^{4),13),14)}を計算に用いている。しかし近年ではこの流れとは反対に、圧縮性流体解析の計算手法を非圧縮性流体に適用する研究¹⁵⁾が多くなされるようになった。圧縮性流体解析のアルゴリズムが見直されている理由は計算の簡便さにあり、完全に陽解法で計算可能であるために大規模並列計算に適している点が挙げられる。連立方程式を解く必要がある手法の計算時間は、一般に問題規模の1.5乗でスケールするため、陽解法で計算可能な手法の計算時間が1乗でスケールすることに比べて大規模計算には不利である。小規模な解析では一般に時間増分を粗くできることによるメリットが大きいため陰解法も有効であるが、大型並列計算機による領域分割による大規模並列計算への適用として圧縮性流体の計算手法が有効である。

ここで、Navier-Stokes 方程式の SPH 法による離散化を示す。右辺第2項である 圧力勾配項はカーネル関数の勾配を用いて次式で示される。

$$-\frac{1}{\rho}\nabla P = -\sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (P_i + P_j) \nabla W(r_{ij}, h) \quad (4.44)$$

また、右辺第3項である粘性項は次式で示される。

$$\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\mathbf{u} = \sum_j \frac{m_j(\mu_i + \mu_j)}{\rho_i \rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \nabla^2 W(r_{ij}, h) \quad (4.45)$$

Morris らは2階のカーネルを用いる方法とは別に、前述したように Taylor 展開による近似を用いて1階カーネルによる粘性項の離散化を示した。

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} = \sum_j \frac{m_j(\mu_i + \mu_j)}{\rho_i \rho_j} \frac{(v_j - v_i)}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r} \quad (4.46)$$

以上の 2 項と外力項に対し，時間領域差分の数値積分による時間発展を行うことで陽解法による計算が可能である．

4.2.2 非圧縮性流体の解析

非圧縮性流体の解析は，圧縮性流体の解析で用いる状態方程式モデルの構成式を密度に対して鋭敏に設定することで計算可能である．しかし，単に構成式モデルを調整することによる計算は時間増分の要求が厳しく，また蓄積する密度誤差を解消する手立てが無いいため，計算には密度誤差を蓄積しないための様々な工夫を要する．

越塚らは FVM などの格子を用いた解析手法で用いられていた半陰的アルゴリズム (SMAC 法) を粒子法に導入し，SPH 法とは異なる空間の離散化を採用する新しい計算手法として MPS 法を提案した⁴⁾．MPS 法は，流体運動に影響の大きい圧力についてのみ連立方程式を解き，圧力項と速度項 (粘性項など) を分離した半陰的解法となっている．MPS 法では圧力をポアソン方程式の求解により計算し，密度誤差は計算された圧力勾配項により修正されるため，連続の式の非圧縮条件を保つことができる．

MPS 法の提案以降，同様の計算手法は SPH 法においても採用されており，適用例は Cummins ら¹³⁾の研究や Shao ら¹⁴⁾の研究にみられ，広く用いられるようになった．以降に射影法による変数分離とポアソン方程式の求解による圧力の計算について説明する．

射影法では運動方程式の加速度の釣り合いを，圧力勾配項とそれ以外の項に分解し，圧力勾配項以外の項による運動後の中間時間断面を定義する．この中間時間断面における速度を \mathbf{u}^* とし，時間ステップの添え字を k とすることで以下の差分式が成立する．

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^k}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^k}{\Delta t} \quad (4.47)$$

上式の右辺に着目すると，第 2 項は明らかに圧力勾配以外の項による運動を示し，ここで粘性項と重力項のみを考慮すると次式で示される．

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^k}{\Delta t} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}^k + \mathbf{F} \quad (4.48)$$

式を変形して中間時間断面における速度 \mathbf{v}^* は次式で計算することができ，この計算は予測子計算と呼ばれている．

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^k + \Delta t \left(\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}^k + \mathbf{F} \right) \quad (4.49)$$

一方で対応する上式の第 1 項は予測子の陽的計算により生じる誤差を修正するための修正子を導く．この項は圧力勾配項が担い，すなわち右辺第 1 項は次式で示される．

$$\frac{\mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (4.50)$$

式を変形すると修正子が得られる．

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^{k+1} - \mathbf{v}^* = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla P \quad (4.51)$$

まとめると，陽的計算後の予測子計算と陰的計算後の修正子計算により次式のように次の時刻断面の速度 \mathbf{v}^{k+1} が得られる．

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^* + \Delta \mathbf{v} \quad (4.52)$$

4.2.3 圧力のポアソン方程式の生成項（基本）

射影法の修正子計算では予測子に対応する圧力勾配項を計算する必要があり，圧力の計算にポアソン方程式の求解を行う．圧力のポアソン方程式を次式で示す．

$$\nabla^2 p = Source \quad (4.53)$$

ここで $Source$ はポアソン方程式の生成項である．ラプラシアンは勾配の発散であり，上式は圧力勾配による流入出の収支が生成項によって与えられることを示し，この生成項は予測子計算によって生じる流入出の差から得られる．生成項の計算方法については大きく分けて2通りの方法があり以下に説明する．

1. 速度発散 0 条件（Divergence Free 条件）

非圧縮性流問題における質量保存則は連続の式を簡略化して次式で示される．

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.54)$$

ここで，式(4.50)の両辺について発散をとると， $\nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1} = 0$ が成立するため次式に示すポアソン方程式が得られる．

$$\nabla \cdot \nabla P = \nabla^2 P = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* = Source \quad (4.55)$$

密度 ρ は各粒子の初期密度であり，非圧縮性が保たれるならば材料密度と考えることができる．このような速度発散 0 条件に基づく生成項の計算は，FVM などの格子を用いる計算手法で一般に用いられており，SPH 法では Cummins ら¹³⁾や Lee ら¹⁶⁾の研究において採用されている．しかし，格子を用いる計算手法と異なり，粒子法においては上式に基づく生成項のみでは不十分である．格子計算においては格子間界面が固定であり流速の積分から観測体積内の流入出の収支を評価することができるが，粒子法では粒子配置によって粒子密度や速度発散が変化するため，速度発散が 0 となる条件を満たしたとしても密度変化および支配体積の微小変化が発生し，計算の進行とともに誤差も蓄積される．

2. 密度一定条件（Particle Number Density 条件）

密度一定条件による生成項の計算は MPS 法で用いられている条件であり，SPH 法への適用例としては Shao ら¹⁴⁾の研究や Kayyer ら¹⁷⁾の研究がある．この条件は速度発散 0 条件と

異なり直接的に密度変化を 0 とするように生成項を計算するため、密度の微小変化は計算誤差として発生することはあっても誤差の蓄積は生じない。

連続の式（式 4.34）の密度導関数を射影法により分離すると次式が得られる。

$$\frac{\rho^0 - \rho^*}{\Delta t} + \frac{\rho^* - \rho^k}{\Delta t} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}^{k+1} = -\rho \nabla \cdot (\mathbf{v}^* + \Delta \mathbf{v}) \quad (4.56)$$

上式の左辺の中間時間断面における密度誤差 $\rho^0 - \rho^*$ は修正子による粒子移動 $\Delta \mathbf{v}$ によって希望的に解消される。また、予測子計算における密度誤差 $\rho^* - \rho^k$ は速度発散 $\nabla \cdot \mathbf{v}^*$ に対応しており、これは前述の速度発散 0 条件にみられた項である。ここで予測子計算においては誤差が生じないという仮定を用いると、式(4.56)は次式で示される。

$$\frac{\rho^0 - \rho^*}{\Delta t} = -\rho \nabla \cdot \Delta \mathbf{v} \quad (4.57)$$

さらに、式(4.51)を代入すると以下のように変形できる。

$$\nabla \cdot \nabla P = \nabla^2 P = \frac{\rho^0 - \rho^*}{\Delta t^2} = \text{Source} \quad (4.58)$$

上式で計算される生成項は、式から確認できるように密度誤差をより厳格に解消する。しかしながら、密度一定条件の適用は圧力振動が激しいことが知られており、特に時間増分が小さい条件下では安定性に問題が生じるほどの数値振動が認められる。この振動は粒子法の積分計算における密度誤差が大きいことから生じており、越塚ら⁴⁾は MPS 法において全粒子に一律の緩和係数を乗じることで安定化を図った。

4.2.4 圧力のポアソン方程式の生成項（発展）

越塚らが行った一律の緩和計算は圧力計算の安定化に寄与し、格子法の計算においても一般に行われているものである。しかし、密度誤差を許容することになるため、格子法では反復的にポアソン方程式の求解と圧力勾配項の計算を実行することで誤差を解消する。粒子法においても同様の計算は効果があるが、計算負荷の観点から現実的ではない。ポアソン方程式の求解を 2 回行うことで安定化を図った手法としては、日比ら¹⁸⁾の研究と末吉ら¹⁹⁾の研究がある。これらの手法は、粒子加速度の計算と評価用の滑らかな圧力を分けて計算しており、物理的な意義から本研究では採用しないことにした。

近年では前項の 2 つの条件を基にして改良された生成項モデルが適用されており、以下に説明する。

1. 速度発散 0 条件と密度一定条件の混合型

式(4.56)に示されるように連続の式から導かれる生成項は、速度発散 0 条件と密度一定条件の両方を含んでおり、両方の項を混合して生成項を作成する例が MPS 法については田中ら²⁰⁾の研究に、SPH 法については林ら²¹⁾の研究に見られる。速度発散は粒子配置による影響を受けにくいこと、および分母の時間増分が 1 乗であることから安定した圧力を得るこ

とが可能であり，蓄積する密度誤差を解消するためにのみ密度一定条件を緩和して適用される．密度誤差は時間増分や粒子分解能の影響を受けるため，事前に静水計算などを実施してその混合割合の検討を行う必要がある．この手法における SPH 法の生成項は次式で示される．

$$\text{Source} = \frac{\rho^0}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* + \alpha \frac{\rho^0 - \rho^k}{\Delta t^2} \quad (4.59)$$

上式では，陽的移動後の物理量が速度 \mathbf{v}^* のみであり，密度についてはステップ値から計算できる点は重要である．これは陽的時間発展によって中間時間断面における速度のみ計算し，実際の粒子移動は実行する必要がないことを示している．粒子法の計算においては，近傍粒子探索と距離計算に費やす処理時間が大きく，中間時間断面における近傍粒子リストの更新と距離計算を省略できることは重要である．

2. 密度一定条件の高精度化

近藤ら²²⁾は連続の式の密度導関数を差分表現する際に，より高階の項を評価することで密度一定条件の高精度化を行い MPS 法に適用した．この考えは前述の混合型の生成項の導出の基本になっており，近藤らの手法では時間差分の 2 階の項まで評価することが提案されている．この定式に基づき SPH 法に適用することで次式に示す生成項が得られる．

$$\text{Source} = (1 - \beta) \frac{\rho^* - 2\rho^k - \rho^{k-1}}{\Delta t^2} + (\beta - \gamma) \frac{\rho^* - \rho^k}{\Delta t^2} + \gamma \frac{\rho^* - \rho^0}{\Delta t^2} \quad (4.60)$$

ここで， β と γ は計算パラメータであり，それぞれを 1.0 とすることで従来の密度一定条件と一致する．これらのパラメータは密度一定条件を緩和して，より高階の項の重みを増すものであり，混合型の生成項と同様に静水計算などを実施することにより，密度誤差が蓄積しないことを事前に確認する必要がある．小笠原ら²³⁾は混合型と近藤らによる手法の両方を比較し，近藤らの手法の方がより安定であることを報告している．本研究においても両手法をプログラムに組み込み，近藤らの手法を計算に用いた．

混合型の生成項と異なり，この手法は速度発散の計算が不要である代わりに陽的時間発展後の密度 ρ^* が必要となる．この密度の計算には修正子計算における速度 \mathbf{v}^* で移動した後の粒子密度を計算する必要がある．そのためには近傍粒子リストの更新と距離計算が必要となる．粒子法のプログラムでは一般にこれらの処理に費やすコストは大きく，本研究においては処理の簡略化を行っている．一般に SPH 法のカーネル関数の外側領域の重みは小さいため，評価しない粒子が発生しても影響は小さい．また数値安定性の制約からクーラン数を大きく超える粒子移動は許容されない．そこで，圧力勾配項以外による陽的時間発展における粒子移動で影響半径外に出る粒子については無視し，距離のみ更新することで密度やラプラシアンの評価を行った．即ち，最も処理時間のかかる近傍粒子リストの更新を省略した．

3. 微小圧縮性の考慮

池田ら⁴⁾は非圧縮性流体の数値解法として開発された MPS 法を圧縮性流体に適用した。圧力と密度に線形の関係を考えれば縦波の速度を c として次式の関係がある。

$$\rho - \rho^0 = \frac{P - P^0}{c^2} \quad (4.61)$$

ここで、 $\rho = \rho^*$ とし、基準圧力 $P^0 = 0$ として上式の圧縮性を密度一定条件のポアソン方程式に組み込むと次式が得られる。

$$\nabla^2 P = \frac{\rho^0 - \rho^*}{\Delta t^2} - \frac{P}{\Delta t^2 c^2} \quad (4.62)$$

ここで、圧縮率 $\alpha = 1/c^2$ とし、この微小圧縮性をポアソン方程式に組み込むことで圧縮性の考慮が可能となる。なお、上式では生成項の一部として右辺に記述しているが、圧力 P の係数となっており、実際には左辺の係数行列における対角項成分である。即ち、圧縮性を考慮することによって左辺の係数行列の対角項は大きく評価され、対角優勢となるため計算の安定化と線形ソルバーの収束性の改善が可能である。同様の圧縮性の考慮は田中ら²⁰⁾の研究にみられる。圧縮性は実際の材料物性に基づく小さな値を設定する必要があり、過剰な圧縮率を設定した際には明瞭な体積収縮が生じる。

4.2.5 圧力のポアソン方程式の求解

圧力のポアソン方程式は、左辺のラプラシアンに対して SPH 法による離散化を施し、係数行列を作成し、前項までの手法により計算した生成項を外力として、線形ソルバーによる求解を行う。線形ソルバーはどのようなソルバーを用いても問題ないが、計算速度の観点から反復ソルバーが一般に用いられている。

越塚ら⁴⁾は MPS 法の計算に当初 ICCG (Incomplete Cholesky Decomposition Conjugate Gradient) 法ソルバーを適用したが、後に前処理を実行しない通常の CG (Conjugate Gradient) 法ソルバーに置き換えている。これは粒子法では前処理にかかる計算コストが大きく、総計算時間の短縮が困難であるためと考えられる。粒子法は影響半径内の近傍粒子数が多いため、メッシュ型解法と比較してあまりスパースな係数行列が得られない問題があり、前処理付きの反復解法より単純な CG 法ソルバーの方が一般に高速に求解処理を実行できる。本研究では、並列化効率と実行速度の観点から、対角スケール処理のみを行う CG 法ソルバーによる求解が現時点における最良の選択肢と考え、プログラムに採用した²⁴⁾。

ラプラシアンは 2 次元解析の場合は式(4.27)、3 次元解析の場合は式(4.28)を用いて計算を行うが、前述のとおり Morris らの提案による式(4.29)も利用可能である。圧力計算においては式(4.29)を用いた方が計算安定性は高く、本研究ではこれを用いた。この式を採用した際の計算安定性が高い理由は、粒子近傍の関数値が実際のラプラシアンより大きいため、対角優勢となることや、局所的な粗密が生じた際にも圧力解が破綻しにくいことが理由と考えられる。

本研究で用いたポアソン方程式の左辺の定式を以下に示す.

$$\nabla^2 P = \sum_j \frac{m_i + m_j}{\rho_i + \rho_j} (P_i - P_j) \nabla^2 W(r_{ij}, h) \quad (4.63)$$

$$\nabla^2 P = \sum_j \frac{m_i + m_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{(P_i - P_j)}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r} \quad (4.64)$$

ここで, i と j は粒子の添え字であり, 式(4.63)は極座標のラプラシアンを用いた定式, 式(4.64)は近似式を用いたものである. どちらの式を用いても圧力解はほぼ同じとなることを確認しているが, 図-4.1 の関数形の違いからは説明が難しいことであり, ここでその理由を考察し説明する.

ラプラシアンは物理量の総量を保存しながら平滑化する作用の演算子であり, 他の粒子に成す作用 (非対角項) と自粒子に成す作用 (対角項) は釣り合う関係にある. このことは, 極座標のラプラシアンを影響半径内で積分することで確認できる. 具体的には, 距離が 0 であるときの関数値は, それ以外の距離における関数値の総和と絶対値が同じであり, 符号が逆となる関係にある. つまり, 距離が 0 となる自粒子を積分相手とする関数値 (対角項) は評価せず, 他の粒子を対象とする重み (非対角項) の合計を計算し, 符号を反転して対角項とすることでラプラシアンとしての作用は成立する. つまり, 近似によるラプラシアンは全域で正となる距離の関数であるが, 影響半径の中心部分における関数値は実際には参照しない. 非対角項の総和に対して符号反転した対角項を持つ構造は, FEM のばね要素などにみられる構造であり, 極座標のラプラシアンモデルと同等の係数分布が得られている. このような処理は MPS 法においても同様である⁴⁾.

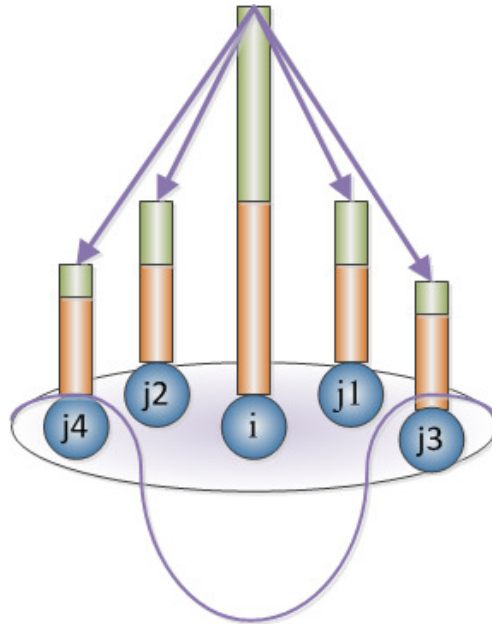


図-4.2 ラプラシアンの概念図

粘性項への適用についても、自粒子を対象とする相対速度は必ず 0 となるため問題は生じない。従って SPH 法では、流体の運動方程式を解く範囲において、実質的には 1 階微分までのカーネル関数しか必要としない。また、MPS 法においても同様のラプラシアン処理が行われている。MPS 法の重み関数は 0 階カーネルのみ用いるものであり、微分表現は差分によって評価される。ラプラシアンは 2 階微分であるので 2 階差分で表されるが、一般に用いられている MPS 法のラプラシアンモデルは物理量の差に係数を乗じる形で与えられている。この係数は、ラプラシアンモデルの平滑化速度が統計的にラプラシアン演算子と等価となるように重み関数を調整するものであり、重み関数の 2 次モーメントの積分値と通常の重みの積分値の比に対して、2 階カーネルの 2 次モーメントの積分値（すなわち次元数の 2 倍）を乗じて与えられている⁴⁾。

4.3 SPH 法の境界条件処理

微分方程式を解く上では境界条件と初期条件が必要であり、SPH 法の計算においても何らかの境界条件処理が必要である。流体粒子の運動に関して用いられる境界条件は、圧力を規定するディレクレ境界条件や固体内の圧力勾配を規定するノイマン境界条件などがある。この他、流束を規定する境界や、流入出境界、周期境界などが考えられるが本研究では用いなかった。この節では、自由表面に設定したディレクレ境界処理と壁面に設定したノイマン境界処理および壁面の粘着条件について述べる。

4.3.1 自由表面境界

粒子法を流体解析に適用する大きなメリットとして、比較的粗い計算分解能で自由表面流れを計算できる点が挙げられる。流れとともに計算点が流動する計算手法であることから、メッシュに依存しない安定した解析が可能である。しかし、液相のみをモデル化する解析においては、自由表面付近では明らかに計算点が不足し、影響半径内で積分した結果得られる密度が小さくなる問題がある。圧力を密度の関数としての構成式モデルから計算した場合、およびボアソン方程式の求解から計算した場合の両方で圧力が大気圧以下となり、結果的に自由表面方向に爆発するような計算結果が得られるはずである。このような問題に対応して粒子法では自由表面粒子に対して、大気圧を圧力 0 とするディレクレ境界条件を設定する⁴⁾。

自由表面の判定基準として最も簡単なものは粒子密度と基準密度の比を計算し、閾値未満の粒子を自由表面として判定する手法である。基準密度としては一般に材料密度が用いられるが、流動のない固体の解析では初期密度が採用されることもある。また、MPS 法では重み関数の影響半径内積分値を粒子数密度と定義しており、初期の格子配列配置における初期粒子数密度を基準密度として採用している。閾値として一般に 0.9 以上 1.0 未満の比率が採用されており、越塚ら⁴⁾は試行の上で 0.95~0.97 の採用を推奨している。本研究に

においても 0.95~0.97 の範囲の値を用いた。自由表面の判定基準としてはこの他にも幾つか提案されており、田中ら²⁰⁾が採用した影響半径内粒子数を基準とするもの、後藤ら²⁵⁾による影響半径内粒子の距離の 1 次モーメントから求まる重心座標のズレを評価する手法などがある。これらのより幾何的な条件に基づく判定手法は、カーネルの重みから計算する密度基準では判定にエラーが多く、間違ったディレクレ境界条件を設定することで計算が不安定化することを防ぐ意図がある。本研究では、これらの幾何的な条件に基づく改善手法は将来的な検討事項とし、従来の密度基準に基づく判定手法を用いた。

4.3.2 流体内の負圧発生領域の処理

粒子法の計算では、圧力は一般に大気圧を 0 として計算する。圧力の計算方法として陽的方法と陰的方法のどちらを採用した場合においても、局所的に疎となった領域近傍には負圧域が発生し、物理的にはサクシオンが発生すると考えられる。このような負圧の発生に対しては、一般的に圧力 0 境界が適用され、本研究においても同様の処理を行った。この処理は安定した計算を行う上で重要であり、特に SPH 法では負圧発生時に粒子が 1 点へ集中し、計算が不安定化する *Tensile instability* の問題が指摘されている⁴⁾。また、SPH 法のカーネルの勾配値は、粒子の極近傍で小さくなっており、粒子分布に局所的粗密が発生すると不安定化しやすい問題がある。このことについては、後述する人工粘性やカーネル関数の積分値が疎領域で不足する問題を解消することである程度改善される。

本研究では、スロッシング問題において大きな揺動が生じる際に、負圧を考慮しないことによって生じると考えられる、流体-壁間の隙間を確認している。このような実現象との乖離を解消するために、カーネルの正規化を行うことで安定化を図り、サクシオンを考慮したスロッシング問題の検討を行い、流体-壁間に生じる隙間を解消する試みを行ったが、将来的な課題として本論文では取り扱わなかった。なお、負圧を考慮した解析では、自由表面判定基準に密度基準を採用する場合、内部流体部分でその閾値がそのまま適用されないように処理に注意が必要である。

4.3.3 壁面のノイマン境界条件

粒子法は滑らかに物理量を補間する離散化手法であるが、固液の界面にまで連続的補間処理が適用されることは物理的に都合が悪い。壁表面にかかる水圧と壁表面の法線方向の応力は釣り合っていると考えられるが、壁内部には材料と構造の条件により応力勾配があり、ポアソン効果の影響から主応力方向は壁法線方向からずれていくと考えられる。液体と固体の界面は明らかに不連続面であり、固体内部の応力が液体圧力に影響を与えることがないように境界条件処理を行う必要がある。

本研究では、圧力のポアソン方程式の左辺係数行列を計算する際に、固体内部のラプラシアンを考慮しないことで圧力勾配 0 のノイマン境界処理を実現した。すなわち、固体に近接する流体圧力は固体内部の影響を受けずに計算される。固体内部へ流体粒子が浸透す

ることではないと仮定し、固体の内部圧力との関係性を切ることは妥当な処理と考えられる。この処理は同様の計算を行う MPS 法の離散化の考え方を参考にすると分かりやすい。MPS 法では勾配は差分で計算するため、流体粒子間の圧力差に重みを乗じる計算を行う。粒子間に圧力差がないことは、積分処理において影響がないことと等価である。

係数行列の計算において流体－固体間のラプラシアンは 0 とし、対角項が非対角項の合計と絶対値が同じになるように調整することで、固体粒子の圧力の自由度はそのまま連立方程式に組み込み計算できる。このようにして得られる固体圧力は、近接する流体圧力と圧力勾配が 0 となるような圧力である。そこで、固体圧力の自由度を全て連立方程式から追い出し、流体圧力を計算した後に近接流体圧力を参照することで、固体の圧力は補間計算することが可能と考えられる。しかし、本研究においてスロッシング解析などの検討を行った結果、自由度数を削減することで計算の大幅な高速化が可能ではあったが、近接流体粒子の不足する壁の隅角部付近で不安定になりやすいことを確認した。このように、問題によっては適用が難しいことを確認しているが、液体中の固体が固体間の接触によって内部圧力を上昇する問題を解消できる利点があり、適用可能な問題については利用を検討するべきと考えている。固体の圧力計算を省略する研究例は、越塚ら⁴⁾による MPS 法の研究にもみられ、壁境界を圧力計算する壁粒子と計算しない壁粒子に分けることで計算効率の改善が行われている。

4.3.4 壁面の粘着条件

壁面と流体の間の粘着条件には、ノンスリップ条件とスリップ条件があり、前者は流体の分子粘性により壁面に完全に粘着する条件であり、後者は全く粘着しない条件である。この条件の切り替えは、ノンスリップ条件下における粘性項を計算した後に、粘性項に 0 から 1 の間の係数を乗じることで実現できる。即ち、係数が 1 のときにノンスリップ条件であり、0 のときにスリップ条件、0 と 1 の間の場合には半滑りの条件となる。従ってノンスリップ条件を満たす粘性項を精度良く計算する必要がある。

ノンスリップ条件の計算においては、流体粒子と壁粒子の実際の相対速度を用いて粘性項の総和計算を行った場合に、壁の粘着条件としては半滑りの条件となることに注意が必要である。この問題は、流体粒子の速度ベクトルと壁体の内部粒子の速度ベクトルが距離に対して線形に変化するとして、壁表面位置において実際の壁の移動速度と一致していないことに起因する。従ってこのような境界部の相対速度計算では、壁粒子に粘着条件を満たす速度分布を与えて総和計算を実行する必要がある。Morris ら⁸⁾は図-4.3 に示すように流体と壁粒子の深度方向の位置関係から、壁体内部と流体粒子の相対速度が壁表面で 0 なるように次式で計算した。

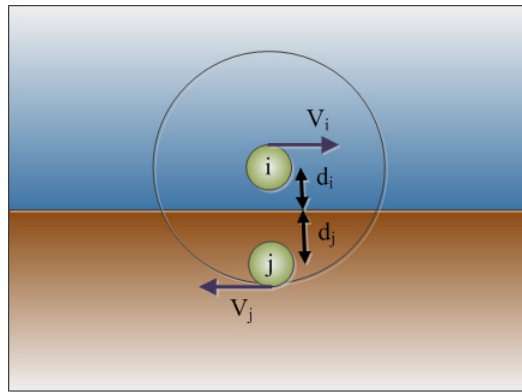
$$\boldsymbol{v}_j = -\frac{d_j}{d_i} \boldsymbol{v}_i \quad (4.65)$$

ここで、 \boldsymbol{v}_i と \boldsymbol{v}_j はそれぞれの粒子速度であり、 d_i と d_j はそれぞれの壁表面までの距離である。

なお、壁体が動いている場合についても同様に考えることが可能であり、壁表面の速度を \mathbf{v}_w とすると、粘性項の計算における相対速度は次式で計算できる。

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = \frac{d_i + d_j}{d_i} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_w) \quad (4.66)$$

行すべき計算は相対速度を距離の比で増幅する単純な処理であるが、実際の計算において d_i と d_j の計算は困難であることが分かる。本研究では、後述する三角形パッチの壁モデルを用いることで、粒子－壁面間距離は面の方程式からすぐに求めることが可能である。しかし、粒子法の計算で一般に用いられている粒子の壁モデルの場合、面の方程式を求めることは容易ではない。



図－4.3 壁内部の仮想粒子の速度計算

竿本²⁶⁾はこの問題に対して流体－壁間の最短粒子間距離を計算し、粒子－壁面間距離に置き換えて計算を行っている。しかしながら、この方法は距離計算の仮定に基づく誤差がある他、計算効率の観点から本研究では採用に至らなかった。本研究では、仮定に基づく計算誤差についてはある程度許容し、計算効率の良い壁内部の粒子速度の計算手法を採用した。この手法は壁内の粒子速度を影響半径内の流体粒子の重み付き平均として計算し、向きを反転した速度を与える。壁体が動いている場合には相対速度への影響を考慮し、2倍の壁体速度を流体平均速度に加えて粘性項の計算を行うものである。なお、重み付き平均の重み関数としてはMPS法の重み関数を用いた。

$$W(r_{ij}, r_e) = \frac{r_e}{r_{ij}} - 1 \quad (4.67)$$

ここで、 r_e は影響半径であり r_{ij} は粒子間距離である。MPS法の重み関数では距離0のときの値が計算できないため自粒子の重みは加えずに計算し、初期格子配列における積分値である初期粒子数密度で正規化する。このような距離に鋭敏で自粒子の影響を含まない関数は、周囲の粒子から物理量を補間する処理において有効である。本研究においては、物理量補間の関数として、次式に示すように距離依存性のパラメータ α を導入し、重み付き平均の計算を行っている。

$$W(r_{ij}, r_e) = \left(\frac{r_e}{r_{ij}}\right)^\alpha - 1 \quad (4.68)$$

なお、重み付き平均の計算においては初期粒子数密度で正規化するのではなく、実際の重みの積分値で正規化する必要がある。距離の依存性を非常に大きく設定する場合は、重み付き平均を計算せずに、単に最近接の流体粒子の物量を参照することで代替可能である。

この他、粒子による壁モデルを用いたノンスリップ条件の計算方法には、壁面内で移動する仮想粒子を用いた手法が知られており、この手法では壁近傍の流体粒子と面对称となる位置と圧力を持つ仮想粒子を生成し、点対称な速度を与えることでノンスリップ条件を満たすことができる。しかし、壁面に凹凸がある場合には仮想粒子に粗密が生じる他、仮想粒子の位置を毎ステップ更新する必要があるため、壁粒子と対応する仮想マーカーを流体領域に設けて流体速度を参照する方法が開発されており、これらは浅井ら²⁷⁾の研究で詳しくまとめられている。

4.3.5 粘性項の陰解法による計算

壁面の粘着条件を満足するには壁内部の速度を計算する必要があることを前項で説明した。粒子壁を用いた距離計算は一般に困難であるため、ある程度の誤差は許容して計算する必要がある。しかし、この問題は粘性項の計算を陰解法で行うことにより解決できる。本研究では粘性項を陰解法で計算することにより壁内の速度分布の計算が不要であることを確認した。前項までの粘性項の計算は全て陽解法による計算を前提としており、式(4.45)または式(4.46)で計算する。ここで式(4.45)の粘性項を時間差分で表し、速度で整理すると次式が得られる。

$$\mathbf{v}_i^{vis} = \mathbf{v}_i^k + \Delta t \sum_j \frac{m_j(\mu_i + \mu_j)}{\rho_i \rho_j} [\{\theta(\mathbf{v}_j^{vis} - \mathbf{v}_i^{vis}) + (1 - \theta)(\mathbf{v}_j^k - \mathbf{v}_i^k)\} \nabla^2 W(r_{ij}, h)] \quad (4.69)$$

ここで θ は時間差分に関するパラメータであり、 $\theta = 0$ の場合に陽解法、 $\theta = 0.5$ の場合にCrank-Nicolson 法、 $\theta = 1$ の場合に完全陰解法となる。ここで着目すべきは完全陰解法であり、現在時刻における速度に関係なく粘性項の計算が可能である。壁の速度が与条件として設定されるため、壁の自由度を計算する必要はないが、上式から分かるように壁の速度もポアソン方程式の生成項に現れ、ステップ速度から計算される。このとき用いる速度は壁内深度による増幅を考慮する必要はなく、壁の表面速度を用いる。圧力のポアソン方程式とは異なり、流体－固体間のラプラシアンを考慮する必要があるが、条件として与えられる固体の速度は流体速度の影響を受けないため、流体粒子の対角項にのみ壁の影響が生じることとなる。連立方程式を解くことで静的な釣り合いが満たされ、粘性項の陽的な積分処理を行うことなく計算できるため、壁内の速度分布の影響を考慮せずに壁の粘着条件をある程度満たすことが可能である。

境界条件についてより具体的に述べると、壁面のノンスリップ条件はディレクレ境界条件によって与えられる。つまり、粘性項による速度 \mathbf{v}_i^{vis} を与条件として連立方程式から自由

度を追い出し、周囲の粒子へは生成項として影響を与える。また、自由表面やスリップ条件はノイマン境界条件によって満たされる。従って、周囲の粒子とのラプラシアン 0 とすることによって連立方程式の求解を行う。

式(4.69)は各軸方向に対して個別に方程式が成立し、問題規模として圧力のポアソン方程式と同じになるが 3 次元解析の場合は 3 回実行する必要がある。圧力のポアソン方程式と比較すると収束性が良好であるため、計算時間が定数倍になるわけではないが、陽解法と比較すると 1 ステップあたりの計算時間は長くなる。しかし一方で、数値安定性の条件の 1 つである拡散数による時間増分の制約がなくなり、完全陰解法に関しては時間増分の設定に関係なく粘性項の計算が可能となる。したがって、粒子分解能が非常に高い場合や、粘度が非常に大きく流速が遅い条件下では大幅な計算ステップ数の削減が可能となる。時間増分を粗くすることで生じる非定常計算における誤差が許容可能な範囲内であれば非常に有力な選択肢となる。

4.4 SPH 法の数値解析に関するその他の事項

4.4.1 時間増分の設定

数値解析では問題に応じて適切な時間増分を設定する必要がある。SPH 法の数値解析においても他の解析手法と同様の時間増分に関する制約条件がある。SPH 法による流体解析で考慮する必要がある数値安定性上の制約条件を表 4.1 にまとめて示す。

表 4.1 流体解析における時間増分に関する制約条件

時間増分に関する制約事項	制約事項の回避条件
縦波の伝搬速度による制約	圧力計算を陰的に行うことで回避可能
Courant 数の制約	非定常計算である限り回避不可能
拡散数の制約	粘性項の計算を完全陰解法で行うことで回避可能

縦波の伝搬速度による制約条件は圧力を構成式から陽的に求めた場合に発生する。例えば水の場合、縦波の速度は約 1500m/sec であり、時間増分としては非常に小さい値を設定する必要がある。陽解法を用いた一般の計算においては構成式のパラメータを調整し、実際より縦波の速度を小さく設定することで時間増分を粗くしている。

Courant 数 C の制約条件²⁸⁾は、連続体解析において縦波の伝播速度による制約と同義であるが、圧力を陰的に計算することで縦波の伝播速度の制約を回避した場合においても、実際の粒子移動速度によってこの制約が発生する。流体解析の時間増分を一般に支配する条件であり、この条件が満たされないと粒子の異常貫入や貫通が生じ、計算が不安定化する。

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta x} v_{max} < 1 \quad (4.70)$$

飛翔する孤立粒子の速度は大部分の流体速度に比べて非常に高速であり，時間増分をクーラン数の条件から可変計算した場合，最大速度 v_{max} が極一部の飛翔粒子によって決定することで，時間増分が小さくなり過ぎて計算の続行が困難となったり，圧力振動が抑制できなくなり妥当な解が得られなくなったりする．本研究においては，時間増分を可変計算する場合には最小時間増分を設定することでこの問題の回避を行っている．なお，粒子法で安定した計算を行うには **Courant** 数は 0.2 以下が好ましい⁴⁾．

拡散数 D の制約条件²⁸⁾は，少なくとも土木建築分野における解析ではあまり問題となることがない．それは計算体系が大きいため，拡散数があまり大きくならないためであり，非常に高い分解能の計算を行う場合には **Courant** 数より厳しい条件となる．また半固体状の極めて粘度が高い流体の解析においても拡散数は大きくなり，必要に応じて粘性項は陰解法で計算する方が賢明である．

$$D = \lambda \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < 0.5 \quad (4.71)$$

ここで λ は拡散係数であり，流体解析においては動粘性係数が相当する．拡散数についても 0.2 以下程度の基準を設けるのが好ましいが，本研究においては粘性項のラプラシアン²⁹⁾の計算に **Morris** らによる近似式を用いた場合，極座標のラプラシアンを用いるより数値発散が生じる閾値が厳しいことを確認している．

