

博士論文

等方弾性体における変位関数の拡張と  
橋梁床版への応用に関する研究

金沢大学大学院自然科学研究科  
環境科学専攻  
環境創成講座

学 籍 番 号 : 1223142013

氏 名 : 横山 広

主任指導教官名 : 榊谷 浩



# 目次

	頁
第一章 序論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 厚板理論に関する既往研究の概要	3
1.2.1 3次元弾性問題における変位関数と応力関数 に関する既往の研究	3
1.2.2 厚板理論に関する既往の研究	5
1.3 研究目的と内容	6
1.3.1 研究目的	6
1.3.2 研究内容と構成	7
第二章 厚板理論に適用する等方弾性体の変位関数の誘導	13
2.1 はじめに	13
2.2 等方弾性体における変位関数の拡張	13
2.2.1 静的熱弾性体の変位関数	14
2.2.2 動的熱弾性体の変位関数	18
2.2.3 粘弾性体の変位関数	19
2.2.4 圧密方程式の変位関数	22
2.2.5 2次元弾性体の変位関数	23
2.3 厚板理論の誘導と級数表示	25
2.4 厚板理論を用いた数値計算例	34
2.4.1 道路橋鉄筋コンクリート床版の最小床版厚の検討	34
2.4.2 道路橋プレストレストコンクリート床版の 最小床版厚の検討	37
2.5 まとめ	40
第三章 厚板理論を拡張した混合法の誘導と変断面床版への適用	42
3.1 はじめに	42
3.2 混合法の誘導と級数表示	42

3. 3	混合法を用いた数値計算例	45
3. 3. 1	プレキャスト床版のハンチの合理化に関する検討	45
3. 3. 2	道路橋床版の主桁近傍の最小厚さの検討	50
3. 3. 3	変断面となる道路橋補強床版の計算	55
3. 4	まとめ	58
第四章	多層版解析のための調和解析法と選点法の理論展開と 床版構造への適用	59
4. 1	はじめに	59
4. 2	調和解析法と選点法の概要	60
4. 3	調和解析法と選点法を用いた数値計算例	68
4. 3. 1	調和解析法による道路橋補強床版の数値解析	68
4. 3. 2	選点法による舗装と床版の局所的なはく離問題の検討	72
4. 3. 3	実橋床版での載荷試験における劣化度評価への適用	81
4. 4	まとめ	89
第五章	混合型境界辺を有する版の解析	91
5. 1	はじめに	91
5. 2	部分固定化手法の解説	92
5. 3	混合型境界の数値計算例	97
5. 3. 1	既往の解との比較	97
5. 3. 2	固定支持と自由支持が混在する 混合型境界条件を有する版の計算	101
5. 3. 3	実験結果および有限要素法との比較	103
5. 4	まとめ	108
第六章	物体力を受ける床版の解析	109
6. 1	はじめに	109
6. 2	物体力が作用する問題	109
6. 3	熱負荷を受ける版の数値計算例	111
6. 3. 1	上面と下面温度が既知の温度問題	111
6. 3. 2	実橋床版でのロードヒーティングによる影響	114
6. 4	水圧作用による劣化現象の解析的検討	117
6. 4. 1	舗装と床版の一部に水圧が作用する問題	118

6. 4. 2 床版内の水平ひび割れを模擬した層内に	
水圧が作用する問題	121
6. 5 まとめ	123
第七章 結論	124
謝 辞	127
付 録	
薄板理論の誘導と級数表示	129



# 第一章 序 論

## 1. 1 研究の背景

道路橋の鉄筋コンクリート床版（以下、RC床版という）は橋梁上部工の中でも最も重量が大きく、支持桁の構造形式のみならず下部工の形式選定にも影響を及ぼす主要な部材である。しかしながら、主桁に次いで二次的な扱いとなっていたため、高度成長期に構造的に進歩せず、後に顕在化する疲労による劣化・損傷原因を内包していた。1960年代後半から頻発するRC床版のひび割れ損傷や陥没事例を目の当たりにして、ようやく道路管理者らはその重要性を認識するに至った<sup>1)</sup>。時を同じくして活発に対応策が検討され、鋼板接着工法や縦桁増設工法、及び上面増厚工法<sup>2)</sup>が熟成を待たずに実用化され、今日の道路橋の補修分野では床版が最大の資本投入の対象となっている。その後輪荷重走行試験機が開発され、道路橋床版の陥没損傷は広義の疲労現象であることが解明された<sup>3, 4)</sup>。また、輪荷重走行試験機の活用の下、鋼板接着工法などの各種の対策工法についても耐久性評価が進められている<sup>5-7)</sup>。

以上のように近年の道路橋床版の歴史では、それらの補修・補強工法の開発が先行し、疲労劣化現象の解明がそれに続くという特異な側面を有していた。その後過積載車への厳しい規制の施行と相俟ってアセットマネジメントを実現するための橋梁点検が定期的に行われるようになってからは<sup>8)</sup>、陥没破壊等の第三者被害に繋がるような損傷は減じ、近年ではほとんど報告されていない。

2008年度の橋梁点検結果をまとめた国土技術政策総合研究所資料<sup>9)</sup>によれば、直轄国道が管理する約18,000箇所の橋梁において、床版で「詳細調査の必要有り（判定S）」と判定されているものが全体の約4.2%、「速やかに補修等を行う必要がある（判定C）」が約24.0%となっている。なお、「緊急対応が必要（判定E1, E2）」とされるものが約0.3%存在していることから、何らかの対策を必要とする劣化が着実に進展していることが伺える。ただし、橋梁点検では主として車両走行に起因する疲労に着目されており、コンクリート特有の材料劣化、例えばアルカリ骨材反応や塩害等による劣化が適切に評価されているとは言い難く、点検の精度に関する課題が積み残されている。これらを放置すれば、アセットマネジメントにも悪影響を及ぼすことが推察される。

道路橋の床版は道路橋示方書<sup>10, 11)</sup>に（以下、道示という）規定されている種々の条件に基づいて構造・断面が決定されており、それに準じることで交通サービスを担うための使用性・安全性が担保されている反面、運用範囲が厳格に制限されている。例えば長支間床版のように耐久性を必要とする構造で、新形式の床版が開発されてもその採用は容易ではない。近年パーソナルコンピュータの目覚ましい発展により、有限要素法が橋梁の設計・解析分野に進出し、特に新形式

の床版では解析手法として採用する例が散見されるようになった。それらは、実物大供試体による実験等でも実用性を確認しているものの、現状では有限要素法を活用した設計は一般化されているとはいえず、橋梁設計のツールとして更なる利便性の改善が望まれている。最近になって橋梁構造物にも性能照査型設計が導入され初め、今後は橋梁の使用状況に見合った荷重設定が盛り込まれる可能性がある。実際に地方の生活道路では、損傷対策の消極的な現れとして荷重制限という形で必要性能が要求されている例もある。

近年の経済不況や橋梁の高齢化に伴い高耐久性床版が脚光を浴び、それに応えるように新形式の床版構造が開発されている<sup>12)</sup> これらの床版は特にコスト縮減効果の得やすい高速道路での採用例が多く、現在では地方自治体レベルにまで広がっており、積極的に新形式に取り組む機運が高まりつつある。また、耐久性の高さを活用するために床版のプレキャスト化も進められており、鉄筋コンクリート構造や鋼・コンクリート合成構造の床版が出現し実用化され、既設橋の長寿命化に寄与している<sup>13, 14)</sup>。

これらの現状を踏まえ、床版が置かれているあらゆる環境に柔軟に対応でき、容易に変形や応力の厳密な値を把握することができる解析手法が存在すれば、有限要素法の照査や実験に代わる利器になり得ることが容易に想像できる。

本研究ではそれらを実現するために、3次元弾性論に依拠する厚板理論による厳密な解析手法の開発とその応用を念頭に、数種の計算例をもとに検討することとした。本研究が厚板理論に着目する理由として、それを端的に表現している Timoshenko と Woinowsky-Krieger による「板とシェルの理論」(長谷川節訳)<sup>15)</sup> の序論の一部を引用する。

#### 厚板

上述の薄板の近似理論は、かなりの厚さの板の場合、特に高度の集中荷重のある場合に信頼できなくなる。このような場合に厚板の理論が適用されなければならぬ。この理論は弾性の3次元問題として板の問題を考える。従って応力解析は紛糾し、現在まで僅かの特別の場合だけ完全に問題が解かれている。この解析を用いると、集中荷重の作用点で薄板理論への必要な補正を導入することができる。

引用文にある通り薄板理論は近似解であり、道路橋床版のような輪荷重近傍での厳密な応力算定を行うには厚板理論が不可欠である。また、Timoshenko はその境界条件の適用範囲が狭いことを指摘したように、長期間に亘って厚板理論の応用は限定された境界条件下での展開に終始していた。一方、損傷劣化を受けた床版の補修工法を力学的観点から見据え、補修・補強対策に向けての設計面に活用したいとの願望も現実味を帯びてきている。そこで厚板理論の根本となる変位関数の整理と応用範囲を広げるためにこの関数の拡張を試みることにする。次に「多層版解析法」の確立と「混合法」の開発に取り組み、実用化に向けて検討するものとする。



## 1. 2 厚板理論に関する既往研究の概要

### 1. 2. 1 3次元弾性問題における変位関数と応力関数に関する

#### 既往の研究

3次元弾性問題は数多くの研究者によってなされてきたが、その際に用いられている変位関数と応力関数の用語が統一されているとは言い難い。本論文では、H.M.Westergaard<sup>16)</sup>の定義に従い、変位関数とはひずみの適合条件を自ずと満足する関数であり、応力関数とは応力のつりあい式を自明で満たす関数であると定義する。

3次元問題の研究は、1848年にL.Kelvin<sup>17)</sup>が無限体中の1点に集中力が作用する問題の厳密解を発表して以来、多くの研究者らによって探求され現在に至っている。当初は厳密解という用語は代数式や対数関数等で示される閉じた解を意味し、級数を用いた級数解は開いた解として分類されていたが、有限要素法や境界要素法に代表される近似解法の出現により、今日では級数解も厳密解として認知されており、本論文では級数解を厳密解として扱うことにする。

3次元問題の解明は、応力のつりあい式、ひずみの適合条件式、および応力とひずみの関係式を変位や応力が規定される境界条件の下で、対象とする物体全域の変位、応力、およびひずみを得ることが本質である。しかし、これらを求めるには連立の偏微分方程式を解くことになり、煩雑な作業を伴うことになる。そこで変位関数や応力関数を媒介とする手段が考案され、3次元問題の研究での主流となっている。

始めに静的問題での変位関数について整理する。1885年にJ.Boussinesq<sup>18)</sup>は、今日 Boussinesq の関数と呼ばれている調和型の変位関数を発表した。1900年にH.Michell<sup>19)</sup>は、後年の研究に多大の影響を及ぼす等方弾性体で4階型の重調和関数や横等方弾性体での2つの擬調和型の関数を誘導した。A.E.Love<sup>20)</sup>は1906年に strain function と名付けられる等方弾性体のスカラータイプの重調和関数を見出した。1930年代になって変位関数の基本となる論文が発表された。1つはB.Galerkin<sup>21)</sup>の論文であり、彼は3つの成分を持つ重調和型の変位関数、いわゆる Galerkin vector を1930年に誘導し、その1成分がLoveの strain function と一致していることを指摘した。他の1つはP.F.Papkovich<sup>22)</sup>とH.Neuber<sup>23)</sup>がそれぞれ独自に提案した論文である。P.F.Papkovichは1932年に、H.Neuberは1934年に2つの調和型のベクトル関数を導き、今日ではNeuber-Papkovichの関数として知られている。またR.D.Mindlin<sup>24)</sup>は1936年の論文で Galerkin vector と Neuber-Papkovichの関数が一致することを示した。1955年に秦<sup>25)</sup>は Galerkin vector や Neuber-Papkovichによる関数の一般化を図るために、非軸問題で用いられる調和型のベクトル関数、すなわち Boussinesq の関数の一部を補足すべきであることを指摘した。同年にV.K.Marguerre<sup>26)</sup>は1950年代前半までに発表された2次元および3次元問題における変位関数と応力関数についての総括を行い、互いの関数の関連性を明らかにした。1970年代になって座標変換に伴う変位関数の拡張

が試みられた。1972年に古橋<sup>27)</sup>は一般化座標における Neuber-Papkovitch の変位関数を示し、1974年には長谷川<sup>28)</sup>は物体力を考慮した円柱座標での一般化された Love の関数を提案した。

次に動的問題における変位関数は、静的問題での変位関数の誘導に伴って順次発表されてきた。まず1949年に M.Iacovache<sup>29)</sup>が Galerkin vector を拡張し、動的問題の先駆となった。その後、E.Sternberg と R.A.Eubanks<sup>30)</sup>は Iacovache の関数の完全性を証明し、Neuber-Papkovitch の変位関数を動的問題へ発展させた。長谷川<sup>31)</sup>は1975年に一般化された Love の関数を動的問題での変位関数へと導いた。

変位関数を用いた主な解析例を変位関数の種類ごとに示す。

- ① Boussinesq の関数の場合、I.N.Sneddon<sup>32)</sup>は Hankel 変換によって半無限体の剛体押し込み問題を中心とする3次元解を示し、E.Sternberg<sup>33)</sup>らは球が集中荷重を受けるときの応力問題について双極座標による解析を行った。牟岐<sup>34)</sup>は Hankel 変換を用いて半無限体の表面を剛な円柱を垂直、あるいは任意の角度を傾けて押し込む問題、安<sup>35)</sup>は球による押し込み問題の3次元解を示した。
- ② Galerkin vector の場合、K.T.Sundra Raja Iyengar<sup>36)</sup>らは短角柱の両端に部分荷重が作用する軸圧縮の3次元解を示した。小林<sup>37)</sup>らは Galerkin vector を一般化した秦の関数を用いて、一端面固定、他の端面を剛体上に置き、残りを自由面とする短直方体の圧縮や曲げ問題の3次元解を示し、奥村<sup>38)</sup>は同様の問題での剛体表面での接触面の滑らかさが内部応力に及ぼす影響を明らかにした。
- ③ Neuber-Papkovitch による関数の場合、A.Neuber<sup>39)</sup>は切欠き部を有する円柱や回転体の応力集中問題の3次元解を、斉藤<sup>40)</sup>は Michell の関数を短円柱や厚円板に適用して、部分荷重が作用する問題を解析した。
- ④ 動的問題では今日地震等に起因する振動問題における構造物の応答解析で広範に適用されているが、本論文ではそれらの例を割愛する。長谷川<sup>31)</sup>は Kelvin, Boussinesq や Mindlin によるそれぞれの代数解に対して、集中力が時間的に変化する場合の3次元解を導いた。

一方応力関数について述べると、1863年に G.B.Airy<sup>41)</sup>が2次元問題での、現在では Airy の応力関数と呼ばれる関数を最初に誘導したのを先頭に、1870年には C.Maxwell<sup>42)</sup>がこの関数を3次元問題へと拡張し、3つの独立な応力関数を発表した。1890年に G.Morera<sup>43)</sup>による応力関数が提案された。今日これらの関数を総じて Maxwell-Morera の応力関数と称している。また1903年には L.Prandtl<sup>44)</sup>がねじり問題の応力関数を誘導した。1954年 W.Ornstein<sup>45)</sup>は、Maxwell-Morera の応力関数が系統的に導ける方法を見出した。

次に動的問題での応力関数は比較的新しく、1972年に P.P.Teodorescu<sup>46)</sup>が Maxwell と Morera による2つの応力関数の拡張を試み、1976年には S.Minagawa<sup>47)</sup>が Teodorescu による応力関数の

一般化座標での表示を行った。H.Swoboda<sup>48)</sup> は Airy の応力関数を拡張して全周単純支持された厚円板に部分荷重が作用する問題を解析した。

## 1. 2. 2 厚板理論に関する既往の研究

厚板理論は 3 次元弾性問題の一部に属し、支持辺の長さ(スパン)に対して比較的厚みをもつ板状の構造物を厚板と呼ぶ。厚板の研究は、A.Nadai<sup>49)</sup> が厚円板の上面に荷重が作用する場合の解を導いたのが始まりとされている。厚板問題の解析は変位関数や応力関数を用いる方法以外に、①変位で表したつりあい式、いわゆる Navier の式に仮定した変位を直接代入する方法（以下、直接法という）と、②微分演算子を用いる方法がある。

まず Nadai の方法は Navier の式中で体積変化を示す項と回転を表す項に着目するもので、A.Timpe<sup>50)</sup> は 1924 年にこれら 2 つの項がそれぞれ重調和方程式を満足することから、この方程式を満たす代数解を組み合わせる半逆法によって、厚円板の解を誘導した。1951 年 I.Szabo<sup>51)</sup> は半無限弾性基礎にある周辺自由の厚円板の解析と厚円板下面の周辺近傍で支持される問題の解を発表した。

次に変位関数による方法の解析例を示す。1954 年に斉藤<sup>40)</sup> は Michell の関数を用いて Szabo と同様の支持条件を有する厚円板に部分荷重が作用する場合の解を示し、荷重点近傍の局所応力の性状を議論した。1967 年に D.Schlottmann<sup>52)</sup> は矩形厚板の曲げ振動問題に Galerkin vector を用いて、固有振動数を算出した。

また直接法は 1933 年の S.Woinowsky-Krieger<sup>53)</sup> による研究を発端として始まった。彼は面内の境界条件を満足するように仮定した変位を Navier の式に直接代入することによって、変位の面外方向の関数形を決定し、部分荷重を受ける全周単純支持された矩形厚板や厚円板の 3 次元解を示した。1959 年に能町<sup>54)</sup> は有限 Fourier 変換を用いて全周単純支持された矩形厚板に正弦荷重が作用する場合の解を示した。

最後に演算子を用いる方法について述べる。この方法は A.I.Lure<sup>55)</sup> が最初に提案したもので、板厚方向の成分を面内の微分演算子  $D(= \partial/\partial x + \partial/\partial y)$  で表し、その基礎式を面内に無限に広がる厚板の上・下面に荷重を受ける場合を対象として誘導している。1957 年に V.Z.Vlasov<sup>56)</sup> は変位の板厚方向にマクローリン展開を施し、板中央面での変位を初項とする初期関数法を提案した。K.T.Sundara Raja Iyengar<sup>57)</sup> らは 1974 年に Vlasov による方法を用いて各種の境界条件を有する矩形厚板が等分布荷重を受ける場合の解析を行った。

## 1. 3 研究目的と内容

### 1. 3. 1 研究目的

ひび割れ損傷を受けた道路橋床版で最も初期に重要視された要因の一つに疲労問題が挙げられる。1965 年代頃から頻発した道路橋床版の陥没損傷の報告を受けて依頼，その原因を研究するために輪荷重走行試験機が開発され，それらの試験機の成果により陥没損傷の原因が広義の疲労現象であることが解明された。当初は鉄輪が一定範囲内を移動する試験機によって研究が進められたが，その後実橋梁の荷重形態に近いゴムタイヤ式の走行試験機（写真-1.3.1）が導入され，数多くの試験により疲労曲線が整備されるに至った。その結果，過去の示方書で設計された床版の疲労耐久性が評価できるようになった<sup>58, 59)</sup>。

これらのように道路橋床版の疲労問題に関してはその精力的な活動の結果，そのメカニズムが明らかになってきたが，未だ多くの課題が残されている。現状ではそれらへの対応のために，より簡便な解析手法への進化が求められる側面がある。そこで本研究では，これまでの研究成果にない新たな視点から，以下の各項目を目的とする。

- ①厚板理論を拡張して変断面床版へも適用できることを可能にする。
- ②厚板理論の混合型境界，例えば一つの辺で単純支持，固定支持，自由辺が混合する境界条件でも厳密解が得られるようにする。
- ③表面力だけではなく物体力も扱えるようにする。

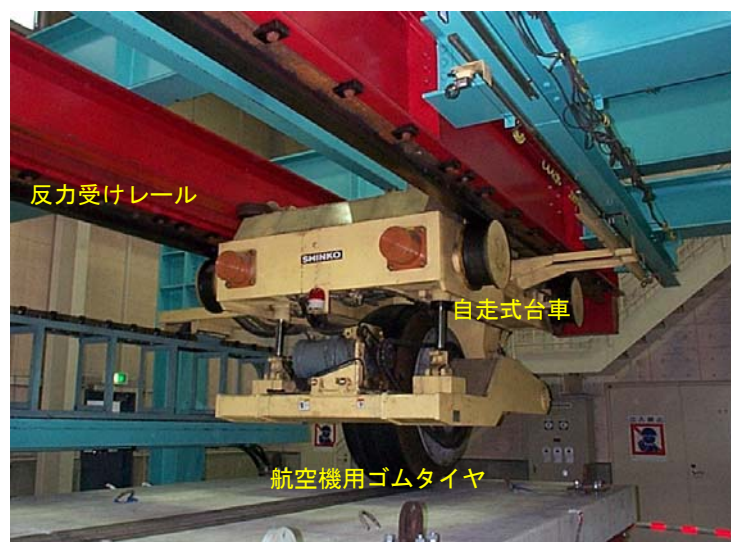


写真-1.3.1 ゴムタイヤ式輪荷重走行試験機  
（ショーボンド建設補修工学研究所 所有）

## 1. 3. 2 研究内容と構成

本研究の内容を以下に示す。

**第二章**では厚板理論の根幹となる従来の変位関数の拡張を図るために熱弾性体の静的および動的問題の変位関数，粘弾性体の変位関数，および2次元弾性体の変位関数を誘導する。道路橋床版の版厚は疲労問題を契機に増加傾向にあるが経時的には経験的な判断で決められてきた。そこで床版の最適厚さを活荷重による曲げひび割れが発生しない厚さとする条件下で，厚板理論解と現行の道路橋示方書に規定されている最小厚さと比較し，考察を加える。なお対象としたものは鉄筋コンクリート構造だけではなくプレストレスを導入する構造にまで範囲を拡大した。