4.4.2 人工粘性の導入

時間増分の制約条件に関わらず時間増分は一般に細かく設定した方が，非定常現象の再現性は高くなる．特に粒子法による非圧縮性流体の解析では，粒子配置に局所的に生じた粗密が原因となって圧力解が不安定となり，結果として適切な解析結果を得られなくなることも多く，このような問題に対して時間増分を細かくすることは有効である．しかしながら，計算コストの観点からは時間増分を粗くとる必要があり，本研究では **Monaghan**¹²⁾によって **SPH** 法に導入された人工粘性を用いた．この人工粘性は従来差分法で用いられていた密度変化に対する人工粘性応力と比較して，高速衝突などを含む密度変化の激しい問題に対して有効であり次式で与えられる．

$$\mu_{ij}^{art} = \frac{r_e(r_{ij} \cdot x_{ij})}{r_{ij}^2 + \gamma r_e^2} \quad (4.72)$$

$$P_{ij}^{art} = \mu_{ij}^{art}(\alpha c + \beta \mu_{ij}^{art}) \quad (4.73)$$

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P_{ij}^{art} = -\sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} P_{ij}^{art} \nabla W(r_{ij}, h) \quad (4.74)$$

ここで， μ_{ij}^{art} は速度の次元をもち， P_{ij}^{art} は圧力の次元をもつ人工粘性圧力である． c は縦波の速度であり α , β , γ は計算パラメータである． α と β は大きいほど人工粘性は大きくなり， γ は反対に大きいほど人工粘性は小さくなる． γ は粒子が異常接近した際の安定化パラメータであるが，本研究では常に 0 を用いている．本研究では人工粘性圧力を通常の圧力勾配

項の一部として流体粒子に加えており、密度の 2 乗で除算した次元を持つ点で Monaghan が導入した式と異なる。これはプログラム内で圧力勾配項や粘性項と同時に処理しているためである。他の研究にみられる人工粘性の多くは、上式と同じ定式に基づくが密度の 1 乗で除算したものであり、比較すると流体密度の 1 乗ほど次元が合っていない。例えば流体が水である場合、他の研究例に示されるパラメータに対して人工粘性は 1/1000 となる。人工粘性の大きさはパラメータで調整できるため、計算上の問題はない。

4.4.3 表面張力計算

土木構造物のような大きなスケールを対象とした解析の場合はあまり問題となることはないが、実験規模の小さなスケールのモデルについては表面張力の影響は無視できるものではない。特に液体金属などは表面張力係数が大きく、表面張力の効果を解析に組み込まなければ定性的にも現象を再現することはできない。本研究においても自由表面の安定化を意図して表面張力モデルを導入した。

表面張力モデルは FVM などの格子法においては CSF モデルが採用されており、粒子法にも野村ら⁴⁾によって導入されている。しかし、CSF モデルの計算においては界面の法線と曲率を評価する必要がある。粒子法の計算においてはこれらを精度良く計算することが容易ではない。本研究においても当初はこのモデルの導入を行ったが、後により安定して計算可能な分子間力モデルを導入した。分子間力モデルは近藤ら²⁹⁾によって MPS 法に導入された粒子法に適した表面張力モデルであり、界面の法線および曲率を計算する必要がない他、壁面との接触角を計算できることが特徴である。

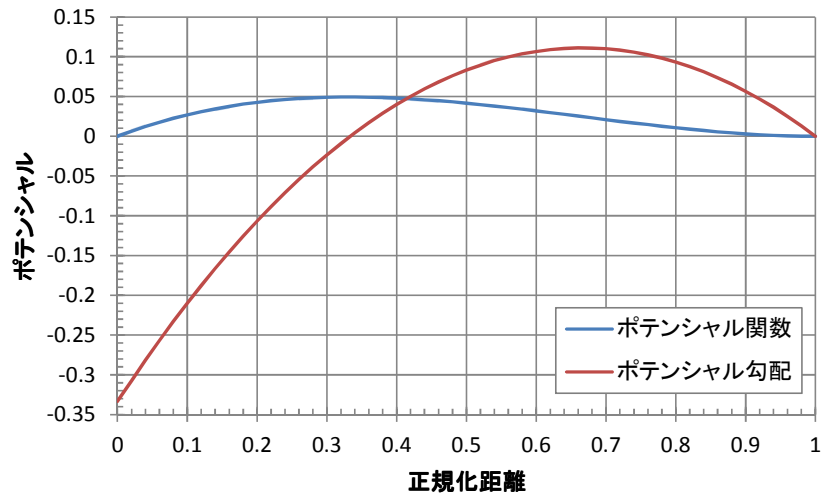
近藤らは粒子間に働くポテンシャルとして次式のポテンシャル関数 $P(r)$ を提案した。

$$P(r) = \frac{C}{3} \left(r - \frac{3}{2}r_0 + \frac{1}{2}r_e \right) (r - r_e)^2 \quad (4.75)$$

ここで、 C は表面張力の大きさを調整するポテンシャル係数であり、 r_0 は初期粒子間距離である。この関数を r で微分すると次式のポテンシャル勾配が得られる。

$$\frac{\partial P(r)}{\partial r} = -C(r_0 - r)(r - r_e) \quad (4.76)$$

近接粒子間ではポテンシャル勾配による作用力が相互に働いており、対称性のない部位ではポテンシャル力による移動が発生して全体のポテンシャルを最小化する。 $C = 1$ として正規化距離で計算したポテンシャル関数とポテンシャル勾配を図-4.4に示す。



図－4.4 ポテンシャル関数

図よりポテンシャル勾配は影響半径の内側で負の値を示しており，これは接近する粒子に対して斥力を生じることを示している．MPS 法においてはあまり問題とならないことであるが，SPH 法では初期粒子間距離以内に接近する粒子に対して圧力勾配項があまり大きくならないため，局所的に生じる粗密が解消せずに問題となることがあり，このような斥力を生じるモデルは有効である．一方で，MPS 法では重み関数の特性から異常近接粒子には過大な圧力勾配項が発生するため，MPS 法の商用コードでは近藤らの提案したポテンシャル関数と異なり，全域で引力が生じるモデルが採用されている．

ポテンシャル関数の大きさを調整するポテンシャル係数 C は，表面張力係数と対応付けて設定する．近藤らは図－4.5 に示すように平面上に接地面積 r_0^2 の1列の粒子を配置し，これらの粒子群 (i) を平面の粒子群 (j) から引き抜くのに必要なエネルギーを計算し，次式で表面張力係数 σ と対応づけた．

$$2\sigma r_0^2 = \sum_i \sum_j P(r_{ij}) \quad (4.77)$$

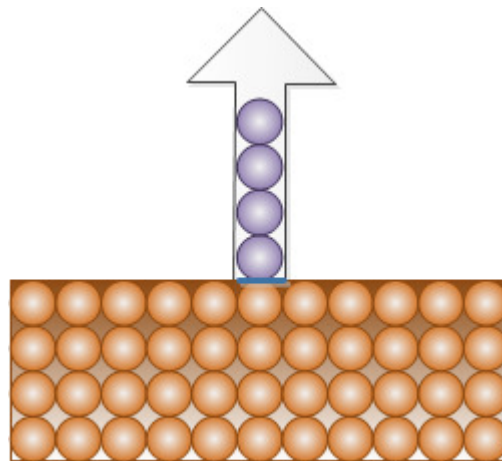


図-4.5 ポテンシャル係数の計算

また、この分子間力モデルでは壁面との接触角の考慮が可能である。表面張力係数 σ と接触角 θ の関係式である Young の式とポテンシャル係数を関連付け、近藤らは次式を提案した。

$$\frac{C_{fs}}{C_{ff}} = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \quad (4.78)$$

ここで、 C_{fs} は流体-固体間のポテンシャル係数であり、 C_{ff} は流体間のポテンシャル係数である。つまり、ポテンシャル勾配の影響半径内積分を実施する際に、壁面が相手粒子であるときのみ固体-流体間のポテンシャル係数を選択することで接触角の考慮が可能である。

4.4.4 人工斥力モデル

粒子法の計算においては圧力勾配項以外の斥力モデルの導入が必要である。最大の理由は自由表面粒子には圧力がなく、そのままでは反発力が得られないためであり、次に計算の安定化の都合、異常接近粒子を引き離す必要があるためである。

越塚らによる MPS 法の解析コード⁴⁾には次式で示めされる衝突計算モデルが含まれており、MPS 法の商用コードにも同じ機能が組み込まれている。

$$\mathbf{v}_i^{col} = \mathbf{v}_i^k - \frac{\rho_j}{\rho_i + \rho_j} \frac{(1+\eta)(\mathbf{v}_j^k - \mathbf{v}_i^k) \cdot \mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^2} \mathbf{r}_{ij} \quad (4.79)$$

ここで、 \mathbf{v}_i^{col} は衝突解消後の速度であり、 η は跳ね返り係数である。この計算は非弾性衝突のモデル式であり、粒子間距離が初期粒子間距離より小さい閾値未満となった場合に、ダッシュポットにより跳ね返り計算を行う。

また、ダッシュポットによる跳ね返りモデルに加えてばねによる斥力モデルも追加することが可能であり、これはそのまま DEM の作用力伝達系モデルと同じものと考えられる。岩本ら³⁰⁾は SPH 法において生じる局所的な粗密を解消するために SPH 粒子間に DEM の作用力伝達系を挿入し、粒子間距離が閾値以下の場合に有効化した。ばね定数は時間増分から設定可能であり本研究では、 κ を 1.0 以下の値として次式から計算している。

$$k_{ij}^{col} = \frac{\kappa}{\Delta t^2} \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \quad (4.80)$$

このばねによって生じる力は Δt 後に貫入を解消するばね力であり、ダッシュポットの反発力と合わせて計算する。ダッシュポットの減衰定数は臨界減衰を基準とする条件や跳ね返り係数から設定する。岩本らは地盤の解析において人工斥力モデルの発動する距離の閾値を初期粒子間距離の 0.8 倍程度と設定したが、本研究においてはこの距離がスロッシング問題などの波高応答に影響を及ぼすことを確認しており、自由表面粒子間以外では 0.65 倍の値を基準として設定した。なお、自由表面については安定化のため 0.9 倍程度の値を基準距離に設定しており、この設定は粒子数密度の小さい自由表面粒子が表面で凝縮することによる計算の不安定性を解消する。

4.4.5 DEM 連成手法

DEM の固相粒子と流体解析のカップリング手法としては Crowe らによる PSI-Cell モデルがある³¹⁾。この手法はコントロールボリュームに界面から入ってきた粒子の運動量と、その粒子が界面から出ていく運動量の差から固液相に生じた運動量の授受を計算するモデルであり、Lagrange-Euler 連成のモデルとなっている。このモデルではコントロールボリュームを通過する全ての固体粒子の界面速度を把握しておく必要がある。これを簡略化して、一般には固相粒子の駆動力に支配的な流体抗力を粒子点位置の物理量として代表し、内挿関数を用いてコントロールボリューム内の相互作用を計算する。

粒子法においては液相も粒子でモデル化するため、上記のような計算に比べてより容易に連成計算が可能である。具体的には、固相粒子を壁粒子同様に SPH のカーネル積分に組み込むことで、相互作用力は作用反作用として容易に計算可能であり、流体抗力を受けて駆動する固体の計算が可能である。また、粒子ベースの剛体解析手法を田中ら³²⁾が提案しており、同様の連成解析を行っている。本研究においても DEM-SPH 連成手法と DEM 剛体計算モデルを用いて浮体の計算や混相流の計算が可能であることを確認しており、図-4.6 に解析例を示す。

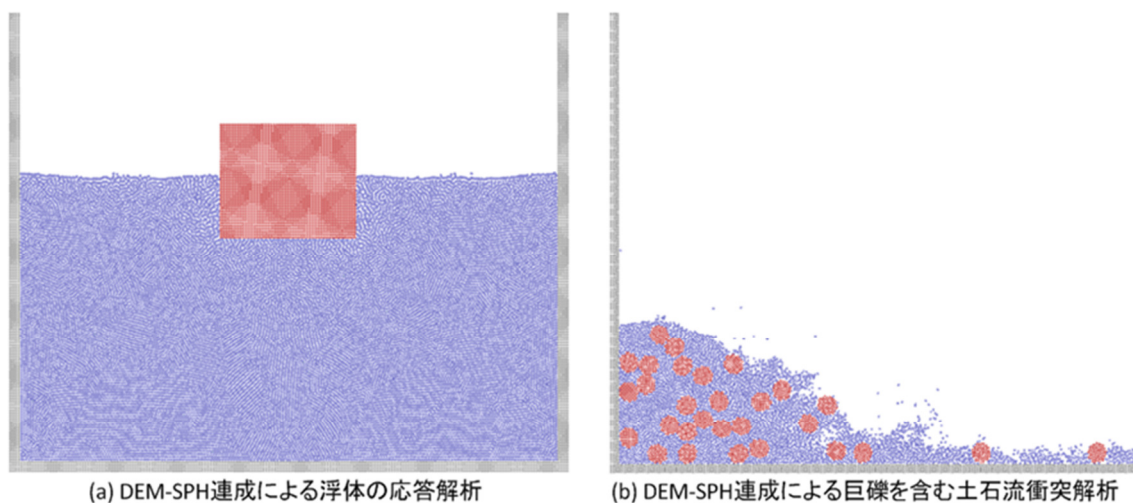


図-4.6 DEM-SPH 連成計算例

4.5 三角形パッチによる壁境界の SPH 法への導入

SPH 法の計算では近傍粒子間で物理量の補間計算が行われるため、DEM の計算ほど直接的ではないが、壁境界などの界面を格子配置の粒子でモデル化する際に、形状再現性の観点から高い分解能が必要とされる。メッシュ型の解法に比べ、可変分解能の安定した計算は容易でないため、複雑な境界面などの再現性は 1 つの課題となっている。

この問題に対し、原田らは壁境界に粒子を用いない手法を SPH 法³³⁾および MPS 法³⁴⁾に対して適用した。この方法は、解析の前処理時に、壁境界までの最近接距離を解析領域全体に渡って格子状に計算し、解析時に線形補間して距離関数として利用するものである。また、佐々木ら³⁵⁾は距離関数を用いた壁境界計算手法を改良し、水柱崩壊やタンクのスロッシング問題に適用した。これらの研究で用いられた手法は、3D-CAD で作成した形状データをそのまま粒子法の壁境界として使用でき、距離計算は前処理時にのみ実行すれば良いため高速であり、MPS 法の商用コードにおいても採用されている。ただし、この手法は並行移動や回転運動を壁境界に与えることはできるが、壁境界自体の変形を条件として与えることはできない。そこで本研究では、距離関数を用いない壁境界モデルを開発し SPH 法に適用した。以降の項でその方法について述べる。

4.5.1 壁境界のカーネル関数

粒子間のカーネル関数は粒子間距離の関数として定義され、同様に壁境界と粒子間のカーネル関数は壁面要素と粒子間の距離の関数として計算できる。影響半径 r_e 以内に存在する壁の積分値は事前に計算しておくことが可能であり、解析実行前に粒子 i と壁面 w までの距離 r_{iw} の関数のテーブルとして作成し参照した。このテーブルは微分演算子毎に、図-4.7 に示されるように、 r_{iw} を 0 から r_e まで徐々に変化させて壁面距離に対するカーネル関数値の総和を計算することで作成した。

この関数テーブル作成時において、壁面の内側に仮想の計算粒子を格子状に配置したが、壁粒子を用いた場合の計算と総和値を揃えるために、壁表面粒子の中心座標は図-4.7 に示すように壁表面から基準距離（初期粒子間距離）の 1/2 倍ほど壁の内側に配置した。原田ら^{33),34)}の研究では仮想粒子を壁の表面に配置しており、粒子による壁モデルと同じ初期配置で計算を行うと、計算の初期段階で不安定となる問題に対応した。なお、佐々木ら³⁵⁾の研究でも 1/2 倍ほど壁の内側に仮想粒子を配置する手法が採用されている。

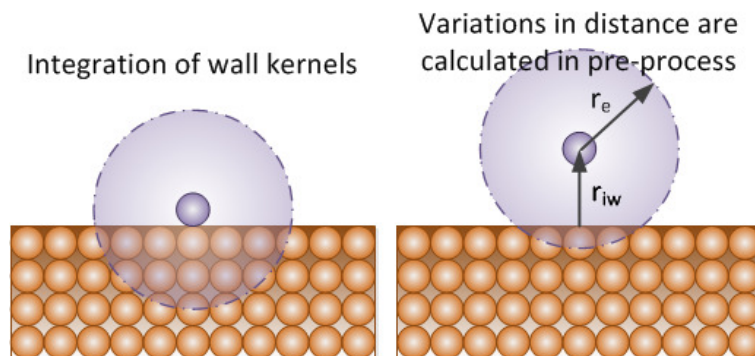


図-4.7 格子配置の仮想粒子を用いた壁カーネル関数の事前計算

各演算子に対応する壁カーネル関数の具体的な計算は以下に示される。

$$W^{wall}(r_{iw}, h) = L_0^3 \sum_j W(r_{ij}, h) \quad (4.81)$$

$$\nabla W^{wall}(r_{iw}, h) = L_0^3 \sum_j \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r} \quad (4.82)$$

$$\nabla^2 W^{wall}(r_{iw}, h) = L_0^3 \sum_j \nabla^2 W(r_{ij}, h) \quad (4.83)$$

ここで L_0 は初期粒子間距離、 $W(r_{ij}, h)$ は通常のカネル関数、 r_{ij} は仮想壁粒子 j と着目粒子 i の距離であり、壁面と着目粒子の距離 r_{iw} が決まると各階の壁カネル関数は計算できる。

ただし、壁カネル関数の勾配については、壁面の関数値の総和から予め接線成分を除いて計算する必要がある。すなわち、粒子間距離 r_{ij} に対する重みに r_{iw}/r_{ij} を乗じて総和計算する。1階のカネル関数に方向余弦を乗じてベクトル化する計算は粒子間の勾配モデルと同様であるが、この方法で得られるベクトルは壁面の法線方向成分のみであり、接線方向成分については別の計算を行う必要がある。従って、壁カネル関数の勾配は次式で置き換える。

$$\nabla W^{wall}(r_{iw}, h) = L_0^3 \sum_j \frac{r_{iw}}{r_{ij}} \frac{\partial W(r_{ij}, h)}{\partial r} \quad (4.84)$$

なお、法線成分が計算できて接線成分が計算できない理由は、解析実行前の段階では壁面表面の物理量の分布が未知である点にある。法線成分は壁面深度方向に物理量勾配が0であるか一定と考えられ、壁面の単位法線に対して向きの正負だけが問題となる。接線成分は壁表面の物理量分布が分からなければ計算はできない。

そこで、勾配の接線成分については壁面近傍粒子の粒子カネルのみによる勾配の総和 $\nabla W^{Particle}$ から計算する。 $\nabla W^{Particle}$ は着目する壁面に最も近い粒子の勾配の総和であり、その壁面接線成分 $\nabla W_t^{Particle}$ は壁面の単位法線ベクトル \mathbf{n}_w を用いて次式で計算できる。

$$\nabla W_t^{Particle} = \nabla W^{Particle} - \mathbf{n}_w (\nabla W^{Particle} \cdot \mathbf{n}_w) \quad (4.85)$$

この総和値は影響半径の成す球体積から壁面内の占める体積分を除いて評価されており、この値を次式で壁面内の占める体積相当分に置き換える。

$$\nabla W_t^{Wall} = \nabla W_t^{Particle} \frac{W^{wall}(r_{iw}, h)}{1 - W^{wall}(r_{iw}, h)} \quad (4.86)$$

4.5.2 最近接距離計算

DEM の計算において壁面要素を導入したときと同様に壁面・粒子間の距離計算を行う必要がある。DEM の計算では全ての接触壁に対して作用力の計算を行ったが、SPH 法の計算では最も近い壁面要素との間でのみ作用力の計算を行う。壁面 w と粒子 i の距離 r_{iw} は、 \mathbf{n}_w を壁面の単位法線、 d_{w0} を原点までの最短距離として次式で計算できる。

$$r_{iw} = \mathbf{n}_w \cdot \mathbf{x}_i + d_{w0} \quad (4.87)$$

ここで、 $r_{iw} < r_e$ であれば影響半径内であり、次式による壁面内外判定を行う。

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_i + r_{iw} \mathbf{n}_w \quad (4.88)$$

$$J_k = ((\mathbf{v}_k - \mathbf{x}_p) \times (\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{x}_p)) \cdot \mathbf{n}_w \quad (4.89)$$

上式は粒子座標 \mathbf{x}_i の代替として壁面への投影座標 \mathbf{x}_p を用いている点で DEM の計算とは異なる。このことは、外積によって得られる三角形面積を物理量の線形補間に利用するために重要である。 k は 1～3 で循環し、 J_k の符号によって投影点 \mathbf{x}_p が三角形の領域内にあるか判別できる点は DEM の計算と共通である。 J_k が全て正とならない場合には追加の接触判定を行う必要がある。

4.5.3 壁境界の計算方法

壁の近接粒子 i の SPH 近似については、各階の壁カーネル関数を用いて壁に関する積分値 ϕ_i^{wall} を計算し、それを除く粒子積分値 $\phi_i^{Particle}$ に合算して求める。

$$\langle \phi_i \rangle = \phi_i^{Particle} + \phi_i^{wall} \quad (4.90)$$

この計算における壁の物理量 ϕ_w は、壁表面の物理量 ϕ_{ws} から計算できる。壁境界を構成する三角形パッチの各頂点では、頂点法線ベクトル、圧力、速度、頂点平均曲率などを定義しておき、着目粒子 i の位置ベクトル \mathbf{x}_i を最近接壁表面に投影した点座標 \mathbf{x}_{is} における物理量の計算に利用する。壁表面の物理量 ϕ_{ws} は、最近接壁の構成 3 頂点の物理量 $\phi_1 \sim \phi_3$ および面積座標 $A_1 \sim A_3$ より次式で線形補間する。

$$\phi_{ws} = \sum_{k=1}^3 \phi_k A_k \quad (4.91)$$

この線形補間の考えは DEM の計算においても適用可能であり、DEM の壁面・粒子間で定義した接触関係を境界面全体と粒子間の接触と考え、最近接粒子間との作用力計算のみ行うことで複数の壁面要素を跨ぐ際に生じていた不連続性を解消することができる。

本研究で導入した壁カーネル関数を用いることで得られる、着目粒子点 \mathbf{x}_i における密度や圧力勾配項、粘性項の具体的な計算方法を以下に説明する。

SPH 法の粒子密度の計算では、式(4.33)に示されるように近傍粒子の質量重み付き和より計算する。壁面と近接する粒子の場合、影響半径球が壁面内に占める割合ほど総和値が不足するため、壁カーネル積分を用いた計算が必要となる。壁近傍の粒子密度は次式から計算できる。

$$\rho_i = \sum_j m_j W(r_{ij}, h) + \rho_i^0 W_{wall}(r_{iw}, h) \quad (4.92)$$

ここで、 ρ_i^0 は粒子の初期密度であり、 W_{wall} は 0 階の壁カーネル関数である。なお、粒子間のカーネル関数は体積の逆数の次元を持つが、壁カーネル関数は粒子カーネル関数に体積を乗じた次元を持つことに注意が必要である。

同様に、壁近傍の粒子の圧力勾配項は次式で示される。

$$-\frac{1}{\rho} \nabla P_i = -\sum_j \frac{m_j}{\rho_i \rho_j} (P_i + P_j) \nabla W(r_{ij}, h) - \frac{1}{\rho_i} (P_i + P_w) \nabla W_{wall}(r_{iw}, h) - \nabla W_{wall}^t \quad (4.93)$$

ここで、壁カーネルの項に粒子点の体積に相当する m_j/ρ_j が現れないのは前述のとおりである。また、壁カーネル関数の勾配計算では接線方向成分が得られないため、近傍粒子の圧力勾配から ∇W_{wall}^t を計算する必要がある。なお、式中の P_i と P_j は粒子の圧力であり、 P_w は壁表面の粒子投影点からある深さ d ほど壁内へ潜った位置における圧力である。この圧力は面

積座標を用いた線形補間で得られる壁表面の圧力 P_{ws} を用いて計算できる．ノイマン境界を仮定して壁深度方向に圧力が線形に変化すると考え、粒子点位置と壁表面の圧力の勾配でこれを結ぶと次式が得られる．

$$(P_i + P_w) = P_i \left(1 - \frac{d}{r_{iw}}\right) + P_{ws} \left(1 + \frac{d}{r_{iw}}\right) \quad (4.94)$$

ここで、 r_{iw} は粒子と壁面までの距離であり、 d はカーネル関数の総和計算における壁内部の代表点の深さである．この代表点の深さは各階の壁カーネル関数の作成時に壁面内深度の一次モーメントから次式で計算できる．

$$d = \frac{\sum_j (r_{ij}^n - r_{iw}) W(r_{ij}, h)}{\sum_j W(r_{ij}, h)} \quad (4.95)$$

ここで、 r_{ij}^n は壁カーネル関数のテーブル作成時に参照する仮想粒子間の相対位置ベクトル r_{ij} の深度成分である．このテーブルは粘性項の計算においても同様に参照する．

粘性項も同様にして次式で計算できる．

$$\frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}_i = \sum_j \frac{m_j (\mu_i + \mu_j)}{\rho_i \rho_j} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \nabla^2 W(r_{ij}, h) + \frac{2\mu_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_w)}{\rho_i} \nabla^2 W^{wall}(r_{iw}, h) \quad (4.96)$$

また、流体粒子と壁内部点の相対速度は式(4.66)の表現を変えて次式で示される．

$$(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_w) = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_{ws}) \left(1 + \frac{d}{r_{iw}}\right) \quad (4.97)$$

なお、本研究において圧力はポアソン方程式の求解により計算しているが、壁面の構成頂点の圧力は連立方程式に組み込まずに計算した．壁の影響を組み込まないことでノイマン境界条件とし、流体の圧力計算後に近接粒子の圧力から頂点圧力を取得した．頂点圧力は距離依存性の大きい重み付き平均や、最近接粒子値の参照により取得することができる．距離依存の関数としては次式のようなMPSの重み関数に対して距離の依存性を大きくしたものが有効である．

$$w_{vi} = \left(\frac{r_e}{|\mathbf{x}_v - \mathbf{x}_i|}\right)^\alpha - 1 \quad (4.98)$$

ここで、 w_{vi} は頂点 v に占める粒子 i の重みであり、 \mathbf{x}_v と \mathbf{x}_i はそれぞれ頂点 v と粒子 i の座標である． α は距離依存性を大きくするパラメータであり1.0以上の値を設定した．このような重みを用いた平均計算により得られる圧力はより安定であるが、本研究においては距離計算を省略するため、頂点毎に最近接粒子番号を保存しておき、最近接粒子の圧力をもって頂点の圧力として計算を行った．

自由表面粒子には圧力0の条件を設定しており、壁境界との間で圧力勾配項を評価した場合には斥力は得られない．そこで原田らが提案した壁面の圧力勾配モデルと同様に、壁面への粒子の貫入を解消するばね力を導入し、壁面に貫入している自由表面粒子に対して次式に示す作用力 F_{spring} を与えた．

$$F_{spring} = \frac{m_i}{\Delta t^2} \left(\frac{L_0}{2} - r_{iw}\right) \mathbf{n}_w \quad (4.99)$$

ここで、 m_i は粒子質量であり、 L_0 は初期粒子間距離である．本研究では、この力を壁計算の安定化のために自由表面粒子以外にも載荷しており、本来の壁面圧力勾配項 95%に対し、ばね力 5%の割合で合算して計算した．このような圧力勾配のブレンドモデルは MPS 法の商用コード Particle Works にも導入されている．

4.5.4 曲率計算と体積補正

本研究の壁境界モデルで用いる壁カーネル関数は曲率 0 の平面を仮定しているため、壁境界の近傍粒子に壁が与える影響の考慮には、近接境界面の有する曲率に見合った体積補正が必要となる．原田ら³⁴⁾の手法では、粒子近傍の境界が成す平均曲率を平面角と関連付けて体積補正を行い、平均曲率は距離関数の空間テーブルより差分計算することで、解析領域内の任意座標における値を計算することができる．本研究では距離関数は用いないため、境界面の表面形状から頂点位置の平均曲率を計算する．なお、佐々木ら³⁵⁾の手法では壁境界の成す角度から直接的に体積補正係数を算出しているが詳細は不明である．

本研究では、平均曲率の計算手法として、Meyer ら³⁶⁾による三角形パッチの曲率計算手法を採用した．この方法では次式により頂点の平均曲率 κ_H を計算する．

$$\kappa_H(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}(\mathbf{x}_i)\| \quad (4.100)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2A_{Mixed}} \sum_j (\cot \alpha_j + \cot \beta_j) (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (4.101)$$

ここで、 $\mathbf{K}(\mathbf{x}_i)$ は曲率の大きさを持つ頂点法線ベクトルであり、本研究では SPH 法の計算に用いる頂点法線ベクトルとは分けて計算した． α_j と β_j は頂点 i まわりの頂点 j との間にそれぞれ定義される角度であり図-4.8に示す． A_{Mixed} は着目頂点回りの構成三角形において頂点が占める面積の総和である．

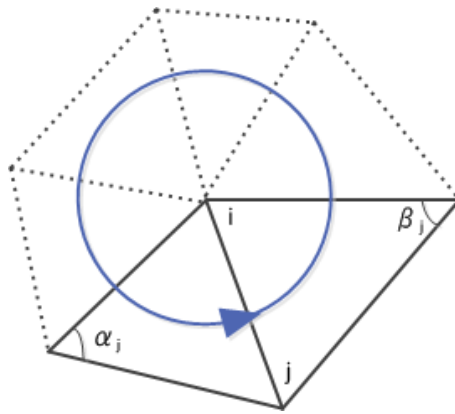


図-4.8 着目頂点回りの頂点間に定義される角度と頂点の支配面積の総和計算

A_{Mixed} は、アスペクト比が良好な三角形の場合に Voronoi 領域の面積となる．そうでない場合（鈍角を有する三角形）については、着目頂点の成す角が鈍角である場合に三角形面

積の 1/2, そうでない場合に 1/4 をもって代替することを Meyer らは提案しており, 本研究においても採用した.

なお, 上式より計算される曲率は符号を持たない. 本研究では曲率に符号を持たせるために頂点法線ベクトルを用いて次式に示す計算を行った.

$$J_i = -\sum_j (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{v}_j) - d_{i0} \quad (4.102)$$

ここで, \mathbf{n}_i は頂点 i の単位法線ベクトルであり, \mathbf{v}_j は頂点 i まわりの頂点 j の座標であり, d_{i0} は頂点 i と原点間の距離である. J_i の符号は曲率の符号を意味し, 頂点 i が凹面にある場合に正値となり, 凸面にある場合に負値となる.

頂点位置における曲率の計算時には頂点法線ベクトルも計算した. 曲率計算は壁面数が多い場合には計算時間が長くなるが, 変形の手が速く非常に大きい場合を除き通常大きな変化はない. よって, 本研究では, 頂点法線ベクトルは毎ステップ更新したが, 効率化のため頂点曲率計算は境界の変形速度に応じた間隔で更新した.

前項で説明した壁境界の計算を行う際には, 近傍粒子の投影点における補間された曲率を用いて体積補正を行う. 壁カーネル関数は曲率 0 の平面内に仮想粒子を配置して積分値を計算しており, 曲率を持つ壁面に対しては影響半径内の壁体積に誤差が生じている. そこで, 壁の曲率に応じた補正係数を壁の積分値に乘じることで生じる誤差の低減を図った. 平面上における重みを実際の曲面上における重みに補正する係数は, 図-4.9 に示される幾何関係から計算した. 図中の R はそれぞれ凹面と凸面における曲率半径であり, 平均曲率 κ_H の逆数である.

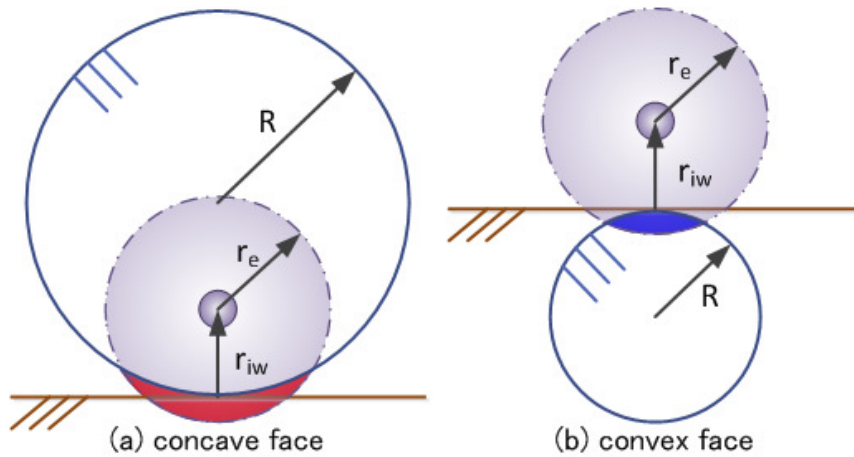


図-4.9 凹面と凸面における体積補正係数の計算

すなわち, 壁面内にその一部が存在している影響半径 r_e の球体積の内, 壁面の内側に含まれる体積を基準体積として体積補正係数を計算した. 凹面 (曲率が正) の場合, 半径 r_e の球体積から壁面に接する曲率半径 R の球体積に含まれない部分球体積 (図中の赤い領域) を計算し, 基準体積で除算した. 凸面 (曲率が負) の場合は, 半径 r_e の球体積と, 壁面に接する

曲率半径 R の球体積の共通部分の体積（図中の青い領域）を計算し，基準体積で除算した．つまり，補正係数の関数テーブルは壁面距離と曲率の関数として定義した．具体的に 3 次元の場合の補正係数の計算式を以下に示し，その計算例を図-4.10 にグラフで示す．

最初に曲率 0 の場合の基準体積 V_0 は次式から計算できる．

$$V_0 = \frac{\pi}{3}(r_e - r_{iw})^2(2r_e + r_{iw}) \quad (4.103)$$

次に，積分半径 r_e の球と曲率半径 R の球の交差円と壁面までの距離 T および積分球の端までの距離 S を計算する．距離 T と S は壁面が凹面の場合は次式から計算できる．

$$T = \frac{r_e^2 - r_{iw}^2}{2(R - r_{iw})} \quad (4.104)$$

$$S = r_e + r_{iw} - T \quad (4.105)$$

また，壁面が凸面の場合は次式から計算できる．

$$T = \frac{r_e^2 - r_{iw}^2}{2(R + r_{iw})} \quad (4.106)$$

$$S = r_e - r_{iw} - T \quad (4.107)$$

計算した 2 つの距離を用いて図中の赤い部分もしくは青い部分の体積は次式から計算できる．

$$V = \frac{\pi}{3}\{S^2(3r_e - S) + T^2(3R - T)\} \quad (4.108)$$

ただし，凹面で $2R \leq r_e + r_{iw}$ の場合，および凸面で $2R \leq r_e - r_{iw}$ の場合は次式で示す曲率半径球の体積で置き換える．

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \quad (4.109)$$

以上の体積計算より，本研究では曲率による体積補正係数 f_{vol} を次式で計算した．2 次元解析の場合についても， V_0 と V の計算式が異なること以外は 3 次元の場合と同様である．

$$f_{vol} = \frac{V}{V_0} \quad (4.110)$$

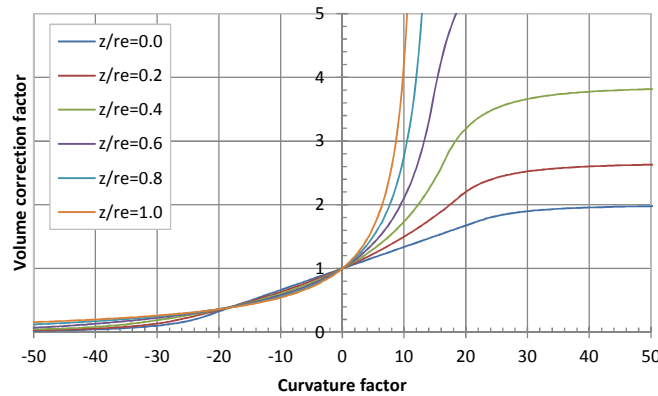


図-4.10 3次元解析における体積補正係数の計算例

4.5.5 壁面表面に働く作用と壁面移動量の計算

壁面の表面に働く作用力は DEM の計算と同様に、粒子に成す作用力の反作用として計算できる。作用力は壁面・粒子間で計算される物理量であり、物理量の定義点である構成頂点への分配は、線形補間に用いた面積座標の重みを用いて計算を行う。この計算により頂点に働く作用力が計算可能であり、2 章で説明を行った多面体ブロックとの連成解析も DEM の場合と同様に行うことができる。また、6 章では計算された頂点の作用力を FEM 計算に組み込むことで連成解析を行った。

また、一方で壁境界に与えられる強制変位や FEM の変形解などから頂点速度が算出される。この速度は面積座標による線形補間を用いることで粒子投影点座標の速度に置き換えることができ、SPH 法における粘性項の計算などに利用している。このように、本節で説明した壁境界の計算手法を用いることで様々な数値解析が可能となる。

4.6 4 章のまとめ

本章では本研究で用いた解析手法の一つである SPH 法の概要を説明し、本研究において用いた非圧縮正流体の解析手法や境界条件および、変形を考慮することが可能な三角形パッチによる壁境界の計算手法について述べた。以下に本章における要点をまとめる。また、表 4.2 に本研究で採用した計算手法をまとめて示した。

- 1) 本研究で採用した SPH 法の基本的な理論を本章の前半で示した。本論文にて解析対象とする非圧縮正流体の解析については、連続式を満たし精度良く圧力を計算するために半陰解法によるアルゴリズムを採用しており、圧力のポアソン方程式の計算方法についても詳しく示した。
- 2) 粒子法で用いられる一般的な境界条件の設定について説明した。また、壁の粘着条件を満たすための計算方法について示し、特に粘性項の陰解法ソルバーの導入が問題によっては有効となることを示した。
- 3) 三角形パッチによる壁境界の計算手法を SPH 法に導入し、壁面要素と粒子間の相互作用の計算方法を説明した。本手法は滑らかな境界面や複雑な境界面のモデル化に適しており、既往の研究では考慮することの出来なかった壁表面の変形を考慮することができる。この計算手法の具体的な計算例は次章において示す。

表－4.2 本研究で採用した計算手法のまとめ

SPH法の機能項目	本研究で採用した計算手法
カーネル関数	Morrisらによる5次のスプライン関数
ラプラシアンの離散化	MorrisらによるTaylor展開近似(極座標の2階微分も利用可能)
圧縮性流体の解析法	Monaghanによる状態方程式モデルを用いた陽解法
非圧縮性流体の解析法	射影法に基づく半陰解法
圧力のポアソン方程式生成項	近藤らの手法に基づく(本章で述べた全ての手法が利用可能)
自由表面判定手法(閾値)	密度基準を採用し越塚らに従い材料密度の0.95～0.97倍を使用
壁面の粘着条件(粘性項計算)	陽解法ではMorrisらによる手法を採用し陰解法も使用可能
人工粘性	Monaghanによる人工粘性を導入
表面張力計算	近藤らの手法に基づく(接触角も取り扱える)
人工斥力モデル	越塚ら, 岩本らの手法に基づきばね-ダッシュポット系を採用
DEM連成手法	作用反作用の法則に基づく
壁面境界のモデル化	開発した三角形壁面要素を用いた計算手法(粒子壁も利用可能)
壁面境界の曲率計算手法	Meyerらによる手法を採用

【参考文献】

- 1) L. B. Lucy : A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The Astronomical Journal*, 82, pp.1013-1024, 1977
- 2) R. A. Gingold, J. J. Monaghan, *Smoothed Particle Hydrodynamics : Theory and Application to Non Spherical Stars*, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181, pp.375-389, 1977
- 3) 鈴木 克幸, 長嶋 利夫, 萩原 世也 : メッシュフリー解析法, 丸善, 2006
- 4) 越塚 誠一 : 粒子法, 丸善, 2005
- 5) G. Gui-Rong Liu, M. B. Liu : *Smoothed Particle Hydrodynamics*, World Scientific Publishing, 2003
- 6) 酒井 譲, 山下 彰彦 : SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, *日本機械学会論文集(A 編)*, 第 67 巻 659 号, pp.1093-1102, 2001
- 7) 渡辺 正 : ベクトル解析の基礎と応用, サイエンス社, 1993
- 8) J. P. Morris, P. J. Fox, Y. Zhu : Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH, *Journal of Computational Physics*, 136, Issue 1, pp.214-226, 1997
- 9) J. K. Chen, J. E. Beraun, C. J. Jih : An improvement for tensile instability in smoothed particle hydrodynamics, *Computational Mechanics*, 23, pp.279-287, 1999
- 10) J. J. Monaghan : An introduction to SPH, *Computer Physics Communications*, 48, pp.89-96, 1988
- 11) 吉田 郁政, 大庭 啓輔, 中瀬 仁 : MPS 法による地震応答解析の安定性限界となる時間刻みに関する検討, *応用力学論文集*, Vol.13, pp.545-554, 2010
- 12) J. J. Monaghan : Simulating Free Surface Flows with SPH, *Journal of Computational Physics*, 110, pp.399-406, 1994
- 13) S. J. Cummins, M. Rudman : An SPH projection method, *Journal of Computational Physics*, 152, pp.584-607, 1999
- 14) S. Shao, E. Y. M. Lo : Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface, *Advances in Water Resources*, 26, No.7, pp. 787-800, 2003
- 15) 大地 雅俊, 山田 祥徳, 越塚 誠一, 酒井 幹夫 : MPS 陽解法における圧力計算の検証, *日本計算工学会論文集*, No.20110002, 2011
- 16) E. S. Lee, C. Moulinec, R. Xu, D. Violeau, D. Laurence, P. Stansby : Comparisons of weakly com-pressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method, *Journal of Computational Physics*, Vol.227(18), pp.8417-8436, 2008

- 17) A. Khayyer, H. Gotoh, S. Shao : Corrected incompressible SPH method for urate water-surface tracking in breaking waves, Coastal Engineering, Vol.55, pp.236-250, 2008
- 18) 日比 茂幸, 藪下 和樹 : MPS 法の不自然な圧力振動の抑制に関する研究, 関西造船協会論文集, 第 241 号, 2004
- 19) 末吉 誠, 内藤 林 : 粒子法の圧力計算法の改善, 関西造船協会論文集, 第 242 号, 2004
- 20) 田中 正幸, 益永 孝幸 : 疑似圧縮性効果による MPS 法の安定化と圧力の平滑化, 日本計算工学会論文集, No.20080025, 2008
- 21) 林 高德, 浅井 光輝, Abdelraheem M. Aly, 園田 佳巨 : 安定化 ISPH 法を用いた流体衝撃力評価と精度検証, 第 10 回構造物の衝撃問題に関するシンポジウム論文集, pp.91-96, 2010
- 22) 近藤 雅裕, 越塚 誠一 : MPS 法における不自然な数値振動の抑制, 日本計算工学会論文集, No.20080015, 2008
- 23) 小笠原 敏記, 菊池 重友, 堺 茂樹 : MPS 法による構造物に及ぼす流体の圧力振動の影響, 土木学会論文集 B2, Vol.B2-65, No.1, pp.26-30, 2009
- 24) 小国 力 : 行列計算ソフトウェア, 丸善, 1991
- 25) 後藤 仁志, Khayyer Abbas, 堀 智恵実 : 粒子法における圧力擾乱低減のための新しい自由水面判定条件の提案, 土木学会論文集 B2, Vol.B2-65, No.1, pp.21-25, 2009
- 26) 竿本英貴 : 粒子-流体系に関する可視化実験と数値解析, 筑波大学博士論文, 2004
- 27) 浅井光輝, 藤本啓介, 田邊将一, 別府万寿博 : 階段状の非適合境界を有する粒子法解析における仮想マーカーを用いたすべり・非すべり境界処理法, 日本計算工学会論文集, No.20130011, 2013
- 28) 越塚 誠一 : 数値流体力学, 培風館, 1997
- 29) 近藤 雅裕, 越塚 誠一, 滝本 正人 : MPS 法における粒子間ポテンシャル力を用いた表面張力モデル, 日本計算工学会論文集, No.20070021, 2007
- 30) 岩本 孟士, 山田 恭央, 松島 亘志, 豊田 衛 : 斜面崩壊に対する SPH 解析への相互作用力の導入, 地盤工学会関東支部発表会発表講演集, 第 6 巻, pp.436-440, 2009
- 31) 後藤 仁志 : 数値流砂水理学, 森北出版, 2004
- 32) 田中 正幸, 酒井 幹夫, 越塚誠一 : 粒子ベース剛体シミュレーションと流体との連成, 日本計算工学会論文集, No.20070007, 2007
- 33) 原田 隆宏, 越塚 誠一 : SPH 法における壁境界計算手法の改良, 情報処理学会論文誌, 48, No.4, pp.1838-1846, 2007
- 34) 原田 隆宏, 越塚 誠一, 島崎克教 : MPS 法における壁境界計算モデルの改良, 日本計算工学会論文集, No.20080006, 2008
- 35) 佐々木 智, 小笠原 敏記 : MPS 法における Delaunay 三角形分割法によるポリゴン型壁境界モデルの開発, 土木学会論文集 B2, Vol.68, No.2, pp.856-860, 2012

- 36) M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, Alan H. Barr : Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds, In Visualization and Mathematics III, pp.35-57, 2003

第5章 SPH 法による流体の動的応答解析

5.1 はじめに

地震時に構造物に作用する荷重は常時より大きなものが想定され、それは地震力だけでなく地震によって引き起こされる様々な事象によって発生する。例えば斜面崩壊や落石であり、構造物との衝突時に非常に大きな衝撃荷重を発生する。この他、地震時に発生する代表的な現象として津波やスロッシング、液状化などの流体の運動量と圧力の上昇によって発生し、構造物に被害を与える問題がある。本章ではこのような流体に加速度を与えることで発生する動的問題を取扱い、SPH 法の流体解析に対する適用性を検討する。また、構造物との動的応答解析を行うために導入した壁境界モデルを用いた解析を行い、その適用性を検討する。最初に本節でスロッシング現象や津波などによって生じる流体力について簡単に述べる。

5.1.1 スロッシング問題

スロッシングとは地震動などによる加振によって容器内流体の液面が揺動する現象であり、振動が続くことで揺動は徐々に大きくなり、時には溢流の発生やタンクの破壊を生じる現象である^{1),2)}。特に共振が発生した場合は危険であり、加振の終了後も長時間に渡って液面揺動が継続する。大地震発生時は震源から遠方まで伝搬する長周期地震動が問題となり、貯蔵流体の固有周期の長い大型タンクにおいて、溢流の発生や浮き屋根の損傷による沈没、タンクと浮き屋根の衝突摩擦による火災の発生などが報告されている^{1),2)}。

また、小規模なタンクにおいてもスロッシング問題は深刻であり、2011 年の東北地方太平洋沖地震では震源から遠く離れた広い範囲に渡って上水道配水施設のタンクが破壊された³⁾。上下水道施設のようなライフラインに生じる被害は、被災地域での生活に甚大な影響をもたらすため社会的な問題といえる。このようなタンク破壊の原因は明らかではないが、液面揺動による動水圧に加えて流体が屋根部などに衝突する際に生じる衝撃力が関係するものと考えられる。また、地震動の短周期成分により薄肉の容器壁体が振動し、壁体と接する流体との間で短周期の連成振動（バルジング）^{4),5)}が生じ、この現象によって発生する衝撃圧も破壊原因の一つと考えられる。

スロッシングに対するタンクの安全性を評価するための解析手法としては、最大最小波高や動水圧を精度良く計算できることが要求される。波高応答を精度良く計算するには、流体-構造連成系の固有周期を精度良く再現できる必要がある。なぜなら、加振が長時間続くことによって減衰しなかった波浪成分が重なり、高次モードが現れてくるからであり、高次の固有周期をある程度計算できることが好ましい。本章で行うスロッシング解析においては、事前に固有周期の確認解析を実施した。

5.1.2 流体衝突による波力

2011 年の東北地方太平洋沖地震は M9.0 の巨大地震であり，東日本の沿岸部広域に渡って大津波を引き起こしたことは記憶に新しい．津波は波長が極めて長い波であり，スロッシングのように液面揺動を生じる短波長のものとは本質的に異なり，巨大な運動量を持った液塊が沿岸部に衝突する現象である⁶⁾．津波防護施設は当然として，橋梁や津波避難ビルなどは想定される流体波力に耐え得る必要がある．

このような流動体の波力の評価式は幾つかあるが，骨組み構造のように部材断面が小さく，後部で渦の形成や掃き出し現象が生じる場合の波力評価にはモリソン式が適用されている⁷⁾．

$$dF_l = \frac{1}{2} \rho C_D u |u| dA + \rho C_M \frac{du}{dt} dV \quad (5.1)$$

ここで， ρ は流体密度， u は速度であり， C_D と C_M はそれぞれ抗力係数と慣性力係数， dA は流れ方向に対する部材投影面積であり dV は体積である． C_D は海洋構造物の設計では 0.6～1.0 程度の値が用いられることが多く， C_M は耐波設計では 1.5 が用いられる．

本章では津波衝突に替えて水柱崩壊問題を扱い，障害物に流体が衝突する際に生じる流体圧力と波高応答の検証を行った．

5.2 矩形タンクのスロッシング解析

前節で述べたように，地震時に発生する貯蔵液体の揺動は時に構造物に被害をもたらし，2003 年に発生した十勝沖地震では，震源から約 200km 離れている苫小牧の石油化学コンビナートの石油タンクに甚大な被害を生じさせた⁸⁾．大型のタンクや超高層ビルなどは振動の固有周期が長いため，長周期地震動の影響を受けやすく，遠隔地で発生した地震による小さな地震加速度に対しても被害の検討が重要である．本節では，SPH 法による非圧縮性流体の動的応答解析の応用に関して検討し，実際のスロッシング問題として電力中央研究所にて酒井ら⁹⁾が実施したスロッシング実験を対象に応用し，本 SPH 手法の適用性と妥当性を示した．

5.2.1 スロッシング実験水槽のモデル化

酒井らは矩形水槽を振動台で加振し，スロッシングによって溢流を発生させ，その水面形状や水位の変化などを計測した．水槽は 2 重構造であり流体は内側部に貯水され，越流によって外側部に溢れ出る構造となっており，タンクの幅と高さに対して奥行寸法が小さくなっている．発生する流動現象は 2 次元的なものとなることから，ここで示すスロッシング解析は 2 次元で行うこととし，スロッシング波高に影響しない構造についてはモデルの簡略化を行った．実験水槽は床板が可動式になっており，酒井らは水位を変えて 2 ケース

実験（液位 1.45m と液位 0.69m）を行っているが、本研究では液位の低いケースのみを検討対象とした。実験装置図を図-5.1 に、2 次元 SPH 解析のモデルを図-5.2 に示す。

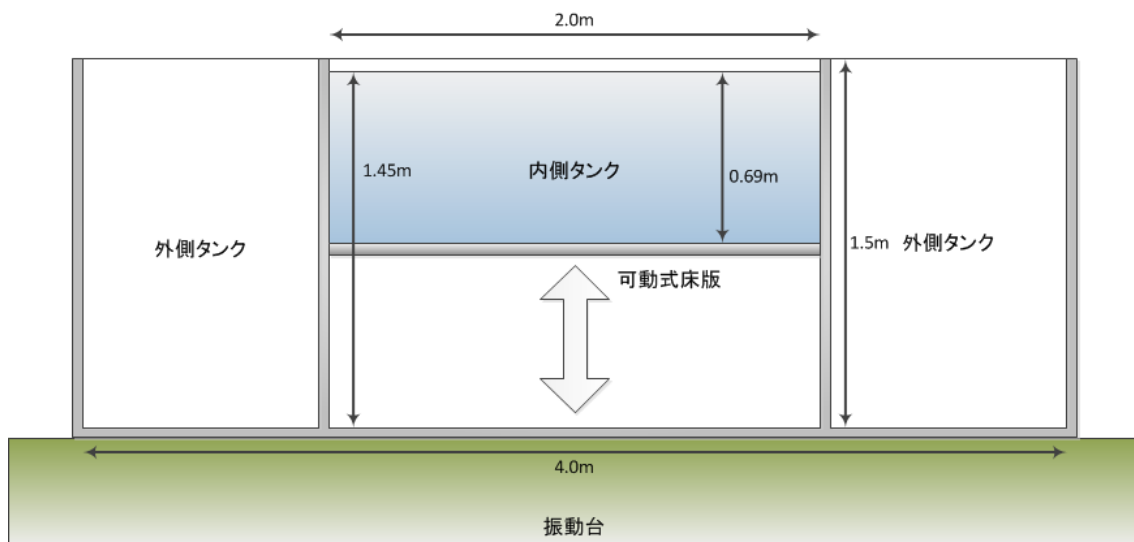


図-5.1 スロッシング実験装置

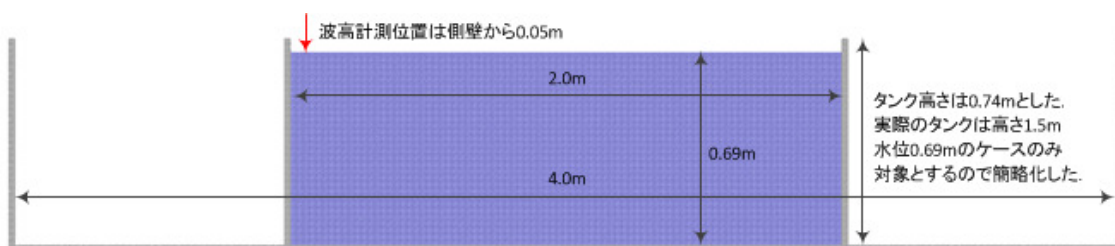
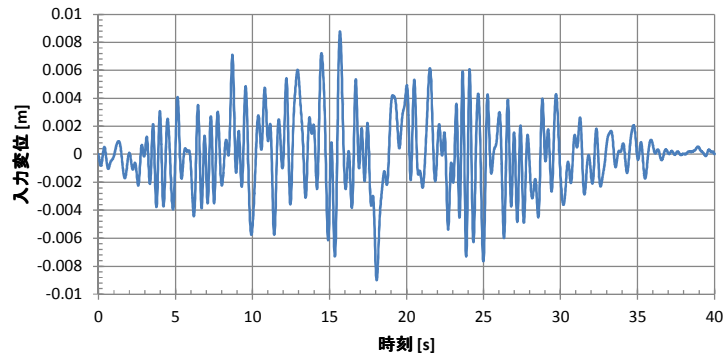


図-5.2 2次元スロッシング解析モデル

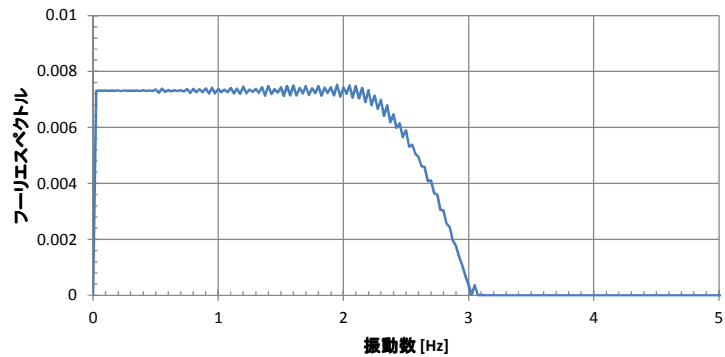
5.2.2 スロッシング固有周期の確認解析

本研究では、実際の地震波を入力する前の検討として固有周期の確認解析を予め行った。固有周期は、スロッシング解析を実施して任意位置の波高応答のフーリエスペクトルを作成し、卓越周期を確認することで行った。固有周期確認解析に用いる入力波形としては、理論上の固有周期を含む振動数域で様な振幅を持つ変位波形が好ましい。本研究では2Hzまでの振動数域で一定の大きさを持つ変位スペクトルを仮定し、位相を乱数で与えて逆フーリエ変換による微小変位波形を作成し、これを入力波として壁境界に変位入力した。図-5.3に入力変位波形、図-5.4に入力変位波形のフーリエスペクトルを示す。

本解析で得られる結果より確認できることは、定点の液面変動時刻歴をフーリエ変換することで得られる卓越周期であり、これを速度ポテンシャルに基づく理論解と比較する。



図－5.3 固有周期確認解析の入力変位波形



図－5.4 固有周期確認解析の入力変位波形のフーリエスペクトル

一般に矩形タンクのスロッシング固有振動数は次式で計算できる⁹⁾。

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{gk \tanh kH} \quad (5.2)$$

ここで、 L は容器幅であり H は液位、 k は波数でありモード次数を n として $k = n\pi/L$ と定義される。実験水槽の固有振動数は1次で0.557Hz、2次で0.872Hz、3次で1.08Hzであり全て2Hz以下の範囲に収まっていることが確認できる。

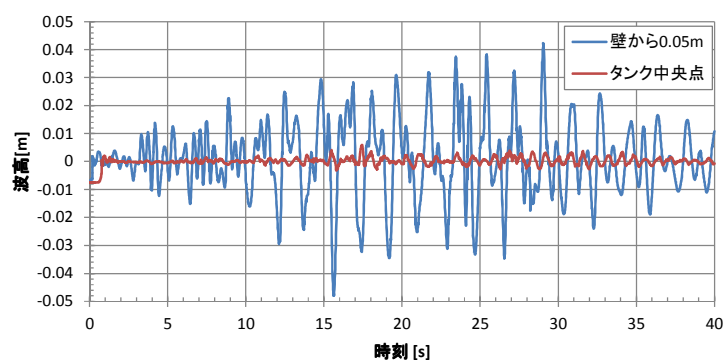
固有周期の確認解析は地震加速度を入力条件とする本解析より粗い分解能で実施した。これはフーリエスペクトルを算出するため、解析結果を出力する時間断面を細かくする関係上、ファイルサイズを抑制するためであり、計算精度の観点からは十分な粒子分解能を与えている。表－5.1に解析条件を示す。また、図－5.5に側壁から0.05m位置とタンク中央位置における波高の時刻歴を示す。側壁から0.05m位置では、図－5.2に示したように実験で液位が測定されている。波高の算出については飛沫の影響を除くべきであるが、この解析条件においては問題となる飛沫は生じなかったため、計測位置から左右に初期粒子間距離分の幅を考慮し、最大高さ粒子のZ座標から基準液位を差し引いて波高とした。

図－5.6に側壁から0.05m位置の波高時刻歴をフーリエ変換して得たフーリエスペクトル、図－5.7にタンク中央位置の波高時刻歴のフーリエスペクトルを示す。それぞれのフーリエスペクトルからは卓越振動数がそれぞれ3～4点ほど確認でき、側壁の近くで奇数次数

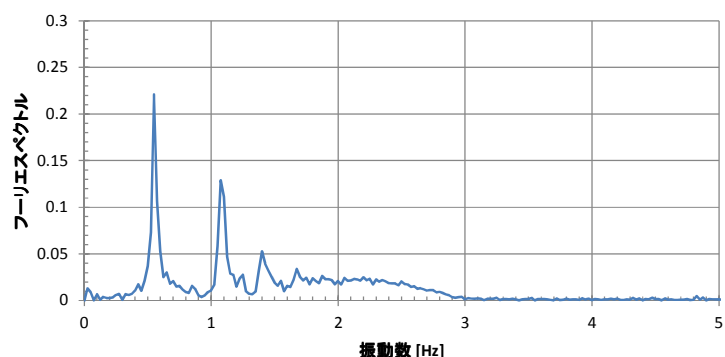
モード，タンク中央位置で偶数次数モードの卓越が認められる．また，タンク中央点の応答は壁面近傍に比べて小さく，矩形タンクの 1 方向加振では偶数次数モードは殆ど励起されないことが確認できる．奇数次数モードの液面変動は中央部で 0 となるため，中央部以外では奇数次数モードに隠されることで確認できない偶数次数モードが中央部に現れたと考えられる．それぞれの逆数より卓越周期を理論上の固有周期と比較し，表－5.2 に固有周期の理論解と SPH 解との比較を示す．解析結果より，7 次までの固有周期については 2 次と 6 次を除き，理論解との誤差は 1% 程度に収まっており，波高応答が小さいため確認の難しい 2 次と 6 次についてもある程度一致していることを確認した．

表－5.1 固有周期確認の解析条件

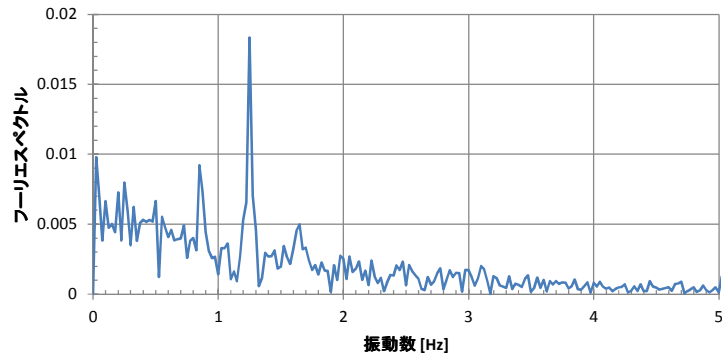
初期粒子間距離	0.01 [m]
初期時間増分	1.0e-3 [s]
流体密度	1000.0 [kg/m ³]
流体粘度	0.001 [Pa・s]
重力加速度	9.80665 [m/s ²]
影響半径	0.03 [m]



図－5.5 固有周期確認解析における側壁から 0.05m および中央位置の波高時刻歴



図－5.6 側壁から 0.05m 位置の波高時刻歴のフーリエスペクトル



図－5.7 タンク中央位置の波高時刻歴のフーリエスペクトル

表－5.2 固有周期の理論解と SPH 解析結果の比較

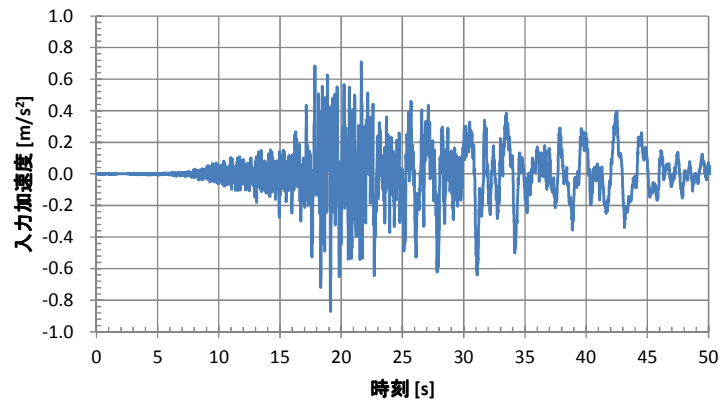
モード次数	理論解[s]	SPH解[s]	誤差[%]
1	1.796	1.819	1.267%
2	1.147	1.177	2.602%
3	0.926	0.930	0.520%
4	0.801	0.800	0.047%
5	0.716	0.714	0.208%
6	0.654	0.616	5.818%
7	0.605	0.597	1.308%

5.2.3 十勝沖地震条件のスロッシング解析

酒井ら⁸⁾は振動台に入力する加振波として、2003 年十勝沖地震の k-net 苫小牧での NS 方向の観測記録¹⁰⁾を用いた。この加速度波形の卓越周期は 3.6 秒であり、実験水槽の 1 次の固有周期の約 2 倍となっている。溢流を生じる大きなスロッシング応答を得るために、酒井らは入力加速度波形の時間軸を 1/2 倍し、卓越周期と固有周期をほぼ一致させることで共振の発生を図った。本研究ではこれにならい、図－5.8 に示す加速度波形を全流体粒子への入力波形として設定した。その他の SPH 法の解析パラメータは表－5.3 に示す。

なお、加振条件について補足すると、壁境界への変位入力と流体粒子への加速度入力は運動方程式の上では等価である。適切な数値積分により加速度波形から変位波形が得られた場合、壁境界に変位を入力した場合の応答と壁境界を固定して流体に加速度を入力した場合の応答は一致する。より正確には、壁を移動する場合と固定する場合で流体粒子の全体座標系における速度は一致しないが、壁境界との相対速度は両方の条件で同じである。実際には変位入力の応答は加速度入力の応答にやや遅れると考えられるが、その差は小さく問題とはならない。

本解析では入力地震波によって励起される液面揺動の時刻歴を実験結果と比較し、また実験終了時の最終液位が明らかになっているためこれを比較する。

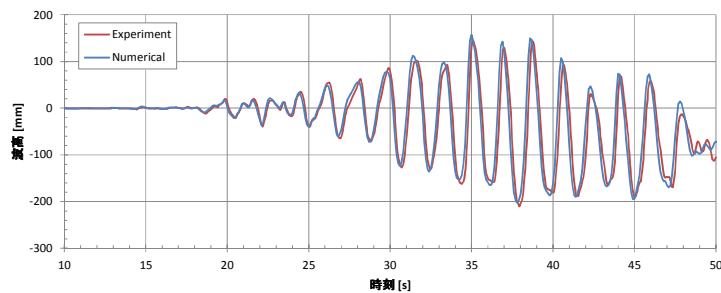


図－5.8 入力加速度の時刻歴

表－5.3 十勝沖地震波入力時のスロッシング解析条件

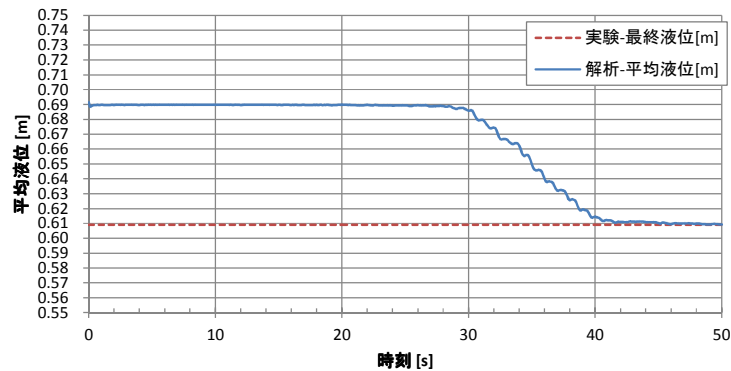
初期粒子間距離	0.005 [m]
初期時間増分	1.0e-3 [s]
流体密度	1000.0 [kg/m ³]
流体粘度	0.001 [Pa・s]
重力加速度	9.80665 [m/s ²]
影響半径	0.015 [m]

スロッシング解析結果より，側壁から 0.05m 位置の波高の時刻歴を実験と比較し図－5.9 に示す．波高は固有周期の確認解析と同じ方法で算出した．実験と解析は良い一致を示しており，本研究で開発した SPH 法コードの計算精度が確認できる．



図－5.9 側壁から 0.05m 位置の波高時刻歴

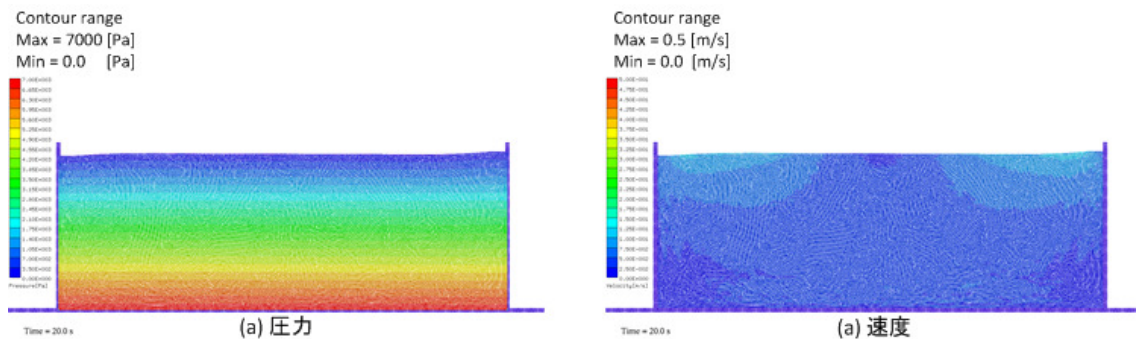
平均液位の経時変化と実験終了時の液位の比較を図－5.10 に示す．実験結果からは平均液位の時刻歴は分らないが，水が外側のタンクに溢れ出ることによって，実験終了時に初期液位から 81mm 低下したことが示されている．解析では，28 秒程度より，やはり越流により平均水位が低下し始め 42 秒程度まで低下が続き，最終的には 81mm 低下した．実験結果と SPH 法による解析結果は非常に良い一致を示している．



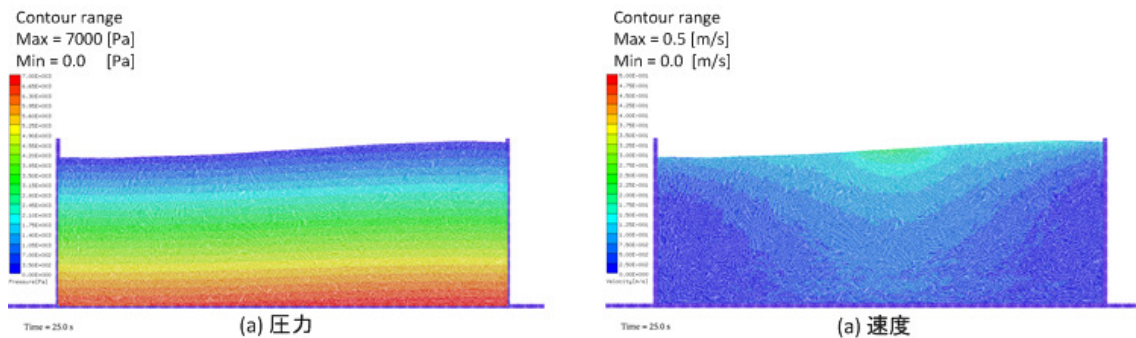
図－5.10 平均液位の経時変化と実験終了時の液位比較

20 秒経過時から 50 秒経過時までの圧力と速度の分布の履歴を図－5.11 から図－5.17 に示す．圧力は 7000Pa を 20 分割，速度は 0.5m/s を 20 分割して青から赤までの色変化で分布を示した．溢流は 30 秒から 45 秒経過時までに生じており，波面は 3 次以上の高次モードを含んでいることが図から確認できる．

このように，第 4 章で示したように本研究で開発した SPH コードによれば，スロッシングを受けるタンク内の液体の挙動を非常に高い精度で，再現できることが明らかとなった．



図－5.11 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (20 秒経過時)



図－5.12 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (25 秒経過時)

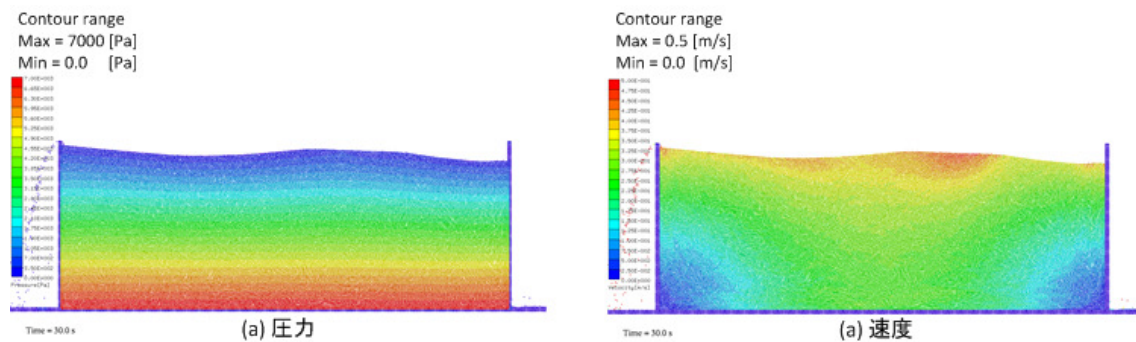


図-5.13 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (30 秒経過時)

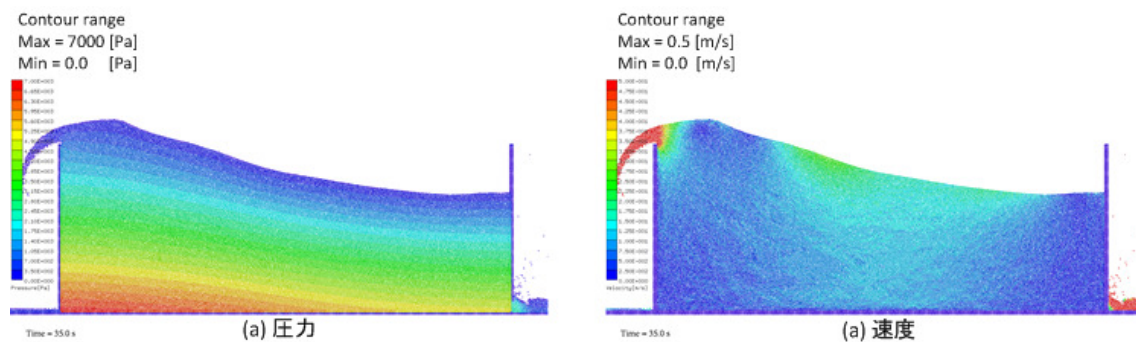


図-5.14 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (35 秒経過時)

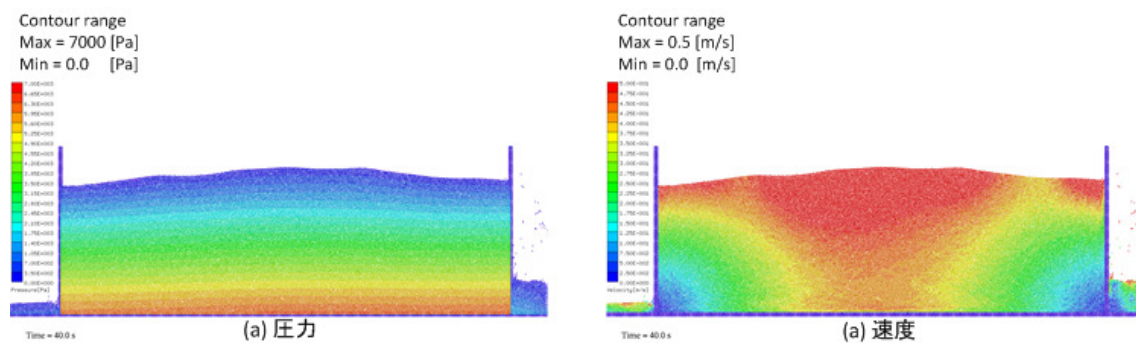
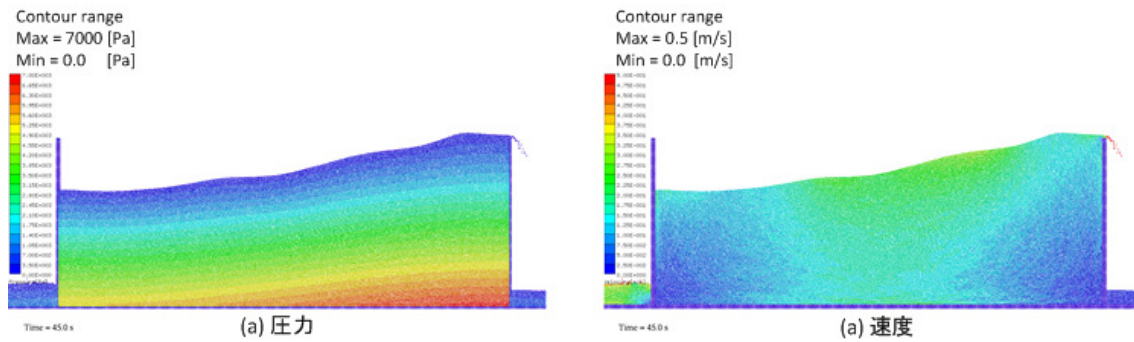
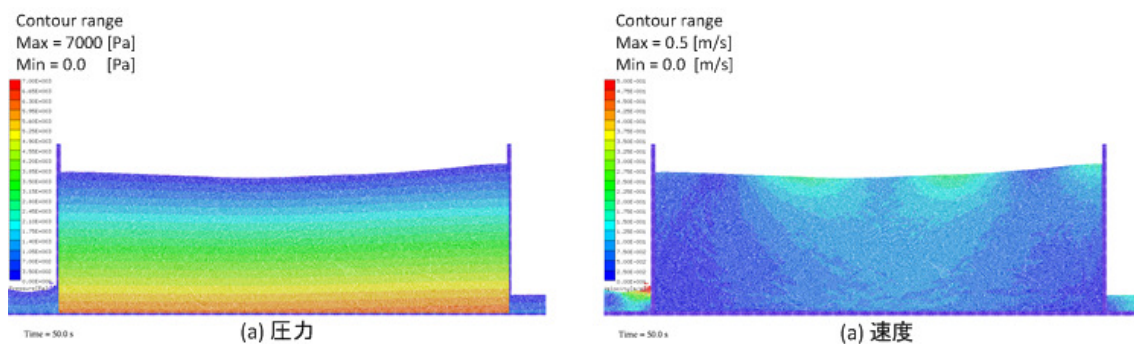


図-5.15 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (40 秒経過時)



図ー5.16 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (45 秒経過時)



図ー5.17 スロッシング解析結果より圧力(左)と速度(右)の分布 (50 秒経過時)

5.3 水柱崩壊問題における動水圧評価

前節では、タンク内の液体のスロッシングについて SPH による解析について検討した。一方、水柱崩壊は自由表面流れで最も代表的な問題であり、実験や解析による多くの研究例がある。本研究では、構造物と流動層の相互作用による動的応答を対象として取り扱うため、スロッシングより動水圧の影響が大きい問題として水柱崩壊についても検討し、Kleefsman ら¹¹⁾が行った水柱崩壊の実験を対象として SPH 法の精度確認を行った。この実験は水槽内に障害物となる小箱を固定し、崩壊水を衝突させることで生じる動水圧や、激しく変化する液面高さを計測したものである。Kleefsman らはこの実験を対象に VOF 法ベースの解析手法を用いて数値解析を行い、実験結果との比較を行っている。また、この実験を対象として陸田ら¹²⁾や林ら¹³⁾が SPH 法による解析を既に行っており、これらの研究を参考にして本研究にて開発した SPH 解析コードの衝撃問題への適用性を確認した。

5.3.1 水柱崩壊問題の実験水槽のモデル化

Kleefsman らが行った実験に用いられた水槽は図ー5.18 に示されるものであり、圧力と液位の計測点位置を示した。実際の計測点は図示したものより多いが、Kleefsman らによる論文より実験結果が明らかである計測点のみを比較対象とした。液面高さの計測点は、図

の手前側の壁より 1.0m 奥の中央部に位置する H2 点, および 2.5m 奥の H4 計測点があり, 圧力計測点は全て障害物の小箱表面に設置されている. P1,P3 は水柱側の小箱側面, P5,P7 は上面の設置されている.