**第三章**では損傷劣化した床版に施す補強工法の補強効果について述べる。劣化床版の対策工法の一つである上面増厚工法を取り上げる。この工法では既設床版に比べて曲げ剛性の高い補強材が床版上面に敷設され，界面での離問題が注目されている。そこで界面での付着性状を把握することは補強効果を論じるうえで重要であることを示す。

**第四章**では防水層の初期欠陥を含むはく離問題を扱うための多層版解析について述べる。新規床版の長寿命化や既設床版の延命化のために施す橋面防水工に関する検討であり，現行では一般化されていない防水層の要求性能である付着強度の大きさを算定することは，今後の材料開発にとっての数値指標となる。

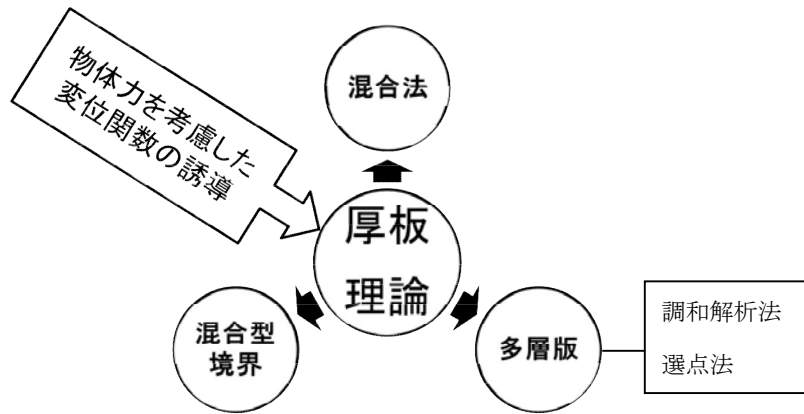
**第五章**では混合境界を有する版の解析方法の開発について述べる。厚板理論のみを用いて固定辺を有する版を解析する場合，多大の労力と煩雑さを伴うため，固定辺を生み出す簡便な方式を新たに開発することにより実橋床版への適用を試みる。例えばプレートガーダー橋の主桁に配置される垂直補剛材付近の首振り変形が制限される部位での床版の挙動は，部分固定される床版と同様であると推察され，部分固定版における変位・応力の解明が要求される。

**第六章**では床版に作用する物体力として温度負荷問題と水圧問題について述べる。温度負荷の問題では従来は表面力が作用する問題と異なり，床版内部に外力が内包する特有の解法が必要となる。例えば床版の融雪用のロードヒーティングが敷設され温度負荷を受ける場合，その影響は物体力に置換されて床版に作用するため，新たな解析方法が必要であり，具体例を用いてそれを確立する。さらに物体力を加味した解析を水圧問題にも展開し，床版上縁の砂利化問題に関与する浸透水の影響を検討する。

**第七章**では本論文のまとめを記している。

本研究では変位関数理論および解析手法の誘導とその効果，妥当性を確認するための橋梁床版の諸問題への応用によって評価する数値計算を組み合わせている。それらの基本となるものは全て厚板理論であり，それを用いて床版の各種問題に適用できるように解析手法を拡張している。厚板理論と拡張した手法とのつながりを概念的に示すと図-1.3.1のように捉えることができる。

・薄板理論を組み合わせた境界条件の拡大



・固定支持の境界条件を容易に扱えるように展開

・多層構造である床版への適用

(部分固定, 自由支持の境界も任意に考慮)

図-1.3.1 本研究での理論展開の概念

表-1.3.1 は本論文の構成を示しており, 各章で理論や解析手法の誘導と応用例としての数値計算を組み合わせている.

表-1.3.1 本研究の構成

章	検討項目	橋梁床版の諸問題への応用例
2	<b>等方弾性体の変位関数の拡張</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>・静的熱弾性体の変位関数</li> <li>・動的熱弾性体の変位関数</li> <li>・粘弾性体の変位関数</li> <li>・圧密方程式の変位関数</li> </ul>	
	厚板理論の誘導と級数表示	・道路橋床版の最適厚さ
3	<b>混合法の誘導と級数表示</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・プレキャスト床版のハンチの合理化</li> <li>・道路橋床版の主桁近傍の最小厚さ</li> </ul>
4	<b>調和解析法と選点法による多層版解析</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・道路橋補強床版の数値解析</li> <li>・舗装と床版の局所的なはく離問題</li> </ul>
5	<b>混合型境界を有する版の解析</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・既往の解との比較</li> <li>・実験結果および有限要素法との比較</li> </ul>
6	<b>物体力を受ける版の解析</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>・物体力が作用する床版</li> <li>・上面と下面温度が既知の温度問題</li> <li>・実橋床版のロードヒーティングによる影響</li> <li>・間隙水圧による床版劣化の検討</li> </ul>

## 参考文献

- 1) 例えば, 阪神高速道路公団, 阪神高速道路管理技術センター: 道路橋 RC 床版のひびわれ損傷と耐久性, pp.1-2, 1991.3.
- 2) 例えば, 土木学会 鋼構造委員会 鋼橋床版の調査研究委員会: 道路橋床版の新技术と性能照査型設計, pp.55-66, 2000.10.
- 3) 園田恵一郎, 堀川都志雄: 輪荷重の反復作用下での道路橋 RC 床版の低サイクル疲労特性, 土木学会論文集, 第 390 号/v-8, pp.97-106, 1988.2.
- 4) 松井繁之: 橋梁の寿命予測—道路橋 RC 床版の寿命予測—, 安全工学 Vol30, No.6, pp.432-440, 1991.12.
- 5) 山口良弘, 藤田幸朗, 横山広: RC 床版鋼板接着工法の補修効果, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.14, No.1, pp.879-882, 1992.7.
- 6) 松本洋一, 植木博, 横山広, 内藤浩治: 既設 RC 床版の移動載荷試験による疲労耐久性評価, コンクリート工学年次論文報告集, Vol.21, No.3, pp.1135-1140, 1999.7.
- 7) 横山和昭, 菅野匡, 紫桃孝一郎, 横山広: 輪荷重走行の方法による既設橋床版を用いた各種補修・補強工法の延命効果比較実験, コンクリート技術シリーズ、性能照査型システムにおけるコンクリート構造物の補強, 第 II 部シンポジウム論文集, pp. II 69-II 75, 2001.6.
- 8) 国土交通省 国道・防災課: 橋梁定期点検要領 (案), 2004.3.
- 9) 国土交通省, 国土技術政策総合研究所: 平成 20 年度道路構造物に関する基本データ集, 国土技術政策総合研究所資料, 第 545 号, 2009.10.
- 10) 社団法人日本道路協会: 道路橋示方書・同解説 II. 鋼橋編, 2002.3
- 11) 社団法人日本道路協会: 道路橋示方書・同解説 III. コンクリート橋編, 2002.3.
- 12) 建設省土木研究所: 道路橋床版の輪荷重走行試験機における疲労耐久性評価手法の開発に関する共同研究報告書(その 1~5), 共同研究報告書第 221, 233, 250, 262, 277 号, 1999.3.-2001.3.
- 13) 横山広, 栗原慎介, 加藤暢彦, 松井繁之: プレストレスにより連続化された RC プレキャスト床版の疲労耐久性評価, 構造工学論文集, Vol.46A, pp.1443-1448, 2000.3.
- 14) 横山広, 佐藤政勝, 辻本和敬, 相川収: 高力ボルトをずれ止めに用いたプレキャスト合成床版の耐荷性能について, コンクリート工学年次論文集, Vol.22, No.3, pp.1183-1188, 2000.
- 15) S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger (長谷川節訳): 板とシェル of 理論, ブレイン図書出版株式会社, 第 1 版 7 刷, 1994.5.
- 16) Westergaard, H. M.: Theory of Elasticity and Plasticity, Harvard University Press, 1952.
- 17) Load Kelvin and Tait, P. G.: Treatise on Natural Philosophy, Cambridge University Press, 1899.
- 18) Boussinesq, J.: Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastique, Paris, Gauthiers-Villas, 1885.
- 19) Michell, H.: The stress in an aeolotropic elastic solid with an infinite plane boundary, Proc. London Math. Soc., Vol.32, pp.247-258, 1900.

- 20) Love , A. E. H. : A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, New-York, Dover-Publications, 1944.
- 21) Galerkin, B. : Contribution á la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Vol.190, p.1047, 1930.
- 22) Papkovitch, P. F. : Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité exprimée par trois fonctions harmoniques, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, Vol.195, pp.513-515, pp.754-756, 1932.
- 23) Nuber, H. : Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie, Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel, ZAMM, Bd. 14, pp.203-212, 1934.
- 24) Mindlin, R. D. : Note on the Galerkin and Papkovitch stress functions, Bull. Am. Math. Soc. ,Vol.42, pp.373-376, 1936.
- 25) Hata, K. : On the three-functions approach, Proc. 5th, Japan Nat. Cong. Appl. Meth. , pp.115-118, 1955.
- 26) Marguerie, K. : Ansatz zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, ZAMM, Bd. 35, pp.242-263, 1955.
- 27) Furuhashi, R. : On Neuber-Papkovitch stress function in general curvilinear coordinates, 明治大学科学技術研究所紀要, pp.73-78, 1972.
- 28) 長谷川久夫 : 軸対称弾性問題のラプの解の一般化, 日本機械学会論文集, Vol.40, p.2494, 1974.9.
- 29) Iacovache, M. : Oextindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuatiilor elasticitatii, Bul. st. Acad. R. P. R. , Vol.1, pp.592-599, 1949.
- 30) Sternberg, E. and Eubanks, R. A. : On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation, Quart. Appl. Math. , Vol.15, pp.149-154, 1957.
- 31) 長谷川久夫 : 軸対称弾性動力学問題の応力関数による解法, 日本機械学会論文集, Vol. 41, pp.3059-3068, 1975.11.
- 32) Sneddon, I. N. : Fourier Transforms, McGraw-Hill, Co. , Inc. , 1951.
- 33) Sternberg, E. , and Rosenthal, F. : The elastic sphere under concentrated loads, Trans. ASME, Vol. 74, pp.413-421, 1952.
- 34) 牟岐鹿楼 : 表面の一部が剛体で圧縮された半無限弾性体の三次元応力問題, 日本機械学会論文集, Vol. 21, pp.767-773, 1955.11.
- 35) 安文在 : 剛体球で押された半無限弾性体の弾性問題, 日本機械学会論文集, Vol. 24, pp.757-766, 1958.11.
- 36) Sundara Raja Iyengar, K. T. and Prabhakara, M. K. : A three dimensional elasticity solution for rectangular prism under end loads, ZAMM, Bd. 49, pp.321-332, 1969.
- 37) 小林道明, 石川博将, 秦謹一 : 短直方柱の応力解析, 日本機械学会論文集, Vol.41,



- pp.2265-2277, 1975.8.
- 38) 奥村勇：部分分布の垂直荷重を受ける直方体の3次元応力解析について，土木学会論文報告集, No.238, p.17, 1975.7.
  - 39) Neuber, H. : Kerbspannungslehre, Berlin, J. Springer, 1937.
  - 40) 齊藤秀雄：短円柱および円盤の軸対象変形，日本機械学会論文集, Vol.18, pp.21-28, 1952.3.
  - 41) Airy, G. B. : Phil. Trans. Roy. Soc. , Vol. 153, p.49, 1863.
  - 42) Maxwell, J. C. : On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy's function of stress, Proc. London Math. Soc. , Vol.2, pp.58-60, 1868.
  - 43) Morera, G. : Soluzione generale delle equazioni indefinite dell' equilibrio di un corpo continuo, Rendiconti dei Lincei, Cl. Sci. fis. , mat. e nat. , Vol. 1, pp.137-191, 1892.
  - 44) Prandtl, L. , : Zur Torsion von prismatischen Stäben, Physik, Bd. 4, p.758, 1903.
  - 45) Ornstein, W. : Stress functions of Maxwell and Morera, Quart. Appl. Math. , Vol.12, pp.198-201, 1956.
  - 46) Teodorescu, P. P. : Stress functions in three-dimensional elastodynamics, Acta Mech. , Vol.14, p.103-118, 1972.
  - 47) Minagawa, S. : On the stress functions in elastodynamics, Acta Mech. , Vol.24, pp.209-217, 1976.
  - 48) Swoboda, H. : Zum dreidimensionalen Spannungszustand der Keisrunden Platten, ZAMM, Bd. 20, pp.336-350, 1940.
  - 49) Nadai, A. : Elastische Platten, Springer-Verlag, 1925.
  - 50) Timpe, A. : Achsensymmetrisch Deformation von Umdrehungskörpern, ZAMM, Bd.4, pp.361-376, 1924.
  - 51) Szabó, I. : Die achsensymmetrisch belastete dicke Kreisplatte auf elastischer Unterlage, Ing. -Arch. , Bd.19, pp.128-142, 1951.
  - 52) Schlottmann, D. : Die Eigenfrequenzen der frei geragerten Rechteck Platte bei Berücksichtigung der Schubverformung, Die Bautechnik, pp.246-248, 1967.
  - 53) Woinowsky-Krieger, S. : Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten, Ing.-Arch. , Bd. 4, pp.203-331, 1933.
  - 54) Nomachi, S. : A stress analysis of simply supported rectangular plate in three-dimensional stress problems. Proc. 9<sup>th</sup> Japan Nat. Cong. Appl. Mech. , pp.41-44, 1959.
  - 55) Luré, A. I. : Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity, John-Wiley and Sons, Inc. , New-York, 1964.
  - 56) Vlasov, V. Z. : Method of initial functions in problems of theory of thick plate and shells, Proc. 9<sup>th</sup> Int. Cong. Appl. Math. , p.321, 1957.
  - 57) Sundara R. I., K. T. , Chandrashekhara, K. and Sebastian, V. K. : On the analysis of thick rectangular plates Ing. -Arch. , Bd.43, pp.317-330, 1974.

- 58) 横山広，篠原晃，関口幹夫，堀川都志雄：ゴムタイヤ式輪荷重走行試験機による道路橋床版の疲労耐久性評価手法，構造工学論文集 Vol.50A，pp.999-1006，2004.3.
- 59) 横山広，長屋優子，関口幹夫，堀川都志雄：自走式試験機による道路橋床版の使用限界の評価，第4回道路橋床版シンポジウム講演論文集，pp.49-54，2004.11

## 第二章 厚板理論に適用する等方弾性体の

### 変位関数の誘導

本研究では、厚板理論で得られる厳密解を各種床版問題に適用している。本章では厚板理論に展開する変位関数を誘導するが、基本となる静的熱弾性体の他にも動的熱弾性体や粘弾性体、厚密方程式によるもの、2次元弾性体に関する誘導し、各種問題に対応できるようにする。

厚板理論：広く知られている薄板理論では Kirchhoff-Love の仮定、すなわち平面保持の仮定が用いられているが、本研究で使用した厚板理論は3次元問題の一部に属し、支持間隔の長さに対して比較的大きな厚みを有する板に有効な理論である。

#### 2. 1 はじめに

外荷重を受ける等方弾性体の3次元解を得る方法には、変位を中心とする、すなわち Navier の式を満足する変位関数を媒介とする方法と、応力に着目する応力関数による方法がある。これらはラプラシアンで表現される調和方程式あるいは重調和方程式を満足する関数形で表されており、かつその関数形はスカラータイプか、ベクトルタイプのいずれかに属している。秦は直交異方弾性体の研究を通して、等方弾性体における3次元問題の一般解を得る際には重調和関数の採用に加えて、調和型の関数、いわゆる Boussinesq の関数が必要であることを示した<sup>1)</sup>。また、静的な変位関数を拡張した動的問題での変位関数は、媒体となる縦波および横波の伝搬速度を取り込んだダランベルシアンからなる方程式を満たす関数となる。

一方熱負荷を受ける弾性体の式系は、前述の Navier 式と熱伝導の式とが連成する偏微分方程式で構成される。この問題に対して、J. N. Goodier は4階型の微分方程式を満たすスカラータイプの熱弾性ポテンシャルを導入した。W. Nowacki は6階型の微分方程式を満足するベクトルタイプの変位関数を提案している<sup>2)</sup>。しかし変位場と温度場の式が非連成となる場合、Nowacki のベクトル関数は互いに独立な物体力に呼応する Galerkin-vector に帰着するが、秦の指摘した Boussinesq の関数に相当する関数が欠落しているため、Nowacki の関数群は完全系であるとは言えない。

#### 2. 2 等方弾性体における変位関数の拡張

本節では等方弾性体が温度負荷を受ける、いわゆる熱弾性問題での変位関数を誘導するととも

に、既往の変位関数との関連性を明らかにする。また粘弾性体での変位関数へと拡張する。

- ① 熱負荷が弾性体に作用する問題での W.Nowacki の示した変位関数との関係を示し、等方弾性体での Boussinesq の関数に相当する関数の必要性を検証する、
- ② 次にこの誘導方法を用いて、熱負荷が動的に作用する場合での変位関数を導き、W.Nowacki の関数と比較する、
- ③ また弾性体が Voigt モデルで粘性効果を呈する粘弾性体での変位関数を誘導する。さらに粘弾性モデルの一般化による広義の粘弾性体の変位関数を提案する、
- ④ 熱問題の式系と類似する M.A.Biot の圧密方程式に対する変位関数の誘導を試みる。
- ⑤ 3次元弾性体の応力やひずみに平面ひずみや平面応力等の制約条件を課すことにより、2次元問題での変位関数を誘導する。

## 2. 2. 1 静的熱弾性体の変位関数

熱負荷を受ける3次元弾性体の式系は熱力学の第一法則と第二法則から誘導される。応力のつりあい式は第一法則から得られる。なお座標系にはデカルト座標を用いている (図-2.2.1)。

$$\partial_x \sigma_x + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} + X = 0,$$

$$\partial_x \tau_{xy} + \partial_y \sigma_y + \partial_z \tau_{yz} + Y = 0,$$

$$\partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \sigma_z + Z = 0$$

(2.2.1)

ここで、 $\partial_x = \partial/\partial x$ ,  $\partial_y = \partial/\partial y$ ,  $\partial_z = \partial/\partial z$ ,

$X, Y, Z$ ;  $x, y, z$  方向の物体力の成分

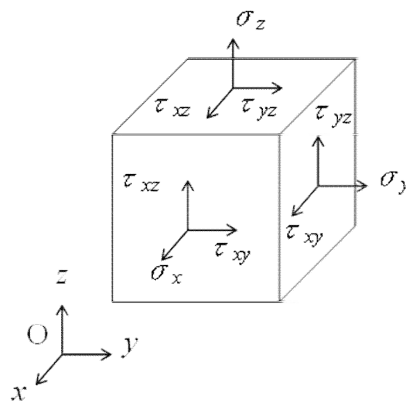


図-2.2.1 デカルト座標系における応力成分

ひずみと変位の関係式は次のように与えられる。

$$\varepsilon_x = \partial_x u, \quad \varepsilon_y = \partial_y v, \quad \varepsilon_z = \partial_z w,$$

$$\gamma_{xy} = \partial_x v + \partial_y u, \quad \gamma_{xz} = \partial_x w + \partial_z u, \quad \gamma_{yz} = \partial_y w + \partial_z v \quad (2.2.2)$$

ここで,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ ;  $x, y, z$  方向の直ひずみ,

$u, v, w$ ;  $x, y, z$  方向の変位

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ ; せん断ひずみ

また温度による影響を考慮すれば, Hooke の法則は第二法則から得られる.

$$\sigma_x = \lambda e + 2\mu\varepsilon_x - \gamma_t T, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy},$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2\mu\varepsilon_y - \gamma_t T, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{xz},$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2\mu\varepsilon_z - \gamma_t T, \quad \tau_{xy} = \mu\gamma_{yz} \quad (2.2.3)$$

ここで,  $\lambda, \mu$ ; ラメの定数,  $\gamma_t = (3\lambda + 2\mu)\alpha$ ,  $\alpha$ ; 線膨張係数,

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$T$ ; 基準温度  $T_0$  からの温度差

式(2.2.2)と(2.2.3)を式(2.2.1)に代入し,  $T=0$  の場合に変位で表されるつりあい式, いわゆる Navier の式が得られるが, この式に熱伝導の式が加わり, 互いの式の中に温度勾配と体積ひずみが連成項として現れる.

この式系は静的問題の場合には以下のように示される<sup>2)</sup>.

$$\left( B_1 \partial_x^2 + B_3 \partial_y^2 + B_3 \partial_z^2 \right) u + B_2 \partial_x \partial_y v + B_2 \partial_x \partial_z w - \gamma_t \partial_x T + X = 0,$$

$$B_2 \partial_x \partial_y u + \left( B_3 \partial_x^2 + B_1 \partial_y^2 + B_3 \partial_z^2 \right) v + B_2 \partial_y \partial_z w - \gamma_t \partial_y T + Y = 0,$$

$$B_2 \partial_x \partial_z u + B_2 \partial_y \partial_z v + \left( B_3 \partial_x^2 + B_3 \partial_y^2 + B_1 \partial_z^2 \right) w - \gamma_t \partial_z T + Z = 0,$$

$$-\eta \partial_t (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) + (\Delta - \partial_t / k) T = -Q/k \quad (2.2.4)$$

ここで,  $\partial_t = \partial / \partial t$ ,  $\partial_x^2 = \partial^2 / \partial x^2$ ,  $\partial_y^2 = \partial^2 / \partial y^2$ ,  $\partial_z^2 = \partial^2 / \partial z^2$ ,  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ ,

$$B_1 = \lambda + 2\mu, \quad B_2 = \lambda + \mu, \quad B_3 = \mu, \quad \eta = \gamma_t T_0 / \lambda_0,$$

$Q$ ; 熱源量,  $\lambda_0$ ; 熱伝導率,  $k$ ; 熱拡散率,  $t$ ; 時間

Duhamel の類似によれば, 式(2.2.4)の項 $(-\gamma_t \partial_x T, -\gamma_t \partial_y T, -\gamma_t \partial_z T)$ は, それぞれ物体力  $X, Y, Z$  に相当し, 温度勾配は物体力に置換できることが判る. すなわち, 式(2.2.3)の直応力に関わる $-\gamma_t T$ に注意すれば熱問題は物体力が作用する問題と等価となる.

式(2.2.4)を満足する関数群のうち，例えば  $z$  方向のみに着目して以下の議論を進める．縮退する項  $\Delta$  を考慮すれば，関数  $F_3$  と  $\theta_3$  が導入できる．これらの関数と  $x, y, z$  方向の変位  $u_3, v_3, w_3$  および温度  $T_3$  との関係式を次のように設定する．なお変位，温度の下添字は関数の下添字に対応している．

$$\begin{aligned}
2B_3u_3 &= -\partial_x\partial_z\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right]F_3+\partial_y\theta_3, \\
2B_3v_3 &= -\partial_y\partial_z\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right]F_3-\partial_x\theta_3, \\
2B_3w_3 &= \left[B_1/B_2\left\{(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_1\right\}\Delta-\partial_z^2\left\{(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right\}\right]F_3, \\
T_3 &= \eta\partial_t\partial_z\Delta F_3/2B_2
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

式(2.2.5)を  $z$  方向のつりあい式を除く，式(2.2.4)の第1式と第2式に代入すれば，関数  $F_3$  は自明で  $x, y$  方向の釣り合い式を満足していることが判る．関数  $F_3$  と  $\theta_3$  の基礎微分方程式は，式(2.2.5)を式(2.2.4)の第3式に代入して求められる．

$$\begin{aligned}
\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_1\right]\Delta\Delta F_3 &= -2B_2Z/B_1, \\
\Delta\theta_3 &= 0
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

以上のことより，物体力  $Z$  に対応する関数  $F_3$  と  $\theta_3$  は，Navier の式を満足するので変位関数と定義できる．さらにこの式で下添字3を1および2と順次循環すれば，それに伴う他の変位関数  $F_1, \theta_1, F_2, \theta_2$  が順次求められ，各物体力  $X, Y, Z$  に呼応する変位関数の基礎式をベクトル表示すれば次のようになる．

$$\begin{aligned}
\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_1\right]\Delta\Delta\mathbf{F} &= -2B_2\mathbf{B}/B_1, \\
\Delta\boldsymbol{\theta} &= 0
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

ここで， $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ， $\boldsymbol{\theta} = \theta_1\mathbf{i} + \theta_2\mathbf{j} + \theta_3\mathbf{k}$ ， $\mathbf{B} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ ，

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  は単位ベクトル

物体力  $X$  と  $Y$  に対するその他の関数  $F_1, F_2$  に関連する各変位を示せば，それぞれ以下のようにまとめられる．

$$\begin{aligned}
2B_3u_1 &= \left[B_1/B_2\left\{(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_1\right\}\Delta-\partial_x^2\left\{(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right\}\right]F_1, \\
2B_3v_1 &= -\partial_y\partial_x\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right]F_1+\partial_x\theta_1, \\
2B_3w_1 &= -\partial_z\partial_x\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right]F_1-\partial_y\theta_1, \\
T_1 &= \eta\partial_t\partial_x\Delta F_1/2B_2 \\
2B_3u_2 &= -\partial_x\partial_y\left[(\partial_t/k-\Delta)-\gamma_t\eta\partial_t/B_2\right]F_2-\partial_z\theta_2,
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

$$2B_3v_2 = \left[ B_1/B_2 \{ (\partial_t/k - \Delta) - \gamma_t \eta \partial_t / B_1 \} \Delta - \partial_y^2 \{ (\partial_t/k - \Delta) - \gamma_t \eta \partial_t / B_2 \} \right] F_2,$$

$$2B_3w_2 = -\partial_y \partial_z \left[ (\partial_t/k - \Delta) - \gamma_t \eta \partial_t / B_2 \right] F_2 + \partial_y \theta_2,$$

$$T_2 = \eta \partial_t \partial_y \Delta F_2 / 2B_2 \quad (2.2.9)$$

同様に、熱源量  $Q$  に対する変位関数  $F_4$  の基礎式を式(2.2.10)に、また関数  $F_4$  と変位や温度との関係式を式(2.2.11)に示す。

$$\left[ (\partial_t/k - \Delta) - \gamma_t \eta \partial_t / B_1 \right] \Delta \Delta F_4 = 2B_3 Q / B_1 k \quad (2.2.10)$$

$$2B_3u_4 = \gamma_t \partial_x F_4 + \partial_x \theta_4,$$

$$2B_3v_4 = \gamma_t \partial_y F_4 + \partial_y \theta_4,$$

$$2B_3w_4 = \gamma_t \partial_z F_4 + \partial_z \theta_4,$$

$$T_4 = B_1 \Delta F_4 / 2B_3 \quad (2.2.11)$$

関数  $F_4$  も含めて、W. Nowacki が提示した式と同一であるが、W. Nowacki は関数  $\theta_i$  ( $i=1, 3$ ) については何ら言及していない。

式(2.2.4)で  $\eta=0$  と置けば、熱伝達の式が分離される非連成時の式系となり、式(2.2.5)および(2.2.6)中の  $(\partial_t/k - \Delta)$  の項が縮退する。最終的に関数  $\mathbf{F}$  は非連成時の Galerkin-vector と Boussinesq の変位関数に帰着する。

$$\Delta \Delta \mathbf{F} = -2B_2 \mathbf{B} / B_1, \quad \Delta \theta = 0 \quad (2.2.12)$$

また関数  $F_4$  に注目すれば、 $\Delta \Delta$  の項が更に縮退するので、周知の熱伝導式と一致する。

$$(\partial_t/k - \Delta) T = Q/k \quad (2.2.13)$$

## 2. 2. 2 動的熱弾性体の変位関数

次に動的問題について考える．D'Alembert の原理によれば，Navier の式(2.2.4)の左辺に慣性項  $(-\rho\partial^2_t)$  が付加されることになり，式(2.2.4)は次のように変形される．

$$\begin{aligned} (B_1\partial_x^2 + B_3\partial_y^2 + B_3\partial_z^2)u + B_2\partial_x\partial_y v + B_2\partial_x\partial_z w - \gamma_t\partial_x T + X &= \rho\partial^2_t u, \\ B_2\partial_x\partial_y u + (B_3\partial_x^2 + B_1\partial_y^2 + B_3\partial_z^2)v + B_2\partial_x\partial_z w - \gamma_t\partial_y T + Y &= \rho\partial^2_t v, \\ B_2\partial_x\partial_y u + B_2\partial_y\partial_z v + (B_3\partial_x^2 + B_3\partial_y^2 + B_1\partial_z^2)w - \gamma_t\partial_z T + Z &= \rho\partial^2_t w, \\ -\eta\partial_t(\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) + (\Delta - \partial_t/k)T &= -Q/k \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

この式から誘導される関数で縮退する項  $(B_3\Delta - \rho\partial^2_t)$  を削除すれば，式 (2.2.7) と同様にして変位関数  $\mathbf{F}$  と  $\boldsymbol{\theta}$  の基礎式は以下のように得られる．

$$\begin{aligned} (B_3\Delta - \rho\partial^2_t) \{ [B_1(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] \Delta - (\Delta - \partial_t/k)\rho\partial^2_t \} \mathbf{F} &= -\mathbf{B}, \\ (B_3\Delta - \rho\partial^2_t) \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

ここで， $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ， $\boldsymbol{\theta} = \theta_1\mathbf{i} + \theta_2\mathbf{j} + \theta_3\mathbf{k}$ ， $\mathbf{B} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ ，変位と変位関数  $F_i$ ， $\theta_i$  ( $i=1,3$ ) との関係をもとめると次のようになる．

$$\begin{aligned} u &= \left[ (B_1\Delta - B_2\partial_x^2 - \rho\partial^2_t)(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t(\Delta - \partial_x^2) \right] F_1 \\ &\quad - \partial_x\partial_y [B_2(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] F_2 - \partial_z\theta_2 - \partial_x\partial_z [B_2(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] F_3 + \partial_y\theta_3, \\ v &= -\partial_x\partial_y [B_2(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] F_1 + \partial_y\theta_1 \\ &\quad + \left[ (B_1\Delta - B_2\partial_y^2 - \rho\partial^2_t)(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t(\Delta - \partial_y^2) \right] F_2 - \partial_y\partial_z [B_2(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] F_3 - \partial_x\theta_3, \\ w &= -\partial_x\partial_z [B_2(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] F_1 - \partial_y\theta_1 \\ &\quad - \partial_y\partial_z [B_2(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t] F_2 + \partial_x\theta_2 + \left[ (B_1\Delta - B_2\partial_z^2 - \rho\partial^2_t)(\Delta - \partial_t/k) - \gamma_t\eta\partial_t(\Delta - \partial_z^2) \right] F_3, \\ T &= \eta\partial_t(B_3\Delta - \rho\partial^2_t) [\partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3] \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

この式で慣性項  $\rho\partial^2_t$  を無視すれば，式(2.2.15)は式(2.2.7)に帰着する．

また温度場と応力場が非連成，すなわち  $\eta = 0$  のとき，式(2.2.15)と式(2.2.16)で演算子  $(\partial_t/k - \Delta)$  がさらに縮退するので，最終的に式(2.2.15)は周知の波動方程式に帰着する．

$$\begin{aligned} \square_1 \square_2 \mathbf{F} &= -\mathbf{B}, \\ \square_2 \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

ここで， $\square_1 = B_1\Delta - \rho\partial^2_t$ ， $\square_2 = B_3\Delta - \rho\partial^2_t$



記号 $\square_1$  と  $\square_2$  は  $c_L = \sqrt{(B_1/\rho)}$  (縦波の伝播速度) と,  $c_T = \sqrt{(B_3/\rho)}$  (横波の伝播速度) で表現されるダランベルシアン演算子である.

## 2. 2. 3 粘弾性体の変位関数

図-2.2.2 に示されるバネ要素とダッシュポット要素が並列に結合される単純 Voigt 型モデルで表現される 3 次元弾性体の Navier のつり合い式は式 (2.2.4) と相似した形で次のように与えられる.

$$\left[ (B_1 + B_1' \partial_t) \partial_x^2 + (B_3 + B_3' \partial_t) (\partial_y^2 + \partial_z^2) - \rho \partial_t^2 \right] u$$

$$+ (B_2 + B_2' \partial_t) \partial_x \partial_y v + (B_2 + B_2' \partial_t) \partial_x \partial_z w + X = 0$$

$$(B_2 + B_2' \partial_t) \partial_x \partial_y u$$

$$+ \left[ (B_1 + B_1' \partial_t) \partial_y^2 + (B_3 + B_3' \partial_t) (\partial_z^2 + \partial_x^2) - \rho \partial_t^2 \right] v$$

$$+ (B_2 + B_2' \partial_t) \partial_y \partial_z w + Y = 0$$

$$(B_2 + B_2' \partial_t) \partial_x \partial_z u + (B_2 + B_2' \partial_t) \partial_y \partial_z v$$

$$+ \left[ (B_1 + B_1' \partial_t) \partial_z^2 + (B_3 + B_3' \partial_t) (\partial_x^2 + \partial_y^2) - \rho \partial_t^2 \right] w + Z = 0 \quad (2.2.18)$$

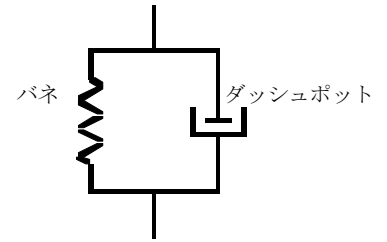


図-2.2.2 Voigt モデル

ここで,  $B_1' = \lambda' + 2\mu'$ ,  $B_2' = \lambda' + \mu'$ ,  $B_3' = \mu'$ , 上添字 (') は粘性効果を示す指標

2. 2. 1 項および 2. 2. 2 項と同様に  $z$  方向の変位関数に着目して議論を展開する. これらの式を満足する関数  $F_3$  を導入し, この関数と変位との関係式を次のように置く.

$$u_3' = -\partial_x \partial_z (B_2 + B_2' \partial_t) \left\{ (B_3 + B_3' \partial_t) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} F_3,$$

$$v_3' = -\partial_y \partial_z (B_2 + B_2' \partial_t) \left\{ (B_3 + B_3' \partial_t) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} F_3,$$

$$w_3' = \left\{ (B_1 + B_1' \partial_t) \Delta - (B_3 + B_3' \partial_t) \partial_z^2 - \rho \partial_t^2 \right\} \left\{ (B_3 + B_3' \partial_t) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} F_3 \quad (2.2.19)$$

式(2.2.19)を式(2.2.18)の第 3 式に代入すると, 関数  $F_3$  に関する基礎式が得られる.

$$\left[ (B_1 + B_1' \partial_t) \Delta - \rho \partial_t^2 \right] \left\{ (B_3 + B_3' \partial_t) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} 2F_3 = -Z \quad (2.2.20)$$

式(2.2.19)および(2.2.20)には  $\left\{ \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\}$  の項が共通に含まれているので縮退させる

必要がある。よって式(2.2.19)および式(2.2.20)は次式のように示される。

$$\begin{aligned} u_3' &= -\partial_x \partial_z \left( B_2 + B_2' \partial_t \right) F_3, \\ v_3' &= -\partial_y \partial_z \left( B_2 + B_2' \partial_t \right) F_3, \\ w_3' &= \left[ \left( B_1 + B_1' \partial_t \right) \Delta - \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \partial_z^2 - \rho \partial_t^2 \right] F_3 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

この縮退によって新しい関数  $\theta_3$  の基礎式が生じる。

$$\begin{aligned} \left[ \left( B_1 + B_1' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right] \left\{ \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} F_3 &= -Z \\ \left\{ \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

関数  $\theta_3$  と変位との関係式は次のように示される。

$$u_3'' = \partial_y \theta_3, \quad v_3'' = -\partial_x \theta_3, \quad w_3'' = 0 \quad (3.2.23)$$

物体力  $Z$  に伴う関数  $F_3$  と  $\theta_3$  は Navier の式を満たすので変位関数となる。そこで、各変位  $u$ ,  $v$ ,  $w$  はこれらの和として得られる。

$$\begin{aligned} u &= u_3' + u_3'' \\ v &= v_3' + v_3'' \\ w &= w_3' + w_3'' \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

変数  $x$ ,  $y$ ,  $z$  を循環させることで、変位関数  $F_3$ ,  $\theta_3$  に相当する変位関数  $F_1$ ,  $F_2$ , および  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  がそれぞれ導かれる。

これらをベクトル表示すると、つぎのようにまとめられる。

$$\begin{aligned} \left[ \left( B_1 + B_1' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right] \left\{ \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} \mathbf{F} &= -\mathbf{B} \\ \left\{ \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta - \rho \partial_t^2 \right\} \boldsymbol{\theta} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

ここで、 $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ ,  $\boldsymbol{\theta} = \theta_1 \mathbf{i} + \theta_2 \mathbf{j} + \theta_3 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{B} = X \mathbf{i} + Y \mathbf{j} + Z \mathbf{k}$ ,

これらの変位関数と変位との関係式は式(2.2.21), 式 (2.2.23) と同様にして得られる。

以下の状態を想定することにより、式(2.2.25)の変位関数と既往の変位関数との関連を検証する。

1) 加速度項を無視する場合

$$\left( B + B_1' \partial_t \right) \left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta \Delta \mathbf{F} = -\mathbf{B},$$

$$\left( B_3 + B_3' \partial_t \right) \Delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (2.2.26)$$

と得られ, Voigt タイプの粘弾性体における Galerkin-vector と Boussinesq の関数となる.

2) 粘性項を無視する場合

$$\left( B_1 \Delta - \rho \partial_t^2 \right) \left( B_3 \Delta - \rho \partial_t^2 \right) \mathbf{F} = -\mathbf{B},$$

$$\left( B_3 \Delta - \rho \partial_t^2 \right) \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (2.2.27)$$

さらに,  $\square_1 = B_1 \Delta - \rho \partial_t^2$ ,  $\square_2 = B_3 \Delta - \rho \partial_t^2$  とおけば, 式(2.2.27)は式(2.2.17)の波動方程式となる.

$$\square_1 \square_2 \mathbf{F} = -\mathbf{B},$$

$$\square_2 \boldsymbol{\theta} = 0$$

3) 加速度項および粘性項を無視する場合

$$B_1 B_3 \Delta \Delta \mathbf{F} = -\mathbf{B}$$

$$B_3 \Delta \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (2.2.28)$$

変位関数  $\mathbf{F}$  と  $\boldsymbol{\theta}$  は通常の Galerkin-vector と Boussinesq の関数と一致する.

ここで, 変位関数に汎用性を持たせ, 複雑な粘弾性体の挙動を表現するために,  $k$  個の Voigt 型モデルが並立する一般化要素を考え, 式(2.2.18)の弾性係数を次のようにとる.

$$\lambda = \lambda_0 + \sum_k \partial_t^k \lambda_k', \quad \mu = \mu_0 + \sum_k \partial_t^k \mu_k'$$

式(2.2.25)で示される変位関数  $\mathbf{F}$  と  $\boldsymbol{\theta}$  に関する基礎式は以下のように表される.

$$\left( \Gamma_3 \Delta - \rho \partial_t^2 \right) \left( \Gamma_1 \Delta - \rho \partial_t^2 \right) \mathbf{F} = -\mathbf{B},$$

$$\left( \Gamma_3 \Delta - \rho \partial_t^2 \right) \boldsymbol{\theta} = 0 \quad (2.2.29)$$

$$\text{ここで, } \Gamma_1 = (\lambda_0 + 2\mu_0) + \sum \partial_t^k \left( \lambda_k' + 2\mu_k' \right)$$

$$\Gamma_2 = (\lambda_0 + \mu_0) + \sum \partial_t^k \left( \lambda_k' + \mu_k' \right)$$

$$\Gamma_3 = \mu_0 + \sum \partial_t^k \mu_k'$$

$$\partial^k_t = \partial^k / \partial t^k$$

この変位関数と変位との関係式を各成分ごとに示せば、次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u &= (\Gamma_1 \Delta - \Gamma_2 \partial_x^2 - \rho \partial_t^2) F_1 - \partial_x \partial_y \Gamma_2 F_2 - \partial_z \theta_2 - \partial_x \partial_z \Gamma_2 F_3 + \partial_y \theta_3, \\ v &= -\partial_x \partial_y \Gamma_2 F_1 + \partial_z \theta_1 + (\Gamma_1 \Delta - \Gamma_2 \partial_y^2 - \rho \partial_t^2) F_2 - \partial_y \partial_z \Gamma_2 F_3 - \partial_x \theta_3, \\ w &= -\partial_x \partial_z \Gamma_2 F_1 - \partial_y \theta_1 - \partial_y \partial_z \Gamma_2 F_2 + \partial_x \theta_2 + (\Gamma_1 \Delta - \Gamma_2 \partial_z^2 - \rho \partial_t^2) F_3 \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

式(2.2.29)および(2.2.30)で表される  $\lambda_k'$ ,  $\mu_k'$  は実験資料から決定される物性値である。

## 2. 2. 4 圧密方程式の変位関数

M.A.Biot の提案した圧密方程式は、間隙水圧の変動を中心に据える圧密方程式と異なり、土粒子骨組みの変形に着目した式系で示される。すなわち、温度負荷を受ける Navier の式(2.2.4)の温度  $T$  を間隙水圧  $p$  に、 $T$  に関連するパラメータをそれぞれ置き換えることにより得られ、数学的には同等の式系であると言える。

$$\begin{aligned} (B_1 \partial_x^2 + B_3 \partial_y^2 + B_3 \partial_z^2) u + B_2 \partial_x \partial_y v + B_2 \partial_x \partial_z w + \partial_x p + X &= 0, \\ B_2 \partial_x \partial_y u + (B_3 \partial_x^2 + B_1 \partial_y^2 + B_3 \partial_z^2) v + B_2 \partial_y \partial_z w + \partial_y p + Y &= 0, \\ B_2 \partial_x \partial_z u + B_2 \partial_y \partial_z v + (B_3 \partial_x^2 + B_3 \partial_y^2 + B_1 \partial_z^2) w + \partial_z p + Z &= 0 \\ \partial_t (\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w) - C \Delta p &= -Q \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

ここで、 $C = k / \gamma_w$ ,  $\gamma_w$  ; 水の単位質量

$Q$  ; 湧出量,  $p$  ; 間隙水圧,  $k$  ; 透水係数

関数  $F_3$ ,  $\theta_3$  の基礎微分方程式は以下のように得られる。

$$\begin{aligned} [C \Delta - \partial_t / B_1] \Delta \Delta F_3 &= -2Z / B_1, \\ \Delta \theta_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