この実験は 3 次元的な流れによる影響が大きく, SPH 解析にも 3 次元モデルを用いた. 陸田ら, および林らの研究を参考に, 初期粒子間距離を 1cm に設定しモデル化を行った. これより粗い粒子分解能では衝撃圧の評価が難しいことが報告されている. 設定した SPH の解析条件を表-5.4 に示す.

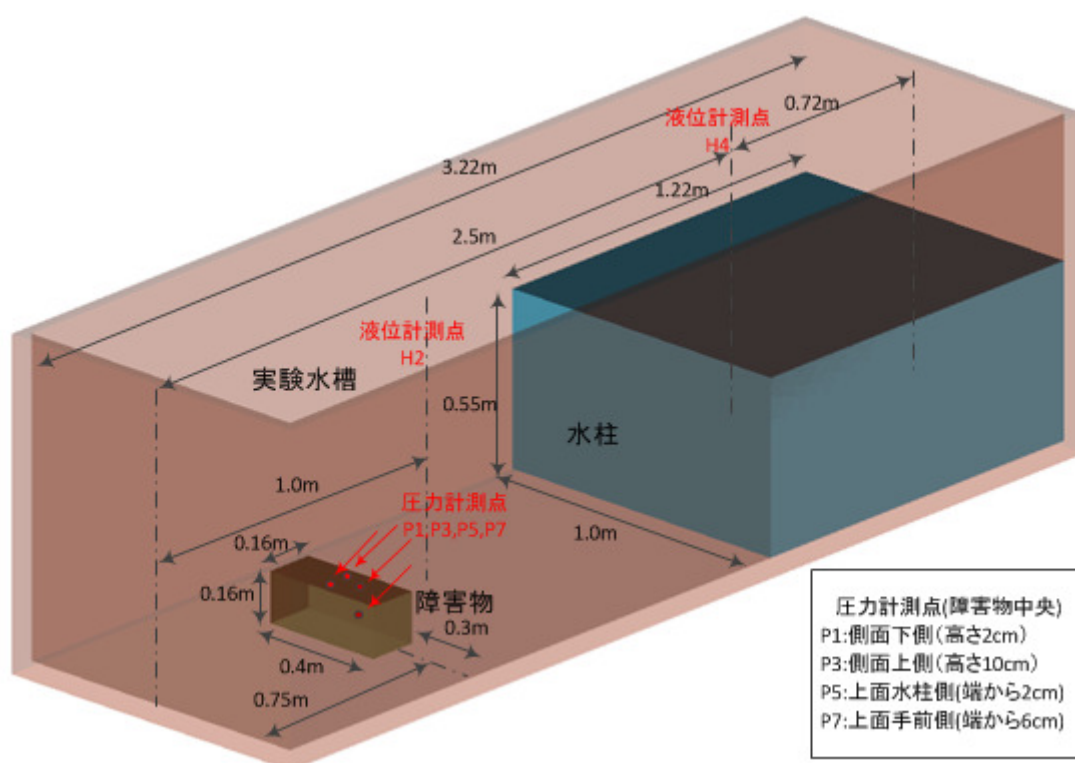


図-5.18 水中崩壊実験の水槽模型の模式図

表-5.4 水柱崩壊問題の解析条件

初期粒子間距離	0.01 [m]
初期時間増分	5.0e-4 [s]
流体密度	1000.0 [kg/m ³]
流体粘度	0.001 [Pa・s]
重力加速度	9.80665 [m/s ²]
影響半径	0.03 [m]

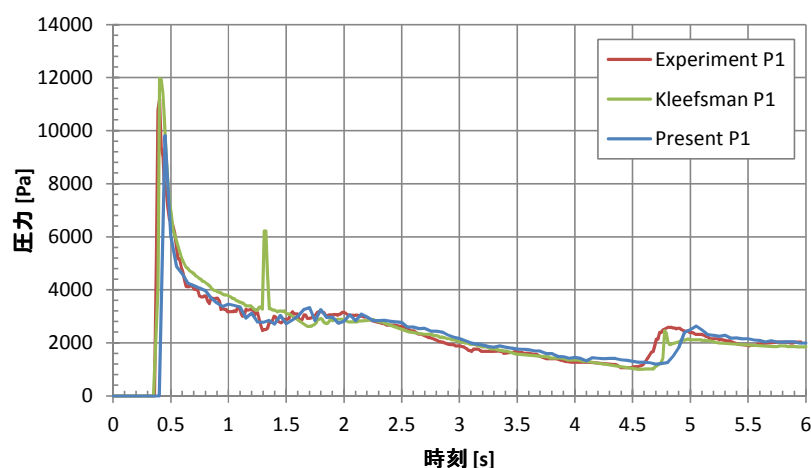
5.3.2 衝撃圧および液面高さの算出方法

水柱崩壊問題は激しい液面変化を生じる動的な影響の大きい現象であり, 圧力は衝撃的な作用により振動し, 液面は飛沫の発生によって捉えにくいものとなると一般に考えられ

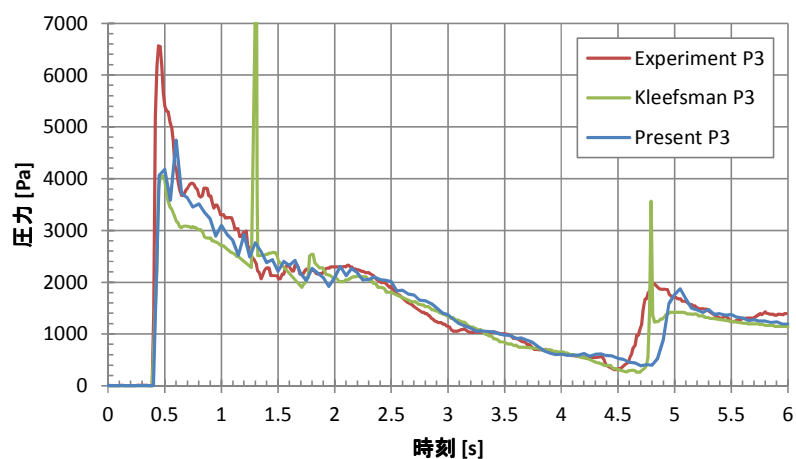
る．そこで本研究では，圧力は測定点の周囲 1 粒子分の範囲にある粒子圧力の算術平均で評価し，液面高さについては自由表面判定基準を下回る密度の粒子を飛沫と考え，これを除いた計測点位置における最大高さを波高として算出した．

5.3.3 水柱崩壊による衝撃応答の評価

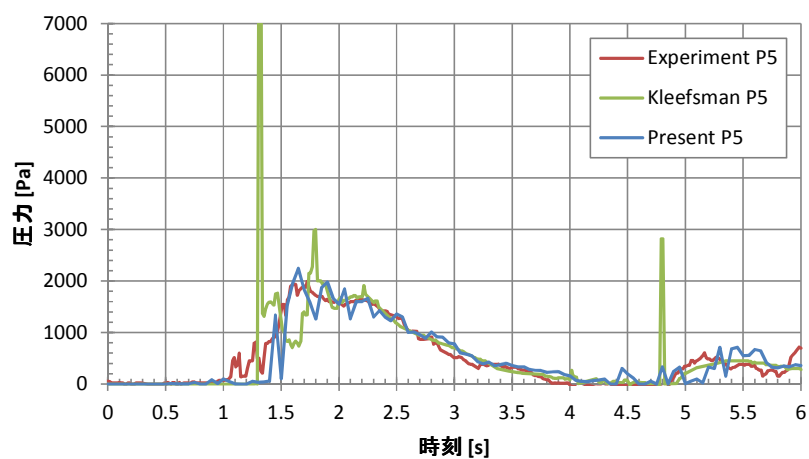
水柱崩壊問題の SPH 解析結果より衝撃圧時刻歴をまとめ Kleefsman らの実験結果と比較したものを図－5.19 から図－5.22 に示す．また，参考として Kleefsman らが VOF 法ベースの手法を用いて行った数値解析結果も重ねて示す．実験と解析は概ね一致しているが，P3 計測点のピークを捉えることができていないこと，および解析の後半の流れが実験と比べて遅れていることが分かる．なお，圧力のピークが小さいことについては算術平均による影響が考えられる．Kleefsman らの解析結果も概ね同じ傾向にあるが，圧力が不安定になっている時間断面があることと，SPH 法による解析に比べて流れの遅れが小さいことが確認できる．流れの遅れについては図－5.23 と図－5.24 に示す液面高さの時刻歴からも確認できる．2.5 秒経過時にはすでに生じており，1 秒から 2.5 秒経過時にかけて見られる，壁面に沿って舞い上がった流体が後続流体と混合する複雑な流れによって生じていると考えられる．この遅れは数値粘性を小さくすることで改善する傾向にあることを確認しているが，計算時間の観点から小さく設定することができなかった．



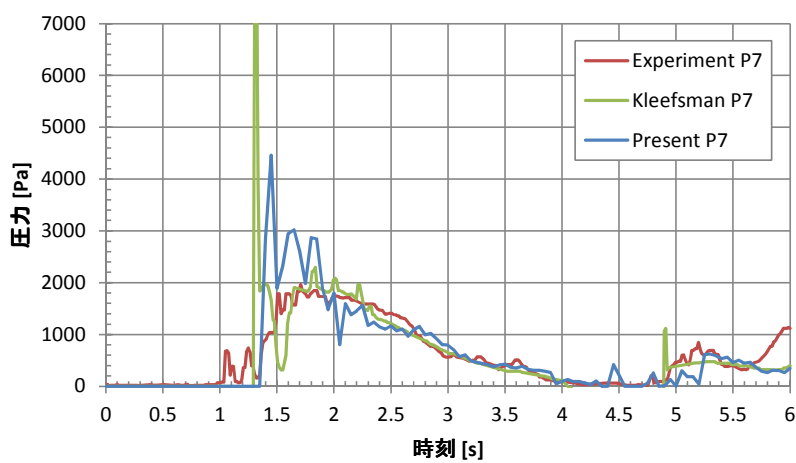
図－5.19 水柱崩壊による衝撃圧の時刻歴（P1 計測点）



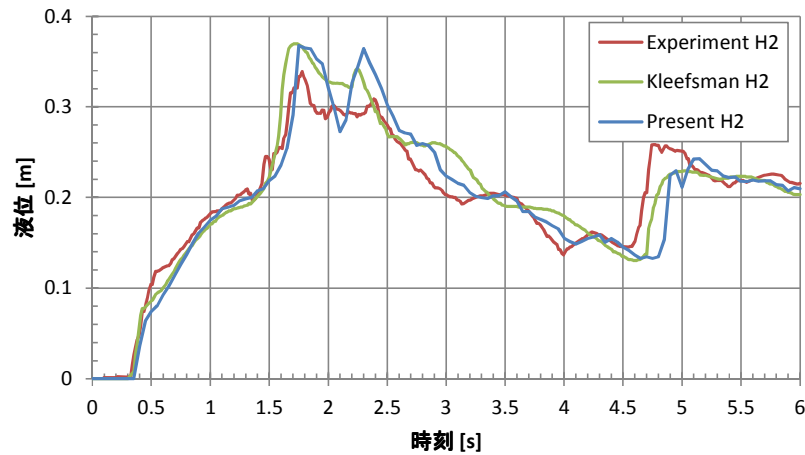
図－5.20 水柱崩壊による衝撃圧の時刻歴（P3 計測点）



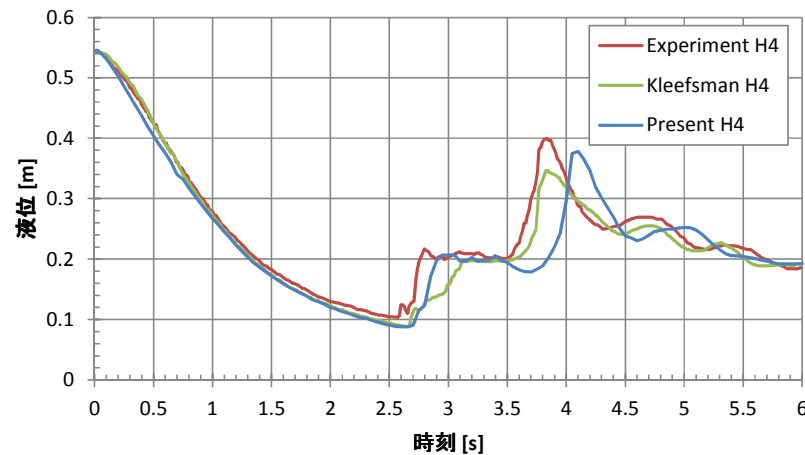
図－5.21 水柱崩壊による衝撃圧の時刻歴（P5 計測点）



図－5.22 水柱崩壊による衝撃圧の時刻歴（P7 計測点）



図－5.23 水柱崩壊による液面高さの時刻歴 (H2 計測点)

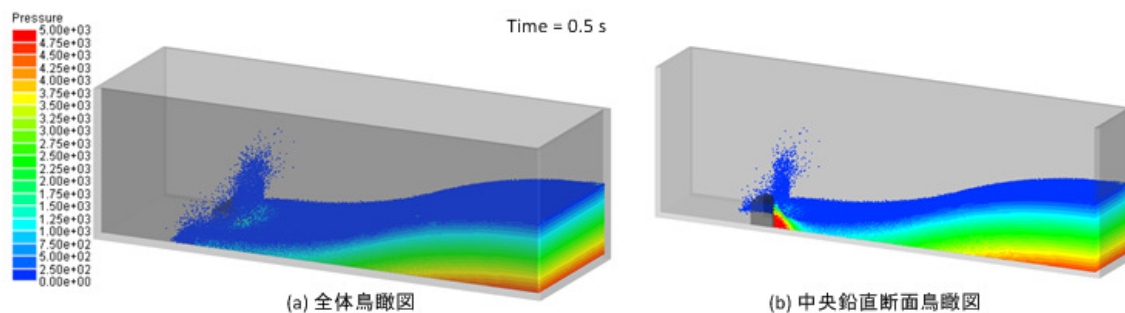


図－5.24 水柱崩壊による液面高さの時刻歴 (H4 計測点)

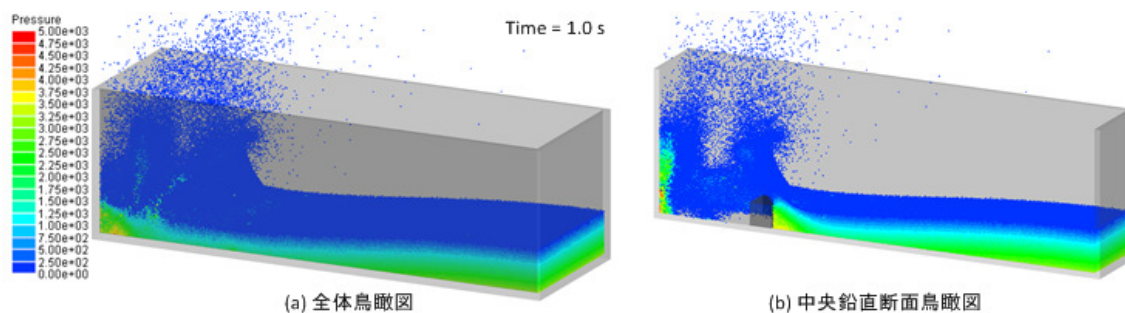
SPH 解析結果より、0.5 秒から 4.0 秒経過時までの圧力分布の履歴を図－5.25 から図－5.32 に、速度分布の履歴を図－5.33 から図－5.40 に示す。それぞれ、モデル全体および中央鉛直断面の鳥瞰図を示し、圧力と速度の大きさを青から赤までの 20 段階の色変化で表した。圧力分布はどの時間断面も斑の小さい結果が得られており、安定した計算が行えていることが確認できる。衝撃的な波圧の作用は、はじめに障害物と衝突するときのみであり、以降は液面高さにはほぼ比例する動的影響の小さい圧力分布となっている。

なお、解析結果より流体が障害物に衝突する直前の速度は 4.0m/s 程度であった。この流体速度をモリソン式の第 1 項に適用し、荷重でなく障害物前面での平均圧力を算出すると C_D 値を 1.0 として約 8000Pa となる。流体加速度は正確には分からないがあまり大きくなく、モリソン式の第 2 項の影響は小さいと考えられる。実験の測定値より P1 と P3 の平均値を障害物前面の平均圧力と考えると 8800Pa 程度であり、モリソン式は最大波力を良く評価できていると考えられる。

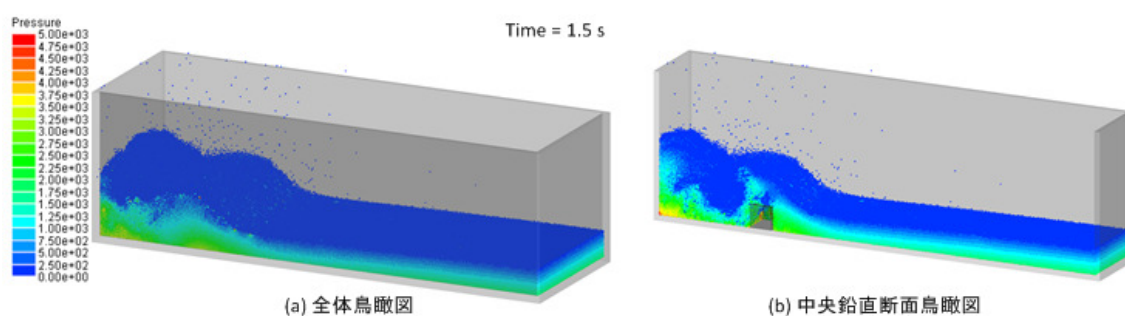
解析結果の速度分布の履歴からは、障害物があることによる 3 次元的な流れの様子を良く確認でき、1 秒から 2 秒にかけて障害物近傍で複雑な混合が生じていることが分かる。前述のとおり、後半の時間断面の流れは実現象より遅れており、複雑で激しい流動の生じる問題における今後の課題と考えている。



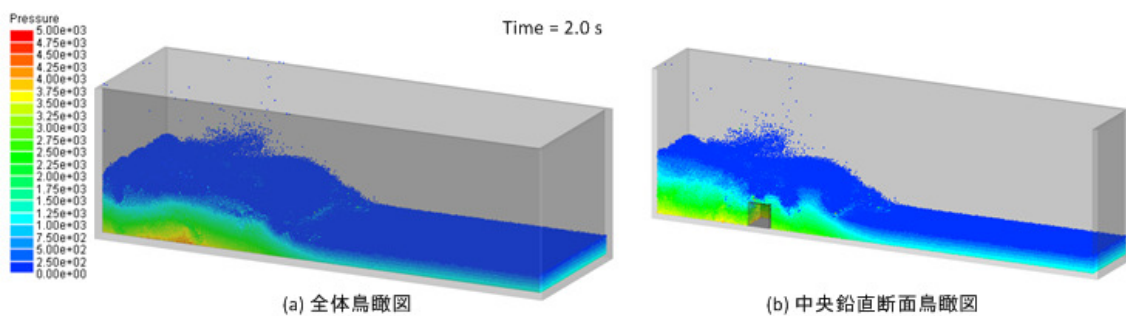
図－5.25 水中崩壊問題の圧力分布履歴（0.5 秒経過時）



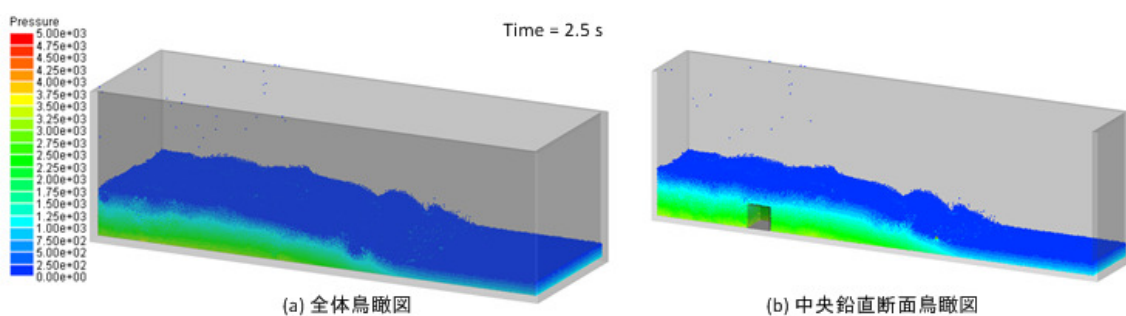
図－5.26 水中崩壊問題の圧力分布履歴（1.0 秒経過時）



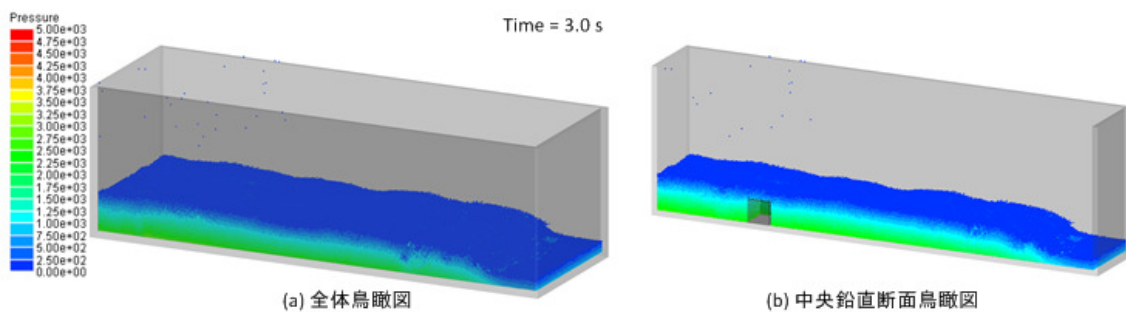
図－5.27 水中崩壊問題の圧力分布履歴（1.5 秒経過時）



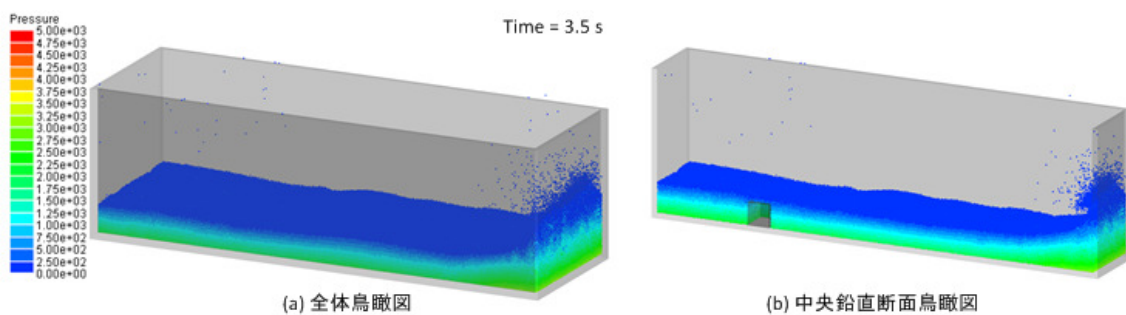
図－5.28 水中崩壊問題の圧力分布履歴（2.0 秒経過時）



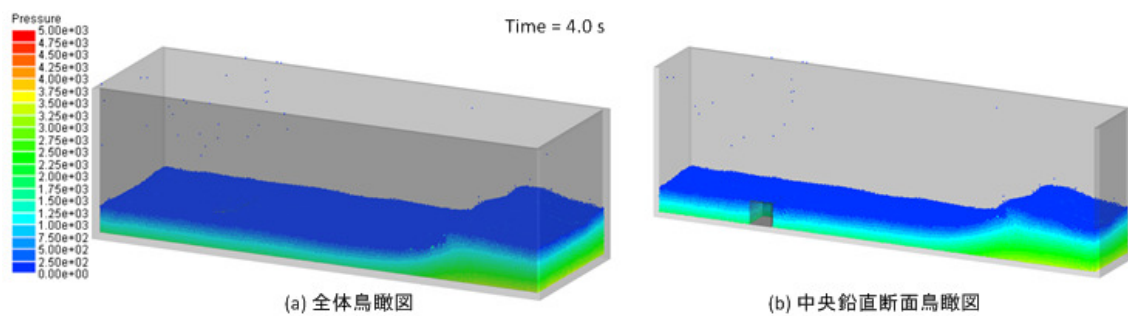
図－5.29 水中崩壊問題の圧力分布履歴（2.5 秒経過時）



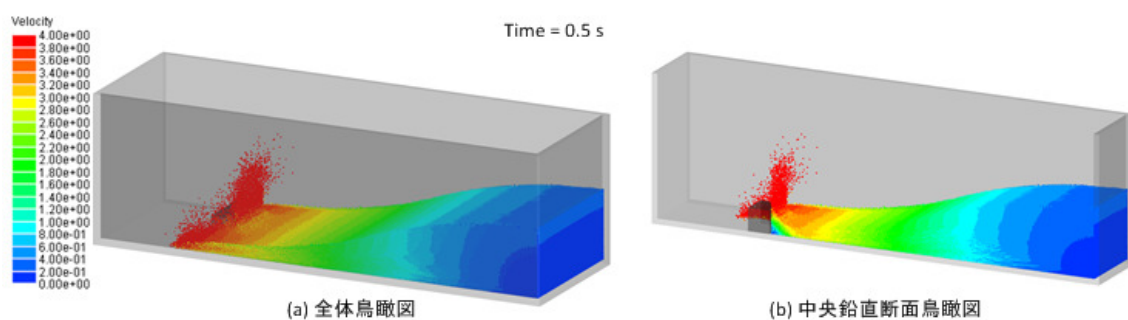
図－5.30 水中崩壊問題の圧力分布履歴（3.0 秒経過時）



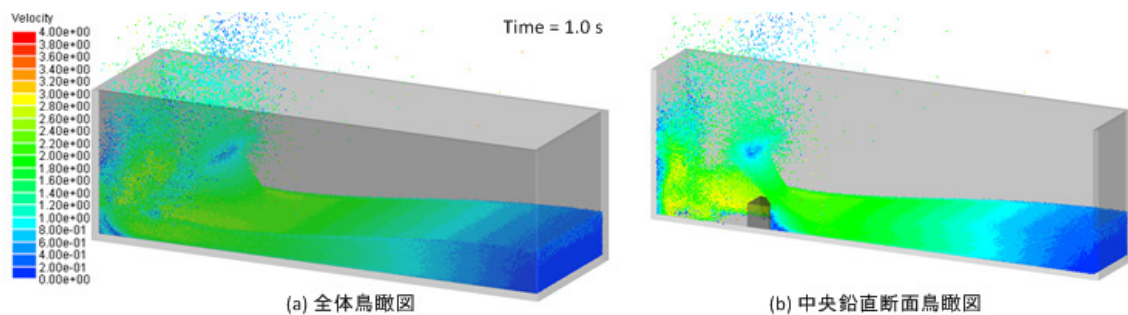
図－5.31 水中崩壊問題の圧力分布履歴（3.5 秒経過時）



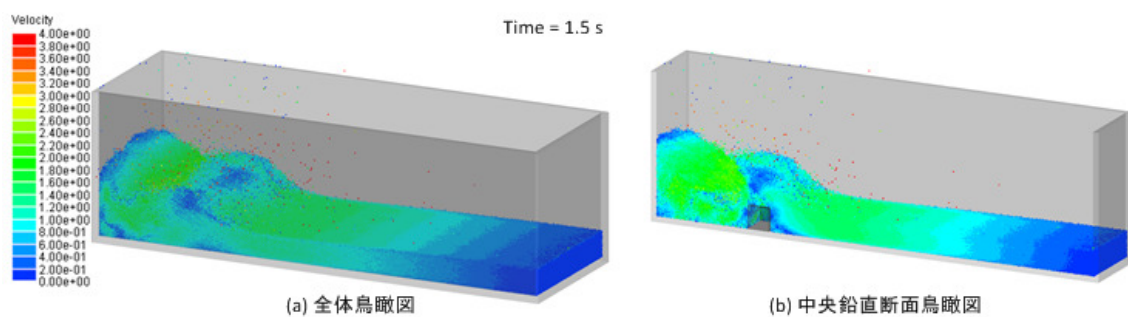
図－5.32 水中崩壊問題の圧力分布履歴（4.0 秒経過時）



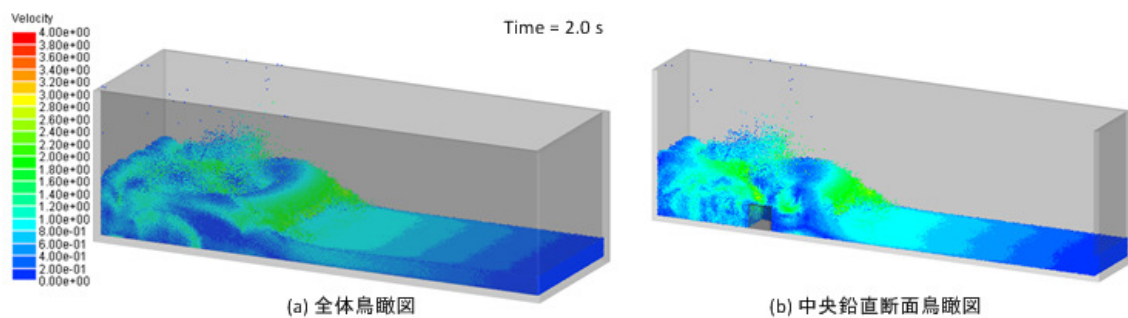
図－5.33 水中崩壊問題の速度分布履歴（0.5 秒経過時）



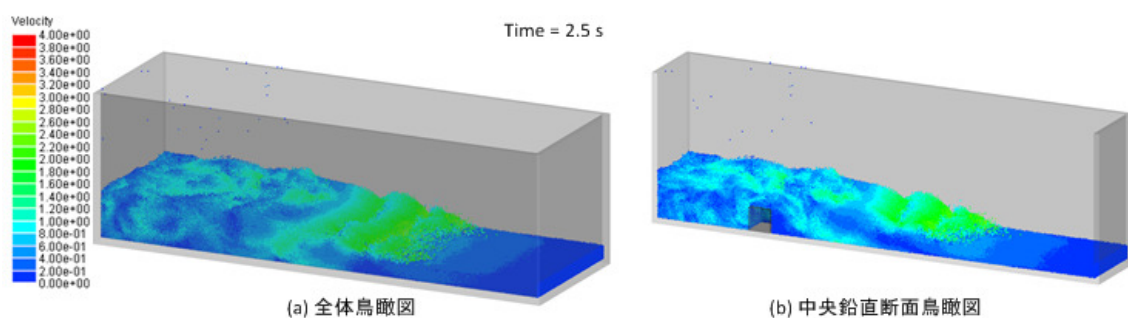
図－5.34 水中崩壊問題の速度分布履歴（1.0 秒経過時）



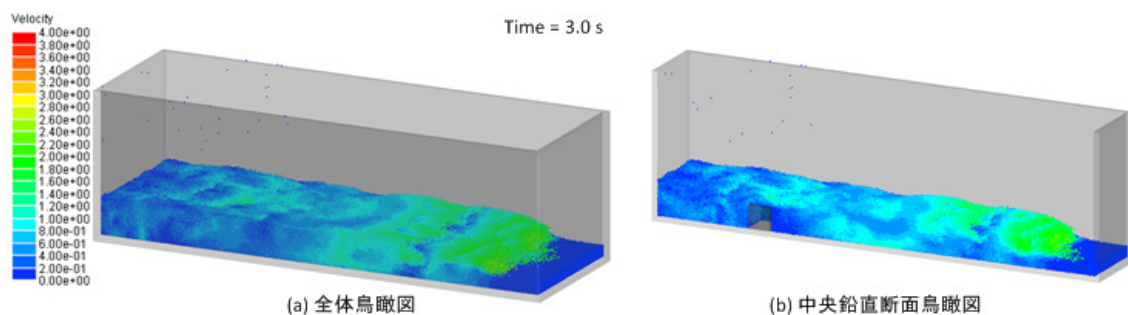
図－5.35 水中崩壊問題の速度分布履歴（1.5 秒経過時）



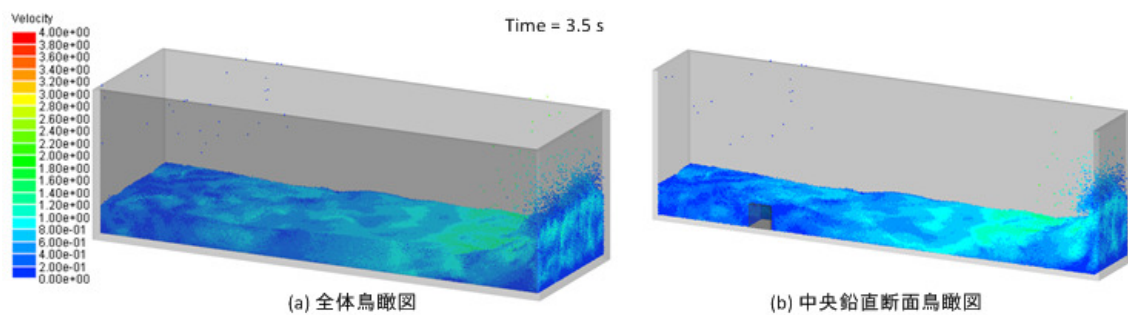
図－5.36 水中崩壊問題の速度分布履歴（2.0 秒経過時）



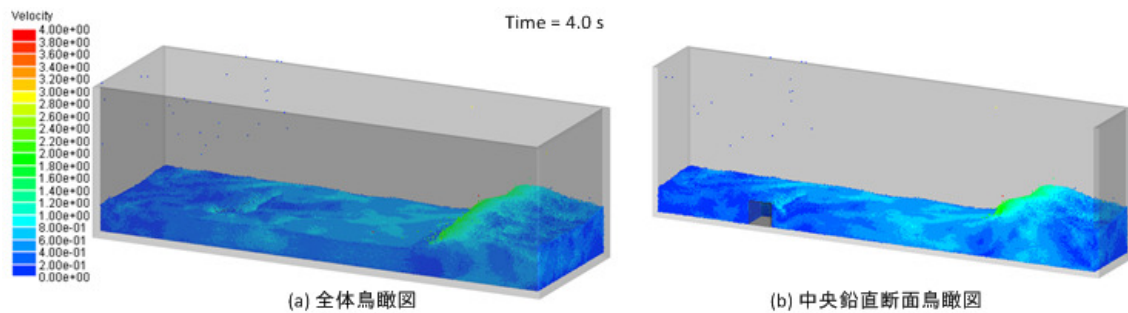
図－5.37 水中崩壊問題の速度分布履歴（2.5 秒経過時）



図－5.38 水中崩壊問題の速度分布履歴（3.0 秒経過時）



図－5.39 水中崩壊問題の速度分布履歴（3.5 秒経過時）



図ー5.40 水中崩壊問題の速度分布履歴（4.0 秒経過時）

5.4 大変形を考慮した壁境界モデルを用いた流動解析

本研究では滑らかな壁境界の再現とメッシュ型解法との連成解析の親和性の観点から、SPH 法に三角形パッチによる壁境界モデルの計算手法を組み込んでおり、計算手法は第 4 章にて述べた。SPH 法とメッシュ型解法の連成解析を行う前に、本研究にて開発した壁境界モデルの計算精度を把握しておく必要がある。この節では圧力勾配項と粘性項の基本的な問題にて壁境界モデルの検証を行った。また、本手法が既往の研究例にある壁境界モデルと異なり、壁境界の変形を考慮することができることを確認した。

5.4.1 円筒タンクの静水計算

本研究における変形を考慮した壁境界モデルは、三角形パッチの頂点位置で計算した曲率に基づき、積分計算における体積補正を行っている。流体の運動方程式で最も重要な項は圧力勾配項であり、SPH 法では密度変化から圧力が計算されるため体積補正の精度は重要である。そこで、幅広いレンジの曲率を持つ容器形状である円筒タンクを取り上げ、容器内の静水位計算を対象として本解析手法の適用性の検討を行った。本解析では円筒タンク中央断面の水の圧力分布と密度分布が妥当であることを確認した。

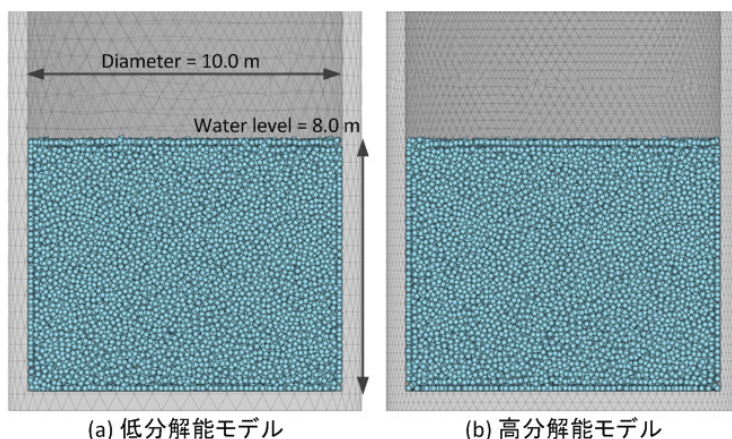
(1) 解析モデルと解析条件

本手法では頂点曲率を壁境界面の頂点位置で計算し、線形補間によって粒子投影点位置の物理量を計算する。そのため、計算精度は境界面の分解能に依存し、この影響を確認するために円筒タンクは分解能の異なる 2 種類を用いて全 2 ケースの解析を行った。

円筒タンクは直径 10m、液位を 8m として設定し、粒子間距離は 0.2m とした。境界面パッチは低分解能モデルでは 1 辺の平均長さを粒子間距離の 3 倍として約 0.6m とし、高分解能モデルは倍の分解能として約 0.3m で形状データの三角形分割を行った。解析モデルの模式図として 2 種類の円筒タンクの解析モデルを図ー5.41 に示す。なお、図中の円筒タンクの上部は描画範囲から外れており、三角形パッチが途中で切れているように見える。これはスロッシング問題への適用性を考えて、タンクモデルの側壁の高さを非常に高く設定し

ているためである。

計算に用いた SPH の解析条件を表－5.5 に示す。



図－5.41 2 種類の円筒タンクモデル（中央鉛直断面図）

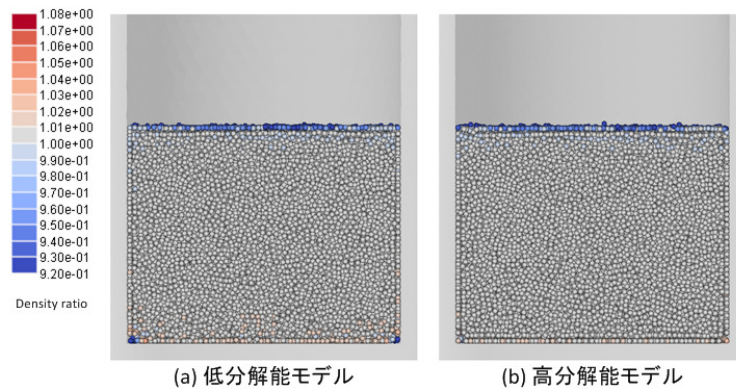
表－5.5 円筒タンクの静水計算の解析条件

初期粒子間距離	0.2 [m]
初期時間増分	5.0e-4 [s]
流体密度	1000.0 [kg/m ³]
流体粘度	0.001 [Pa・s]
重力加速度	9.80665 [m/s ²]
影響半径	0.6 [m]
平均パッチサイズ	0.3 or 0.6 [m]

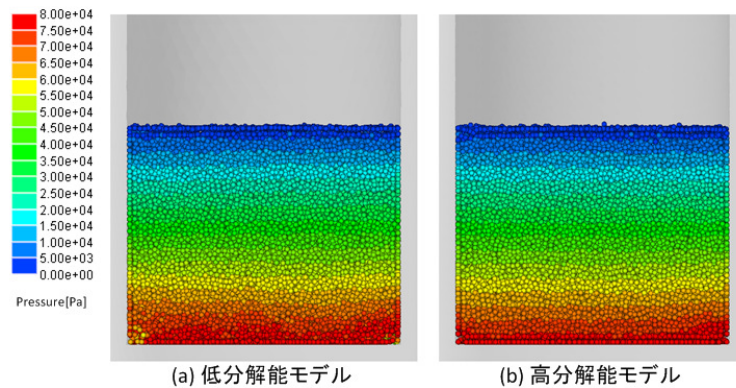
(2) 解析結果

解析結果より中央鉛直断面における密度分布を図－5.42 に、圧力分布を図－5.43 に示す。密度分布は初期密度（材料密度）で正規化したものを示し、圧力分布は静水圧のコンターレンジで描画した（左：平均メッシュサイズ 0.6m，右：平均メッシュサイズ 0.3m）。

メッシュ分解能の粗いケースも細かいケースも概ね静水圧を計算できており、流体密度も初期密度とほぼ一致していることが認められる。しかし、分解能の粗いケースについては中心断面の底面両端部で密度誤差が大きくなっており、細かいケースについても内部流体と比較するとズレが大きいことが確認できる。そのため、圧力について両ケースとも隅角部に近いところでは中央部との少しの差が認められる。なお、図－5.42 の隅角部で正規化した密度が自由表面判定基準未満となっていることが確認できる。曲率の大きい部位の密度誤差によって自由表面の判定ミスが生じ、圧力振動が発生することを抑制するため、本研究では近傍曲率が大きい流体粒子については自由表面判定しないように設定した。



図－5.42 2 種類の円筒タンクモデルの粒子密度分布（中央鉛直断面図）



図－5.43 2 種類の円筒タンクモデルの粒子圧力分布（中央鉛直断面図）

(3) 考察とまとめ

密度誤差は曲率と体積補正計算の誤差によって生じている．曲率が不連続に変化する壁境界の角張った部位については，メッシュ分解能が十分に高くなければ期待通りの体積補正は得られない．MPS 法の商用コードに用いられている既往の距離関数を使用する壁境界モデルの場合，一般に初期粒子間距離と同じか 1/2 程度の格子間隔で距離関数の計算を実施する．解析空間全体に渡って計算するため，消費メモリが多く計算時間もかかるが，解析実行前にのみ実行するためメモリ容量以外はあまり問題とならない．一方で，本研究における手法は壁表面のみ計算するためメモリ消費量は小さいが，計算コストは総壁面数に比例して増大する．曲率が大きくなる部分については局所的にメッシュを細かくするか（初期粒子間距離相当），角を丸めることによって曲率を実際より小さくモデル化するなどの工夫が必要である．

5.4.2 高粘性流体のせん断シミュレーション

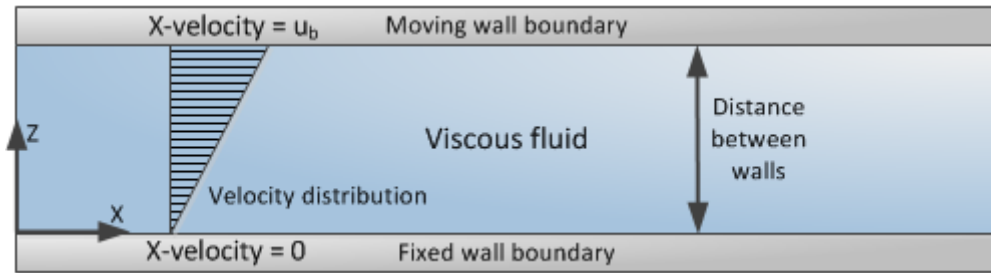
本手法を用いた粘性項の計算精度の確認として，図－5.44 に示すように壁境界を動かすことによって，水の 10 万倍の粘性を持つ高粘性流体を対象とする単純せん断試験の 2 次元解析を行った．この問題は Couette 流として知られるものであり，流体の両端が壁境界と

吸着することで生じる速度分布の非定常解は、次式に示す級数解より得られる¹⁴⁾。

$$u_x(z, t) = \frac{u_b z}{d} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2u_b}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{d} z\right) \exp\left(-\frac{\nu n^2 \pi^2}{d^2} t\right) \quad (5.3)$$

ここで、 u_x は流体の速度、 u_b は移動条件とする上端境界の速度、 z は固定境界とする下端境界からの距離、 d は上下の壁境界間距離、 ν は流体の動粘度である。

本解析ではせん断試験によって生じる速度分布を理論解と比較することで確認を行った。



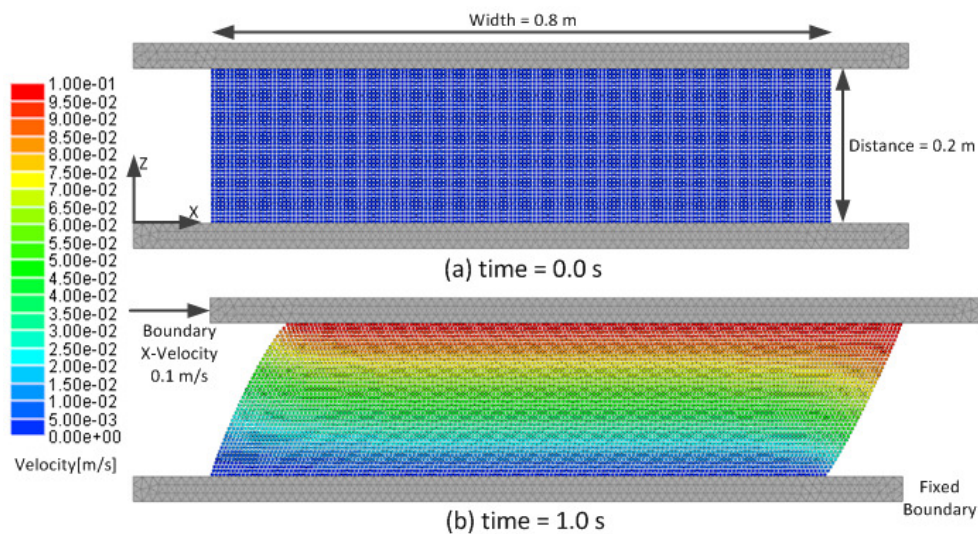
図－5.44 Couette 流問題

(1) 解析モデルと解析条件

上下の壁境界間距離が 0.2m である解析モデルを作成し、単純せん断試験の模擬解析を行った。流体モデルの幅は、自由端境界の影響が小さくなるように壁境界間距離の 4 倍とし、中央断面の流速を理論解と比較した。壁面境界の三角形パッチの 1 辺の大きさは、この問題では影響が小さいため、初期粒子間距離の約 2.2 倍とした。上部の壁境界は水平方向速度 0.1m/s とし、下部の壁境界は固定条件とした。解析は粘性項の計算を陽解法で行うケースと、陰解法で行うケースの計 2 ケース行い、陰解法ケースについては、陽解法ケースに使用した時間増分の 10 倍の時間増分を設定した。高粘性流れの問題で粘性項計算を陰解法で行うことのメリットは第 4 章において説明したが、壁面におけるノンスリップ境界の吸着条件を簡便に満たすことが可能である。計算条件一覧を表－5.6 に示し、解析条件の模式図として陽解法ケースの初期時刻と解析終了時刻における速度分布を図－5.45 に示す。

表－5.6 Couette 流問題の解析条件

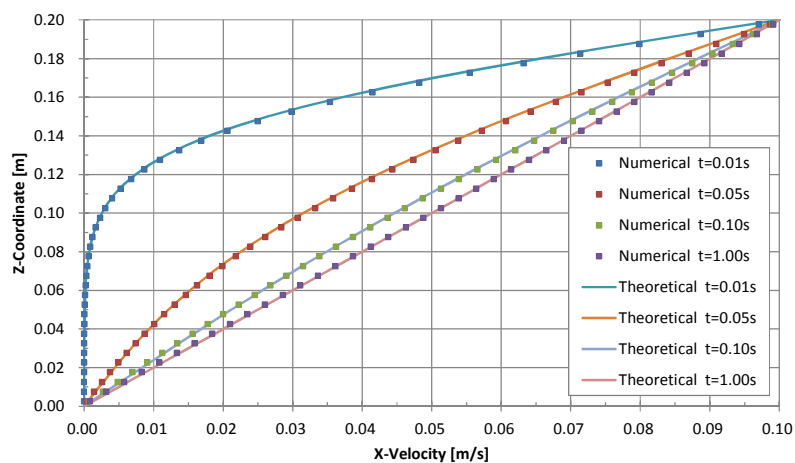
初期粒子間距離	0.005 [m]
初期時間増分	5.0e-5 or 5.0e-4 [s]
流体密度	1000.0 [kg/m ³]
流体粘度	100.0 [Pa・s]
重力加速度	0.0 [m/s ²]
影響半径	0.015 [m]
壁境界間距離	0.2 [m]
上部壁速度	0.1 [m/s]



図－5.45 初期時刻と終了時刻における流速分布

(2) 解析結果

解析結果より中央鉛直断面における速度分布を下端からの距離で整理し、その時刻歴を陽解法ケースについては図－5.46 に、陰解法ケースについては図－5.47 に示す。どちらの速度分布も理論解とよく一致しているが、陰解法を採用したケースについては、 0.01 秒経過時の流速分布に僅かな誤差が認められる。この誤差は時間増分に起因することを確認しており、時間増分を細かくすることで解消する。



図－5.46 陽解法ケースの流速分布履歴

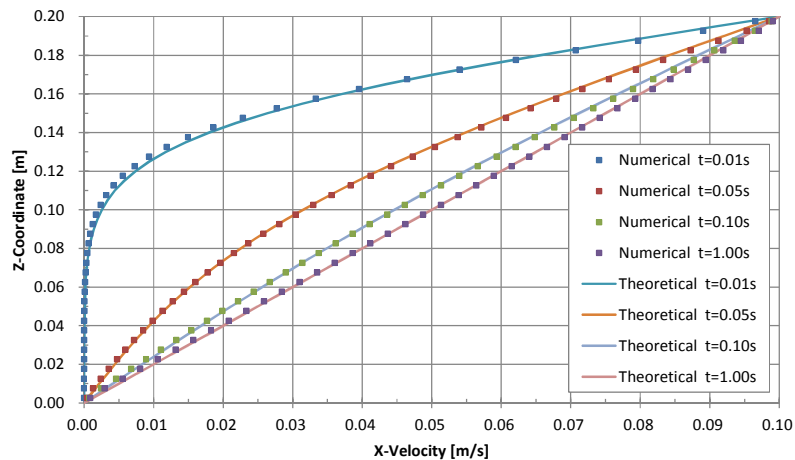


図-5.47 陰解法ケースの流速分布履歴

(3) 考察とまとめ

1 ステップあたりの計算時間は陰解法ケースの方が長いため、時間増分を陽解法ケースと同等に設定することは、計算効率の観点からは好ましくない。しかし、粘性項の釣り合い方程式の計算における線形ソルバーの収束性は、圧力のポアソン方程式に比べて良好であるため、同じオーダーの時間増分の選択は十分に現実的である。Couette 流のように一様な流れ場の 2 次元解析については、線形ソルバーの収束が非常に速く、この解析における陰解法ケースの計算時間は、陽解法ケースの約 1/9 であった。陰解法ケースの時間増分を陽解法ケースと一致させて計算を実施した場合については更に収束が速く、両ケースの総計算時間に有意な差は認められなかった。

解析結果より、本手法を用いた粘性項の計算精度を確認し、三角形パッチによる壁境界モデルが壁境界の粘着条件を満たす上で有効であることを確認した。非定常解を精度良く計算するには小さい時間増分の設定が必要であるが、ある程度の誤差を許容することで、陽解法では計算不可能な時間増分を陰解法では設定できることを確認した。

5.4.3 球形容器内の液体流動解析

距離関数を用いない三角形パッチの壁境界モデルを採用することで、大変形を考慮した壁境界の計算が可能となる。開発した壁境界の計算手法を用いて球形容器内の液体の動的挙動を計算した。容器内の液体は粒子による壁境界では粒子モデルの再生成なしでは再現ができない大きさの壁境界の大変形によって与えられる。ただし、本研究では気体は取り扱っていないため、閉じた境界内の空気は出入り自由であると考ええる。また、解析結果を検証できる比較対象はない。本解析は解析の安定性を中央鉛直断面の圧力履歴から確認し、短い周期で壁境界が大変形する問題に本研究で開発した SPH 法が適用できることを示した。

(1) 解析条件

解析対象の球形容器は初期時刻においては真球であるが、時々刻々とその形状および容積を変化させる条件を与えた。中心座標を基点として水平方向および鉛直方向に対し、それぞれ図-5.48 に示すように三角関数により設定した倍率で軸方向の径を変化させた。

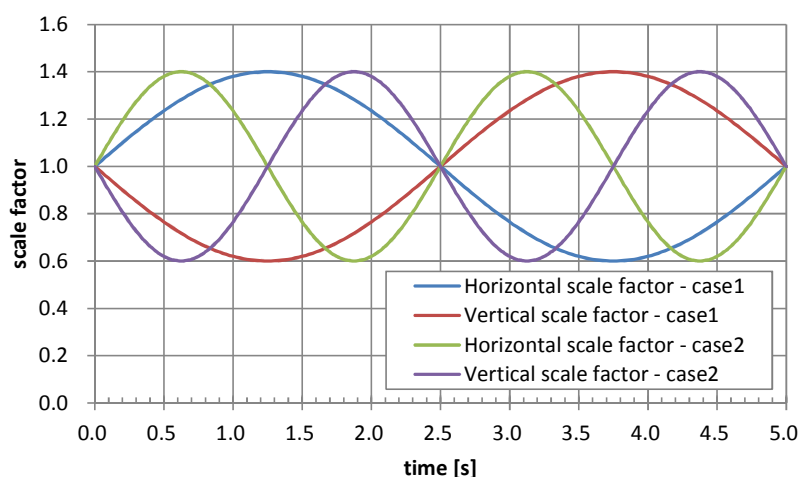
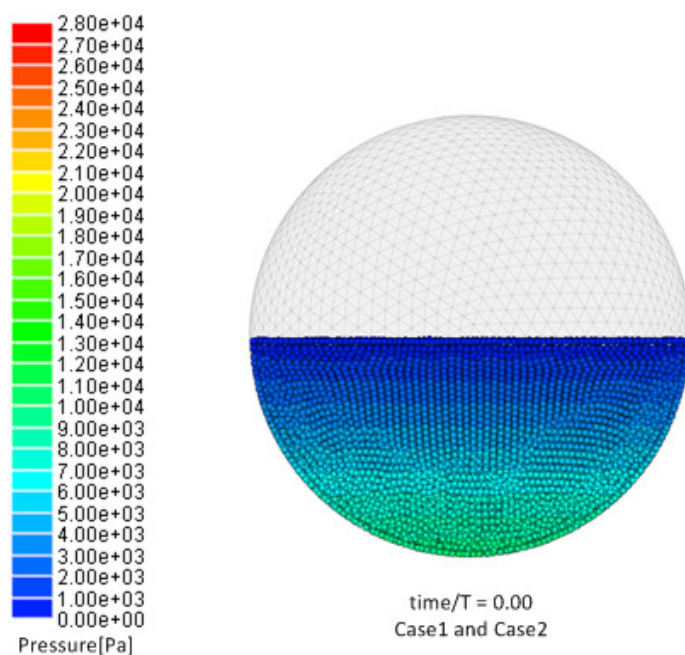


図-5.48 球形容器の変形倍率の時刻歴

容積は平たい球径となる最大時でおよそ 1.2 倍、ラグビーボール状になる最小時で 0.5 倍に変化する。容器の初期状態における半径は 1.0m であり、初期水位も底面から 1.0m に設定した。初期形状時の容積の 1/2 を水で満たしており、容器容積が最小となる時刻断面ではほぼ満水となる。球形容器のメッシュ分解能は、初期形状時で初期粒子間距離の 2.2 倍程度の粗さであり、局所的に大きな曲率がない形状であることから、十分な分解能であると考えられる。解析は強制変位条件の周期が異なる 2 ケース（周期 $T=2.5$ 秒と $T=5.0$ 秒）を実施した。この問題の時間増分については、拡散数より Courant 数の方が支配的であり、粘性項の計算については陽解法を用いた。解析条件を Table 3 に、初期の圧力分布を Fig. 12 に示す。

表-5.7 球形容器内の液体流動解析の解析条件

初期粒子間距離	0.03 [m]
初期時間増分	$5.0\text{e-}4$ [s]
流体密度	1000.0 [kg/m ³]
流体粘度	0.001 [Pa·s]
重力加速度	9.80665 [m/s ²]
影響半径	0.09 [m]
容器変形の周期	5.0 or 2.5 [s]



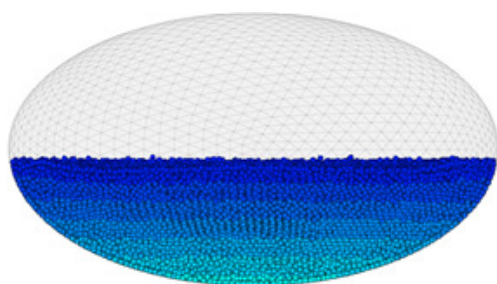
図－5.49 初期水压分布（中央鉛直断面）

(2) 解析結果

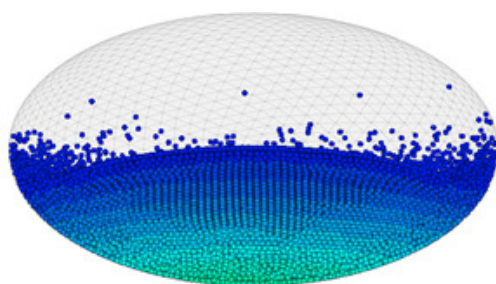
解析結果より中央断面の圧力分布の履歴を図－5.50 から図－5.57 に示す．圧力分布は水位が最大となる際の静水压のコンターレンジで描画し，境界変位の周期 T で正規化した時刻毎に 1 周期分の結果を示した（左側：Case1，右側：Case2）．なお，円筒タンクの問題と異なり，局所的に大きな曲率を持つ領域がない容器形状であることから，密度誤差はほとんどないことを確認している．

境界の変形速度が小さい Case1 においては，ほぼ静水压に準ずる圧力分布が得られている．動水压の影響はある程度確認できるものの，境界変形による液面の揺動や圧力振動は比較的小さく，ほぼ静的な挙動を示しているといえる．一方で 2 倍の変形速度を与えた Case2 については，動水压の影響が明瞭に現れた．境界の変形周期の初期段階で Case1 と比較して壁面に沿った水位が上昇しているが，これは水面の中央部が大きく窪んでいることに対応している．

慣性により水面が変化するより先に境界面が外側へ移動したため，外周部で小規模な水柱崩壊が発生したことで生じた．なお，同様の水柱崩壊的な現象は Case1 についても確認されているが，水柱高さが低いため水面に生じる揺動は小さなものとなっている．Case2 の $1/2$ 周期時刻では，中央部の圧力が高くなったことにより，鉛直上向きに液面が跳ね上がりその後に天頂部に衝突している．底部と天頂部の圧力が高まり，相対的に中央部の圧力が低下した後， $3/4$ 周期時に中央部に流入が生じることで一時的に圧力が均質化し，その後，自由落下の過程を経て静水压に近い状態に至っている．

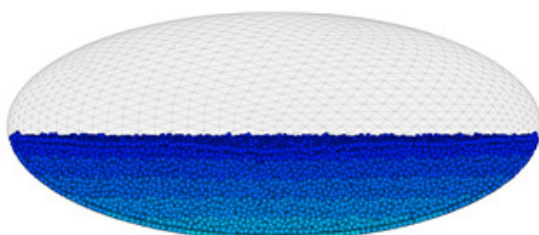


Case1 time/T = 0.125

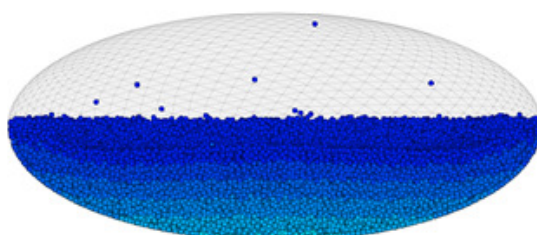


Case2 time/T = 0.125

図-5. 50 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.125)

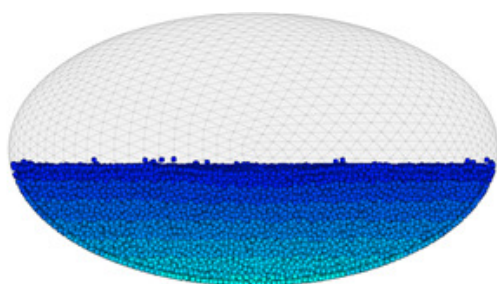


Case1 time/T = 0.250

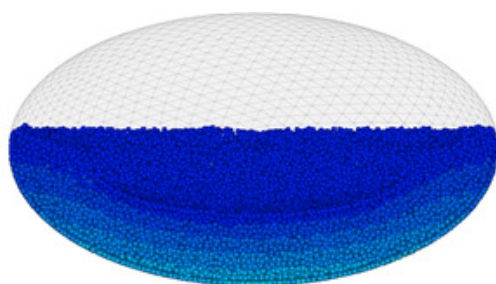


Case2 time/T = 0.250

図-5. 51 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.250)

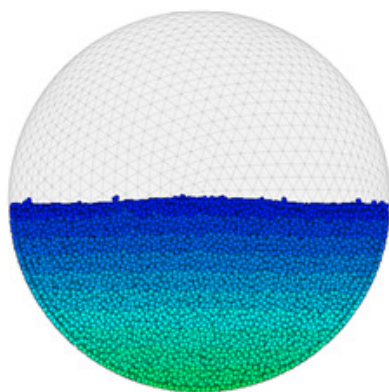


Case1 time/T = 0.375

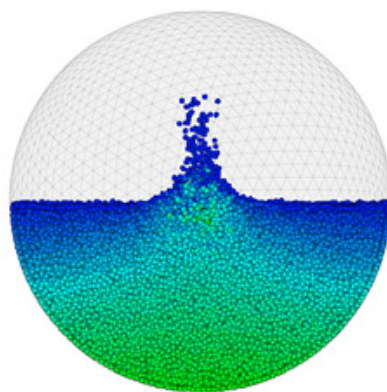


Case2 time/T = 0.375

図-5. 52 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.375)

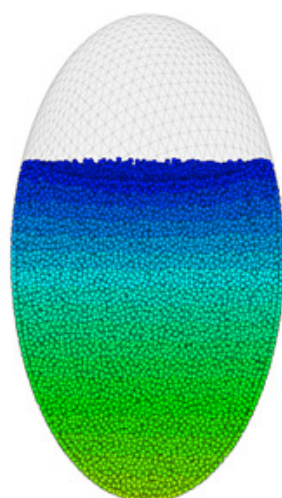


Case1 time/T = 0.500

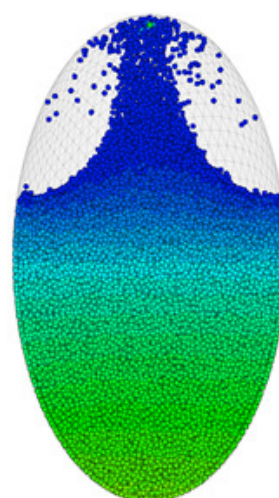


Case2 time/T = 0.500

図-5. 53 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.500)

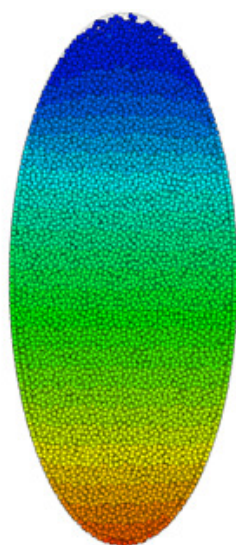


Case1 time/T = 0.625

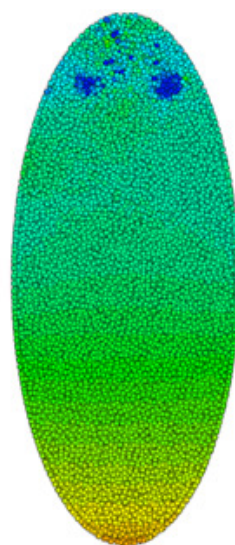


Case2 time/T = 0.625

図-5. 54 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.625)

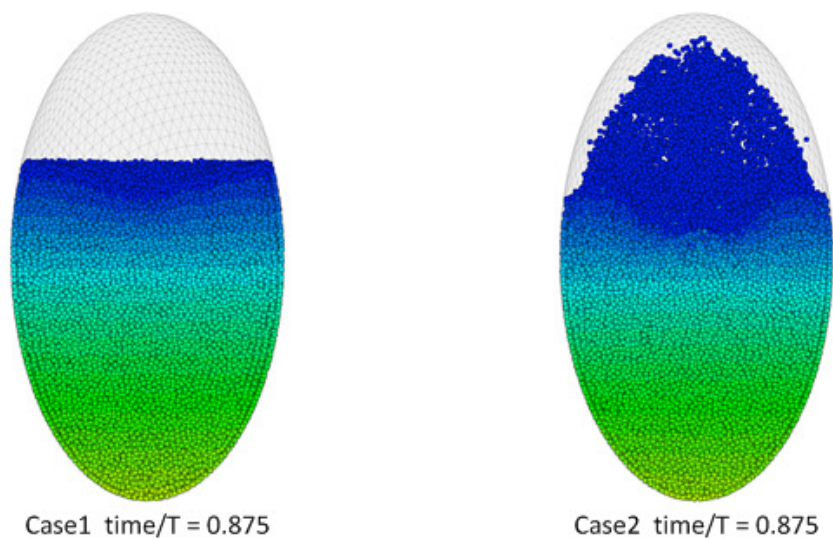


Case1 time/T = 0.750

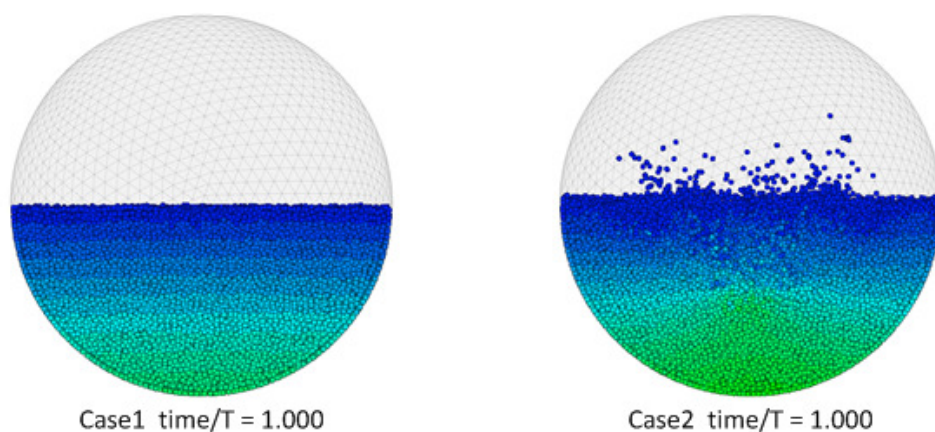


Case2 time/T = 0.750

図-5. 55 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.750)



図－5. 56 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=0.875)



図－5. 57 中央鉛直断面の水圧分布 (time/T=1.000)

(3) 考察とまとめ

解析結果に対応する実験データはないが，現象として理解できる興味深い結果が得られていると考えている．この問題のように滑らかな表面の壁境界が大変形する条件の解析は，壁粒子を用いた解析は困難であり，また既往の距離関数を用いた三角形パッチの壁計算手法においても変形を考慮することが出来なかったことから，本手法の有効性が確認できる．

5.5 5章のまとめ

本章では SPH 法による非圧縮性流体の動的数値解析を行い，実験データや理論解と比較することによって解析コードの検証と SPH 法の適用性の検討を行った．適用対象はスロッシング問題や水柱崩壊問題のように動水圧の作用が重要なものであり，それぞれ実現象を

SPH 法による数値解析で再現できており、構造物の動的応答解析への SPH 法の適用性はある程度確認できた。また、メッシュ型解法との連成に役立てるため導入した三角形パッチによる壁境界モデルの適用性について検討した。本章で得られた結論をまとめると以下の通りである。

- 1) 地震時に想定される流動体の動的応答の問題として、代表的であるスロッシング問題と流体衝突による波力を取り上げて具体的な問題を示した。
- 2) 矩形タンク内の流体に地震波を入力した際のスロッシング応答を SPH 法で解析し、実験との比較の結果として高い計算精度を有することが確認できた。タンクと貯蔵流体間の動的相互作用の評価は重要であり、第 6 章ではこのような問題に対する適用性を検討する。
- 3) 衝撃的作用の生じる動水圧の問題として水柱崩壊実験との比較解析を行い、ある程度の計算精度を確認した。混合が生じるような複雑な流れが生じる場合などの精度に今後の検討が必要であるが、このような高速度の流動体運動についても SPH 法は有効である。
- 4) 三角形パッチによる壁境界の計算手法の検討を行い、基本的な問題において十分な計算精度があることを確認した。既往の研究では考慮することができなかった、壁境界が大変形する際の流体挙動を計算し、メッシュ型解法との連成問題などに対する適用性を示した。