添字 3 を 1, 2 と循環すれば、物体力  $X$  および  $Y$  に対応する変位関数が順次求められる。式(2.2.31)を満足する関数  $F_3$ ,  $\theta_3$  と変位および間隙水圧との関係式は、式(2.2.5)および(2.2.6)と同様にして誘導され、次のようになる。

$$\begin{aligned} 2B_3 u_3 &= -\partial_x \partial_z (B_2 C \Delta - \partial_t) F_3 + \partial_y \theta_3, \\ 2B_3 v_3 &= -\partial_y \partial_z (B_2 C \Delta - \partial_t) F_3 - \partial_x \theta_3 \\ 2B_3 w_3 &= [(B_1 C \Delta - \partial_t) \Delta - \partial_z^2 (B_2 C \Delta - \partial_t)] F_3, \end{aligned}$$

$$p_3 = -\partial_t \partial_z \Delta F_3 / 2 \quad (2.2.33)$$

また粘土粒子体が動的な作用を受ける場合の変位関数については、式(2.2.25)と同様に導くことができる。

## 2. 2. 5 2次元弾性体の変位関数

2. 2. 2項で得られた変位関数を、非連成時を対象とする2次元弾性体に変換する場合、3次元弾性体の Hooke の法則を平面ひずみや平面応力状態で表現する。これらの状態にいたる過程では次のような条件が課せられる。

$$\begin{aligned} \text{平面ひずみ} : \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xz} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0 \\ \text{平面応力} : \sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

本論文では平面応力に限定して議論を進める。式(2.2.34)を式(2.2.3)に課すと、応力  $\sigma_x$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 4\mu(\lambda + \mu)\varepsilon_x / (\lambda + 2\mu) + 2\lambda\mu\varepsilon_y / (\lambda + 2\mu) - 2\mu\gamma_t T / (\lambda + 2\mu) \\ &= 4B_3B_2\varepsilon_x / B_1 + 2B_3(B_2 - B_3)\varepsilon_y / B_1 - 2B_3\gamma_t T / B_1 \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

ここで、 $\lambda$ ,  $\mu$  ; ラメの定数,  $B_1 = \lambda + 2\mu$ ,  $B_2 = \lambda + \mu$ ,  $B_3 = \mu$   
同様に、応力  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  も求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_y &= 2B_3(B_2 - B_3)\varepsilon_x / B_1 + 4B_3B_2\varepsilon_y / B_1 - 2B_3\gamma_t T / B_1 \\ \tau_{xy} &= B_3\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

式(2.2.35), および(2.2.36)を応力のつりあい式(2.2.1)に代入することにより、2次元問題での変位で表された Navier の式が得られる。

$$\begin{aligned} \left(4B_3B_2 / B_1\partial_x^2 + B_3\partial_y^2 - \rho\partial_t^2\right)u + \{2B_3(B_2 - B_3) / B_1 + B_3\}\partial_x\partial_y v + X - 2B_3\gamma_t\partial_x T / B_1 = 0, \\ \{2B_3(B_2 - B_3) / B_1 + B_3\}\partial_x\partial_y u + \left(B_3\partial_x^2 + 4B_3B_2 / B_1\partial_y^2 - \rho\partial_t^2\right)v + Y - 2B_3\gamma_t\partial_y T / B_1 = 0 \end{aligned} \quad (2.2.37)$$

この式に関数  $\phi_1$  を導入し、変位との関係式を次のように置く。

$$\begin{aligned} 2B_3u_1 &= \left(B_3\partial_x^2 + 4B_3B_2 / B_1\partial_y^2 - \rho\partial_t^2\right)\phi_1, \\ 2B_3v_1 &= \{2B_3(B_2 - B_3) / B_1 + B_3\}\partial_x\partial_y\phi_1 \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

式(2.2.38)を式(2.2.37)の第1式に代入すれば、関数  $\phi_1$  の基礎式が得られる。

$$\left(4B_2B_3\Delta / B_1 - \rho\partial_t^2 / B_3\right)\left(\Delta - \rho\partial_t^2 / B_3\right)\phi_1 = -X / 2 + B_3\gamma_t\partial_x T / B_1 \quad (2.2.39)$$

関数  $\phi_1$  は Navier の式を満足しているため、変位関数であることが判る。同様に、関数  $\phi_2$  についても誘導できる。関数の基礎式、および変位との関係式は以下のように示される。

$$(4B_2B_3\Delta/B_1 - \rho\partial^2_t/B_3)(\Delta - \rho\partial^2_t/B_3)\phi_2 = -Y/2 + B_3\gamma_t\partial_y T/B_1 \quad (2.2.40)$$

$$2B_3u_2 = -\{2B_3(B_2 - B_3)/B_1 + B_3\}\partial_x\partial_y\phi_2,$$

$$2B_3v_2 = (B_3\partial_x^2 + 4B_3B_2/B_1\partial_y^2 - \rho\partial^2_t)\phi_2 \quad (2.2.41)$$

$x$ ,  $y$  方向の  $u$  と  $v$  はこれらの和で示される.

$$2B_3u = 2B_3u_1 + 2B_3u_2,$$

$$2B_3v = 2B_3v_1 + 2B_3v_2 \quad (2.2.42)$$

式(2.2.39)と式(2.2.40)の右辺, すなわち物体力  $X$ ,  $Y$ , および熱負荷  $T$  がない場合には関数  $\phi_1$  と  $\phi_2$  は等価になる.

## 2. 3 厚板理論の誘導と級数表示

2. 2節で得られた非連成時の式(2.2.12)の物体力  $\mathbf{B}$  を考慮した変位関数  $\mathbf{F}$  から、厚板理論を誘導する。説明を簡単にするために、 $z$  方向に関する変位関数  $F_3$  を取り上げる。変位関数の基礎式は次のように示される。

$$\Delta\Delta F_3 = -2B_2Z / B_1$$

$$\Delta\theta_3 = 0 \quad (2.3.1)$$

ここで、 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ ， $\partial_x^2 = \partial^2 / \partial x^2$ ， $\partial_y^2 = \partial^2 / \partial y^2$ ， $\partial_z^2 = \partial^2 / \partial z^2$ ，

$$B_2 = \lambda + \mu， B_1 = \lambda + 2\mu， \quad \lambda， \mu； \text{ラメの定数}$$

内部に熱供給限のない定常状態の温度分布式(2.2.13)は次のようになる。

$$\Delta T = 0 \quad (2.3.2)$$

Duhamel の類似によれば温度の勾配は物体力に置換できるので、版厚方向 ( $z$  方向) に温度が変化する場合、物体力も同様に版厚方向に変化する。後述する多層版の展開を見込めば、版厚方向の温度分布を高々  $z$  の 1 次関数と想定しても一般性を失うことはないと考えられる。板の上面温度  $T_u$  と下面温度  $T_l$  が異なる熱負荷を受ける場合、版厚方向の温度分布は熱伝導式を解くことで得られる。

温度  $T$  を Fourier 級数で展開すれば、次の式で表される。

$$T = \sum_m \sum_n T' \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.3)$$

ここで、上添字( ' )は Fourier 係数を表す。

$$\alpha_m = m\pi / a， \beta_n = n\pi / b，$$

$a， b$  ;  $x$  および  $y$  方向のスパン

$m， n$  ;  $x， y$  方向の Fourier 級数の項数

式(2.3.3)を式(2.3.2)に代入すれば、 $z$  方向の温度分布に関する式が求められる。

$$T = \sum_m \sum_n [D_1 ch\gamma z + D_2 sh\gamma z] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.4)$$

ここで、 $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$ ， $ch\gamma z = \cosh \gamma z$ ， $sh\gamma z = \sinh \gamma z$

式(2.3.4)を式(2.3.2)に代入し、上下面の温度条件より積分定数  $D_1$  と  $D_2$  を決定すれば、温度分布は次のように示される。

$$T = \sum_m \sum_n \left[ T'_a ch\gamma z / ch\zeta + T'_b sh\gamma z / sh\zeta \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.5)$$

ここで,  $T'_a = (T'_l + T'_u)/2$ ,  $T'_b = (T'_l - T'_u)/2$ ,

$$ch\zeta = \cosh \zeta, \quad sh\zeta = \sinh \zeta, \quad \zeta = \gamma h/2$$

版厚  $h$  がスパン  $a$  に比べて小さい場合, 双曲線関数を漸近展開すると次式が得られる.

$$T = \sum_m \sum_n \left[ T'_m z + T'_p \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.6)$$

ここで,  $T'_m = T'_b/h$ ,  $T'_p = T'_a/2$ ,  $ch\zeta = 1 + \zeta^2/2 + \dots$ ,  $sh\zeta = \zeta + \zeta^3/6 + \dots$

従って版厚方向の温度分布は式(2.3.6)のように  $z$  の 1 次関数で近似できる. そこで式(2.3.1)の物体力  $Z$  を次のように版厚方向に線形分布すると仮定する.

$$Z = A_z z + B_z \quad (2.3.7)$$

式(2.3.1)の一般解は, 物体力  $Z$  に関する特解と同次解の和として与えられる.

#### a) 特解

全周単純支持される矩形厚板を図-2.3.1 のように考え,  $x$  および  $y$  軸の座標原点を隅角部に置き, 版厚の中央面に  $z$  軸をとる. 変位関数の特解  $F_3^p$  は式(2.3.1)より得られ, 三角級数で表せば次のように示される. なお上添字  $p$  は特解を意味する.

$$F_3^p = -\sum_m \sum_n \left[ A'_z z + B'_z \right] / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.8)$$

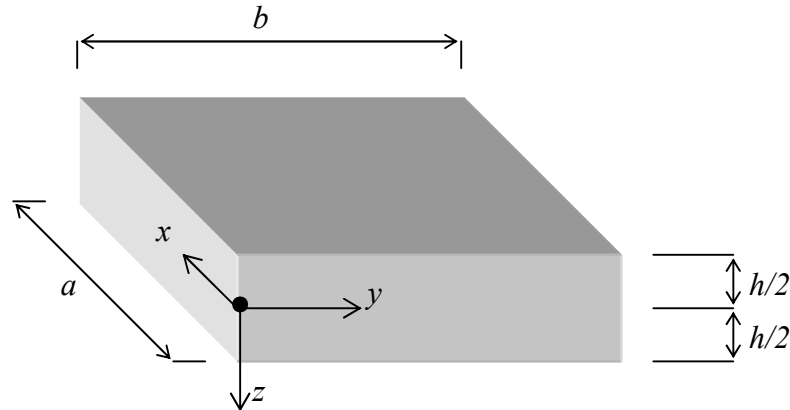


図-2.3.1 全周単純支持される厚板モデル

ここで  $A'_z, B'_z$ ;  $A_z, B_z$  の Fourier 係数,  $\nu$  : Poisson 比

式(2.3.8)を式(2.3.1)に代入して, 関数  $F_3^p$  による  $x, y, z$  方向の変位  $u_3^p, v_3^p$  および  $w_3^p$  が求められる.

$$2\mu u_3^p = \sum_m \sum_n \alpha_m A'_z / \gamma^4 (1-\nu) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y,$$



$$2\mu\omega_3^p = \sum_m \sum_n \beta_n A_z' / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$2\mu\omega_3^p = 2(1-\nu) \sum_m \sum_n \left( A_z' z + B_z' \right) / \gamma^2 (1-\nu) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.9)$$

同様にして、他の変位関数  $F_1^p$ ,  $F_2^p$  に呼応する変位がそれぞれ求められる。

$$2\mu u_1^p = -\sum_m \sum_n [1-2(1-\nu)\omega_a] \left( A_x' z + B_x' \right) \alpha_m^2 / \gamma^4 (1-\nu) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$2\mu\omega_1^p = -\sum_m \sum_n \alpha_m \beta_n \left( A_x' z + B_x' \right) / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$2\mu\omega_1^p = -\sum_m \sum_n \alpha_m A_x' / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.10)$$

$$2\mu u_2^p = -\sum_m \sum_n \alpha_m \beta_n \left( A_y' z + B_y' \right) / \gamma^4 (1-\nu) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$2\mu\omega_2^p = -\sum_m \sum_n [1-2(1-\nu)\omega_b] \left( A_y' z + B_y' \right) \beta_n^2 / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y$$

$$2\mu\omega_2^p = -\sum_m \sum_n \beta_n A_y' / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (2.3.11)$$

ここで、 $\omega_b = \gamma^2 / \beta_n^2$ ,  $\omega_a = \gamma^2 / \alpha_m^2$

独立な物体力  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  が同時に作用する場合の特解による変位はこれらの和として与えられる。

$$2\mu u^p = 2\mu u_1^p + 2\mu u_2^p + 2\mu u_3^p,$$

$$2\mu\omega^p = 2\mu\omega_1^p + 2\mu\omega_2^p + 2\mu\omega_3^p,$$

$$2\mu\omega^p = 2\mu\omega_1^p + 2\mu\omega_2^p + 2\mu\omega_3^p \quad (2.3.12)$$

これらの変位を Hooke の法則、すなわち式(2.2.3)に代入すれば、特解のみから得られる応力  $\sigma_x^p$ ,  $\tau_{xy}^p$  等が求められる。

$$\sigma_x^p = \sum_m \sum_n \left[ \left\{ 1 - (2-\nu)\omega_a \right\} \left( A_x' z + B_x' \right) + (1-\nu)\omega_a \left( A_y' z + B_y' \right) \beta_n / \alpha_m \right. \\ \left. - (1-\nu)\omega_a A_z' / \alpha_m - (1-\nu)\gamma_t \left( T_m' z + T_p' \right) \gamma^4 / \alpha_m^3 \right] \alpha_m^3 / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\sigma_y^p = \sum_m \sum_n \left[ (1-\nu)\omega_b \left( A_x' z + B_x' \right) \alpha_m / \beta_n + \left\{ 1 - (2-\nu)\omega_b \right\} \left( A_y' z + B_y' \right) \right. \\ \left. - (1-\nu)\omega_b A_z' / \beta_n - (1-\nu)\gamma_t \left( T_m' z + T_p' \right) \gamma^4 / \beta_n^3 \right] \beta_n^3 / \gamma^4 (1-\nu) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,$$

$$\sigma_z^p = -\sum_m \sum_n \left[ \nu \left\{ \alpha_m \left( A_x' z + B_x' \right) + \beta_n \left( A_y' z + B_y' \right) \right\} / \gamma \right]$$

$$\begin{aligned}
& -(2-\nu)A'_z / \gamma + (1-\nu)\gamma_i(T'_m z + T'_p)\gamma^4 \Big] 1/\gamma^4(1-\nu)\sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\tau_{xy}^p = & -\sum_m \sum_n \left[ \{1-(1-\nu)\omega_a\} (A'_x z + B'_x) \alpha_m / \gamma + \{1-(1-\nu)\omega_b\} (A'_y z + B'_y) \beta_n / \gamma \right. \\
& \left. - A'_z / \gamma \right] \alpha_m \beta_n \gamma / \gamma^4 (1-\nu) \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \\
\tau_{xz}^p = & -\sum_m \sum_n \left[ \{1/\omega_a - (1-\nu)\} A'_x / \alpha_m + A'_y \beta_n / \gamma^2 - (1-\nu)(A'_z z + B'_z) \right] \\
& \times \alpha_m / \gamma^2 (1-\nu) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\tau_{yz}^p = & -\sum_m \sum_n \left[ A'_x \alpha_m / \gamma^2 + \{1/\omega_b - (1-\nu)\} A'_y / \beta_n - (1-\nu)(A'_z z + B'_z) \right] \\
& \times \beta_n / \gamma^2 (1-\nu) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

b) 同次解

同次解は式(2.3.1)より得られ、その基礎式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
\Delta \Delta F_3^h &= 0 \\
\Delta \theta_3^h &= 0
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

関数  $F_3^h$  と  $\theta_3^h$  の三角級数の表示は、温度分布の算出と同様にして得られる。

$$\begin{aligned}
F_3^h &= \sum_m \sum_n [C_1 ch \gamma z + C_2 sh \gamma z + C_3 \gamma z ch \gamma z + C_4 \gamma z sh \gamma z] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\theta_3^h &= \sum_m \sum_n [C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

ここで、 $C_1 \sim C_6$  は境界条件から定まる積分定数、上添字  $h$  は同次解を意味する。

式(2.3.15)を式(2.2.5)に代入すると、 $x$ 、 $y$  および  $z$  方向の変位  $u^h$ 、 $v^h$ 、 $w^h$  が求められる。

$$\begin{aligned}
2\mu u^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 (\gamma z sh \gamma z + ch \gamma z) + C_4 (\gamma z ch \gamma z + sh \gamma z) \\
& \quad + (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \beta_n / \alpha_m \gamma] \alpha_m \gamma \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
2\mu v^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 (\gamma z sh \gamma z + ch \gamma z) + C_4 (\gamma z ch \gamma z + sh \gamma z) \\
& \quad - (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \alpha_m / \beta_n \gamma] \beta_n \gamma \sin \alpha_m x \cos \beta_n y, \\
2\mu w^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 ch \gamma z + C_2 sh \gamma z + C_3 \{\gamma z ch \gamma z - 2(1-2\nu)sh \gamma z\} \\
& \quad + C_4 \{\gamma z sh \gamma z - 2(1-2\nu)ch \gamma z\}] \gamma^2 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

同様にして、応力は式(2.3.16)を Hooke の法則に代入することで得られる。

$$\begin{aligned}
\sigma_x^h &= \sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z + (1 + 2\nu \omega_a) ch \gamma z \} \\
&\quad + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z + (1 + 2\nu \omega_a) sh \gamma z \} + (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \beta_n / \alpha_m \gamma] \alpha_m^2 \gamma \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\sigma_y^h &= \sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z + (1 + 2\nu \omega_b) ch \gamma z \} \\
&\quad + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z + (1 + 2\nu \omega_b) sh \gamma z \} - (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \alpha_m / \beta_n \gamma] \beta_n^2 \gamma \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\sigma_z^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z - (1 - 2\nu) ch \gamma z \} \\
&\quad + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z - (1 - 2\nu) sh \gamma z \}] \gamma^3 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\tau_{xy}^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 (\gamma z sh \gamma z + ch \gamma z) + C_4 (\gamma z ch \gamma z + sh \gamma z) \\
&\quad + (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) (\alpha_m^2 - \beta_n^2) / \alpha_m \beta_n \gamma] \alpha_m \beta_n \gamma \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \\
\tau_{xz}^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 (\gamma z ch \gamma z + 2\nu sh \gamma z) + C_4 (\gamma z sh \gamma z + 2\nu ch \gamma z) \\
&\quad + (C_5 sh \gamma z + C_6 ch \gamma z) \beta_n / 2\alpha_m \gamma] \alpha_m \gamma^2 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\tau_{yz}^h &= -\sum_m \sum_n [C_1 ch \gamma z + C_2 sh \gamma z + C_3 (\gamma z ch \gamma z + 2\nu sh \gamma z) + C_4 (\gamma z sh \gamma z + 2\nu ch \gamma z) \\
&\quad - (C_5 sh \gamma z + C_6 ch \gamma z) \alpha_m / 2\beta_n \gamma] \beta_n \gamma^2 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

c) 一般解

変位関数  $\mathbf{F}$  の一般解は特解と同次解との和で表されることより、変位については以下のように示される。

$$\begin{aligned}
2\mu u &= 2\mu u^p + 2\mu u^h \\
&= -\sum_m \sum_n \left\{ [1 - (2 - \nu)\omega_a] (A'_x z + B'_x) + (A'_y z + B'_y) \beta_n / \alpha_m \right. \\
&\quad \left. - A'_z / \alpha_m \right] \alpha_m / \gamma^5 (1 - \nu) + C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 (\gamma z sh \gamma z + ch \gamma z) \\
&\quad + C_4 (\gamma z ch \gamma z + sh \gamma z) + (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \beta_n / \alpha_m \gamma \} \alpha_m \gamma \cos \alpha_m x \sin \beta_n y,
\end{aligned}$$

$$2\mu v = 2\mu v^p + 2\mu v^h$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_m \sum_n \left\langle \left[ \left( A'_x z + B'_x \right) \alpha_m / \beta_n + \{1-2(1-\nu)\omega_b\} \left( A'_y z + B'_y \right) - A'_z / \beta_n \right] \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) \right. \\
&\quad + C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z + ch \gamma z \} \\
&\quad \left. + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z + sh \gamma z \} - (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \alpha_m / \beta_n \gamma \right\rangle \beta_n \gamma \sin \alpha_m x \cos \beta_n y,
\end{aligned}$$

$$2\mu w = 2\mu w^p + 2\mu w^h$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_m \sum_n \left\langle \left[ \left( A'_x \alpha_m / \gamma + A'_y \beta_n / \gamma \right) / \gamma - 2(1-\nu) \left( A'_z z + B'_z \right) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \right. \\
&\quad + C_1 ch \gamma z + C_2 sh \gamma z + C_3 \{ \gamma z ch \gamma z - 2(1-2\nu) sh \gamma z \} \\
&\quad \left. + C_4 \{ \gamma z sh \gamma z - 2(1-2\nu) ch \gamma z \} \right\rangle \gamma^2 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