【参考文献】

- 1) 畑山 健, 座間 信作, 西 春樹, 山田 實, 廣川 幹浩, 井上 涼介 : 2003 年十勝沖地震による周期数秒から十数秒の長周期地震動と石油タンクの被害, 地震 第 2 輯, 第 57 巻, pp.83-103, 2004
- 2) 堀 郁夫, 川端 鋭憲 : 地震による石油タンク火災の技術的考察と社会問題, 社会技術研究論文集, Vol.2, pp.414-424, 2004
- 3) 遠田 豊, 曾根 龍太, 小野 泰介, 井田 剛史, 平野 廣和 : 実機貯水槽を用いたスロッシング挙動の把握, 防衛施設学会平成 24 年度年次研究発表会, 2013
- 4) 坂井 藤一 : 液体貯槽の耐震設計研究に関する現状と課題, 土木学会論文集, 第 362 号 /I-4, pp.1-11, 1985
- 5) 平山 紀夫, 邊 吾一 : 流体・構造の連成を考慮した FRP 製円筒形容器の周波数応答挙動, 日本復号材料学会誌, Vol.29 No.1, pp.9-16, 2003
- 6) 佐竹 健治, 堀 宗朗 : 東日本大震災の科学, 東京大学出版会, 2012
- 7) 土木学会 : 構造工学シリーズ 22 防災・安全対策技術者のための衝撃作用を受ける土木構造物の性能設計, 2013
- 8) 酒井 理哉, 東 貞成, 佐藤 清隆, 田中 伸和 : 溢流を伴う矩形水槽の非線形スロッシング評価, 構造工学論文集, Vol.53A, pp.597-604, 2007
- 9) 日本機械学会 編 : 事例に学ぶ流体関連振動, 技法堂出版, 2003
- 10) 防災科学技術研究所 : 強震観測網, <http://www.kyoshin.bosai.go.jp/kyoshin/>
- 11) K. M. T. Kleefsman, G. Fekken, A. E. P. Veldman, B. Ewanowski, B. Buchner : A Volume-of-Fluid based simulation method for wave impact problems, Journal of Computational Physics, 206, pp.363-393, 2005
- 12) 陸田 秀実, 清水 雄, 土井 康明 : SPH 法による流力弾性解析法と水面衝撃問題への適用, 土木学会論文集 B, Vol.65 No.2, pp.70-80, 2009
- 13) 林 高德, 浅井 光輝, Abdelraheem M. Aly, 園田 佳巨 : 安定化 ISPH 法を用いた流体衝撃力評価と精度検証, 第 10 回構造物の衝撃問題に関するシンポジウム論文集, pp.91-96, 2010
- 14) J. P. Morris, P. J. Fox, Y. Zhu : Modeling Low Reynolds Number Incompressible Flows Using SPH, Journal of Computational Physics, 136, Issue 1, pp.214-226, 1997

第6章 流体-構造連成解析

6.1 連成計算手法の概要

本節では 5 章で取り扱った動水圧が構造物に与える影響を評価するために開発した流体-構造連成解析手法についてその概要を述べる。本研究では FEM に代表されるメッシュ型の Lagrange 記述の計算手法の適用が困難となる、流動層の分離や飛散といった非線形性の高い問題に対応可能な計算手法として、個別要素法 (DEM) や SPH 法などの粒子型解法を採用した。これらの粒子型解法は Lagrange 記述の計算手法であり、ALE 法などの界面追跡型手法を導入することなく FEM との連成界面の取り扱いが可能であり、構造解析手法として一般的な FEM と粒子型解法による流動層の連成解析の研究が行われている。

梶谷¹⁾らはサンドクッションの解析に DEM を適用し、防護構造物をビーム要素でモデル化した DEM-FEM 連成解析を行った。また、前野ら²⁾は潜堤の流体力による破壊過程を計算するために、流体に界面捕捉法として VOF 法を採用した差分法、潜堤に DEM を適用し、海底地盤を多孔質弾性体の平面ソリッド要素でモデル化した VOF-DEM-FEM 連成解析を行った。DEM-FEM 連成解析の研究例は多く、この他にもシェル要素による弾性板への剛体衝突を計算した折井ら³⁾の研究などがある。一方、粒子法と FEM の連成解析の研究はまだ少なく、DEM の場合と異なり連成界面におけるカーネル積分が問題となっていると考えられる。流動体と構造物の相互作用を扱った SPH-FEM 連成の事例としては Yang ら⁴⁾の研究例があり、平面ソリッド要素の表面節点に SPH 粒子を重ねることで連成を行っている。また、構造解析に適用する研究例^{5),6)}についても同様に節点座標に粒子を重ねる手法⁵⁾や、ソリッド要素内に粒子を包含する手法⁶⁾が用いられている。このような粒子法の粒子を直接重ねる手法は比較的導入し易いのが利点であるが、FEM モデルの作成に粒子配置に関する制約が生じることや、大変形によって連成境界粒子の粒子間隔が大きく変化した際の計算精度に問題があると考えられる。

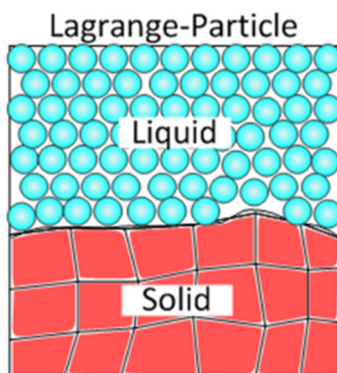


図-6.1 流動体と固体の連成解析モデル (Lagrange-Particle 型)

本研究では4章で導入した壁面境界を用いることで、FEM要素の表面や内部に粒子をマッピングすることなく、直接計算可能なLagrange-Particle型の連成解析手法を採用した。図-6.1に運動の記述方法に着目した連成解析の形式を示す。DEM粒子やSPH粒子はFEMメッシュ表面と頂点位置を共有する壁面境界と接することで作用力の授受を行う。

6.1.1 粒子型解法とメッシュ型解法の接続方法

本手法はFEMモデルの節点と4章で導入した三角形パッチによる壁面境界の構成頂点を対応付けて相互通信する分離型解法であり、流動体解析を行うDEM-SPH連成コード側からは荷重ベクトルを、構造解析を行うFEMコード側からは変位ベクトルをそれぞれ通信する双方向弱連成解法である。境界面を一致させる都合、FEM側の要素はソリッドやシェルなどの表面を持つ構造を想定しており、連続する境界面が定義されていればビームやジョイントなどが挿入されていても問題はない。相互通信は解析実行前の段階で、FEMメッシュの構成節点座標と壁面境界の三角形パッチ構成頂点座標の比較を行い、頂点-節点間の対応表を作成し通信時に参照することで実行した(図-6.2)。なお、本研究では境界面の頂点と節点の座標を完全に一致させたが、境界面形状が整合していれば面積座標などを利用した内挿によりベクトルの補間が可能であり、頂点と節点の座標は必ずしも一致させる必要はない。

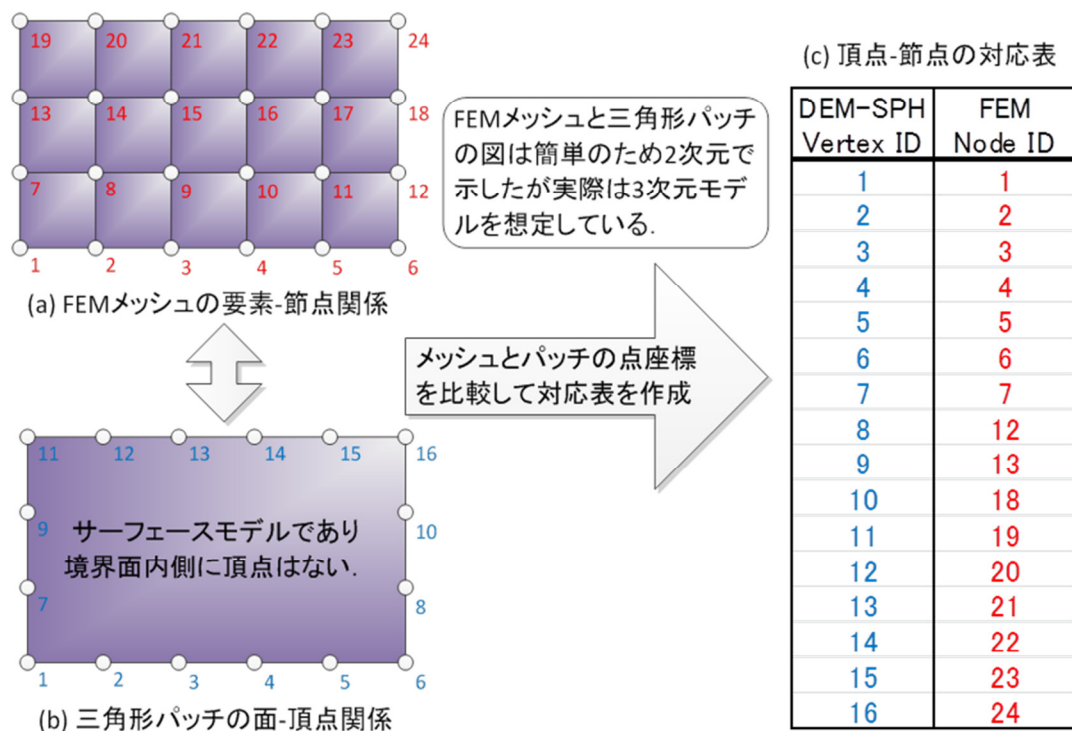


図-6.2 連成通信用リストの作成

本手法は DEM-SPH 側の境界面と FEM 側の境界面が一致しており，流体と構造の境界面を直接的に表現でき，さらに流動体をメッシュフリーである粒子型解法で計算するため，FEM を用いた流体解析でみられるメッシュが破綻することで計算が続行不能となる問題が生じない点で優れている．本手法のような双方向弱連成解法は，既知の状態から次のステップの状態を予測し，異なる時刻の連成境界面の情報を通信する時差式の解法となっており，計算の進め方の異なる並列時差解法と逐次時差解法が選択可能である⁷⁾．それぞれの情報の流れと計算時間および特徴を図-6.3 に示す．ここで， X は DEM-SPH 側から FEM 側へ送信する情報（荷重ベクトル）であり， Y は FEM 側から DEM-SPH 側へ送信する情報（変位ベクトル）である．計算時間の観点からは両プロセスを独立して並列に計算し，次の連成ステップまで同期処理を行わない並列時差解法が優れている．しかし，流動体と構造解析の両方で 1 時刻前の状態に基づく計算を行うため，安定性の観点では逐次時差解法の方が優れている．一方で，それぞれのプロセスの計算終了を待って通信を行う逐次時差解法を採用すると計算時間の点で不利である．なお，逐次時差解法をベースにそれぞれのプロセスの時刻を $1/2$ 時刻ずらして安定性を向上した改良逐次時差解法という手法も開発されている⁷⁾．本研究では計算安定性を優先して逐次時差解法を採用し，本手法は後述するように改良逐次時差解法の一つだと考えられる．

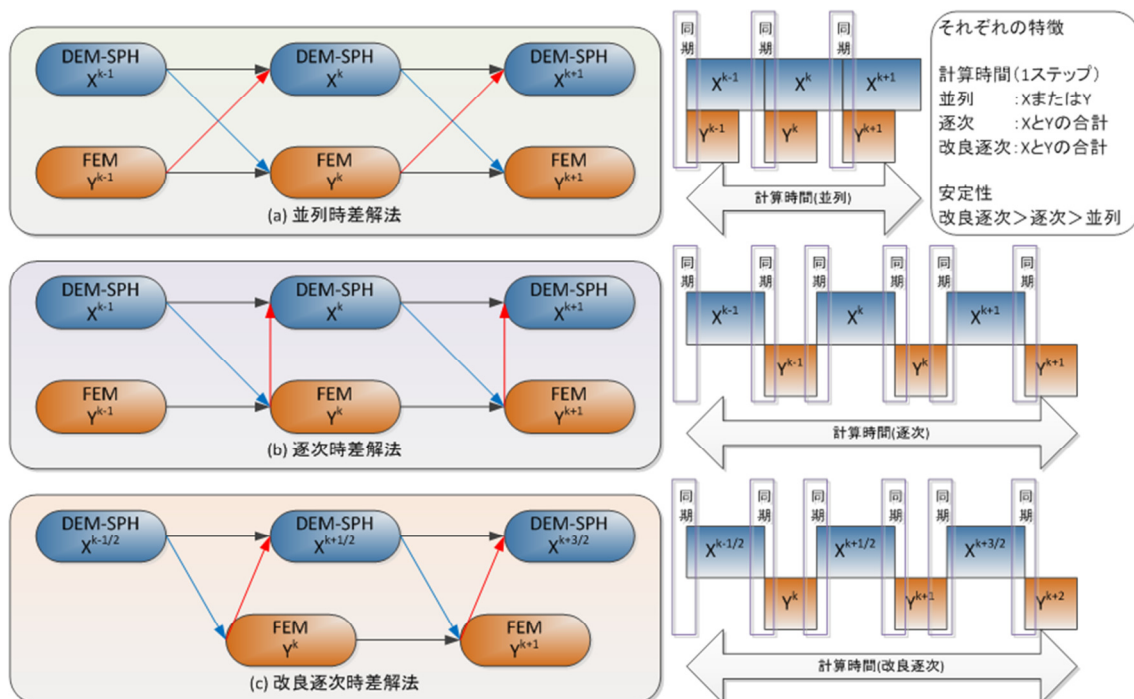


図-6.3 双方向弱連成（時差解法）の計算方式

6.1.2 連成解析に用いた動的 FEM コード (NOLA) の概要

本研究において開発した DEM-SPH 連成解析コードと連成する構造解析用の FEM コードには、(株)構造計画研究所の地盤-構造物連成系のための 3 次元非線形動的解析コードである NOLA を採用した。NOLA は微小変形のみを扱う FEM コードであり、本研究では剛な土木構造物の変形など計算対象を微小変形問題に限定して適用した。構造物の大変形問題への適用は今後の課題である。本項では NOLA に用いた動的解析手法について概要を述べる。

NOLA は直接積分法⁸⁾に基づく動的解析コードであり、一般的な非線形動的 FEM コードと同様に、次式に示す運動方程式の時間差分を数値積分することで全体の釣り合い方程式を立てる。

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

ここで、 \mathbf{M} 、 \mathbf{C} 、 \mathbf{K} はそれぞれ質量マトリックス、減衰マトリックス、剛性マトリックスである。本研究では質量マトリックスは対角集中化したものを用い、減衰マトリックスには Rayleigh 減衰を用いた。構造の減衰は振動数に依存するため設定が難しく、一般に振動数に比例する減衰を仮定し、Rayleigh 減衰は質量マトリックスと剛性マトリックスの線形結合として次式に示される。

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (6.2)$$

α と β はパラメータであり、 i 次モードの減衰比 h_i と固有円振動数 ω_i には次式の関係が成立することから、2つのモードについて次式を連立することで算出できる。

$$2h_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2 \quad (6.3)$$

時間積分法としては Newmark 法⁸⁾を用いた。時刻 $t + \Delta t$ における速度と変位を次式から展開し、式(6.1)に代入して釣り合い方程式を立てる。 δ と α は安定性と精度に関するパラメータであり、本研究では無条件安定となる $\delta = 0.5$ 、 $\alpha = 0.25$ を採用した。

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{x}}_t + \{(1 - \delta)\dot{\mathbf{x}}_t + \delta\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\}\Delta t \quad (6.4)$$

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{x}}_t + \dot{\mathbf{x}}_t\Delta t + \left\{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{\mathbf{x}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}\right\}\Delta t^2 \quad (6.5)$$

釣り合い方程式は直接法ソルバーを用いて求解し、非線形解析では Newton-Raphson 法などによる反復計算を行うが、本研究では線形弾性体のみを扱った。NOLA の機能概要一覧を表-6.1 に示す。

表-6.1 NOLA の機能概要一覧

機能項目	計算手法
時間積分	陰解法(Newmarkの β 法, Wilsonの θ 法, 等)
非線形解析法	反復計算法(Newton-Raphson, 等)
線形ソルバー	直接法(MUMPS)
減衰	Rayleigh減衰, 等
境界処理	単点拘束, 多点拘束, 粘性境界, 疑似自由地盤
要素ライブラリ	ソリッド, ビーム, シェル, 等

6.1.3 MPI による双方向弱連成通信

本研究では，流動体解析コードと構造解析コードのプロセス間通信には MPI(Message Passing Interface)¹⁰⁾を用いた．連成は弱連成で行い，以下に双方向弱連成の通信処理の概要を述べる．

開発した連成解析コードは制御プロセスと DEM-SPH 連成の流動体解析コードおよび構造解析用の動的 FEM コードから構成し，最初に起動する制御プロセスからの呼び出しによって流動体解析プロセスと構造解析プロセスが起動する．それぞれの解析プロセスは連成用情報を連成ステップにおいて制御プロセスに送信し，制御プロセスで同期が取れた段階で必要な情報が解析プロセスに届けられる．連成情報とは流動体解析プロセスが生成する荷重ベクトルと構造解析プロセスが生成する変位ベクトルのことであり，この情報の流れを図-6.4 に示す．

開発した連成コードでは FEM 計算部の時間増分 Δt_{FEM} が DEM-SPH 連成コードの時間増分 $\Delta t_{DEM-SPH}$ より大きいことを想定しており，本研究では連成間隔 $\Delta t_{Coupling}$ を Δt_{FEM} と一致させた．

$$\Delta t_{FEM} \geq \Delta t_{DEM-SPH} \quad (6.6)$$

$$\Delta t_{Coupling} = \Delta t_{FEM} \quad (6.7)$$

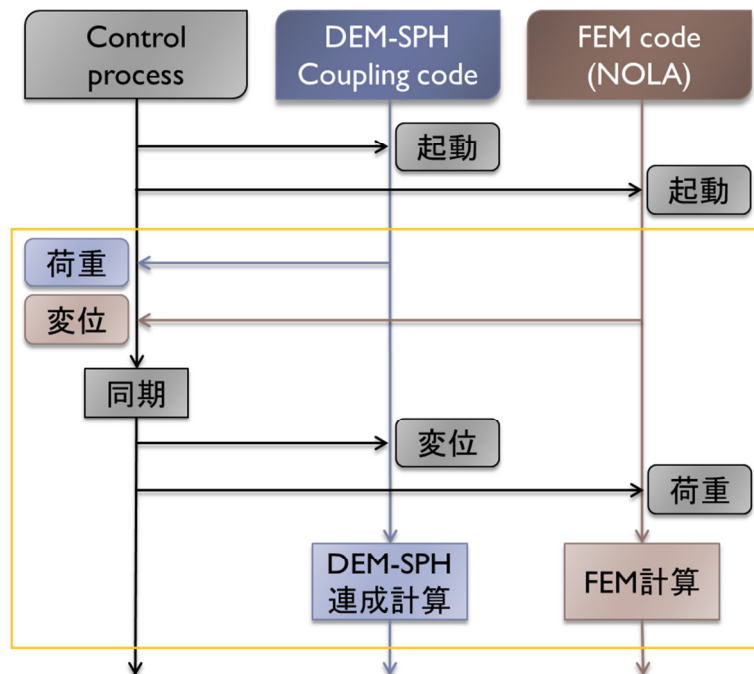


図-6.4 MPI 通信による連成用情報の流れ

6.1.4 通信用の荷重と変位の計算方法

本項では、前項の通信処理において相互に交換するベクトルの計算方法について述べる。DEM-SPH 連成コードから FEM コードへ渡す次の連成ステップにおける荷重ベクトル \mathbf{F}_i^{n+1} は、 $\Delta t_{DEM-SPH}$ が連成間隔に比べて小さいことから次式に示す平均衝撃力を計算し、連成用荷重ベクトルとした。

$$\mathbf{F}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta t_{FEM}} \int_t^{t+\Delta t_{FEM}} \mathbf{F}_i^k \Delta t_{DEM-SPH}^k \quad (6.8)$$

ここで、 n は DEM-SPH 連成解析コードの FEM 連成ステップであり、 k は現在の DEM-SPH 連成解析コードの解析ステップである。なお、このようにして得られた荷重ベクトルは数値的な振動が平滑化されるだけでなく、連成時刻 n と $n+1$ の中間値と考えることができ、数値安定性と精度の改善が期待できる改良逐次差解法^{7), 11)}の一種であると考えられる。

反対に FEM コード側から DEM-SPH 連成解析コードへ渡す変位ベクトル $\Delta \mathbf{x}_{FEM}^n$ については、 Δt_{FEM} が大きいことを考慮して $\Delta t_{DEM-SPH}^k$ 間の移動量に補間を行った。最も単純な補間は節点速度を一定に仮定するものであるが、本研究では節点加速度が一定となる仮定を行って節点移動量を計算した。具体的には以下に示す式より、連成ステップ n において節点加速度 \mathbf{a}_i^n を計算し、解析ステップ k における節点速度 \mathbf{v}_i^k と節点変位 \mathbf{u}_i^k を数値積分することで計算した。なお、積分計算によって生じた残差ベクトルは次回連成通信時に持ち越すことで修正した。

$$\mathbf{a}_i^n = \frac{2}{\Delta t_{FEM}} \left(\frac{\Delta \mathbf{x}_{FEM}^n}{\Delta t_{FEM}} - \mathbf{v}_i^n \right) \quad (6.9)$$

$$\mathbf{v}_i^k = \mathbf{v}_i^{k-1} + \mathbf{a}_i^k \Delta t_{DEM-SPH}^k \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}_i^k = \frac{\mathbf{v}_i^{k-1} + \mathbf{v}_i^k}{2} \Delta t_{DEM-SPH}^k \quad (6.11)$$

DEM-SPH と FEM の時間増分の比率が 1:10 の場合に、与条件として設定する境界変位を速度一定で補間した場合と加速度一定で補間した場合の変位時刻歴の差異について図 6.5 に計算例を示す。加速度一定を仮定した補間の場合、節点速度が連続的に変化するため粘性項の計算の安定化に寄与すると考えられる。

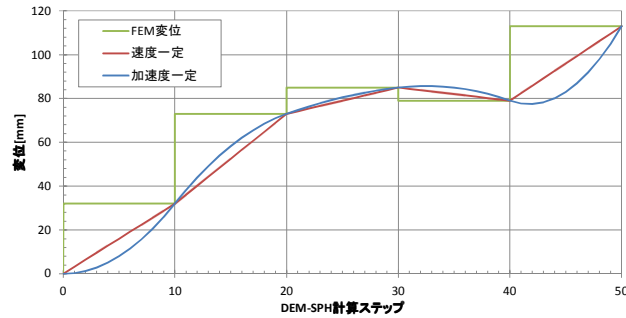


図 6.5 変位補間方法による変位時刻歴の違い

6.2 円筒タンクの静水計算による動作検証

本研究において開発した連成解析手法と解析コードの流体-構造連成問題への適用性を検討するため、固定屋根式タンクのスロッシング問題を対象とした数値解析を実施した。スロッシングは 5 章で述べたように、流体が比較的長周期の地震動で加振されることで液面揺動を生じる現象であり、短周期成分によって容器の壁体が振動することで生じる連成振動（バルジング）^{12),13)}とは異なる問題である。それぞれの現象は着目すべき振動数域が異なるため、相互作用はあまり問題にならないと考えられており¹³⁾、本研究ではスロッシングのみに着目した。

本節では、スロッシング解析に適用する前段階の検証として、円筒タンクの静水計算を行った。静水状態のタンク底面は静水圧による等分布荷重 p を受けており、底面以外の面を拘束して半径 R の底面を自由とした場合の底面中央の最大たわみ ω_{max} は、端部側面を固定した円板の等分布载荷の理論解より計算できる¹⁴⁾。

$$\omega_{max} = \frac{R^4 p}{64D} \quad (6.12)$$

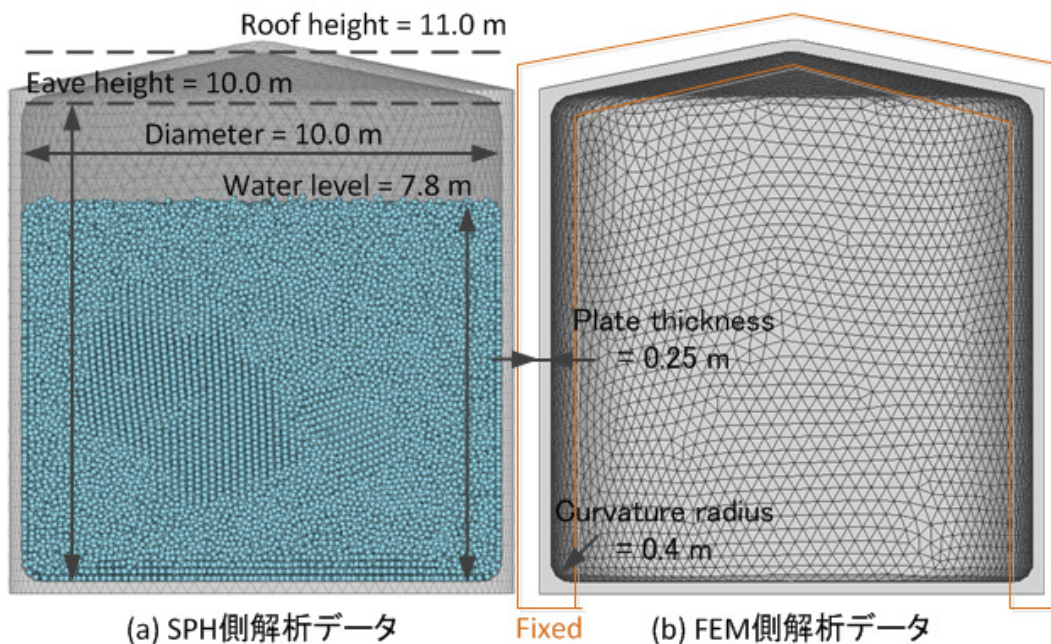
$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (6.13)$$

ここで、 D は板の曲げ剛性であり弾性係数 E とポアソン比 ν および板厚 t より計算できる。

開発した解析コードは動的問題を扱うものである。検証のため静水圧をステップ荷重として载荷するとタンク底面は減衰振動を生じながら、最終的に静的釣り合い状態に至ることを確認した。本解析では静水圧下のタンク底面の中央鉛直たわみの妥当性を検証する。

6.2.1 解析モデルと解析条件

本章で述べる流体-構造連成解析で対象とする固定屋根式円筒タンクは貯水を目的とするコンクリート製の容器構造を想定した。流動体と構造の解析モデルの中央鉛直断面図を図-6.6に示す。SPH側の壁面境界はFEMメッシュの表面を抽出したものであり、壁面境界の頂点とFEMメッシュの節点は座標が一致している。FEM側の円筒タンクはソリッド要素でモデル化し、メッシュ作成が容易であることから四面体要素によるモデル化を行った。実用的にはタンクでは要素数を少なくできるシェル要素を用いた方が有用と考えられるが、本研究では構造の汎用性を考慮しソリッド要素モデルを採用した。なお、簡単のため四面体1次要素を採用した。



図－6.6 固定屋根式円筒タンクの解析モデル

本解析で作成した円筒タンクモデルは、ソリッド要素サイズの関係からプレート厚さを一様に 0.25m と厚く設定しており、材質は全てコンクリートとして扱った。なお、コンクリート製タンクは PC 鋼材や鉄筋による補強が必要であるが、解析モデルでは鋼材と初期応力は考慮せず、破壊を考慮しない線形弾性体として扱った。流体と接する円筒タンクの隅角部については、5 章で述べたように大曲率部の粒子密度誤差を原因とする不安定性を抑制し、粗い時間増分での解析を可能とするために曲率半径 0.4m の R を設けた。従って、タンク底面の厚さが 0.25m である部位は半径 4.6m の領域となり、静水解析では鉛直たわみのみ着目することからこれより外側の領域を完全拘束とした。

タンクの貯蔵流体は水であり、液位は 7.8m に設定した。表－6.2 に FEM 解析と SPH 解析のそれぞれの解析条件をまとめて示す。FEM 解析で設定した Rayleigh 減衰については静水計算には影響がないため、設定値はスロッシング解析について述べる次節で補足する。

表－6.2 FEM と SPH の解析条件一覧

FEM解析条件	解析条件詳細	SPH解析条件	解析条件詳細
要素数	37,830	粒子数	222,567
節点数	12,626	初期粒子間距離	0.14 m
弾性係数	21.0 GPa	流体密度	1000 kg/m ³
ポアソン比	0.3	流体粘度	0.001 Pa・s
密度	2400 kg/m ³	積分半径	0.42 m
時間増分	0.02 s	時間増分	0.002 s

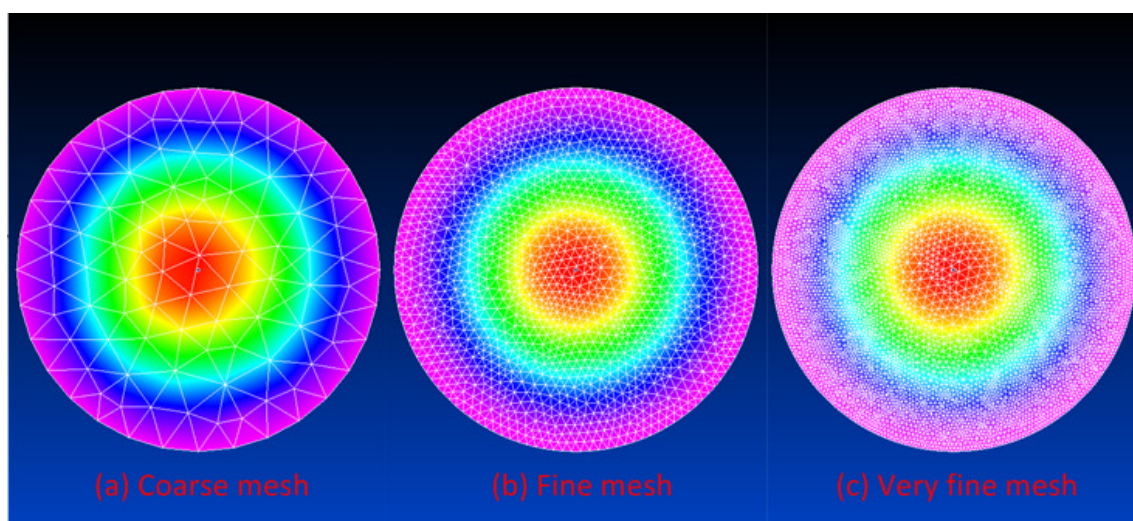
6.2.2 四面体ソリッド要素の計算精度

前項で述べたように FEM 解析では四面体 1 次要素を採用しており，部材の曲げが重要となる問題では，せん断ロックが生じることで変形解が過少評価されることが予想された¹⁵⁾．そのためタンク底面の最大たわみの理論解との比較よりむしろ，FEM の解析モデルに等分布荷重を載荷した際の非連成の静的変形解と，流体・構造連成解析による動の変形解のたわみ量の比較が適切であると考えた．しかし，モデル化によって生じる誤差の大きさを把握しておくことも重要であり，本項では静水解析精度の予備検討として要素分割と静的たわみの関係についても確認を行った．

四面体ソリッドの要素分割による解析精度の確認解析については，直径 10m，厚さ 0.25m の厚肉円板モデルを対象に，要素分割数を変えて 3 ケースのモデル化を行った．表－6.3 に要素分割と変形解より得られる中央鉛直たわみの関係を整理し，理論解と比較して示した．また，静的変形解より変位量の分布を各ケースの最大値レンジでコンター表示した上面図を図－6.7 に示す．上面図からは確認できないが，Coarse mesh ケースと Fine mesh ケースでは板厚さ方向のソリッド層数は 1 層，Very fine mesh ケースで 3 層の要素分割となっている．

表－6.3 要素分割と中央鉛直たわみの関係

ケース名	要素数	節点数	中央鉛直撓み
Coarse mesh	590	228	1.60 mm
Fine mesh	10,372	3,258	8.00 mm
Very fine mesh	106,821	24,749	16.12 mm
Theory solution			24.78 mm
High-order element	10,372	19,807	24.76 mm



図－6.7 円板の等分布載荷解析結果

解析結果より，四面体 1 次要素を用いた全てのケースで理論解より大幅に小さな鉛直たわみが得られており，円筒タンクの静水解析で得られるたわみ量は理論解の数分の一となることが推測できる．なお，参考のために高次要素による検討も行い，Fine mesh ケースの要素分割数で Nastran の四面体 2 次要素を用いた場合，変形解は理論解とほぼ一致することを確認した．

本項の検討より，静水計算による最大たわみを非連成の静的変形解と，流体・構造連成解析による動的変形解を比較することが適切であることが確認できた．流体・構造連成解析による静水計算の動作検証は次項で行う．

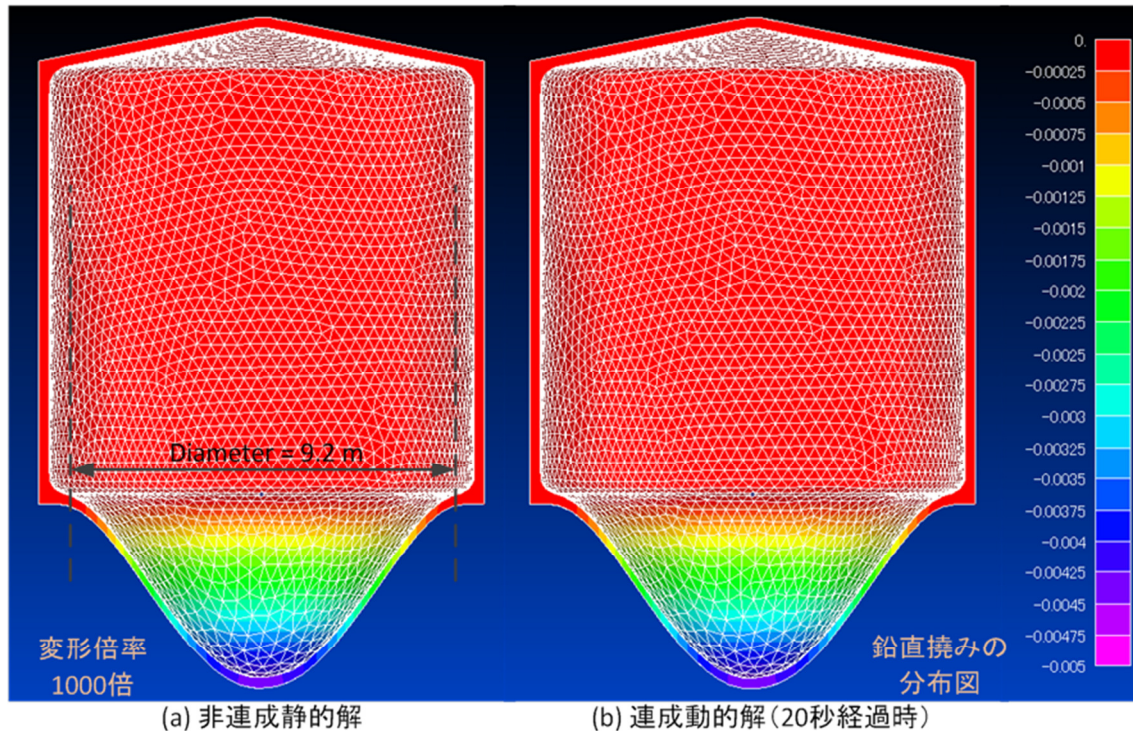
6.2.3 連成解析による静水計算

節点の支配面積に静水圧をかけて等分布载荷とした非連成の静的解法と，本研究で開発した流体・構造連成解析手法を用いた動的応答解による静水計算の解析結果について，中央鉛直たわみの大きさについて表-6.4 に整理した．動的解の中央鉛直たわみ量は 2 秒経過時から 20 秒経過時までの平均値としたが，ステップ荷重のかかる解析初期の時間断面を除き，たわみ量の有意な振動は確認できず，初期の衝撃による振動の減衰後は流動体解析による水圧と構造解析による復元力が釣り合っていると考えられる．また，中央鉛直断面の鉛直たわみの分布を図-6.8 に示し，静的解と動的解の 20 秒経過時の変形の様子を変形倍率 1000 倍で比較した．

前項で検討した通り，静的解も動的解も理論解に比べて鉛直たわみ量は小さく評価されるが，静的解と動的解の結果については一致していることが確認できる．静水計算は連成の影響がほぼないため検証解析として十分ではないが，本研究において開発した解析コードが正しく機能していることを確認した．

表-6.4 非連成静的解と連成動的解の中央鉛直たわみの比較

ケース名	要素数	節点数	中央鉛直撓み
Static (non Coupling)	37,830	12,626	4.36 mm
Dynamic (Coupling)	37,830	12,626	4.36 mm
Theory solution			17.75 mm



図－6.8 静水計算結果より中央鉛直断面の鉛直たわみ分布の比較

6.2.4 まとめ

本節では開発した解析手法と解析コードの動作検証として、円筒タンクの底面が静水圧によって変形する問題について、中央鉛直たわみの理論解と非連続の静的解および開発した連続による動的解の結果を比較した。解析結果は理論解と比較してたわみが小さく評価される傾向にあるが、これは非連続の静的解も同じであり、四面体ソリッド要素のせん断ロックに起因する問題であることを確認した。非連続静的解と連続動的解の振動減衰後の解析結果はほぼ一致しており、静水問題に関しては開発した手法で精度良く解析できることを確認した。

6.3 固定屋根式円筒タンクと貯蔵流体の相互応答

前節の検討で流体・構造連成を正しく解析できることが確認できたため、本節では地震動を模擬した加速度を入力することで貯蔵流体を加振し、スロッシングによる動水圧を受ける円筒タンクの動的応答解析を行い、開発手法の適用性の検討を行った。前述のとおり、本検討ではスロッシングのみに着目し、バルジングの検討は行わないことから加振用の加速度波形には \sin 波を用い、容器躯体にはこれを入力せずに貯水層にのみ入力を行い、スロッシング現象のみによる動水圧と流体衝突による衝撃圧を受ける、構造躯体の動的応答を検討対象とした。本解析では入力加速度に対応する周期の圧力応答やタンクの変位応答が

得られることを検証し、また中央鉛直断面の圧力と変位の分布を確認することで SPH 法と FEM を連成することの有効性を確認した。

6.3.1 解析モデルと解析条件

本検討に用いた解析モデルは、前節の静水計算で用いたモデルと同じものであり、拘束条件と加速度入力条件のみが異なる。解析モデル底面の拘束条件に関しては本研究では底面を完全拘束とし基礎および地盤との連成は考慮しないものとした。地盤との連成を考慮した貯水タンクの地震応答解析としては中村ら¹⁶⁾の研究があり、流体は速度ポテンシャル理論に基づく流体要素、地盤モデルの境界に粘性境界を用いた動的 FEM 解析が実施されている。粘性境界は一般に周波数領域の動的解析コードで用いられているエネルギー伝達境界と比較するとエネルギー吸収効果で劣るものの、取扱いが容易であるため時間領域の動的解析で用いられることが多く¹⁷⁾、地盤・構造物連成系の動的応答解析コードである NOLA でも取り扱うことが可能である。しかし、本研究では非線形スロッシングによる動的応答解析の適用性検討を目的としており、地盤との連成については取り扱わないものとした。

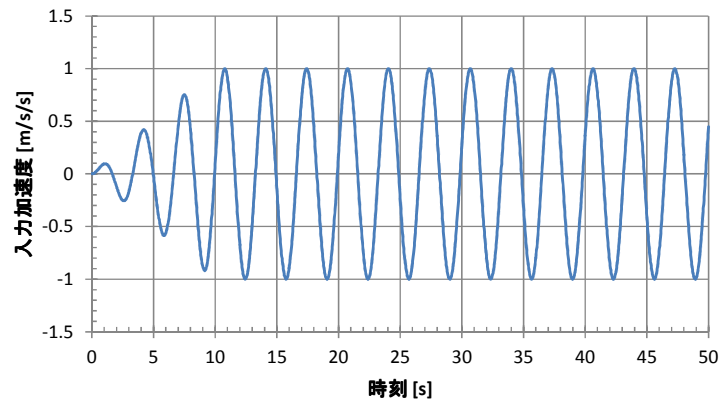
入力地震波は貯蔵流体のスロッシング 1 次モードの固有周期をもつ sin 波とし、最大振幅は 100gal とした。共振によって大きなスロッシングを発生させることを意図しており、ポテンシャル流体では取り扱うことのできない非線形性の大きい液面揺動や、屋根への流体衝突を検討する。入力波は加振開始直後には徐々に大きくなるように設定し、最初の 3 周期分は振幅の比例計算による入力波の低減を行った。円筒タンクの貯蔵流体に 1 方向加振した際の i 次モード固有振動数は次式¹⁸⁾から計算でき、本検討に用いた解析モデルの場合の 1 次モードの固有周期は 3.317 秒となる。

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\lambda_i \frac{g}{R} \tanh\left(\lambda_i \frac{H}{R}\right)} \quad (6.14)$$

ここで、 H は液深であり R は円筒タンクの半径、 λ_i は 1 次の第 1 種ベッセル関数の径方向微分が 0 となる小さい方から i 番目の解であり、4 次までを示すと以下のとおりである。なお、多軸の加振や点加振などの条件下においては、高次の第 1 種ベッセル関数や周方向微分が 0 となる場合の λ も検討する必要がある。

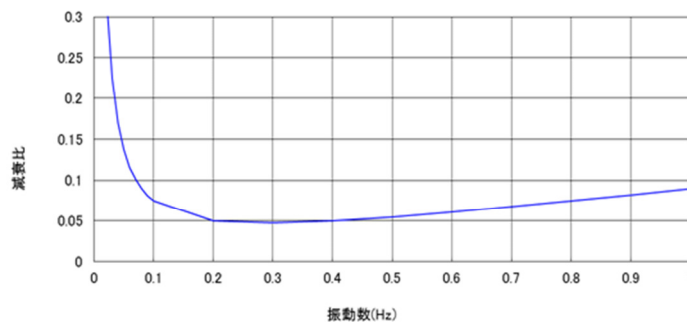
$$\lambda_1 = 1.8412; \lambda_2 = 5.3314; \lambda_3 = 8.5363; \lambda_4 = 11.7060 \quad (6.15)$$

入力地震波として作成した継続時間 50 秒の加速度波形を図-6.9 に示す。



図－6.9 スロッシング応答解析の入力加速度波形

前述したように，本検討では容器躯体には地震加速度を与えないが，流体との連成作用によって構造物に生じる振動は Rayleigh 減衰によって逸散する．減衰パラメータは地震加速度を入力条件とする動的応答解析の場合，構造物の着目するモード次数の固有振動数で任意の減衰比を与えるため，式(6.3)で示される連立方程式からパラメータを決定する．本検討では貯蔵流体のスロッシングが入力条件であるため，スロッシング振動数に着目すればよく，入力波は 1 次モードの成分のみであることから入力振動数 0.301Hz 付近で減衰比を設定した．具体的には 0.2Hz と 0.4Hz で減衰比が 5%となるように仮定し， $\alpha = 0.08378$ ， $\beta = 0.02653$ を設定値とした．設定した Rayleigh 減衰の振動数と減衰比の関係を図－6.10 に示す．



図－6.10 容器躯体の振動数と減衰比の関係

6.3.2 流体-構造連成解析結果

流体-構造物連成系のスロッシング解析結果を以下に示す．本検討では容器躯体は四面体 1 次要素を用いて要素 1 層によるモデル化を行っており，応力とひずみの評価位置は壁体断面の中立軸付近となる．そのため応力ひずみ関係の評価は行わず，円筒タンクの中央鉛直断面の変形と流体圧力から本手法の適用性を考察する．

図－6.11 に床から 3m と 6m の高さにおける中央鉛直断面の左右壁表面の変位時刻歴，

図-6.12 にその圧力時刻歴を示す。

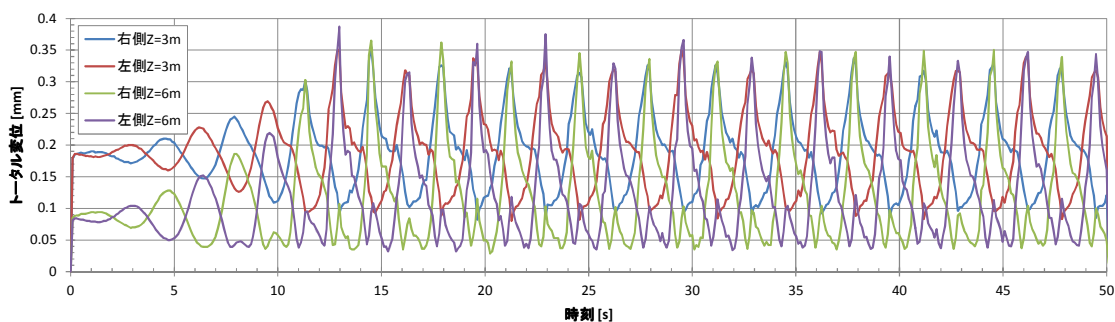


図-6.11 中央鉛直断面の壁面変位時刻歴

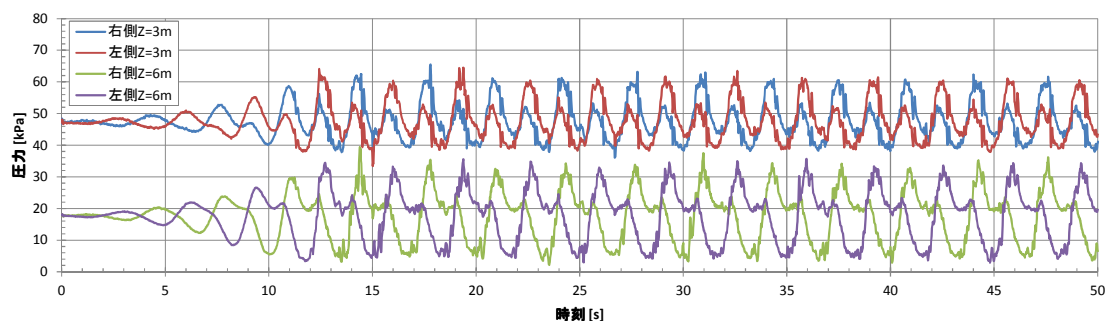
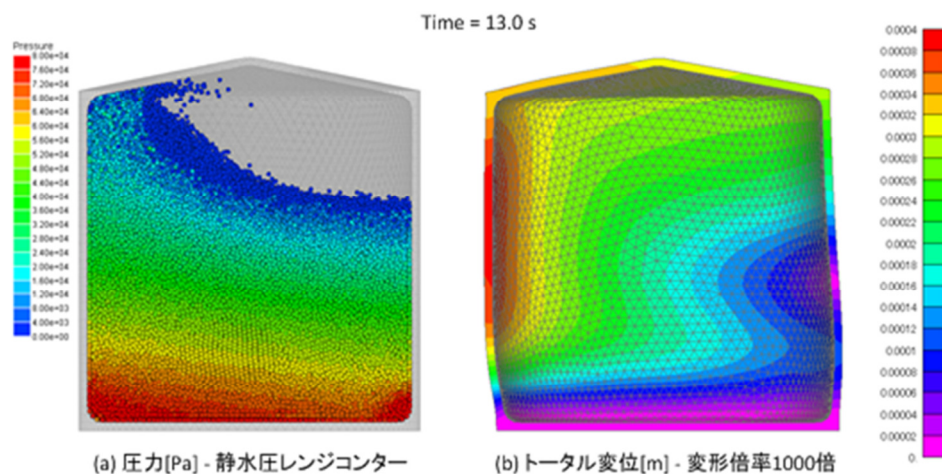


図-6.12 中央鉛直断面の壁面圧力時刻歴

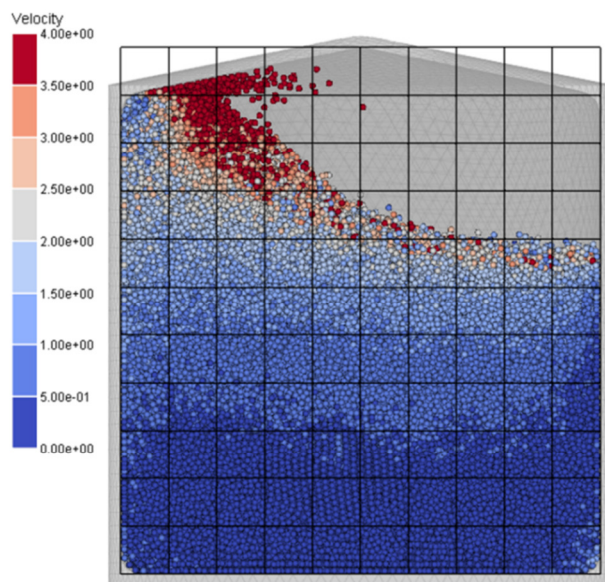
壁面変位および圧力時刻歴のどちらも 1 次のスロッシング固有周期で周期的な応答が得られており、3 波目以降は応答が非線形となっていることが確認できる。圧力変動は高さ 3m（初期水深 4.8m）位置より 6m（初期水深 1.8m）位置の方が大きく、自由表面付近の方が流体速度は大きく、動水圧の影響が大きいためであると考えられる。動水圧の影響が小さい初期の時刻断面では、圧力の大きい 3m 高さの変位量が多いが、非線形的な圧力発生時刻以降では 6m 高さでの変位量が多くなっていることが確認できる。これは、自由表面付近の動水圧が大きいことと底面拘束条件の影響であると考えられる。

図-6.13 に最大変位発生時刻（13.0s）の中央鉛直断面の流体圧力と容器変位の分布を示す。圧力と変位の両方で中央鉛直断面より奥側の領域を描画しているため、円筒タンクの内側壁体表面に生じている変位分布も確認できる。解析より得られた最大変位は 0.39mm 程度であるが、ソリッド要素のせん断ロッキングに起因する計算誤差によって変形量は数分の一に評価されるため、実際には厚さ 25cm のコンクリート壁体に対してミリメートルオーダーの変位を生じると考えられる。



図－6.13 最大変位発生時刻の中央鉛直断面の圧力と変位分布

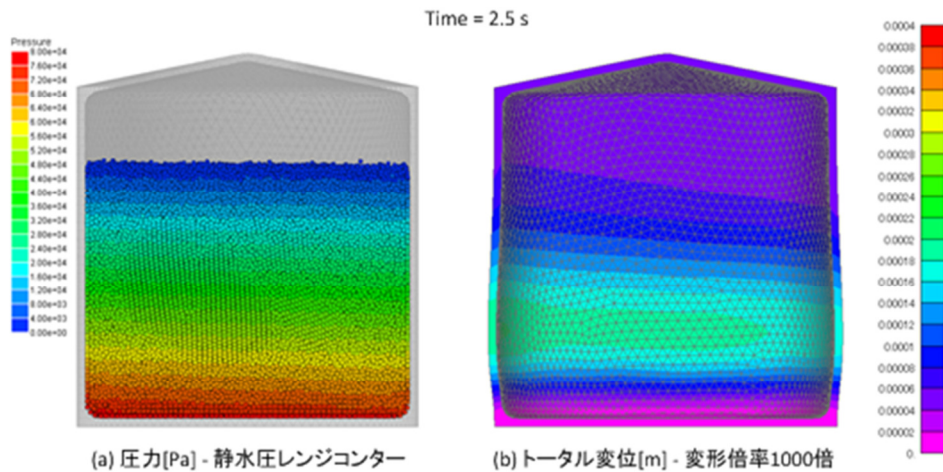
図－6.14 に同一時刻の中央鉛直断面の速度分布を示す．なお，図中には高さが分かるように 1m グリッドのスケールを重ねている．3m 高さ以下の領域では 0.5m/s 以下の速度分布となっており，動水圧の影響が相対的に小さいことが確認できる．一方で，6m より上の領域では流体が 2.0～3.0m/s 程度の速度で壁面に衝突しており，速度の 2 乗から見積もると数 kPa のオーダーで動水圧が生じていると考えられる．



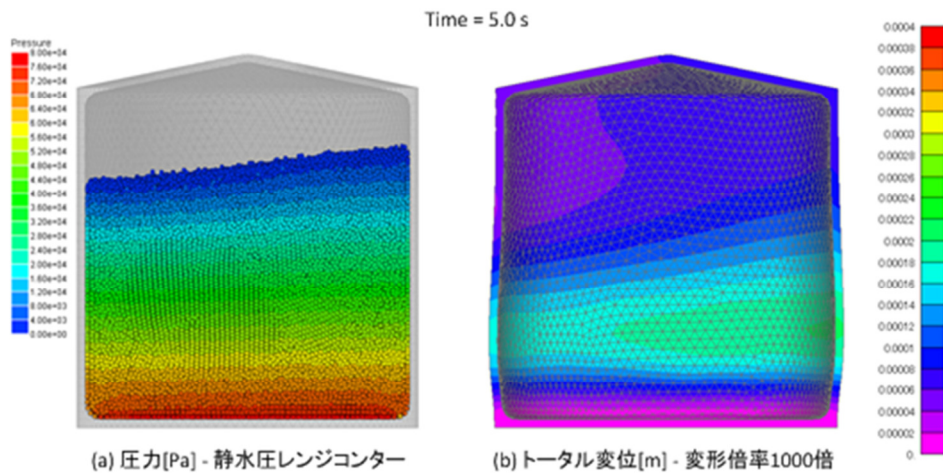
図－6.14 最大変位発生時刻の中央鉛直断面の速度分布 (m/s)

図－6.11 および図－6.12 より 20 秒経過時以降はほぼ周期的な応答が続いており，図－6.15 から図－6.22 に 20 秒経過時までの中央鉛直断面の圧力と変位分布について 2.5 秒間隔の履歴を示す．屋根面への流体衝突を伴う激しい非線形スロッシングの発生が確認でき

る．また，圧力と変位の分布および発生時刻は対応しており，流体に加振条件として入力した \sin 波の加速度を数値積分して得られる変位が \sin 波となることに整合している．なお，本検討では容器構造に加速度を入力していないが，容器構造の固有周期は流体のスロッシング周期に比べて短いため，構造躯体の振動は励起せず，バルジングも発生しないと考えられる．



図－6.15 2.5 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布



図－6.16 5 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

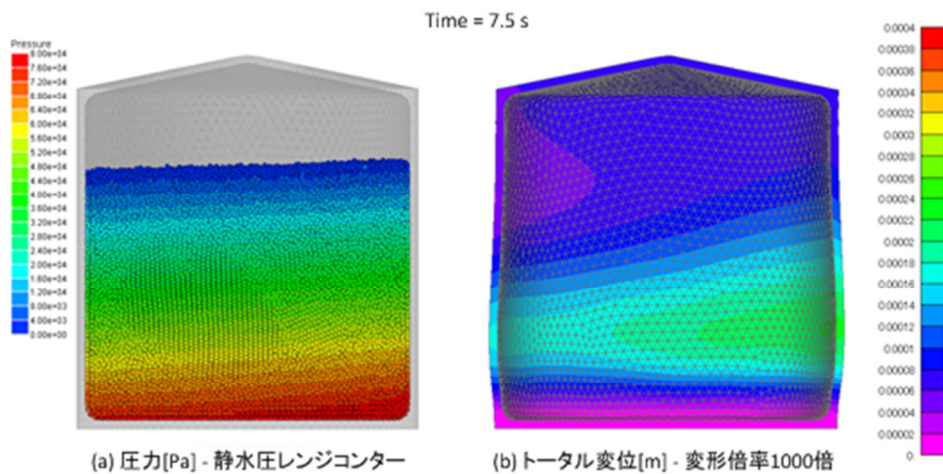


図-6.17 7.5 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

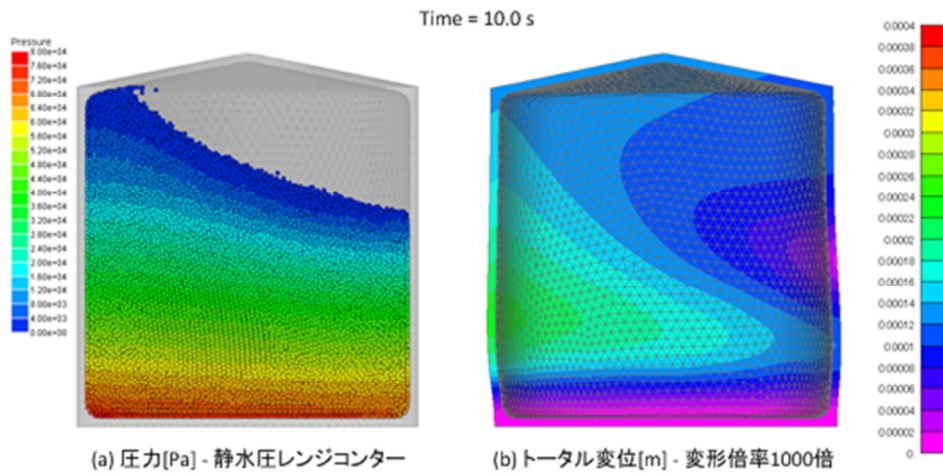


図-6.18 10 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

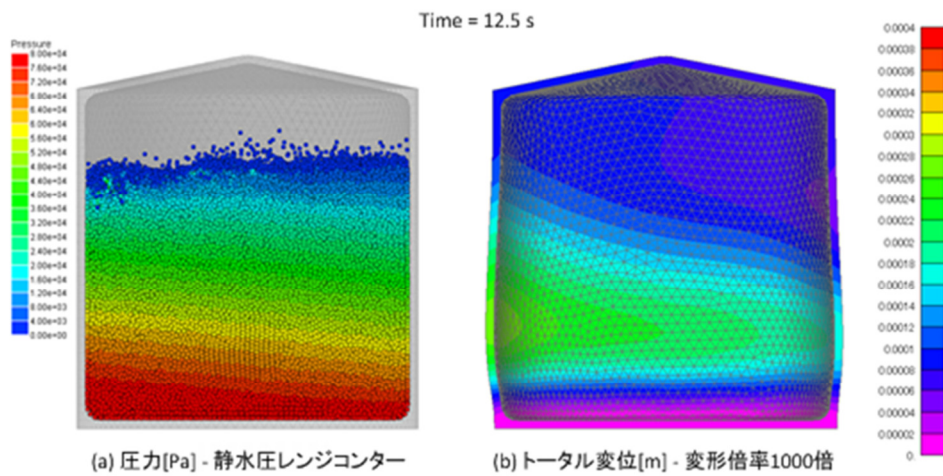


図-6.19 12.5 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

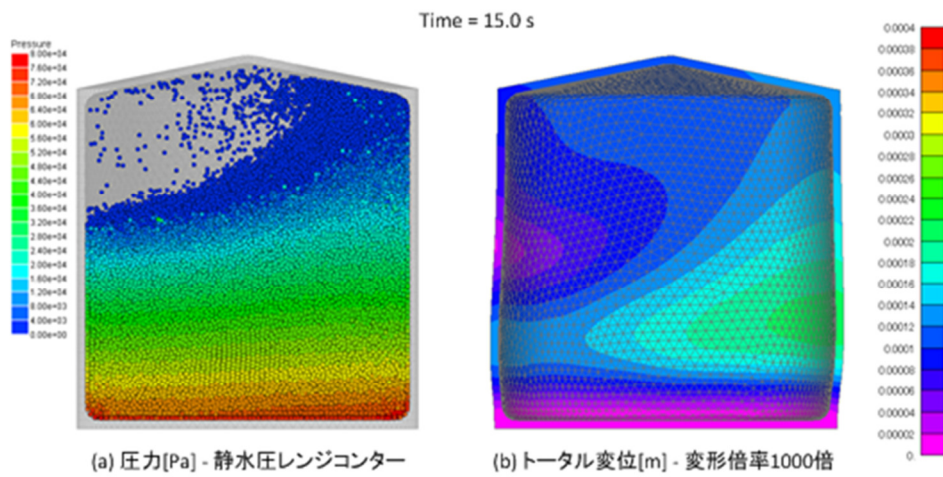


図-6.20 15 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

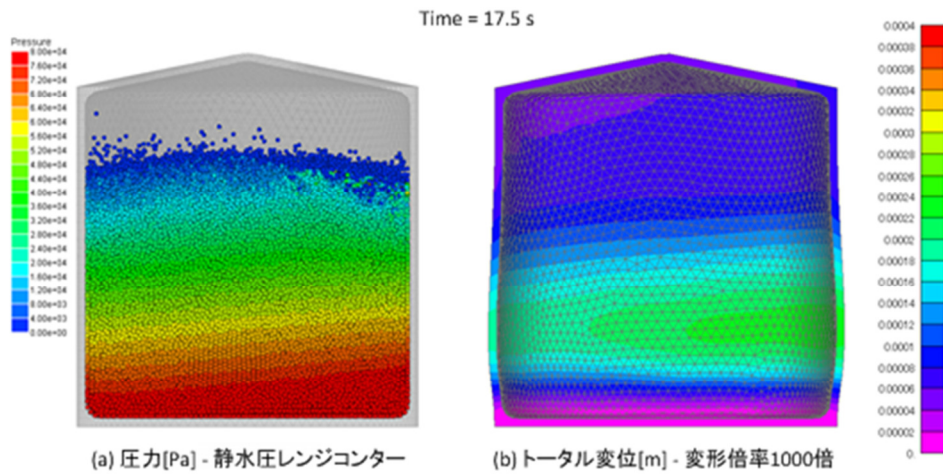


図-6.21 17.5 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

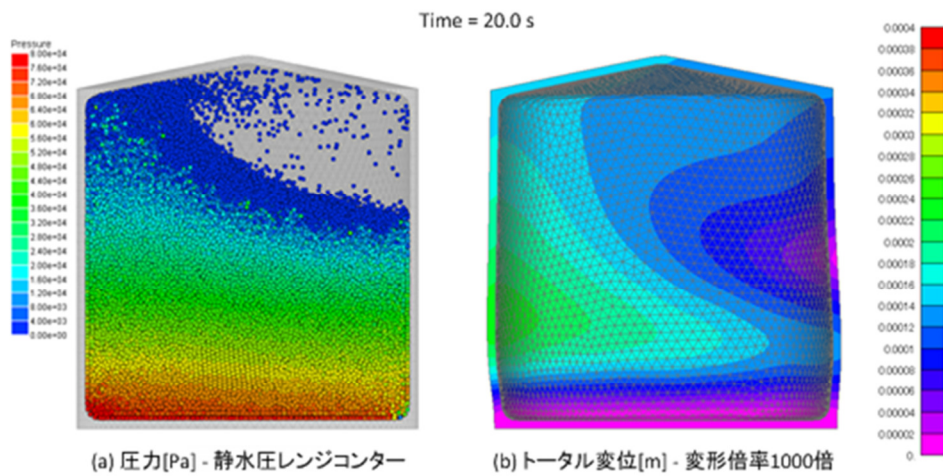


図-6.22 20 秒経過時の中央鉛直断面の圧力と変位分布

6.3.3 まとめ

本節では固定屋根式円筒タンクのスロッシング問題に開発した流体-構造連成解析手法を適用し、スロッシングと容器躯体の動的応答解析を行った。

解析結果から、貯蔵水に入力した \sin 波の周期に一致する圧力応答と、圧力を受けて対応する容器構造の変位時刻歴が得られており、流体-構造連成解析への本開発手法の適用性が確認できる。しかしながら、容器構造の剛性が高いことから絶対的な変形量が小さく、FEM 側から流動体解析コードへ渡される変形解が圧力解に与える寄与は非常に小さいと考えられる。また、ソリッド要素による容器構造モデルは実構造より固く評価されており、最大変位は 0.4mm 以下であり、実構造の変位量の数分の一となっていると考えられる。

入力加速度振幅は 100gal と大きなものではないが、1 次のスロッシング固有周期で入力しているため共振を生じ、非線形性の高い激しいスロッシング応答が得られた。本検討で得られたような飛沫を巻き上げる激しいスロッシング応答は、速度ポテンシャル理論に基づく流体要素などでは評価することができない非線形現象であり、メッシュに依存しない粒子型解法とメッシュ型解法の連成計算の有効性が確認できた。

6.4 6 章のまとめ

本章では、本研究において開発した DEM-SPH 連成解析コードと FEM 解析コードを連成し、流体-構造連成の問題として固定屋根式タンクのスロッシング問題を対象とする解析に適用した。本章で得られた結論をまとめると以下のとおりである。

- 1) 本研究では、Particle-Lagrange 型の流体-構造連成解析手法を開発し、双方向弱連成による計算手法を具体的に示した。
- 2) 連成解析手法の動作検証として円筒タンクの静水計算を行い、非連成の静的解と連成の動的解の最大たわみが一致することを確認した。
- 3) タンクのモデル化に四面体要素を用いることで剛性を高く評価してしまうことを確認したが、この問題は高次要素の使用やシェル要素を使用することで改善可能である。
- 4) 地震条件を模擬した \sin 波を入力することで固定屋根式タンクのスロッシング解析を実施した。液面揺動による動水圧だけでなく、天井部への流体衝突による衝撃圧の発生など非線形性の高い現象に適用できることを示した。
- 5) 流体圧力とタンクの変位応答は入力加速度に対応した周期で振動していることが確認できた。

【参考文献】

- 1) 梶谷 浩, 中田 吉彦 : DEM と FEM の結合解析手法の開発と落石覆工解析への適用について, 土木学会論文集, No.710/I-60, pp.113-128, 2002.7
- 2) 前野 詩朗, 小川 誠, Lechoslaw G. Bierawski : VOF-DEM-FEM 連成モデルによる潜堤の挙動解析, 海岸工学論文集, 第 53 巻, pp.886-890, 2006
- 3) 折井 裕佑, 石垣 頌, 次橋 一樹, 増田 京子, 佐伯 暢人 : 粒状体と弾性板の衝突解析, 日本機械学会論文集 (C 編), 第 78 巻 789 号, pp.238-248, 2012
- 4) Q. Yang, V. Jones, L. McCue : Free-surface flow interactions with deformable structures using an SPH-FEM model, Ocean Engineering, 55, pp.136-147, 2012
- 5) Z. Zhang, H. Qiang, W. Gao : Coupling of smoothed particle hydrodynamics and finite element method for impact dynamics simulation, Engineering Structure, 33, pp.255-264, 2011
- 6) Y. Chuzel-Marmot, R. Ortiz, A. Combescure : Three dimensional SPH-FEM gluing for simulation of fast impacts on concrete slabs, Computers and Structures, 89, pp.2484-2494, 2011
- 7) 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会 : 続・有限要素法による流れのシミュレーション, 丸善出版, 2012
- 8) K. J. Bathe, E. L. Wilson : 有限要素法の数値計算, 科学技術出版, 1979
- 9) O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor : マトリックス有限要素法, 科学技術出版, 1996
- 10) P. S. Pacheco : MPI 並列プログラミング, 培風館, 2001
- 11) C. Farhat, M. Lesoinne : Two efficient staggered algorithms for the serial and parallel solution of three-dimensional nonlinear transient aeroelastic problems, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 182, pp.499-515, 2000
- 12) 坂井 藤一 : 液体貯槽の耐震設計研究に関する現状と課題, 土木学会論文集, 第 362 号 /I-4, pp.1-11, 1985
- 13) 西尾 浩志, 横山 博司, 秋山 充良, 小野 雄司, 江角 真也, 鈴木 基行 : プレストレストコンクリート製タンク側壁のレベル 2 地震動に対する耐震性能照査, 土木学会論文集, No.725/V-58, pp.85-100, 2003
- 14) S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger : 板とシェルの理論 (上), ブレイン図書出版, 1973
- 15) 土木学会応用力学委員会計算力学小委員会 : 計算力学の常識, 丸善, 2008
- 16) 中村 秀明, 森川 慎吾, 麻生 稔彦, 浜田 純夫 : 内容液と地盤との相互作用を考慮したコンクリート製液体貯蔵タンクの地震応答解析, 土木学会論文集, No.655/V-48, pp.47-61, 2000
- 17) 三浦 房紀, 沖中 宏志 : 仮想仕事の原理に基づく粘性境界を用いた三次元構造物-地盤

系の動的解析手法，土木学会論文集，第 404 号/I-11，pp.395-404，1989

18) 日本機械学会 編：事例に学ぶ流体関連振動，技法堂出版，2003

第7章 結論

本研究では、地震などの災害時に生じる諸問題の内、土砂や水の流動によって構造物が受ける被害を推定するために、流動体と構造物の動的応答および相互作用を評価する解析手法の開発を行い、その適用性の検討を行った。各章で得られた結論をまとめると以下の通りである。

第 1 章では、研究の背景と目的を示し、流動体解析における既往の解析手法の概要を行った。流動体を構造格子もしくは非構造格子で離散化する手法の限界について説明し、本研究では粒子型解法を用いることを示した。また、既往の流動体と構造物の連成解析手法について概要を説明し、本研究では粒子型解法とメッシュ型解法の連成解析手法の検討を行うことを示した。

第 2 章では、本研究で用いた解析手法の一つである個別要素法の概要を説明し、本研究で導入した壁境界や粒子集合剛体、多面体ブロックの計算手法について述べた。以下に要点をまとめる。

- 1) 本研究では回転行列を用いた全体座標系と局所座標系の成分変換による 3 次元解析を行っている。他の研究例として成分変換を行わない計算手法があり、具体的な比較は行っていないが、今後大幅に計算効率を改善することが期待できる。
- 2) 三角形パッチによる壁境界の計算手法を個別要素法に導入し、壁面要素と粒子間の接触判定と作用力計算の方法を説明した。本手法は滑らかな境界面や複雑な境界面のモデル化に適していることを具体的に示した。
- 3) 粒子集合による剛体モデルの導入方法について示した。剛体の質量と慣性テンソルは初期時刻において構成粒子の質量と位置ベクトルから計算し、慣性テンソルはクォータニオンによる姿勢の更新と回転行列の計算により、初期時刻の値を回転することによって計算する。剛体の運動は構成粒子に働く作用力を合計し、剛体重心に作用させることで個別の粒子と同じ方法によって計算できる。
- 4) 粒子集合による剛体モデルにおいて生じると考えられる表面の凹凸を解消するため、多面体ブロックによる剛体計算手法を導入し、その計算方法を示した。質量と慣性テンソルの計算方法以外の基本的な計算は粒子集合による剛体と同じである。なお、ここで示した多面体ブロック間の接触判定を用いることで、ブロック間接触問題への応用が今後可能である。

第 3 章では、個別要素法をサンドクッション材の衝撃応答解析に適用し、その有効性の検

討を行った．適用事例は 2 つあり，実規模サンドクッションへの重錘斜め入射実験を模擬した解析，および実験室にて実施した重錘落下実験を対象とした解析例を示した．以下に要点をまとめる．

- 1) 実規模実験を対象とした解析では重錘を大径球要素，敷砂を最密配列の粒子群でモデル化し，実験結果よりばね定数をパラメトリックに決定して解析を行った．重錘衝撃力と伝達衝撃力について，ピーク値についてはある程度の再現が可能である．
- 2) 実験室で実施した重錘落下実験を対象にした解析では，重錘を粒子集合剛体で詳細にモデル化し，粒径分布を考慮したランダムパッキングにより作成することで，概ね衝撃力波形を再現することができた．
- 3) 錐底重錘の解析結果では衝撃力波形を小さく見積もる傾向があり，粒子集合剛体の表面で滑りが生じるためでないかと考え，多面体ブロックによる重錘モデルの解析も実施したが有意な違いは確認できなかった．
- 4) 衝撃力波形が小さくなる問題は球形要素間の接触が点接触となるため，実際の形状より摩擦耐力が小さく，滑りの発生によって伝達される作用力が失われていると考えられる．
- 5) 球形要素の摩擦耐力が小さく評価される問題については，既往の研究で様々な対策が行われており，粒の形状再現性を向上する手法と回転抵抗を導入する手法に大別できる．実規模問題に適用する観点からは回転抵抗の導入が有望であり，サンドクッションの動的応答解析の精度向上に役立つ可能性がある．

第 4 章では，本研究で用いた解析手法の一つである SPH 法の概要を説明し，本研究において用いた非圧縮正流体の解析手法や境界条件および，変形を考慮することが可能な三角形パッチによる壁境界の計算手法について述べた．以下に本章における要点をまとめる．

- 1) 本研究で採用した SPH 法の基本的な理論を本章の前半で示した．本論文にて解析対象とする非圧縮正流体の解析については，連続式を満たし精度良く圧力を計算するために半陰解法によるアルゴリズムを採用しており，圧力のポアソン方程式の計算方法についても詳しく示した．
- 2) 粒子法で用いられる一般的な境界条件の設定について説明した．また，壁の粘着条件を満たすための方法について示し，特に粘性項の陰解法ソルバーの導入が問題によって有効であることを示した．
- 3) 三角形パッチによる壁境界の計算手法を SPH 法に導入し，壁面要素と粒子間の相互作用の計算方法を説明した．本手法は滑らかな境界面や複雑な境界面のモデル化に適しており，既往の研究では考慮することの出来なかった壁表面の変形を考慮することができる．

第5章では、SPH法による非圧縮性流体の動的数値解析を行い、実験データや理論解と比較することによって解析コードの検証とSPH法の適用性の検討を行った。適用対象はスロッシング問題や水柱崩壊問題のように動水圧の作用が重要なものであり、それぞれ実現象をSPH法による数値解析で再現できており、構造物の動的応答解析へのSPH法の適用性はある程度確認できた。また、メッシュ型解法との連成に役立てるため導入した三角形パッチによる壁境界モデルの適用性について検討した。本章で得られた結論をまとめると以下の通りである。

- 1) 地震時に想定される流動体の動的応答の問題として、代表的であるスロッシング問題と流体衝突による波力を取り上げて具体的な問題を示した。
- 2) 矩形タンク内の流体に地震波を入力した際のスロッシング応答をSPH法で解析し、実験との比較の結果として高い計算精度を有することが確認できた。タンクと貯蔵流体間の動的相互作用の評価は重要であり、第6章ではこのような問題に対する適用性を検討する。
- 3) 衝撃的作用の生じる動水圧の問題として水柱崩壊実験との比較解析を行い、ある程度の計算精度を確認した。混合が生じるような複雑な流れが生じる場合などの精度に今後の検討が必要であるが、このような高速度の流動体運動についてもSPH法は有効である。
- 4) 三角形パッチによる壁境界の計算手法の検討を行い、基本的な問題において十分な計算精度があることを確認した。既往の研究では考慮することができなかった、壁境界が大変形する際の流体挙動を計算し、メッシュ型解法との連成問題などに対する適用性を示した。

第6章では、本研究において開発したDEM-SPH連成解析コードとFEM解析コードを連成し、流体-構造連成の問題として固定屋根式タンクのスロッシング問題を対象とする解析に適用した。本章で得られた結論をまとめると以下のとおりである。

- 1) 本研究では、Particle-Lagrange型の流体-構造連成解析手法を開発し、双方向弱連成による計算手法を具体的に示した。
- 2) 連成解析手法の動作検証として円筒タンクの静水計算を行い、非連成の静解と連成の動解の最大撓みが一致することを確認した。
- 3) タンクのモデル化に四面体要素を用いることで剛性を高く評価してしまうことを確認したが、この問題は高次要素の使用やシェル要素を使用することで改善可能である。
- 4) 地震条件を模擬したsin波を入力することで固定屋根式タンクのスロッシング解析を実施した。液面揺動による動水圧だけでなく、天井部への流体衝突による衝撃圧の発

生など非線形性の高い現象に適用できることを示した.