同様にして，応力は次のように得られる．

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^p + \sigma_x^h \\
&= \sum_m \sum_n \left\langle \left[ \{1-(2-\nu)\omega_a\} \left( A'_x z + B'_x \right) + (1-\nu\omega_a) \left( A'_y z + B'_y \right) \right] \beta_n / \alpha_m \right. \\
&\quad \left. - (1-\nu\omega_a) A'_z / \alpha_m - (1-\nu)\gamma_t \left( T'_m z + T'_p \right) \gamma^4 / \alpha_m^3 \right] \alpha_m / \gamma^5 (1-\nu) \right. \\
&\quad + C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z + (1+2\nu\omega_a) ch \gamma z \} \\
&\quad \left. + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z + (1+2\nu\omega_a) sh \gamma z \} + (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \beta_n / \alpha_m \gamma \right\rangle \alpha_m^2 \gamma \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y &= \sum_m \sum_n \left\langle \left[ \{1-\nu\omega_b\} \left( A'_x z + B'_x \right) \alpha_m / \beta_n + \{1-(2-\nu)\omega_b\} \left( A'_y z + B'_y \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1-\nu\omega_b) A'_z / \beta_n - (1-\nu)\gamma_t \left( T'_m z + T'_p \right) \gamma^4 / \beta_n^3 \right] \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) \sin \beta_n y \right. \\
&\quad + C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z + (1+2\nu\omega_b) ch \gamma z \} \\
&\quad \left. + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z + (1+2\nu\omega_b) sh \gamma z \} - (C_5 ch \gamma z + C_6 sh \gamma z) \alpha_m / \beta_n \gamma \right\rangle \beta_n^2 \gamma \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z &= -\sum_m \sum_n \left\langle \left[ \nu \left\{ \alpha_m \left( A'_x z + B'_x \right) + \beta_n \left( A'_y z + B'_y \right) \right\} / \gamma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (2-\nu) A'_z / \gamma + (1-\nu)\gamma_t \left( T'_m z + T'_p \right) \gamma^4 \right] / \gamma^4 (1-\nu) \right. \\
&\quad + C_1 sh \gamma z + C_2 ch \gamma z + C_3 \{ \gamma z sh \gamma z - (1-2\nu) ch \gamma z \} \\
&\quad \left. + C_4 \{ \gamma z ch \gamma z - (1-2\nu) sh \gamma z \} \right\rangle \gamma^3 \sin \alpha_m x \sin \beta_n y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & -\sum_m \sum_n \left\langle \left[ \{1 - (1-\nu)\omega_a\} (A'_x z + B'_x) \alpha_m / \gamma \right. \right. \\
& + \{1 - (1-\nu)\omega_b\} (A'_y z + B'_y) \beta'_n \gamma - A'_z / \gamma \left. \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
& + C_1 sh\gamma z + C_2 ch\gamma z + C_3 (\gamma z sh\gamma z + ch\gamma z) + C_4 (\gamma z ch\gamma z + sh\gamma z) \\
& - (C_5 ch\gamma z + C_6 sh\gamma z) (\alpha_m^2 - \beta_n^2) / \alpha_m \beta_n \gamma \rangle \alpha_m \beta_n \gamma \cos \alpha_m x \cos \beta_n y, \\
\tau_{xz} = & -\sum_m \sum_n \left\langle \left[ \{1 / \omega_a - (1-\nu)\} A'_x / \alpha_m + A'_y \beta'_n / \gamma^2 - (1-\nu) (A'_z z + B'_z) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \right. \\
& + C_1 ch\gamma z + C_2 sh\gamma z + C_3 (\gamma z ch\gamma z + 2\nu sh\gamma z) + C_4 (\gamma z sh\gamma z + 2\nu ch\gamma z) \\
& + (C_5 sh\gamma z + C_6 ch\gamma z) \beta_n / 2\alpha_m \gamma \rangle \alpha_m \gamma^2 \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \\
\tau_{yz} = & -\sum_m \sum_n \left\langle \left[ A'_x \alpha_m / \gamma^2 + \{1 / \omega_b - (1-\nu)\} A'_x / \beta_n - (1-\nu) (A'_z z + B'_z) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \right. \\
& + C_1 ch\gamma z + C_2 sh\gamma z + C_3 (\gamma z ch\gamma z + 2\nu sh\gamma z) + C_4 (\gamma z sh\gamma z + 2\nu ch\gamma z) \\
& - (C_5 sh\gamma z + C_6 ch\gamma z) \alpha_m / 2\beta_n \gamma \rangle \beta_n \gamma^2 \sin \alpha_m x \cos \beta_n y
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

次に版の上下面における境界条件は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
z = -h/2 : \sigma_z = p_u, \quad \tau_{xz} = t_{xu}, \quad \tau_{yz} = t_{yu} \\
z = -h/2 : \sigma_z = p_l, \quad \tau_{xz} = t_{xl}, \quad \tau_{yz} = t_{yl}
\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

式(2.3.15)に示される 6 つの積分定数は版の上下面の境界条件から決定される。代表的な境界条件として、応力が規定される場合と変位が規定される場合の 2 つが挙げられる。第四章で示す多層系構造の解析では、前者は層間で伝達される応力を未知量とする応力法の基本形となり、後者は層間の変位を未知量とする変位法の基本形となる。

応力法の上下面での境界条件は以下ようになる。

積分定数  $C_1 \sim C_6$  は式(2.3.20)より決定される。

$$\begin{aligned}
C_1 = & p_m (\zeta tn \zeta + 2\nu) / 2\gamma^3 D_m sh \zeta - (\alpha_m t_{xp} + \beta_n t_{yp}) \{ \zeta ct \zeta - (1-2\nu) \} / 2\gamma^4 D_m ch \zeta \\
& + S_{zm} (\zeta tn \zeta + 2\nu) / 2D_m sh \zeta - (S_{xp} / \omega_a + S_{yp} / \omega_b) \{ \zeta ct \zeta - (1-2\nu) \} / 2D_m ch \zeta, \\
C_2 = & p_p (\zeta ct \zeta + 2\nu) / 2\gamma^3 D_p ch \zeta - (\alpha_m t_{xm} + \beta_n t_{ym}) \{ \zeta tn \zeta - (1-2\nu) \} / 2\gamma^4 D_p sh \zeta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + S_{zp} (\zeta ct\zeta + 2\nu) / 2D_p ch\zeta - (S_{xm} / \omega_a + S_{ym} / \omega_b) \{ \zeta tn\zeta - (1-2\nu) \} / 2D_p sh\zeta, \\
C_3 = & -p_p / 2\gamma^3 D_p ch\zeta + (\alpha_m t_{xm} + \beta_n t_{ym}) / 2\gamma^4 D_p sh\zeta - S_{zp} / 2D_p ch\zeta + (S_{xm} / \omega_a + S_{ym} / \omega_b) / 2D_p sh\zeta, \\
C_4 = & -p_m / 2\gamma^3 D_m sh\zeta + (\alpha_m t_{xp} + \beta_n t_{yp}) / 2\gamma^4 D_m ch\zeta - S_{zm} / 2D_m sh\zeta + (S_{xp} / \omega_a + S_{yp} / \omega_b) / 2D_m ch\zeta, \\
C_5 = & -(\beta_n t_{xm} - \alpha_m t_{ym}) / \gamma^3 sh\zeta - (S_{xm} - S_{ym}) \alpha_m \beta_n / \gamma sh\zeta \\
C_6 = & -(\beta_n t_{xp} - \alpha_m t_{yp}) / \gamma^3 ch\zeta - (S_{xp} - S_{yp}) \alpha_m \beta_n / \gamma ch\zeta
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

ここで,  $tn\zeta = sh\zeta / ch\zeta$ ,  $ct\zeta = ch\zeta / sh\zeta$ ,

$$\begin{aligned}
D_p &= \zeta (tn\zeta - ct\zeta) - 1, \quad D_m = \zeta (ct\zeta - tn\zeta) - 1, \\
p_p &= p'_l + p'_u, \quad p_m = p'_l - p'_u, \quad t_{xp} = t'_{xl} + t'_{xu}, \quad t_{xm} = t'_{xl} - t'_{xu}, \\
t_{yp} &= t'_{yl} + t'_{yu}, \quad t_{ym} = t'_{yl} - t'_{yu}, \\
S_{xp} &= S_{xl} + S_{xu}, \quad S_{xm} = S_{xl} - S_{xu}, \quad S_{yp} = S_{yl} + S_{yu}, \quad S_{ym} = S_{yl} - S_{yu}, \\
S_{zp} &= S_{zl} + S_{zu}, \quad S_{zm} = S_{zl} - S_{zu}, \\
S_{xl} &= \left[ \{ 1/\omega_a - (1-\nu) \} A'_x / \alpha_m + A'_y \beta_n / \gamma^2 - (1-\nu) (A'_z h/2 + B'_z) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
S_{xu} &= \left[ \{ 1/\omega_a - (1-\nu) \} A'_x / \alpha_m + A'_y \beta_n / \gamma^2 - (1-\nu) (-A'_z h/2 + B'_z) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
S_{yl} &= \left[ A'_x \alpha_m / \gamma^2 + \{ 1/\omega_b - (1-\nu) \} A'_y / \beta_n - (1-\nu) (A'_z h/2 + B'_z) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
S_{yu} &= \left[ A'_x \alpha_m / \gamma^2 + \{ 1/\omega_b - (1-\nu) \} A'_y / \beta_n - (1-\nu) (-A'_z h/2 + B'_z) \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
S_{zl} &= \left[ \nu \left\{ \alpha_m (A'_x h/2 + B'_x) + \beta_n (A'_y h/2 + B'_y) \right\} / \gamma - (2-\nu) A'_z / \gamma \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
& + (1-\nu) \gamma_t (T'_m h/2 + T'_p) / \gamma^3 (1-\nu) \\
S_{zu} &= \left[ \nu \left\{ \alpha_m (-A'_x h/2 + B'_x) + \beta_n (-A'_y h/2 + B'_y) \right\} / \gamma - (2-\nu) A'_z / \gamma \right] / \gamma^4 (1-\nu) \\
& + (1-\nu) \gamma_t (-T'_m h/2 + T'_p) / \gamma^3 (1-\nu)
\end{aligned}$$

これらの積分定数を式(2.3.16)および式(2.3.17)に代入すれば, 変位および応力が得られる.

一方, 変位法の上下面での境界条件は以下のようなになる.

$$\begin{aligned}
z = -h/2 : & \quad u = u_u, \quad v = v_u, \quad w = w_u \\
z = h/2 : & \quad u = u_l, \quad v = v_l, \quad w = w_l
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

同様にして, 積分定数が決定される.

$$\begin{aligned}
C_1 &= -W_p(\zeta ct\zeta + 1)/2\gamma^2 D_m' ch\zeta + (\alpha_m U_m + \beta_n V_m)\{\zeta tn\zeta - 2(1-2\nu)\}/2\gamma^3 D_m' sh\zeta \\
&\quad - B_m^p(\zeta ct\zeta + 1)/2D_m' ch\zeta + (\alpha_m B_m^u + \beta_n B_m^v)\{\zeta tn\zeta - 2(1-2\nu)\}/2\gamma^2 D_m' sh\zeta, \\
C_2 &= -W_m(\zeta tn\zeta + 1)/2\gamma^2 D_p' sh\zeta + (\alpha_m U_p + \beta_n V_p)\{\zeta ct\zeta - 2(1-2\nu)\}/2\gamma^3 D_p' ch\zeta \\
&\quad - B_m^w(\zeta tn\zeta + 1)/2D_p' sh\zeta + (\alpha_m B_p^u + \beta_n B_p^v)\{\zeta ct\zeta - 2(1-2\nu)\}/2\gamma^2 D_p' ch\zeta, \\
C_3 &= W_m/2\gamma^2 D_p' sh\zeta - (\alpha_m U_p + \beta_n V_p)/2\gamma^3 D_p' sh\zeta - B_m^w/2D_p' sh\zeta + (\alpha_m B_p^u + \beta_n B_p^v)/2\gamma^2 D_p' ch\zeta, \\
C_4 &= -W_p/2\gamma^2 D_m' ch\zeta - (\alpha_m U_m + \beta_n V_m)/2\gamma^3 D_m' sh\zeta + B_m^p/2D_m' ch\zeta - (\alpha_m B_m^u + \beta_n B_m^v)/2\gamma^2 D_m' sh\zeta, \\
C_5 &= (\alpha_m V_p - \beta_n U_p)/2\gamma^2 ch\zeta - (B_p^u - B_p^v)\alpha_m\beta_n/2\gamma ch\zeta, \\
C_6 &= (\alpha_m V_m - \beta_n U_m)/2\gamma^2 sh\zeta - (B_m^u - B_m^v)\alpha_m\beta_n/2\gamma sh\zeta \tag{2.3.23}
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
U_p &= 2\mu(u_l' + u_u'), \quad V_p = 2\mu(v_l' + v_u'), \quad W_p = 2\mu(w_l' + w_u'), \\
U_m &= 2\mu(u_l' + u_u'), \quad V_m = 2\mu(v_l' + v_u'), \quad W_m = 2\mu(w_l' + w_u'), \\
B_p^u &= \left[ \{1-2(1-\nu)\omega_a\}B_x' + \beta_n B_y' / \alpha_m - A_z' / \alpha_m \right] 2\alpha_m / \gamma^5 (1-\nu), \\
B_m^u &= \left[ \{1-2(1-\nu)\omega_a\}hA_x' / 2 + \beta_n hA_y' / 2\alpha_m \right] 2\alpha_m / \gamma^5 (1-\nu), \\
B_p^v &= \left[ \{1-2(1-\nu)\omega_b\}B_y' + \alpha_n B_x' / \beta_n - A_z' / \beta_n \right] 2\beta_n / \gamma^5 (1-\nu), \\
B_m^v &= \left[ \{1-2(1-\nu)\omega_b\}hA_y' / 2 + \alpha_n hA_x' / 2\beta_n \right] 2\beta_n / \gamma^5 (1-\nu), \\
B_p^w &= \left[ (\alpha_m A_x' / \gamma + \beta_n A_y' / \gamma) / \gamma - 2(1-\nu)B_z' \right] 2 / \gamma^4 (1-\nu), \\
B_m^w &= \left[ -2(1-\nu)hA_z' / 2 \right] 2 / \gamma^4 (1-\nu), \\
D_p' &= \zeta(tn\zeta - ct\zeta) + (3-4\nu), \quad D_m' = \zeta(ct\zeta - tn\zeta) + (3-4\nu)
\end{aligned}$$

## 2. 4 厚板理論を用いた数値計算例

前節 2. 2 では厚板理論に適用する変位関数を誘導し、2. 3 節では級数展開により解を得る手法について解説した。そこで本節では得られた変位関数の適用性を確認するために、基礎的な版問題として表面力に関する具体的な解析例として道路橋床版の最適厚さに関する解析的検討を取り上げる<sup>3-6)</sup>。

### 2. 4. 1 道路橋鉄筋コンクリート床版の最小版厚の検討

床版厚さは道路橋示方書<sup>7)</sup>に規定されているが、その規定は過去の疲労損傷の進展による陥没事故を契機にその対策として厚さを増すように設定されている。ただしそれらは経験的に決定されており、安全側に偏っている可能性がある。床版は橋梁を構成する部材の中でも最も重量が大きく、それを厚くすることは桁構造だけではなく下部構造にも影響が及ぶことになる。

床版の耐久性を支配する疲労劣化が初期ひび割れに起因するものであれば、そのひび割れを抑制することが重要であり、それが可能な最小限の床版厚さを検証することには意義がある。初期ひび割れに関して、現状で考えられる以下の問題に対して適切に対応することが最適な床版厚さの設定に繋がる。

- ① コンクリートの材料問題に起因する初期ひび割れ。床版に関しては乾燥収縮が主となるが、近年採用実績が増加している少数主桁橋梁に採用されている長支間床版では、厚さが増大し単位セメント量も増加することから温度収縮問題も表面化している。
- ② 力学的要因による初期ひび割れはコンクリートの曲げ強度  $f_{bk}$ <sup>8)</sup> に対して荷重による曲げ応力度が超過する場合に発生する。

以上の2点のひび割れ問題のうち、①の材料的なものは養生や膨張剤の使用によってすでに抑制されていることから本研究では対象としない。よって、②の問題を考慮して床版の最適厚さを検討する。

計算に用いたモデルを図-2.4.1 に示す。計算モデルは全周単純支持版で、支間長  $L=3.0\text{m}$  に対して床版長さを4倍の  $12.0\text{m}$  とし、道路橋示方書に示される1方向版を想定する。連続版の計算は、単純支持の長辺を固定支持として近似するものとした。床版厚さは道路橋示方書に規定されている単純版の厚さの算定式  $(4L+11)$  に割り増しを考慮した  $290\text{mm}$  で、その上に  $80\text{mm}$  のアスファルト舗装を敷設した。輪荷重値  $P=100\text{kN}$  に衝撃係数  $i$  を考慮して  $P(1+i)$  を採用する。使用するコンクリートの弾性係数  $E_c$  は  $25.2\text{kN/mm}^2$  で、アスファルト舗装の  $E_p$  を  $0.5\text{kN/mm}^2$  としている。なお、舗装による荷重分散は考慮していない。計算での級数の項数は、解が収束することを確認したうえで設定している。



図-2.4.2 は図-2.4.1 に示すモデルの版中央に荷重を載荷した場合の、荷重直下の版厚方向の直応力の分布である。図では薄板理論による結果も示しているが、平面保持の仮定を適用する薄板理論に対して厚板理論ではその直応力分布が非線形となり、上縁・下縁ともに薄板理論の値よりも大きくなるのが判る。

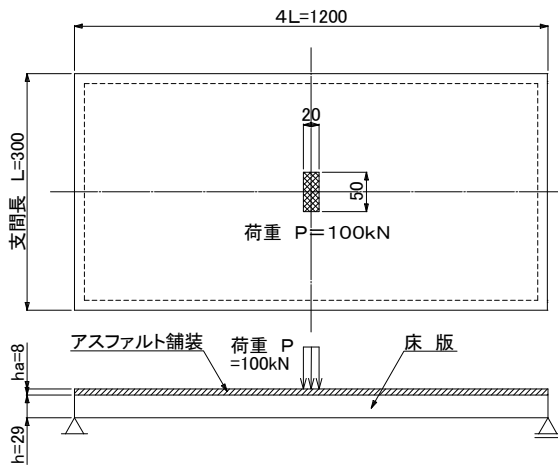
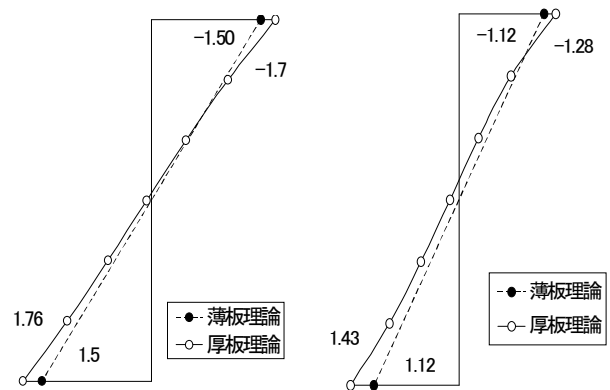


図-2.4.1 計算モデル (単位 : cm)



橋軸方向

橋軸直角方向

図-2.4.2 支間中央部の版厚方向の応力分布 (単位 : N/mm<sup>2</sup>)

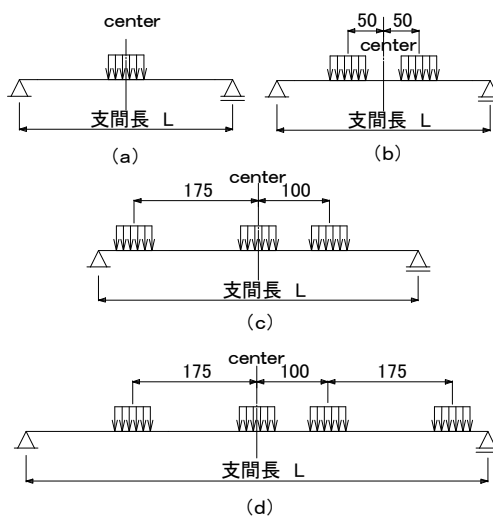
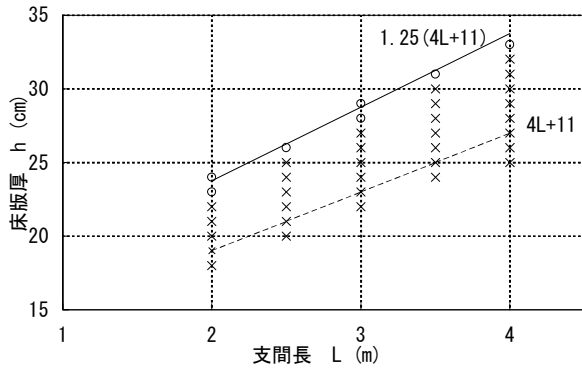
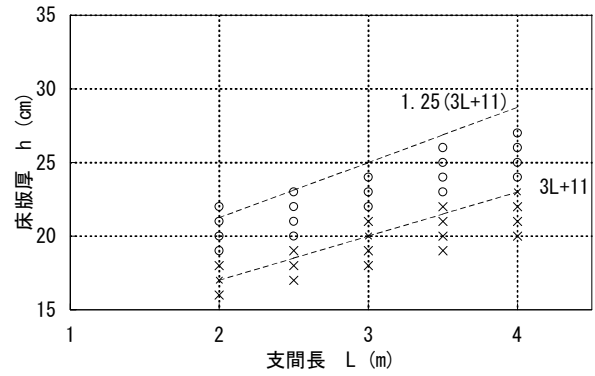


図-2.4.3 荷重の載荷条件

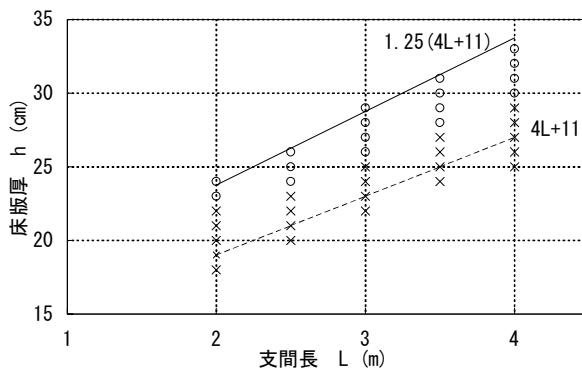


(a)単純版

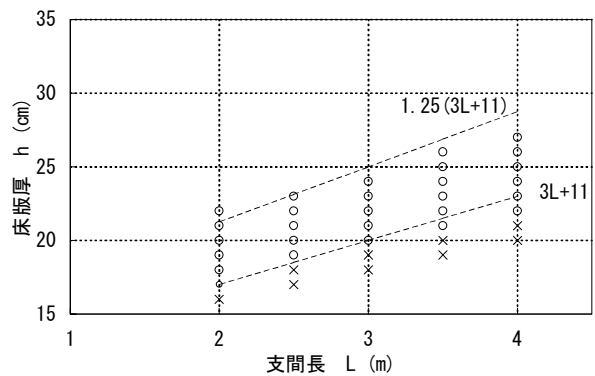


(b)連続版

図-2.4.4 支間長と床版厚の関係 ( $f'_{ck}=24\text{N/mm}^2$ )