- 5) 流体の圧力とタンクの壁面変位は入力加速度の周期に対応して振動していることが確認できた.

以上が本論文における各章で得られた結論をまとめたものである. 本研究で流動体解析手法として採用した個別要素法と SPH 法は, 格子を用いた解析手法と比べると一般的な手法ではないが, 流動体の一部が分離独立するような極めて非線形性の高い現象の再現に優れていることを示した. また, **Lagrange** 記述の解析手法であることから, 構造体との界面を正確に取り扱うことが可能であり, **FEM** などのメッシュ型解法との連成解析への適用性について検討を行った. 残念ながら **FEM** 解析を大変形問題へ適用することが出来なかったため, 流体-構造間の相互作用解析への適用性は限定的にしか示せなかったが, 開発した壁面境界の計算手法自体は大変形問題へ適用可能であることを示せた. 今後はより相互作用の大きい問題や, 流体-構造-地盤系の大規模連成解析への応用を行っていく次第である. 本研究で得られた成果が流動体を介した構造物の被害予測や, 構造物の合理的設計の一助となれば幸甚である.

付 録

A.1 効率の良い大域探索手法

本節では 2 章および 4 章で述べた DEM および SPH 法の計算手法に用いられる大域探索手法の概要について補足する。大域探索とは解析領域内に存在する要素間の接触判定を高速・効率化するための処理であり¹⁾、要素数 N の接触判定（局所探索）を N^2 オーダーにしないために行う。接触判定は計算負荷の大きい処理であるため、この処理回数を抑制するために何らかの大域探索手法が採用されていることが一般的である。実装が簡単であり処理速度も高速であることから、大域探索の代表的な手法としてバケット²⁾を用いた手法が広く利用されており以下にその概要を述べる。

A.1.1 古典的なバケットソート法

バケットソート法とは要素 ID などの情報を格納するための格子状の配列（バケット）を用意しておき、要素の位置情報などをキーとして値を格納するアルゴリズムである³⁾。この手法はソートアルゴリズムの 1 つであるバケットソートと基本原理が同じものであり、各格子内に格納される要素 ID はその値でソートされた状態で格納される。要素座標をキーとして全要素の ID を登録しておくことで、着目要素の近傍要素 ID を参照することが可能となり、接触判定に要する計算量が要素数 N のオーダーとなる最も高速かつ単純なアルゴリズムである。バケット配列は 1 次元配列でも多次元配列でもよく、3 次元の解析空間を $10 \times 10 \times 10$ セルの格子で区切った場合の 1 次元配列を用いた計算例を以下に示す。

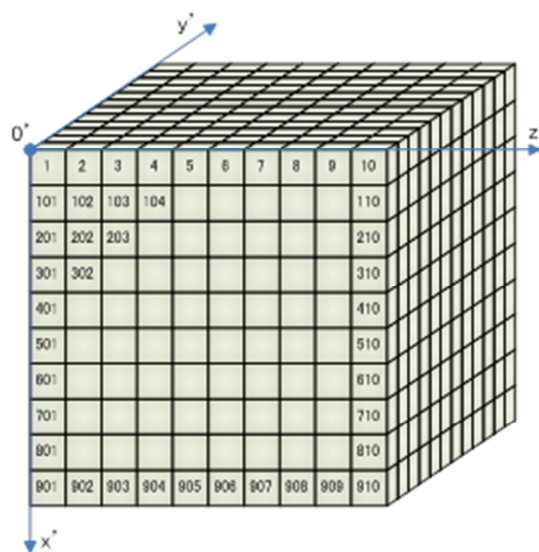


図-A.1 3次元空間のバケット分割例（ $10 \times 10 \times 10$ ）

バケット配列のインデックス計算に用いる座標系 $x'y'z'$ は解析空間の座標系 xyz と一致している必要はなく、要素座標から計算可能であればどのような座標系でも良いが、着目セルに隣接する近傍セルを参照するために一般に解析座標系と同じ座標系を採用する。また、一般にバケット配列のインデックスとして正值のみを扱うため、最小座標値が 0 となるように解析座標の最小値 $\mathbf{x}_{min} = (x_{min}, y_{min}, z_{min})$ でオフセットする。

各軸方向の格子分割幅を c_x, c_y, c_z とし、要素 i の位置 $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ をキーとするバケット配列の格納位置インデックス k は、格子分割幅で正規化した各軸方向のインデックス k_x, k_y, k_z を用いて次式から計算できる。

$$k_x = \text{int}\left(\frac{x_i - x_{min}}{c_x}\right) + 1 \quad (\text{A.1})$$

$$k_y = \text{int}\left(\frac{y_i - y_{min}}{c_y}\right) + 1 \quad (\text{A.2})$$

$$k_z = \text{int}\left(\frac{z_i - z_{min}}{c_z}\right) + 1 \quad (\text{A.3})$$

$$k = k_x n_y n_z + k_y n_z + k_z + 1 \quad (\text{A.4})$$

ここで、 n_y と n_z はそれぞれ y' 方向と z' 方向の格子分割数である。なお、バケット配列が 3 次元配列であれば、 (k_x, k_y, k_z) を参照できるので k の値を計算する必要はない。FORTRAN のように多次元配列への参照が高速なプログラミング言語を用いる場合、一般にバケット配列は 3 次元配列として作成すればよい。また、任意の半径内の近接格子の計算を簡便にするため、 $c = c_x = c_y = c_z$ とし、 c の値は想定される最小半径や最大半径から設定する。

c の値を最小半径から設定する場合のメリットは、格子内に格納される要素数を 1 要素に限定できることであり、格子内に格納される要素 ID が複数個ある場合に必要となる内周ループ走査を省くことができる。しかし、この内周ループを省略できるメリットは計算速度の観点からはデメリットとなる可能性がある。バケットソートはソートアルゴリズムの 1 つであり、1 つの格子内に複数の要素が格納される場合、バケット格納時の要素ループ順に ID 値が格納されるため、格納されるソート済みの ID 値間の差が小さく保たれる場合にキャッシュの利用によって計算効率が改善する。また、接触判定に利用する際のこの他のデメリットとして、隣接格子より遠方の近傍格子に格納される要素 ID も参照する必要がある、近傍格子範囲を計算しなければならない。なお、最大半径から設定する場合については、最小半径から設定する場合の逆のメリットとデメリットがある。

古典的なバケットソート法に共通のデメリットとして、メモリの利用効率が悪い点が挙げられる。最小半径から格子幅を設定し、解析領域全体を包含するバケット格子を割り付ける場合や、最大半径から格子幅を設定し、1 格子に格納可能な最大要素数分のメモリ領域を割り付ける場合、メモリの使用効率が非常に悪くなる。このような問題点を改善した手法を次項で紹介する。

A. 1. 2 分布数え上げ処理による改良バケットソート法

本研究で開発した DEM-SPH 連成解析コードに用いた大域探索手法は、古典的なバケットソートアルゴリズムを改良したものであり、分布数え上げソートを応用した手法である。バケットソートとは、もともと外部ソートのアルゴリズムの 1 つであり、要素数 N に対して N^1 のオーダーで並び替えを行うために、要素を格納する長さ N の配列以外に外部記憶配列（バケット配列）を利用する手法である。これに対し、外部記憶を用いないソートアルゴリズムは内部ソートに分類され、処理時間のオーダーは最も高速なものでも $N \log(N)$ となり、バケットソートを用いた方が高速にソート可能である。バケットソートの問題点は前項で述べたようにメモリの利用効率にあり、個別のバケットに格納される要素数が分からないために、非常に非効率なメモリ割り付けを行う必要がある。

バケットソートの改良アルゴリズムの 1 つとして分布数え上げソートが知られており、この手法は一度全配列要素 N に渡ってループをまわし、各バケットに格納される要素数を数え上げてから値の格納処理を行う。この改良手法はバケット配列の利用方法が古典的な手法と異なる。古典的なバケットソート法では、要素 ID 値を直接バケットに格納していたが、分布数え上げソートではソート対象である配列と同じ、長さ N の配列にソート済みの ID 値を格納する。外部記憶であるバケットに記録する情報は格納要素の ID ではなく、図-A. 2 に示すように、着目バケット内に格納される要素 ID リストが長さ N の配列内で連続しており、その開始インデックスをバケットに記録する。なお、1 次元配列内の要素の入れ替え問題の場合、開始インデックスから 1 を減じた値が直前のバケットの終了インデックスであるため、開始インデックスを記録するバケットのみで処理が可能である。しかし、DEM や SPH の 3 次元解析に用いる場合、一般に多次元構造の配列を用いるため同様の処理を行うことは難しく、終了インデックスもしくは格子毎の格納要素数を記録のバケット配列も別途用意する必要がある。つまり、改良型のバケットソート法を用いる場合、必要となるメモリ消費量はバケット格子数を M として $N + 2M$ となる。 M は一般に大きいため、メモリ容量が問題となる場合にはバケット配列を 1 次元配列にするとよい。

この手法の具体的な処理は以下の 3 工程にまとめられるが、2 番目の工程が並列化に向いておらず、並列化効率はあまり期待できない手法である。

1. バケット毎の格納個数のカウント
2. 格納個数から開始インデックスと終了インデックスを先頭から順に登録する
3. 格納対象のバケットへの登録処理

なお、バケットの格子幅は一般に最大半径を基準に設定すれば良いが、DEM の多粒径を考慮した解析では最大の粒径差によっては極端に格子内要素数が増加する可能性があり、計算効率の観点からバランスを考慮して設定する必要がある。その場合は、最小半径を基

準に設定する場合と同様に近傍格子範囲を算出する処理が必要となる。

本節で説明した分布数え上げソートを利用した手法は、メモリ効率と計算効率の両方に優れているが、並列化効率が悪い点が最大の問題と考えられる。また、予め格納する最大個数が分かっている問題でなければ適用できない。並列処理が難しい理由は、格子毎の開始インデックスを算出する際に、配列の先頭から順に格納要素数を足し込む処理が必要であり、一般に完全な並列化は難しい。工夫を凝らすこと並列化を行うことは可能であるが、並列化を実施しない場合と比較して実行性能で劣ることを確認している。この問題点を解決したバケット手法の1例を次項で紹介する。

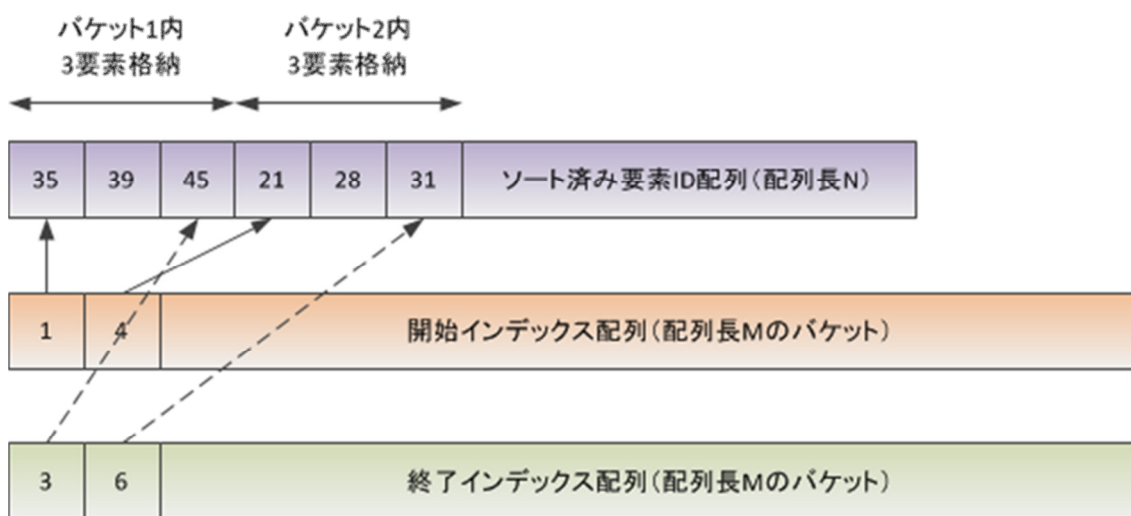


図-A.2 分布数え上げバケットソート法の配列構造

A.1.3 リンクリスト法

バケット格子毎の格納要素数を事前に確認する必要がなく、またある程度の並列化効率が見込めるバケット手法としてリンクリスト法がある⁴⁾。この手法では配列長 N の要素配列をリンクリストとして利用する。リンクリストに記録される情報は同一格子内に格納される次要素のIDであり、またそのIDは次に参照する配列のインデックスと一致する。

構造としては図-A.3に示すようなものであり、消費メモリ量は $N + M$ となる。具体的な作成方法としては、要素数 N のループをまわし、各要素を格納する格子位置を算出し、開始インデックス値が初期値であれば自要素のIDを記録する。次に同じ格子に格納される要素が現れた場合、すでに開始インデックスが記録されているため、これを参照してリンクリスト配列の該当する番地に自要素のIDを記録する。更に次の格納要素が現れた場合は、すでにリンクリストの当該番地が初期値でなくなっているため、リストを辿り初期値に至ったところで自要素のIDを記録すればよい。

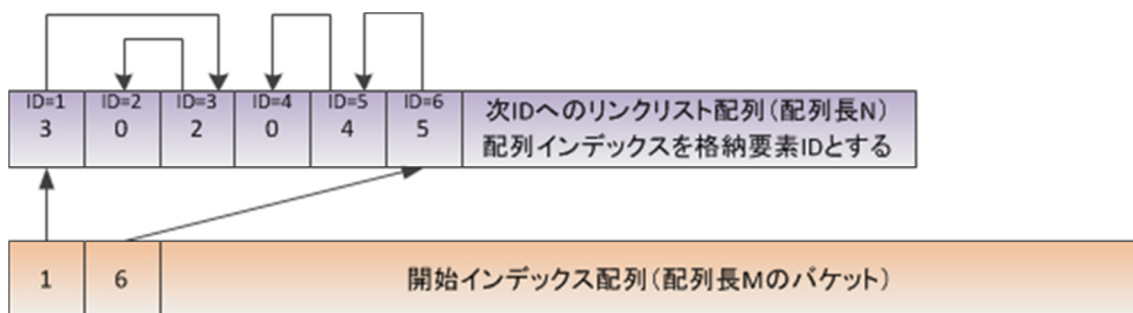


図-A.3 リンクリスト法の配列構造

上記作成方法の欠点は、同一格子内に格納される新しい要素が登場する度に、開始インデックスから順にリンクリストを参照していく必要がある点にある。これは処理時間が長くなるだけでなく、並列計算実行時に別スレッドの処理によって、ゴールとなるリンクリスト上の初期値が書き換えられる問題がある。並列計算時に生じる書き換え処理のスレッド間競合の問題は排他制御 (atomic 処理など) を行うことで回避可能であるが、リンクリストの末尾を書き換える処理では経路を辿る段数が多い分効率が悪くなる。そのため、リンクリストの更新処理は末尾ではなく、先頭を書き換える方法が提案されている。すなわち、既に開始インデックスが記録されていた場合、記録されていたインデックス値をリンクリスト配列の自要素の番地に複写し、元の開始インデックス配列値として自要素のインデックスを記録すればよい。この処理によって常に参照する段数は 1 段となり、並列計算実行時に 1 段のみ排他制御をかければよい。

リンクリスト法はソートを目的とした手法ではないが、並列計算を行わない場合には要素番号順にリンクリストが作成される。しかし、並列処理を行った場合にはこの順番は保たれず、また間接参照となることには留意が必要である。そのため、バケットソート法のメリットの一つであった、格納要素 ID がソートされることによるキャッシュ利用による計算効率の改善は期待できず、バケット配列を用いた大域探索処理の実行効率自体はバケットソート法に劣ると考えられる。本手法はバケット格子数が膨大となる問題に対して、省メモリ性と並列化効率の観点から改良型のバケットソート法に比べて優れているが、どの程度の問題規模で優劣が逆転するかについては個別に確認する必要がある。

A.2 粒子モデルの生成手法

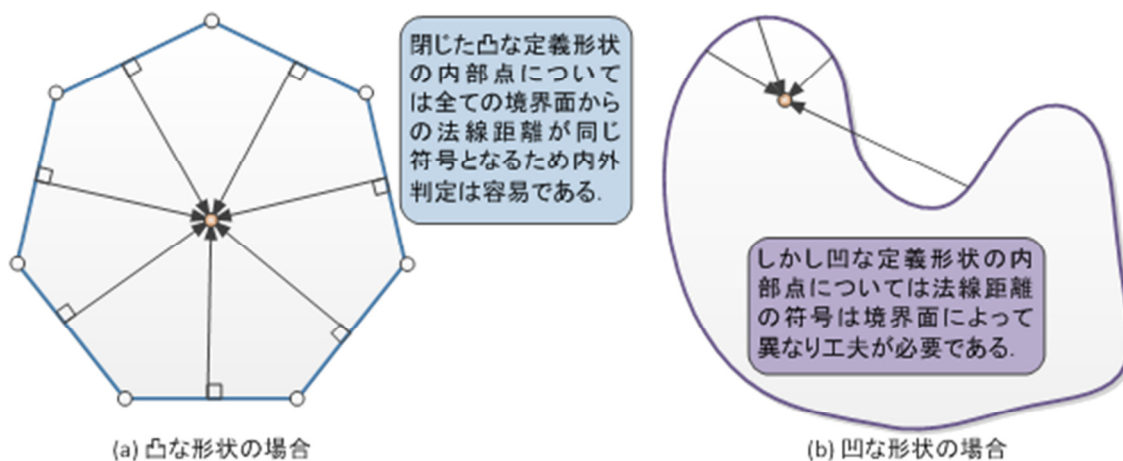
3 章では重錘モデルを格子配列による粒子集合剛体でモデル化を行い、またサンドクッションは粒子径分布を考慮したランダム配置の粒子モデルを用いた。このような粒子データの生成方法を本節で説明する。粒子集合データは三角形パッチで定義される任意形状の閉じた境界面に対して内外判定を行うことで生成することができる。凸面のみから成る形状についての内外判定は簡単であり、着目点とすべての三角形境界面との距離を計算することによって、着目点が定義形状の内側にあることを確認できる。一方で、凹面を含む形状

や分離した閉領域を持つ定義境界形状については距離計算のみでは着目点の内外を判定することはできない（図－A.4 参照）。

凹面を含む定義形状に対する内外判定方法としては以下のような手法があり、それぞれ評価点数と境界面数の積のオーダーの計算が必要である。

1. 着目位置に対して定義形状の構成面が成す立体角の合計を計算する手法
2. 着目位置から任意の向きに伸ばした半直線と境界の交差回数を利用する手法
3. 定義形状を凸な形状の集合に分解して個別の境界面に対する距離計算を行う手法

最初の手法は閉じた定義形状内では各面の成す立体角の合計が 4π となり、また定義形状面に接する際には合計が 2π となることを利用するものである。この手法は単位球面に対する投影面積の計算を基本とするため他の方法と比べて堅牢であり、三角形パッチの歪さの影響を殆ど受けることはない。しかし、各着目位置に対して必ず全ての境界面が成す立体角を計算する必要があり、またその計算に必要な演算量が多いため計算量は膨大なものとなる。したがって本研究においてこの手法は採用しなかった。計算コストの観点からは、境界面と半直線の交差回数を確認する手法および凹領域を複数の凸領域に分割する方法が有効であり、それぞれを本節において説明する。



図－A.4 閉じた境界面と符号付き距離の関係

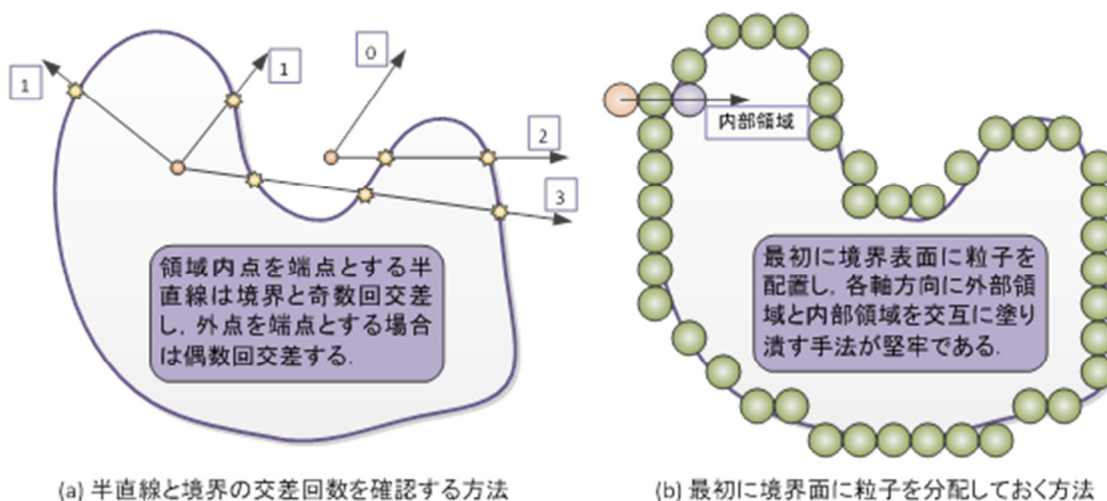
A.2.1 境界面との交差回数を利用する手法

凹な定義形状に適用可能な代表的な内外判定手法として、前述の着目点から伸ばす半直線と境界面の交差回数を計算する方法がある。着目点が定義形状の内部にある場合の交差回数は奇数回であり、外部にある場合の交差回数は偶数回となることから内外判定は容易である。交差回数の計算は1つの着目点につき1線分のみ行えばよく、交差する可能性の

ある境界面のみを対象とすることで計算量を抑制することができる。しかし、交差する可能性のある境界面のみを抽出することは難しい。

半直線の向きを固定することによって境界面側からみて判定対象となる領域を抽出することは可能であるが、半直線が境界面の辺上の点と交差する場合に判定が上手くいかないことがある。特に、交差判定の計算コストを抑制するために半直線の向きを座標軸と一致させた場合に問題を生じやすい。従って、境界の構成面の境目と交差する場合には半直線の向きを修正するなどの対策が必要である。

格子状に配置した粒子点の内外判定を目的とする場合、より堅牢な方法として先に境界面位置にのみ粒子を配置し、各軸方向に対して境界粒子を跨ぐ度に内部領域と外部領域を交互に切り替えて領域を設定する手法が有効である。この手法では、境界粒子以外の領域の内外判定処理に費やす計算コストが小さいことから、最初に行う境界粒子の配置処理が重要となる。配置方法としては、想定する粒子分解能より少し高解像度で個別の三角形面上に粒子を配置し、2章で述べた壁面の内外判定処理によって全ての境界面上に高分解能の粒子配置を完了する。そして、想定する粒子分解能の格子内に配置した粒子が含まれる場合に実際の境界粒子を設定する。この境界粒子の配置処理に必要な計算時間は境界面形状の複雑さと要求される分解能によるが、計算コストは面積でしか増加しないと考えられ、内外判定手法の中でも効率の良い手法である。



図—A.5 境界面との交差回数を利用する手法

A.2.2 複数の四面体に分割して個別に距離計算を行う手法

3章のサンドクッションの衝撃応答解析で採用した粒子集合剛体による重錘モデルの作成手法は、定義形状を四面体に分割して各四面体と着目点間の距離計算を行う手法である。3章でモデル化した重錘形状は凸面のみから成る形状であり、全ての構成面との距離が同一符号となることを確認するのみで作成できるものであったが、凹な形状を含む対象への適

用性を考慮して採用を行った。

3章の解析で用いた内外判定手法は既に述べているように3次元デローニー分割⁵⁾を利用したものであり、内外判定の実行前に定義形状をそれぞれの体積が重複しない四面体群に分割することで、各四面体を構成する4つの面と着目点との距離計算から内外判定が可能となる。しかしながら、3次元デローニー分割はアルゴリズムが複雑であるため、内外判定手法としては計算効率が悪く、また四面体分割が上手くいかない場合に堅牢性の点で問題となる。そこで、各四面体の体積に符号を考慮することで四面体体積の重複を許容し、3次元デローニー分割を必要としない計算手法に改良した。

2章で述べたように閉じた定義形状の体積は1つの頂点を共有する四面体体積の総和から計算できる。凸な定義形状については各四面体の共有頂点を形状内部に設けることで体積の重複はなくなり、全ての四面体体積の符号は一致する。一方で凹な境界面を含む形状については、共有頂点が形状内部に設けられていたとしても四面体が一部で重複し、体積に正負の符号を考慮する必要がある。図-A.6は共有する頂点が形状の内側にある場合と外側にある場合を2次元平面上で示したものであるが、符号を考慮することで総和値として得られる体積(面積)に違いはない。このことを利用して、内外判定の対象となる各点に回数を記録するカウンターを設け、正の体積を持つ四面体に含まれた際にはインクリメント、負の体積を持つ四面体に含まれた場合はデクリメントする処理を設ける。全ての四面体が内包する判定点のカウント処理を終了した段階で、定義形状の内部の点はカウンター値が1となり、外部の点は0となるはず。個別の四面体境界と距離計算を行う対象点は、予めバケットに登録しておくことで対象領域の抽出が可能であり、計算量の抑制が期待できる。すべての境界面間で共有する頂点は計算領域内のどこに設けても良く、原点に設けると計算が簡単であるが、計算領域の中心付近で切りの悪い座標に設ける方が内外判定処理の堅牢性の観点から有利である。

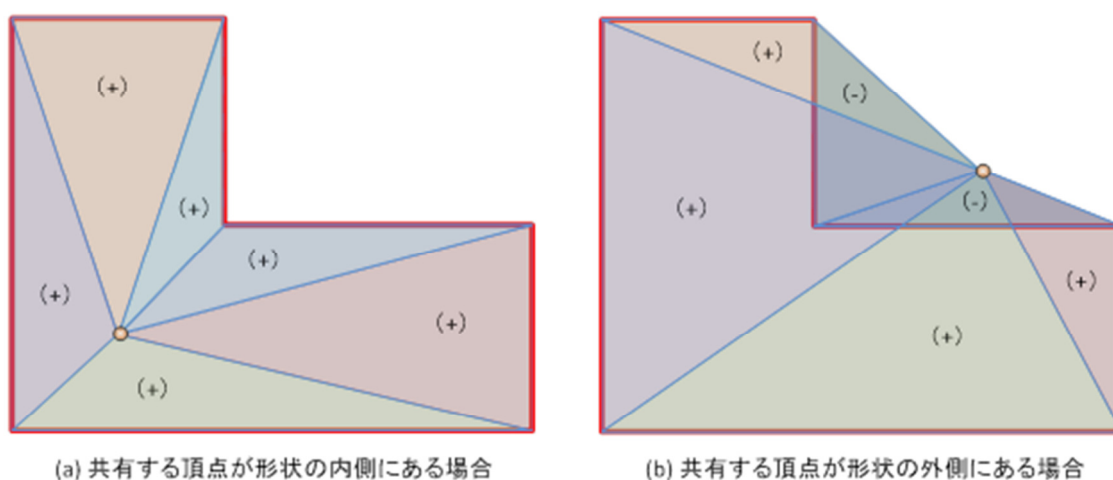


図-A.6 共有する頂点位置と総和体積(面積)の関係

A. 2.3 ランダム配置の粒子配置作成法

ランダム配置の初期粒子配置を決定するパッキング手法については、代表的なものが伯野ら^{6),7)}によってまとめられている．表－A. 1 に代表的なパッキング手法をまとめた．本研究では重力式の落下法を基本的に用いており，初期配置の作成時間を短縮するために棄却法や成長法を併用した．本項でこれらの手法を用いたパッキング方法について簡単に説明する．

表－A. 1 代表的なパッキング手法

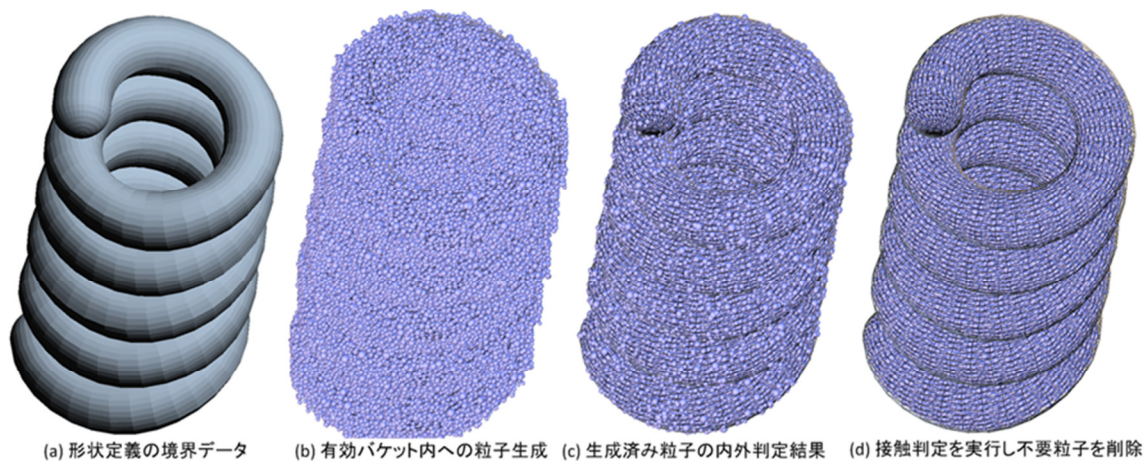
棄却法	乱数より決定した位置に粒子を生成し，他の粒子や定義境界との接触が生じていた場合には棄却することで粒子配置を作成する手法．
局所移動法	格子点に粒子を生成し，一定範囲内で粒子を動かすことで初期配置を作成する手法．
落下法	生成した粒子に重力をかけること間隙を最小化していく手法．重力場における通常の解析を実行する．
成長法	生成した粒子の粒径を他の粒子と接触するまで大きくしていくことで間隙を埋める手法．

パッキング前に生じている粒子間の隙間を最も効果的に埋めることができる手法は落下法であり，ランダム配置の初期粒子配置作成においてよく用いられている．しかし，重力場における粒子運動を実際の解析と同様に行う必要があり，データの作成時間が長くなる点が問題として挙げられる．従って，落下法による計算を実行する前に，他の手法によってある程度の間隙を埋めておくことが効果的である．ここでは，本研究において用いた棄却法による任意形状のパッキングモデル作成法について述べる．

棄却法は乱数を用いて生成する粒子座標を決定し，他の粒子や形状を定義する境界面との重なりが生じた際には棄却を行う手法である．接触判定が必要となるため計算負荷を抑制する工夫が必要なアルゴリズムである．また，乱数による粒子配置は生成済みの粒子数が増えるほど困難となるため，多粒径のランダム・パッキング計算では大径粒子から順に配置する．

接触判定の省力化方法としては，粒子間については前節で説明したバケット法を用いることで対応可能である．ただし，棄却法では徐々に粒子数が増加するため，分布数え上げのバケットソート法は採用できず，リンクリスト法を使用する必要がある．また，形状を定義する境界との接触判定は負荷が大きいため，最後にまとめて 1 回のみ実行することで省力化する．そのため，実際の境界面より少し大きい領域に粒子群を生成する必要があり，棄却法で無駄な粒子を生成を抑制するために以下の手順を取る．

1. 作成するデータの粒度分布に応じて適切な格子幅のバケット配列を作成する。
2. 定義境界に対してバケット中心座標の内外判定を実行することで有効バケットを抽出。
3. 有効バケット内にのみ棄却法で大径粒子から順に追加出来なくなるまで充填する。
4. 生成済みの粒子座標の内外判定を実行して境界の外側の粒子を削除する。
5. 任意のオフセットを考慮し定義境界と粒子の接触判定を実行して粒子配置を完了する。



図－A.7 棄却法による任意形状のランダム・パッキング例

棄却法によって作成されるパッキングデータは間隙が大きいため、成長法を併用することで間隙を縮小することを伯野らは提案している。接触判定の段階で間隙の大きさを取得しておけば成長法による粒子径修正処理に利用が可能である。最後に落下法によって間隙を解消し、必要に応じて追加のパッキング処理を実行し、または不要部分の削除を実行することで初期配置データを完成させる。

【参考文献】

- 1) 土木学会：構造工学シリーズ 22 防災・安全対策技術者のための衝撃作用を受ける土木構造物の性能設計，2013
- 2) 粉体工学会：粉体シミュレーション入門，産業図書，1998
- 3) Belytschko, T. and Lin, J.I. : Three-dimensional impact penetration algorithm with erosion, Computers & Structures, 25, pp.95-104, 1987
- 4) 酒井 幹夫：粉体の数値シミュレーション，丸善，2012
- 5) 谷口健男，森脇清明：3次元 FEM のための自動要素分割法，森北出版，2006
- 6) 伯野 元彦，平尾 寿雄：粒状体のランダム・パッキングに関する一つの試み，土木学会論文報告集，第 218 号，pp.55-63，1973
- 7) 伯野 元彦：破壊のシミュレーション，森北出版，1997

謝 辞

本論文は金沢大学大学院博士前期課程に在学時の2年間の研究と2008年に株式会社構造計画研究所に入社し金沢大学大学院博士後期課程を修了するまでの5年と半年間の研究成果をまとめたものです。この7年と半年の間、主任指導教員である榊谷浩先生には論文の執筆をはじめとする研究活動の遂行にあたり、懇切丁寧なご指導と暖かいご鞭撻を賜りました。深く感謝の意を表しますとともに御礼申し上げます。

本論文の学位審査にあたり榊谷先生をはじめ金沢大学自然科学研究科の近田康夫先生、由比政年先生、小林俊一先生、深田宰史先生にはご多忙のおり審査員をして頂き、予備審査会と公聴会では貴重なご意見を賜りました。主査、副査の先生方に感謝の意を表し深く感謝御礼申し上げます。また本論文の公聴会に際しては、徳山高専土木建築工学科の原隆先生にご出席頂き、研究と解析技術に関する貴重なご意見を賜りました。原先生には私が徳山高専在学時に研究指導をして頂き、これまでの数値解析技術の研究を進める上での切っ掛けを与えて頂きました。ここに深く感謝御礼申し上げます。

本論文の3章のサンドクッション材の実験では日本サミコン株式会社の佐藤彰氏と中村佐智夫氏をはじめとする皆様にお世話になりました。また、金沢大学の構造講座の皆様にも実験に際してお世話になりました。皆様には深く感謝御礼申し上げます。

博士後期課程への進学にあたって、株式会社構造計画研究所の代表取締役副社長である澤飯明広氏と執行役員の大波正行氏の両名には、私の研究計画の策定および計画の裁可について大変お世話になり、進学の機会を与えて頂きました。また、博士後期課程在籍中は防災・環境部の内山部長をはじめ、地圏環境室の戸井室長には忙しい中で出張や論文執筆のスケジュールを調整して頂きました。本研究の遂行にあたっては、防災・環境部の登柳正夫氏と三橋祐太氏に本論文に関するプログラム開発と数値解析の実施に際して深くご協力頂きました。ここで皆様に深く感謝御礼申し上げます。

最後になりましたが、本論文の5章の矩形タンクのスロッシング解析では、入力地震波として防災科学研究所の強震記録を使用させて頂きました。ここに謝意の意を表させていただきます。

2013年9月

渡辺 高志