(a)単純版



(b)連続版

図-2.4.5 支間長と床版厚の関係 ( $f'_{ck}=30\text{N/mm}^2$ )

図の凡例

- :  $\sigma_{bt} < f_{bk}$  (曲げひび割れが生じない)
- × :  $\sigma_{bt} > f_{bk}$  (曲げひび割れが発生する)

a) 鉄筋コンクリート系床版の最小版厚

鉄筋コンクリート床版で支持条件を単純版と連続版に着目して、載荷する輪荷重による曲げ引張応力度と曲げ強度との関係に着目し、ひび割れ発生の有無を考慮した際の最小版厚を検討する。載荷荷重は図-2.4.3 の(a)~(d)のように道路橋示方書の荷重を支間長内に可能な範囲で最大個数を配置する載荷状態とし、支間中央の曲げ引張応力が最大となることを確認した。荷重値  $P=100\text{kN}$  には衝撃係数を考慮しているがクリープや乾燥収縮による応力緩和は考えていない。計算結果による曲げ引張応力  $\sigma_{bt}$  とコンクリート材料の固有値である曲げ引張強度  $f_{bk}$  から得られる大小関係を、計算条件の床版厚さと支間長で示したものを図-2.4.4 に示す。図ではコンクリートの設計基準強度  $f'_{ck}=24\text{N/mm}^2$  の場合の結果を示しており、曲げ引張応力  $\sigma_{bt}$  が曲げ引張強度  $f_{bk}$  を上回る場合には初期ひび割れ発生危険があるとして×印を、曲げ引張強度の方が上回

る場合には○印で表現している。図中には道路橋示方書の床版厚さの算定式である単純版の  $4L+11$  と連続版の  $3L+11$  によるそれぞれの値と、大型交通量による割増し係数  $k_1$  ( $=1.25$ ) を考慮した値も示している。図によれば、曲げ引張応力  $\sigma_{bt}$  が曲げ引張強度  $f_{bk}$  を上回る×印の領域は、連続版よりも単純版で拡大しており、×印箇所が係数  $k_1$  を考慮した領域に接近しているのが読み取れる。

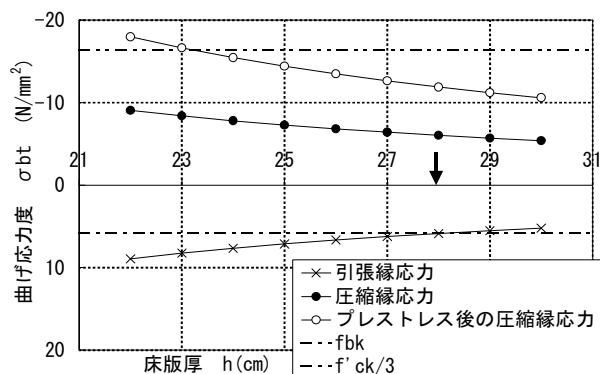
図-2.4.5 はコンクリートの設計基準強度  $f'_{ck}=30\text{N/mm}^2$  の場合の結果を示しており、図-2.4.5 (a) によると単純版で大型車交通量を考慮すれば、現行の道路橋示方書による最小版厚は曲げ引張応力に対して安全側であること、および図-2.4.5 (b) からは係数  $k_1$  を考慮しなくても安全側であることが判る。

## 2. 4. 2 道路橋プレストレストコンクリート床版の最小版厚の検討

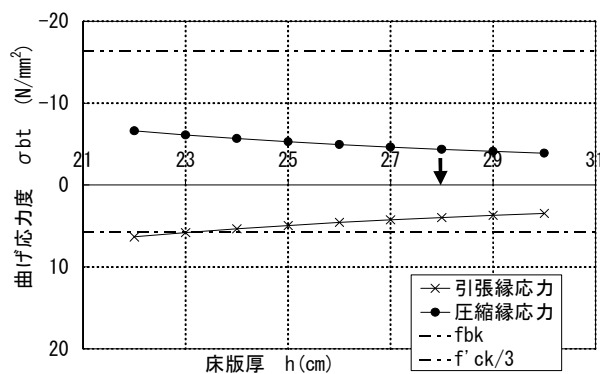
### a) 支間長 5.0m での試算

図-2.4.6 (a)は支間 5m の単純版における床版厚さと橋軸直角方向の上下縁応力の計算結果である。荷重の載荷条件は鉄筋コンクリート系床版と同様に、橋軸直角方向に可能な範囲で最大個数配置する条件とした。計算に用いたコンクリートの設計基準強度は  $f'_{ck}=50\text{ N/mm}^2$  で、曲げ引張強度  $f_{cd}=5.7\text{ N/mm}^2$  である。本計算でのプレストレスは、橋軸直角方向一方向にのみ一様に圧縮力が導入されている状態を想定した。図に示すとおり、床版厚さが薄くなれば床版下縁での引張応力は大きくなり、その引張応力を打消し合う圧縮応力（≡有効プレストレス）を導入すれば、床版はフルプレストレス状態に至る。さらに、コンクリートの許容圧縮応力度を設計基準強度  $f'_{ck}$  の  $1/3$  とすれば、フルプレストレス状態下での圧縮側コンクリートの圧壊を引き起こす応力状態を防止することにより、床版の最小版厚の決定が可能になる。この状態での最小値は 23cm 程度と得られるが、引張応力を許容するパーシャルプレストレスの設計とすれば、床版厚さを低減することができる。ここで道示のプレストレスを導入する床版厚さの計算式  $(4L+11)\times 0.9$  による床版厚さは 27.9cm となり、図中の矢印 ↓ で示している。図-2.4.6 (b)は橋軸方向応力の床版厚による変化を示したものである。2次元の平面応力解析によれば、橋軸直角方向の有効プレストレスのみによる橋軸方向に発生する応力は1方向版の場合は小さいので、橋軸方向の応力はほぼ外荷重のみに支配される。引張応力が引張強度を超える版厚は 24cm 以上であれば安全側である。したがって、床版下縁の橋軸直角方向および橋軸方向の両応力が曲げ引張強度  $f_{bk}$  よりも小さくなるには最小版厚が 24cm と決定される。

次に、連続版の計算例を以下に示す。図-2.4.7 は支間長 5m における床版厚と床版上下縁に生じる橋軸直角方向の曲げ応力の変化を示している。単純版と同様に床版厚が薄くなる程、引張応力は大きくなっている。床版をフルプレストレス状態にする時の上縁の圧縮応力(○印)は床版厚 17cm で約  $16\text{N/mm}^2$  に、床版厚 22cm で  $10\text{N/mm}^2$  と得られる。さらに許容圧縮強度を  $f'_{ck}/3$  に設定すれば、フルプレストレス状態に至るためには床版厚は 17cm 以上が必要になる。



(a) 橋軸直角方向



(b) 橋軸方向

図-2.4.6 単純版の床版厚さと上下縁応力 (L=5m)

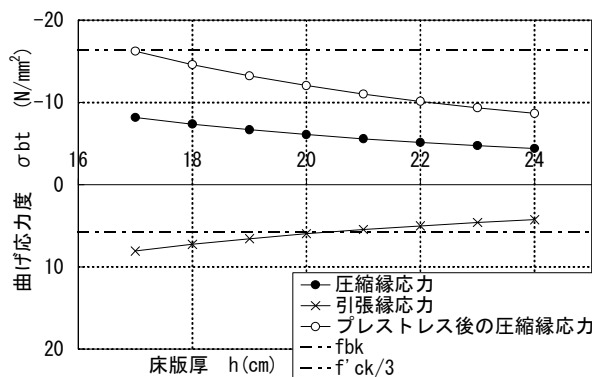
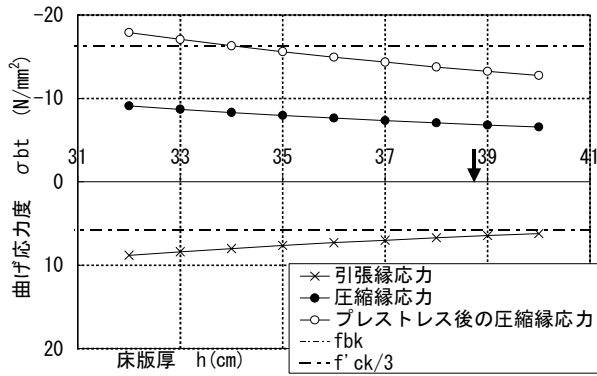


図-2.4.7 連続版における床版厚さと橋軸直角方向の上下縁応力(L=5m)

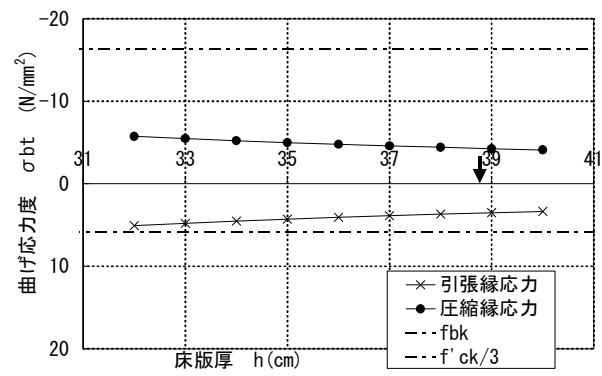
b) 支間 8.0m での試算

支間長が 8m での橋軸直角方向の応力の計算結果を図-2.4.8 に示す。例えば版厚が 34cm の床版をフルプレストレス状態にする時の最大圧縮応力は  $16.4\text{N/mm}^2$  となり、ほぼ設計基準強度  $f_{ck}$  の  $1/3$  の値と同じになる。また 40cm の版厚では有効プレストレスが  $6.2\text{N/mm}^2$  以上でフルプレストレス状態となる。この値以下ではパーシャルプレストレスでの設計が必要になり、床版下縁に発生すると予想されるひび割れに対する方策、例えばひび割れ幅の制御等を考慮することが肝要となる。ここで道示のプレストレスを導入する床版厚さの計算式  $(4L+11)\times 0.9$  による床版厚さは 38.7cm となる。

次に連続版の場合における橋軸直角方向の応力の計算結果を図-2.4.9 に示す。例えば厚さが 22cm の床版をフルプレストレス状態にする時の最大圧縮応力は  $16.5\text{N/mm}^2$  となり、 $f'_{ck}/3$  の値を少し超える。また 26cm の版厚では有効プレストレスが  $6.5\text{N/mm}^2$  以上でフルプレストレス状態になる。



(a) 橋軸直角方向



(b) 橋軸方向

図-2.4.8 単純版の床版厚さと上下縁応力 (L=8m)

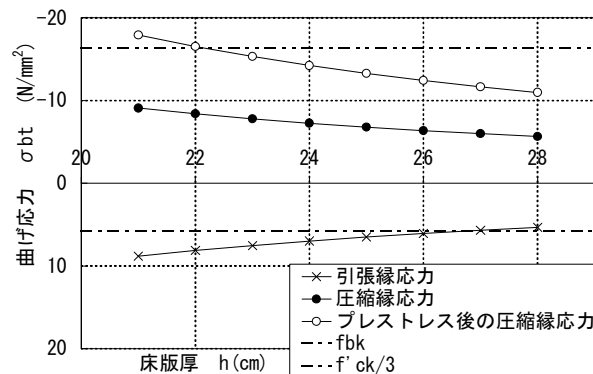


図-2.4.9 連続版における床版厚さと橋軸直角方向の上下縁応力(L=8m)

c) プレストレストコンクリート床版の最小厚さ

アスファルト舗装やコンクリート床版の自重および複数台の輪荷重下において、①支間中央部および張出床版支点上の橋軸直角方向の曲げ引張応力を許容しないフルプレストレス状態で、②上縁応力が設計基準強度  $f_{ck}$  の  $1/3$  を超えず、かつ③橋軸方向の応力が曲げ引張強度  $f_{bk}$  以下となる床版厚を本論文での最小版厚と定義する。現行の道路橋示方書に規定されている最小版厚  $(4L+11) \times 0.9$  と、コンクリートの設計基準強度を  $50\text{N/mm}^2$  とした場合の本手法による計算値を図-2.4.10 (a), (b) に示す。(a) は単純版での比較で、(b) は連続版での結果を表している。図中の材料係数  $\gamma_c=1.0$  は使用限界状態で、 $\gamma_c=1.3$  は疲労限界状態として考慮されるパラメータで、最小版厚との比較を容易にするために、支間  $5.0\text{m}$  と  $10.0\text{m}$  の値を直線で結んだ線も示している。連続版の場合、使用限界状態および疲労限界状態のいずれも、現行道示による規定の方が最小版厚は大きくなっているが、単純版では疲労限界状態の値よりも小さいことが判る。

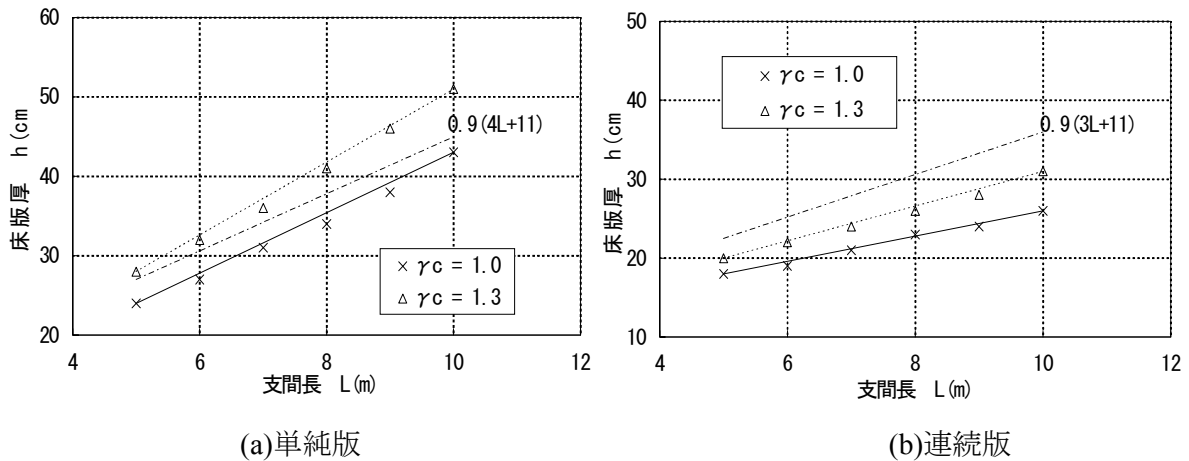


図-2.4.10 PC床版の最小版厚

## 2. 5 まとめ

本章では、従来の変位関数を拡張して静的・動的熱弾性体、粘弾性体、および圧密方程式に対するそれぞれの変位関数を誘導した。さらに3次元弾性体に制約条件を課した2次元弾性体の変位関数をも導いた。さらに、得られた変位関数を厚板理論の基礎微分方程式として級数展開によって解を得る手法を解説した。また、それらの具体的な適用例とし最小床版厚さの解析を実施した。得られた成果は以下の通りである。

- ① 変位場と温度場が連成する場合の静的問題での変位関数は、W.Nowackiの提示した変位関数と同様であるが、Boussinesqの関数に相当する関数がなく、Nowackiの変位関数は完全系ではないと言える。非連成時の場合、得られた変位関数はGalerkin-vectorとBoussinesqの関数に帰着する。
- ② 動的問題については静的問題と同様、W.Nowackiの変位関数は完全系であると言い難い。非連成時での変位関数は、縦波と横波の伝播速度で表されるダランベルシアン演算子を用いる波動方程式を満足する関数に一致したが、Boussinesqの関数は示されていない。
- ③ 一般化したVoigtモデルで表現される粘弾性体の変位関数を導いた。粘性に関する項を除去すれば、それぞれの変位関数は静的および動的問題で得られこれまでの変位関数に一致している。
- ④ また、M.A.Biotによる圧密方程式の変位関数は、静的熱弾性問題の変位関数のパラメータを書き換えることで、容易に求められることが判った。
- ⑤ 物体力が版厚方向に線形分布する場合の変位関数に基づく厚板理論を級数展開することにより、版の厳密解を得るための応力法と変位法による方法を誘導した。これらの方法は多層版への適用する際の基礎式となる。

- ⑥ 版の表面に作用する問題の例として、床版劣化の原因の一つとなる輪荷重によるひび割れを抑止するために、道路橋示方書で規定されている最小版厚を力学的立場から捉え直し、一部で版厚が不足していることを指摘した。
- 局所的な変位や応力の挙動を厳密に把握するには、変位関数に依拠した厚板理論が必要であると推察される。

#### 参考文献

- 1) Hata, K. : On the three-functions approach, Proc. 5th, Japan Nat, Cong. Appl. Meth. , pp.115-118, 1955.
- 2) W. Nowacki : Dynamic Problems of Thermoelasticity, Noordhoff, 1975.
- 3) 横山広, 堀川都志雄 : 道路橋床版の最小厚さに関する研究, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.1169-1176, 2002.3.
- 4) 横山広, 堀川都志雄 : 道路橋合成床版の床版厚さに関する研究, 構造工学論文集, Vol.49A, pp.1107-1113, 2003.3.
- 5) 横山広, 堀川都志雄 : プレストレスを導入する道路橋床版の最小厚さに関する研究, コンクリート工学年次論文集, Vol.26, No.2, pp.625-630, 2004.7.
- 6) 横山広, 山下幸生, 堀川都志雄 : 鋼・コンクリートサンドイッチ合成床版の最小版厚について, 第三回道路橋床版シンポジウム講演論文集, pp.259-264, 2003.6.
- 7) 社団法人日本道路協会 : 道路橋示方書・同解説, II 鋼橋編, 1996.12.
- 8) 社団法人土木学会 : コンクリート標準示方書 設計編, p.19, 1996.





## 第三章 厚板理論を拡張した混合法の誘導と

### 変断面床版への適用

前章では厚板理論に適用する変位関数を誘導し、級数展開で解を得る手法を解説した。既往の研究は表面力を対象としていたが、物体力が扱える式系として構築することで、温度問題や圧密方程式も考慮できることとなった。さらに、その手法の適用例として道路橋床版の最小厚さを検討した。本章では、厚板理論の境界条件の制約をなくし、適用範囲の拡大を図るものとして混合法の検討を実施する。本章で用いる用語として混合法を以下に定義する。

混合法：厚板理論を特解とし薄板理論を同次解としてそれらの和で一般解を得る解析手法

#### 3. 1 はじめに

全周単純支持される版の厚板理論による Navier 解のみで多種多様な境界を持つ実際の構造物へ適用することは不十分である。例えば版の端辺が自由境界の支持条件となる際に、厚板理論のみでこの境界条件を満足させるには 3 重の Fourier 級数展開が必要であり、双曲線関数の再展開も要求される。この操作は多大の労力と時間を要するとともに、得られた解の収束性や精度に問題点が生じると推察される。実用設計の立場からすれば、局所的な応力・変位を忠実に表現できる厚板理論の特徴を生かしながら、自由や固定等の境界条件の扱いやすさ、すなわち操作性の良さを兼ね備える簡単な方法が望まれる。

そこで厚板理論の級数解を特解に、また境界条件を満たすための補足解には薄板理論から導かれる同次解を採用して、これらを重ね合わせる手法を提案する。この手法を用いれば境界条件を取り込む自由度が増すことになり自由辺を有する張出し版への適用も可能になる。

本研究ではこの手法の実橋床版への適用性を確認するものとして、プレキャスト床版のハンチの検討や道路橋床版の主桁近傍の床版厚さを検討するものとする。

#### 3. 2 混合法の誘導と級数表示

混合法の概要を説明するために、自由境界を持つ版を例に取り上げる。薄板理論の自由辺の境界条件は、周知のように曲げ問題では辺に直行する方向の曲げモーメントとその辺に沿った換算せん断力がともに零でなければならない。例えば  $x$  軸と平行な辺が自由であるとき、次式のように示される。

$$\begin{aligned}
M_y &= 0, \\
V_y &= Q_y + \partial_x M_{xy} = 0
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

これらの断面力は厚板理論の級数解と薄板理論の級数解との和で表され、次のように示される。

$$\begin{aligned}
M_y &= \sum_m \left\langle \sum_n R'_m \sin \beta_n y' - (1-\nu) [A_m ch \alpha_m y + B_m sh \alpha_m y + C_m \{ \alpha_m y ch \alpha_m y + 2sh \alpha_m y / (1-\nu) \}] \right. \\
&\quad \left. + D_m \{ \alpha_m y sh \alpha_m y + 2ch \alpha_m y / (1-\nu) \} \right\rangle \alpha_m^2 \sin \alpha_m x, \\
V_y &= \sum_m \left\langle \sum_n R'_v \cos \beta_n y' + (1-\nu) \sum [A_m sh \alpha_m y + B_m ch \alpha_m y \right. \\
&\quad \left. + C_m (\alpha_m y sh \alpha_m y + ch \alpha_m y) + D_m (\alpha_m y ch \alpha_m y + sh \alpha_m y)] \right\rangle \alpha_m^3 \sin \alpha_m x
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

ここで、 $\zeta = \gamma h / 2$ 、 $y' = y + b / 2$ ,

$$\begin{aligned}
R'_m &= \left\langle \left[ (1-\nu \omega_b) A'_x \alpha_m / \beta_n + \{ 1 - (2-\nu) \omega_b \} A'_y - (1-\nu) \gamma T'_m \gamma^4 / \beta_n^3 \right] \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) \right\rangle h^3 / 12 \alpha_m^2 \\
&\quad + [C_1 \{ \zeta ch \zeta - sh \zeta \} + C_4 \{ \zeta^2 sh \zeta - (1-2\nu \omega_b) (\zeta ch \zeta - sh \zeta) \}] \\
&\quad - C_6 \{ \zeta ch \zeta - sh \zeta \} \alpha_m / \beta_n \gamma ] 2 \beta_n^2 / \gamma \alpha_m^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R'_v &= \left\langle \left[ 1 - (1-\nu) \omega_a \right] \alpha_m^2 h^2 / 12 - 1 \right\rangle A'_x h \beta_n / \gamma^4 (1-\nu) \alpha_m^2 \\
&\quad + \left[ 1 - (1-\nu) \omega_b \right] \{ \alpha_m^2 h^2 / 12 - 1 \} A'_y h \beta_n^2 / \gamma^4 (1-\nu) \alpha_m^3 + B'_z h \beta_n / \gamma^2 \alpha_m^3 \\
&\quad + [C_1 \{ \zeta ch \zeta - (1 + \omega_a) sh \zeta \}] \\
&\quad + C_4 \{ \{ \zeta^2 sh \zeta - \zeta ch \zeta + sh \zeta \} - \omega_a (\zeta ch \zeta - sh \zeta) - 2\nu \omega_a sh \zeta \} \\
&\quad - C_6 \{ (\alpha_m^2 - \beta_n^2) (\zeta ch \zeta - sh \zeta) / \alpha_m \beta_n \gamma - \gamma sh \zeta / 2 \alpha_m \beta_n \} ] 2 \beta_n / \alpha_m \gamma
\end{aligned}$$

一方、引張り問題での境界条件については、次のように示される。

$$N_y = 0, N_{xy} = 0 \tag{3.1.3}$$

軸力  $N_y$  および  $N_{xy}$  は次式で示される。

$$\begin{aligned}
N_y &= \sum_m \left\langle \sum_n S'_y \sin \beta_n y' + (1+\nu) \sum [I_m ch \alpha_m y + J_m sh \alpha_m y + K_m \{ \alpha_m y ch \alpha_m y + 2sh \alpha_m y / (1+\nu) \}] \right. \\
&\quad \left. + L_m \{ \alpha_m y sh \alpha_m y + 2ch \alpha_m y / (1+\nu) \} \right\rangle \alpha_m^3 \sin \alpha_m x, \\
N_{xy} &= - \sum_m \left\langle \sum_n S'_{xy} \cos \beta_n y' \right. \\
&\quad \left. - (1+\nu) \sum [I_m sh \alpha_m y + J_m ch \alpha_m y + K_m \{ \alpha_m y sh \alpha_m y + (3+\nu) ch \alpha_m y / (1+\nu) \}] \right. \\
&\quad \left. + L_m \{ \alpha_m y ch \alpha_m y + (3+\nu) sh \alpha_m y / (1+\nu) \} \right\rangle \alpha_m^3 \cos \alpha_m x
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
S_y' &= \left\langle \left[ (1-\nu\omega_b)B_x' \alpha_m / \beta_n + \{1-(2-\nu)\omega_b\}B_y' - (1-\nu)\gamma_i T_p' \gamma^4 / \beta_n^3 \right] \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) \right\rangle h / \alpha_m^3 \\
&\quad + [C_2 sh \zeta + C_3 (\zeta ch \zeta + 2\nu\omega_b sh \zeta) - C_5 sh \zeta \alpha_m / \beta_n \gamma] 2\beta_n^2 / \alpha_m^3 \\
S_{xy}' &= \left[ \{1-(1-\nu)\omega_a\} \alpha_m B_x' / \gamma + \{1-(1-\nu)\omega_b\} \beta_n B_y' / \gamma - A_z' / \gamma \right] h \beta_n / \gamma^3 (1-\nu) \alpha_m^2 \\
&\quad + [C_2 sh \zeta + C_3 \zeta ch \zeta - C_5 (\alpha_m^2 - \beta_n^2) sh \zeta / \alpha_m \beta_n \gamma] 2\beta_n / \alpha_m^2
\end{aligned}$$

今  $y=0$ ,  $b$  が自由辺である版を考えると, 積分定数  $A_m \sim D_m$  は式(3.1.2)を式(3.1.1)に代入することにより得られる. また積分定数  $I_m \sim L_m$  は式(3.1.3)と式(3.1.4)より求められ, その結果を以下に列挙する.

$$\begin{aligned}
A_m &= -(\Gamma\nu - \Gamma\nu') \{ \lambda tn \lambda + 2 / (1-\nu) \} / 2(1-\nu) \Delta_p sh \lambda, \\
B_m &= -(\Gamma\nu - \Gamma\nu') \{ \lambda ct \lambda + 2 / (1-\nu) \} / 2(1-\nu) \Delta_m ch \lambda, \\
C_m &= (\Gamma\nu - \Gamma\nu') / 2(1-\nu) \Delta_m ch \lambda, \\
D_m &= (\Gamma\nu - \Gamma\nu') / 2(1-\nu) \Delta_p sh \lambda, \\
I_m &= (\Gamma s - \Gamma s') \{ \lambda tn \lambda + 2 / (1+\nu) \} / 2(1+\nu) \Delta_p' sh \lambda, \\
J_m &= (\Gamma s + \Gamma s') \{ \lambda ct \lambda + 2 / (1+\nu) \} / 2(1+\nu) \Delta_m' ch \lambda, \\
K_m &= -(\Gamma s + \Gamma s') / 2(1+\nu) \Delta_m' ch \lambda, \\
L_m &= -(\Gamma s - \Gamma s') / 2(1+\nu) \Delta_p' sh \lambda
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

ここで,  $\lambda = \alpha_m b$ ,  $\Gamma\nu = \sum R_v' \cos \beta_n b$ ,  $\Gamma\nu' = \sum R_v'$ ,  $\Gamma s = \sum S_{xy}' \cos \beta_n b$ ,  $\Gamma s = \sum S_{xy}'$ ,

$$\Delta_p = \lambda (tn \lambda - ct \lambda) + (3+\nu) / (1-\nu), \quad \Delta_m = \lambda (ct \lambda - tn \lambda) + (3+\nu) / (1-\nu)$$

$$\Delta_p' = \lambda (tn \lambda - ct \lambda) - 1, \quad \Delta_m' = \lambda (ct \lambda - tn \lambda) - 1$$

これらの積分定数を変位および応力の式に代入すれば解が得られる.

### 3. 3 混合法を用いた数値計算例

前節では自由境界を持つ版を例に、一般解を得るために足し合わせるための特解を厚板理論で、同次解を薄板理論で導く方法を提案した。その方法によれば多様な支持条件や変断面床版などの境界条件でも荷重直下において厚板理論の厳密解が得られることになる。本節ではその計算手法をプレキャスト床版のハンチの実験や主桁近傍の最小版厚の計算、ならびに変断面となる補強床版に用いてその適用性を検討する。

#### 3. 3. 1 プレキャスト床版のハンチの合理化に関する検討

一般的な道路橋のコンクリート系床版では、支持桁と接合される部分にハンチが設けられる。設計の実務におけるハンチ高さは、外桁上の必要床版厚さと橋面排水のための横断勾配によって決定され、通常は1:3程度の勾配が設定される。ハンチの役割は床版から支持桁への荷重伝達を円滑にすることにあるが、応力集中を避ける形状として経験的に定められてきている。

ここで、劣化床版を打ち替えるためのプレキャスト床版では、工場製作のコストを低減させるために別途製作したハンチを平板形状の床版にエポキシ樹脂を塗布して接着することができれば経済的となる。そこで、ハンチの形状を変えた供試体の耐荷性状を把握することとし、自由辺を有する場合の混合法による解析手法を用いて実験結果を検証することにした<sup>1)</sup>。

##### a) 供試体形状と実験方法

図-3.3.1はハンチの形状を変えたモデル実験の供試体図である。供試体のパラメータは表-3.3.1に示す通りであり、ハンチの形状を変化させてその破壊形態を比較している。供試体記号で2番目はハンチの下面勾配を、3番目は一体成型かプレキャスト、もしくは突出幅を示している。コンクリートには呼び強度 $45\text{N/mm}^2$ 、粗骨材の最大寸法 $13\text{mm}$ のレディーミクストコンクリートを用いた。水中養生した材令4週目の圧縮強度は、 $45.1\text{N/mm}^2$ で、気中養生した材令4週目の圧縮強度は、 $43.8\text{N/mm}^2$ であった。

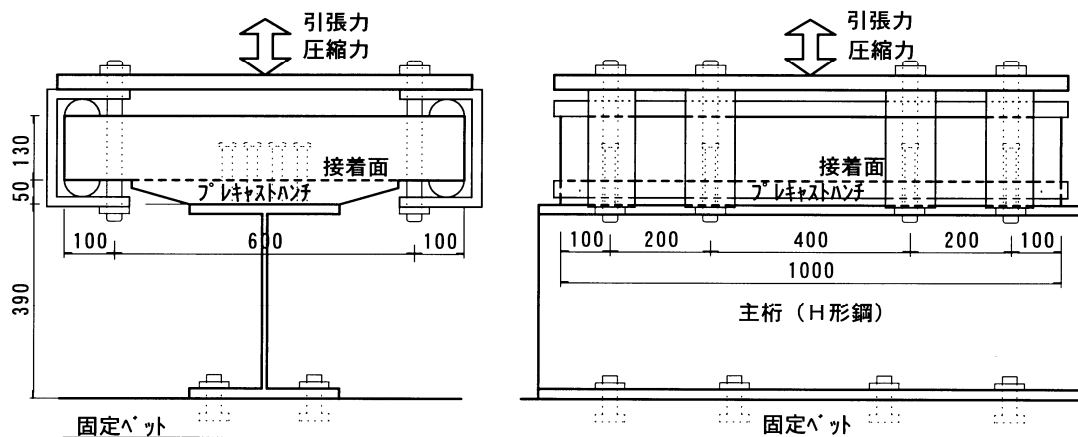


図-3.3.1 供試体形状と載荷方法 (HSPTS)

表-3.3.1 供試体の諸元

供試体の 呼 称	床 版 の 成形方法	ハンチの形状	
		下面 勾配	下面 突出長
HSIS	一体成形	1 : 3	無
HSPS	矩形版・ ハンチ接着	〃	無
HE8S	〃	1 : 1	80mm
HV6S	〃	直角	60mm
HV0S	〃	〃	無

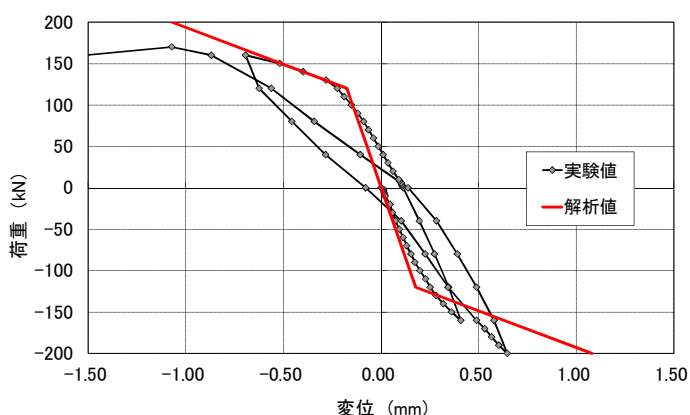


図-3.3.3 HV6S の荷重と変位の関係

実験は 200kN の疲労試験機を用いて供試体中央で低サイクルの繰り返し载荷とした。载荷ステップは圧縮側に 160kN 载荷後に、引張り側にも 160kN 载荷した。その後は 200kN まで圧縮、引張りを繰り返し、引張り破壊しない供試体ではさらに 200kN の载荷を繰り返した。供試体の変位は载荷位置である端部から 50mm の中央で計測している。

### b) 実験結果と解析

実験後の各供試体の破壊形状を図-3.3.2 に示す。実験ではハンチを接着した部分からはく離は認められなかった。供試体は引張り载荷によって破壊に至っているが、実橋梁では支点上の負曲げによる曲げモーメントが支配的となるため、このような破壊形態になることはない。ただし、構造上不利となる荷重作用下であっても接着部分のはく離による破壊ではないことから実用上十分な耐荷性能を有していることが判る。

実験結果のうち、HV6S の荷重と変位の関係を図-3.3.3 に示す。本供試体は圧縮 200kN 载荷後の引張り 180kN 载荷で終局に至っている。図中には混合法による解析結果も示しているが、良く一致していることが判る。ここで、解析に用いた物性値はヤング係数が  $E_c=30\text{kN/mm}^2$ 、ポア

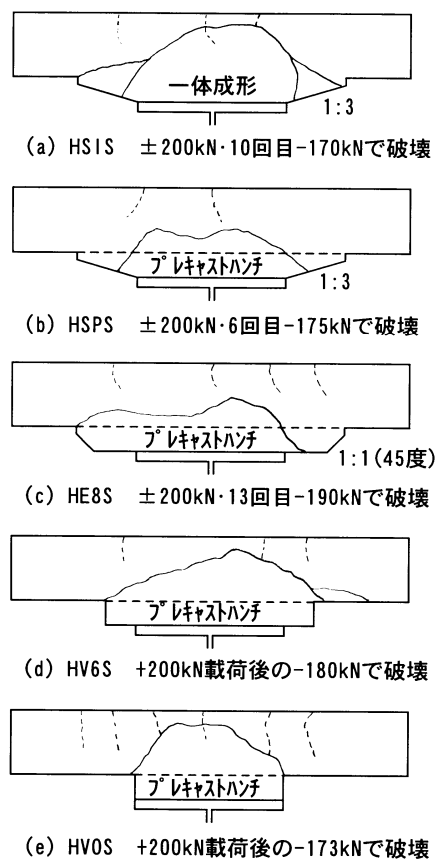


図-3.3.2 実験後の破壊形状

ソシ比が  $\nu=0.2$  で、鉄筋は考慮していない。解を得るための級数の項数は収束することを確認して設定している。解析値の折れ点以降の傾きはひび割れ発生後を模擬するためヤング係数を  $n=15$  を考慮して  $E_c'=14\text{kN/mm}^2$  まで低下させている。なお、解析に用いたモデル (図-3.3.4) は載荷位置が自由辺近傍で、橋軸方向の対辺を単純支持形式とした。また、モデル長は単純支持の影響が無いように実際の供試体長さである  $1.0\text{m}$  ではなく  $2$  倍の  $2.0\text{m}$  としてその中央部分の  $1.0\text{m}$  に線荷重として作用させるものとした。

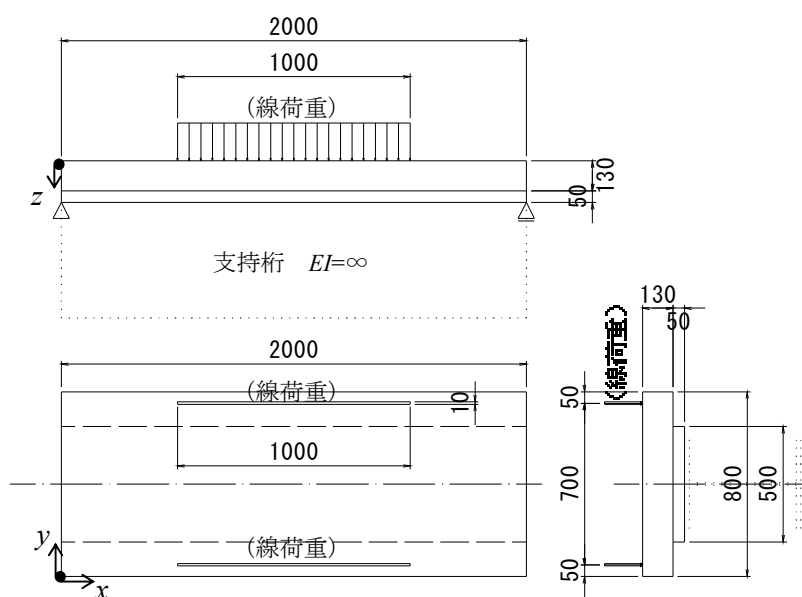


図-3.3.4 解析モデル

HV6S 供試体で荷重  $P=100\text{kN}$  を作用させた場合の解析による直応力の等高線分布を図-3.3.5 に示す。図-3.3.2 の破壊形状との関係を確認するため床版部分のみ表現している。(a)は幅員方向の直応力  $\sigma_y$  の分布で、(b)は鉛直方向の直応力  $\sigma_z$  の分布を示している。図によればハンチ端部の  $250\text{mm}$  付近で  $\sigma_y$  の引張側の値が最大となっており、この位置がひび割れ発生を開始点となることが想定される。また(b)の  $\sigma_z$  も同様にハンチ端部が大きな値となっている。(b)の  $350\text{mm}$  付近のピークは引張り荷重を解析の都合上、上面に作用させたことによるものであり作用位置の局所的な応力状態は、版の下面に作用させた場合には逆転する形状となる。

図-3.3.6 は図-3.3.5 で表示した応力値から主応力を算出し、その応力方向を加味して図化したものである。図によれば版の上縁側では圧縮側の応力値が卓越しており、中立軸は版中央よりもやや下側にシフトしている。これはプレキャストハンチの剛性による影響であると考えられる。図には赤点線で実験による破壊時のひび割れ線を示しているが、ハンチ端部が始点となり、その後、版中央側に進展している。解析結果でもひび割れ線が圧縮域下方で水平に進展しており、実験結果と矛盾しない。なお、供試体には実橋を模擬した鉄筋を配しており、ひび割れはその影響も受けていることが推察される。

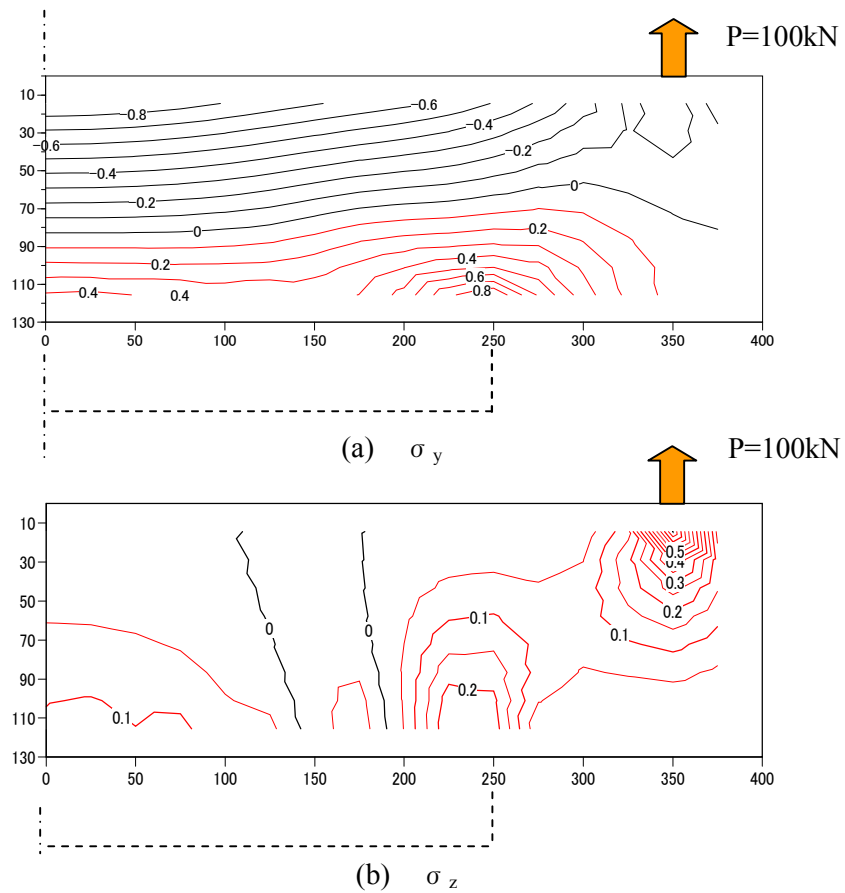


図-3.3.5 HV6S の版中央断面部の直応力の等高線図（単位：N/mm<sup>2</sup>）

本供試体は 180kN の引張り荷重によって終局に至っており，図-3.3.6 の 100kN 荷重載荷での補正したとしても，ひび割れ発生に至るレベルまで応力値が増加しないことが伺える．これは，比較的大きな低サイクルの繰り返し載荷による影響で，微細ひび割れ発生部分に応力集中が生じひび割れが進展した影響であると考えている．

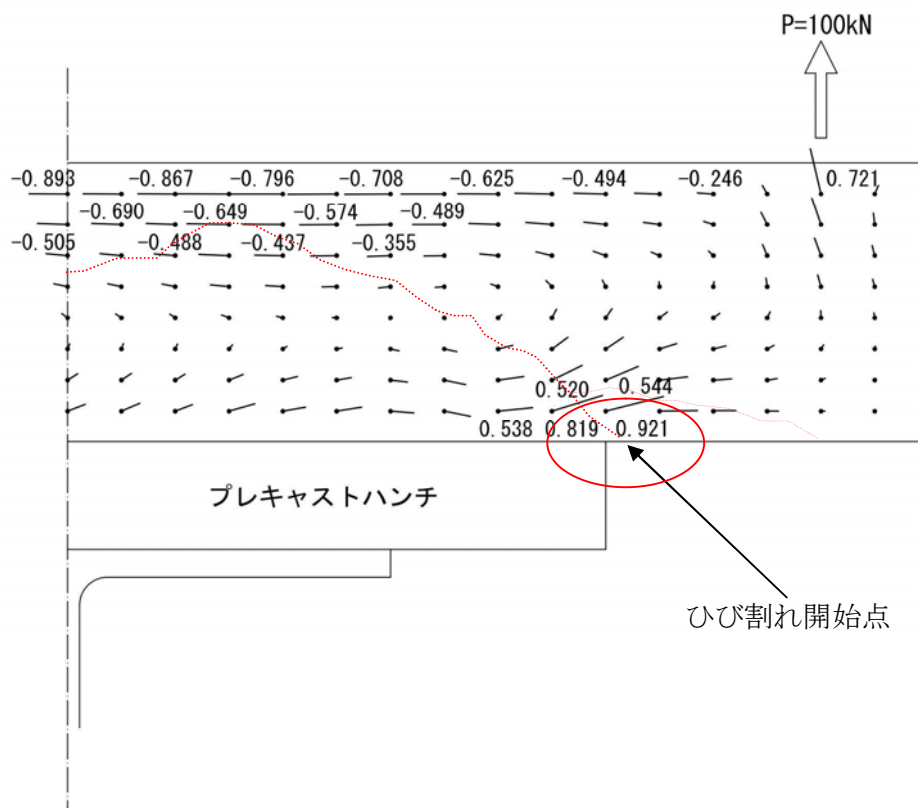


図-3.3.6 供試体中央断面内部の主応力分布（単位：N/mm<sup>2</sup>）



### 3. 3. 2 道路橋床版の主桁近傍の最小厚さの検討

床版設計の実務では張出し床版を考慮した主桁近傍での応力状態も横断面構成の決定要因となる。そこで本項では、支持桁近傍を対象とする解析により応力状態を把握し、床版厚さの低減の可能性を検討する。また、床版支間を変数とした輪荷重作用時の応力状態を明らかにする<sup>3)</sup>。

#### a) 計算モデル

計算モデルは図-3.3.7 に示す通りで、2本の主桁上に床版があり、中間床版と張出床版の支間長の比は1:0.4としている<sup>3)</sup>。載荷した荷重は道示のT荷重を着目する主桁上で曲げ応力が最大となるように幅500mmの壁式高欄の内側端部から幅員方向にできる限り載荷させる状態としている。なお壁式高欄は解析上考慮せず、舗装による荷重分散も考慮していない。対象とした中間床版の支間長は $L=3.0\text{m}$ から1.0mピッチで6.0mまでの4段階とした。計算上の主桁の曲げ剛性は $L=3.0\text{m}$ 、6.0mでは過去の設計例から設定しており、 $L=4.0\text{m}$ 、5.0mではそれらの値を直線補間した剛性を用いている。本計算における床版厚さは中間床版の支間長に対する道示式で算出しており、ハンチ形状はその高さを80mmに固定し断面端部の勾配は $45^\circ$ とした。ハンチ部の剛性は主桁断面に換算して評価した。計算に用いたコンクリートのヤング係数は $E_c=31\text{N/mm}^2$ でポアソン比は $\nu=0.2$ である。なお、本計算では解を得るための級数の項数は収束することを確認したうえで設定している。

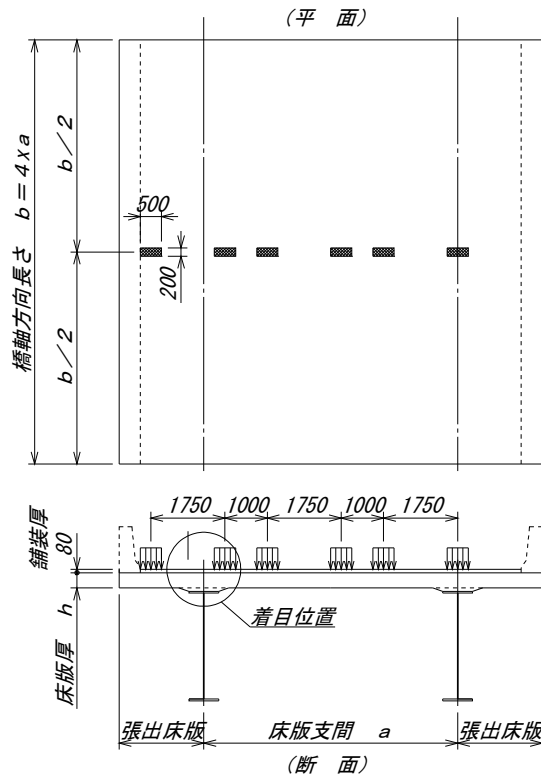
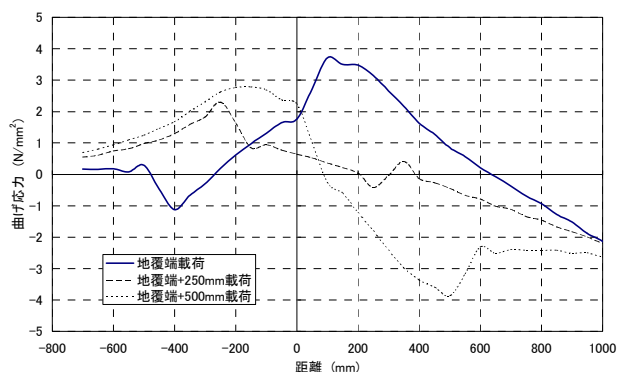
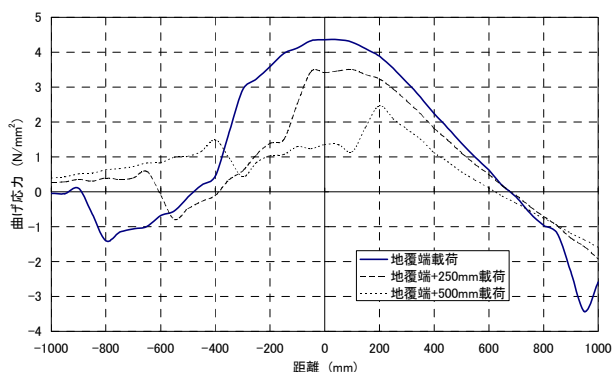


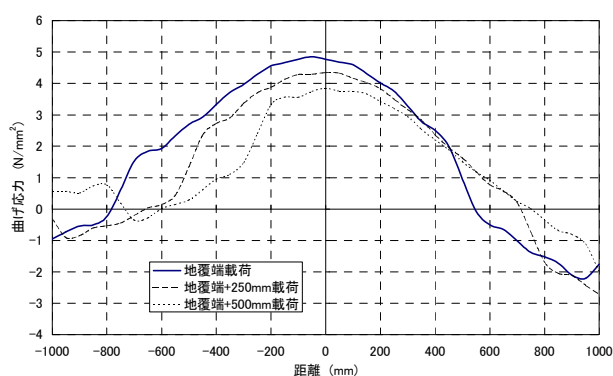
図-3.3.7 計算モデル



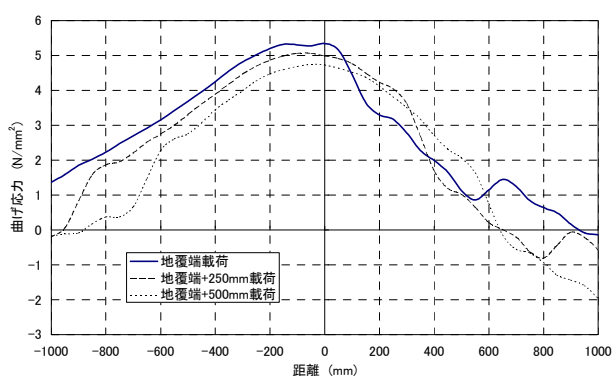
(a) L=3.0m



(b) L=4.0m



(c) L=5.0m



(d) L=6.0m

図-3.3.8 床版上縁の曲げ応力度の分布

b) 直応力の分布と主応力分布

図-3.3.8(a)~(d)に主桁近傍の床版上縁に発生する曲げ応力度の分布を示す。図中の横軸における0点は主桁中心上を示している。荷重は道示に示されている地覆に接する地覆端載荷とその位置から橋軸直角方向に中央側へ+250mmと+500mm移動させるものとした。いずれの床版支間でも地覆端載荷が最も大きい曲げ応力度となっており、荷重の中央側への移動によりその値も低下している。また、支間長に合わせて曲げ応力度のレベルも大きくなっている。最大値を示す位置は各支間で異なっているものの、主桁中心から±100mmの範囲にある。

図-3.3.9は中間床版の支間がL=6.0mで床版厚さが310mmでの、曲げモーメントが最大となる荷重条件での荷重載荷位置における断面中央の主応力分布を示したものである。最大値は荷重載荷端付近の上縁で発生しており、その応力レベルからひび割れが発生する危険性が伺える。ただし、床版内部の応力レベルは小さく上縁付近の曲げひび割れに着目することが初期ひび割れの制御に効果的である。

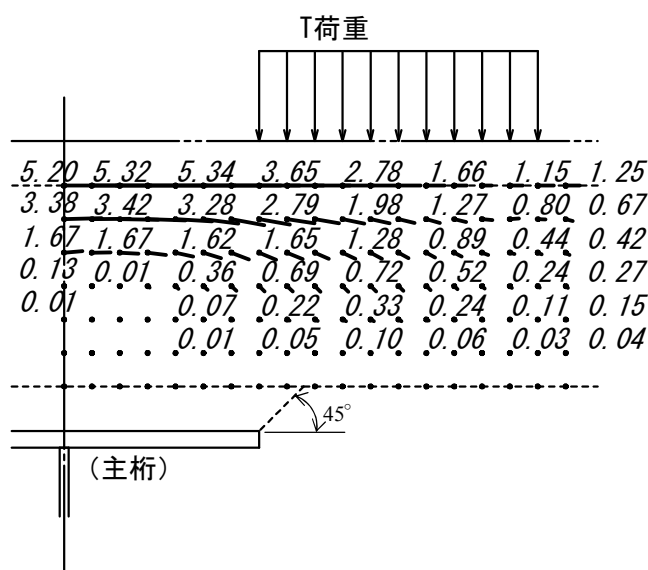


図-3.3.9 主桁近傍の主応力分布（単位：N/mm<sup>2</sup>）

c) 横せん断応力の分布

床版厚さを低減すれば曲げ応力の他にも横せん断応力も増加し、主桁近傍では放物線分布とは異なる分布形状が予想される。図-3.3.10 と図-3.3.11 は横せん断応力を計算したモデルとその計算結果であり、3 主桁モデルの計算で外桁近傍を抽出した。モデルは実橋橋梁を意識して床版支間は  $b_m=2.50\text{m}$  で張出し床版の支間  $b_0=1.10\text{m}$  を加えた全幅員は  $B=7.20\text{m}$  となり、橋軸方向の長さは  $L=10.0\text{m}$  とした。床版厚さは  $t=190\text{mm}$  で、舗装厚さは  $t_p=50\text{mm}$  とし荷重の分散は考慮していない。載荷位置は図-4.3.10 では主桁上フランジ端部から  $45^\circ$  の方向で上縁に荷重端が位置するように載荷しており、図-3.3.11 では荷重を床版支間中央に載荷した。何れのケースでも荷重の大きさは  $P=98\text{kN}$  である。モデルの計算に用いた床版コンクリートのヤング係数は  $E_c=21.5\text{N/mm}^2$  でポアソン比は  $\nu=0.2$  とした。

図-3.3.10 によると横せん断応力の最大値は荷重端に発生しており、支持桁に近い端部のピーク値が最大の  $\tau_{yz}=0.77\text{N/mm}^2$  となっていることが判る。横せん断応力の分布形状は載荷位置から離れると版厚方向の中央にピーク位置が存在し、版厚方向に対称形であるが、荷重端ではピーク位置がやや上方に移動している。荷重端から左右に  $190\text{mm}$  離れた位置の②と⑧を比較すると②が⑧の約 2.2 倍の値となっており、横せん断応力は支持桁近傍が大きくなることが判る。

図-3.3.11 でも同様に横せん断応力は荷重端に発生しているが、外桁近傍載荷よりもピーク値は小さくなっており約 0.83 倍程度である。ただし、荷重端での横せん断応力のピーク位置は外桁近傍載荷と同様に上方に移動していることが判る。荷重端の絶対値が左右で異なっているが、これは張出し床版を有する外桁と連続床版の中央主桁に支持されている 3 主桁モデルの影響であると考えている。

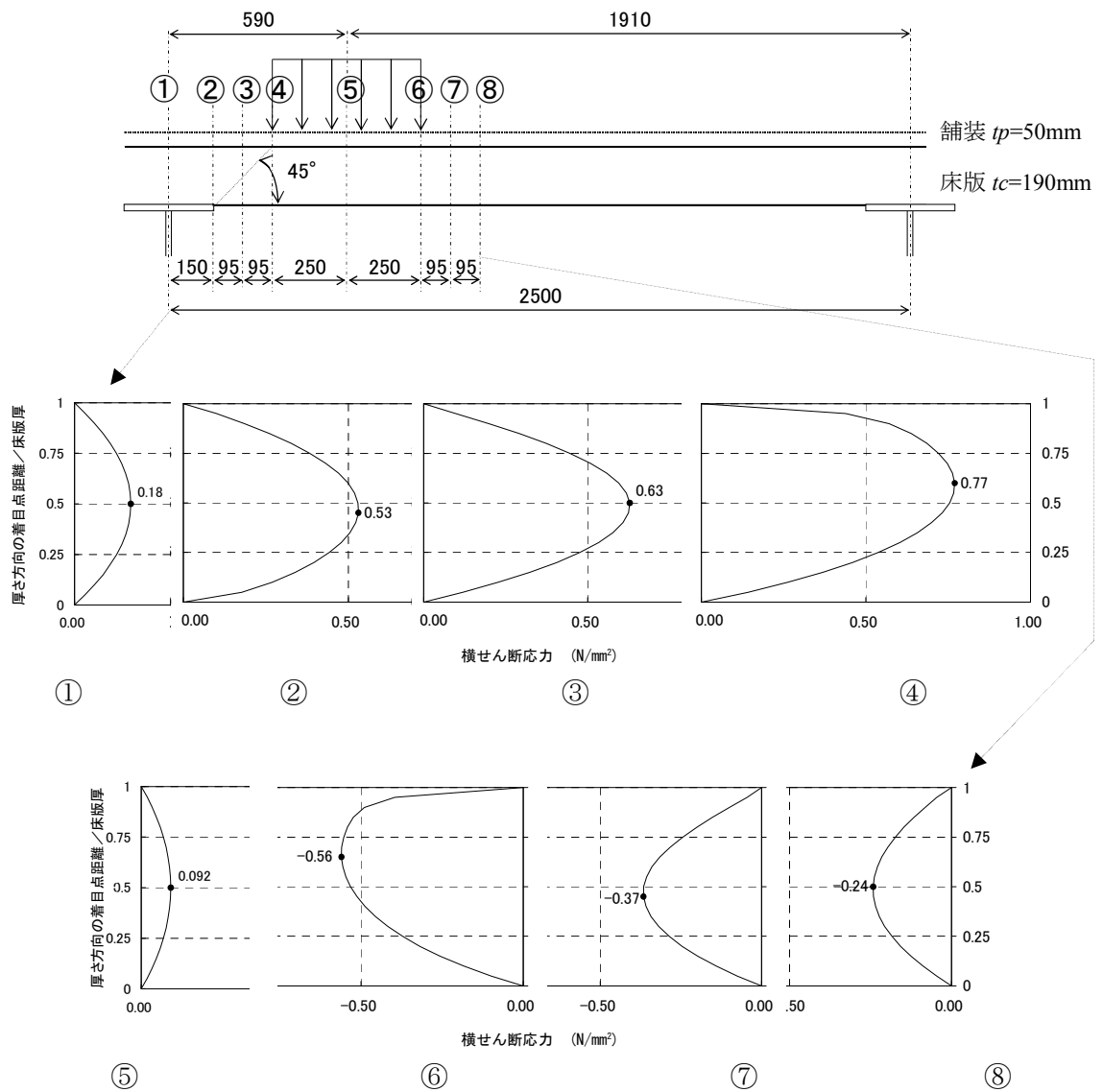


図-3.3.10 支持桁付近载荷での横せん断応力の分布

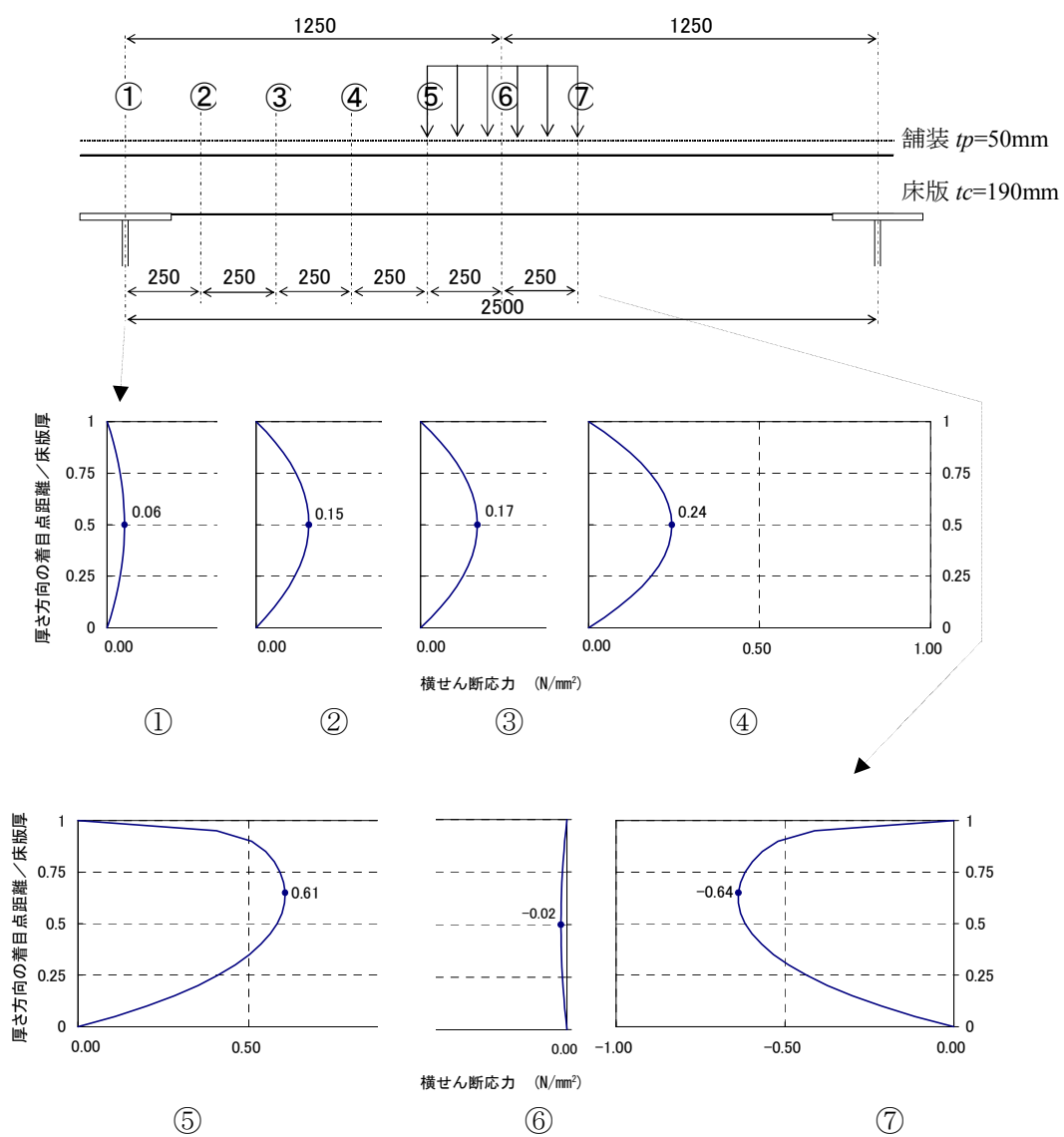


図-3.3.11 支間中央載荷での横せん断応力の分布

### 3. 3. 3 変断面となる道路橋補強床版の計算

道路橋床版の維持管理の場面では、各種の要因で劣化が進行した床版の下面側に補強材を一体化させる工法が広く採用されている。その中にはポリマーセメントモルタルを吹き付け、もしくはコテ塗りする下面増厚工法があり、この場合には補強材の端部が主桁フランジ位置に留まるため、力学的見地からすると補強床版を変断面版として考慮する必要があると考えられる。その際、補強材と床版との連続性の評価には、はく離現象を引き起こす接触界面での付着せん断応力に着目することが特に重要となるが、簡便でかつ高精度の解析手法が無いのが現状である。そこで混合法による解析手法を、補強床版を想定した下面増厚工法を適用した変断面版に適用する<sup>5)</sup>。

これらの方法を駆使することにより、主桁と合成される補強床版の解析も可能となるので、実橋床版での応力や変位が容易に把握できると推測される。

#### a) 計算方法と実橋変断面版モデル

始めに変断面床版の計算方法を解説する。  $x=0$ ,  $a$  の対辺が単純支持、残りの 2 辺  $y=0$ ,  $b$  が自由で、かつ  $y$  方向の版厚が急変する変断面版(図-3.3.12)の解析は、界面及び桁との間で授受される伝達力や反力を選点法を全面的に適用して計算することもできるが、本研究では計算精度を向上させる意味で  $x$  方向に調和解析法を、 $y$  方向には次章で詳述する選点法を適用する。その手順を以下にまとめる。

- ① 自由辺を有する版の上・下面に種々の荷重が作用する場合の基本解を作成する。
- ② 変断面版を A と B に区分し、分離した界面に作用する分布応力を選点法により離散的なパルス状の伝達力  $X_i$ ,  $Y_i$ ,  $Z_i$  ( $i=1, k$ ) に置き換える。
- ③ A の床版には外荷重  $p_0$  と伝達力が作用し、B の床版には伝達力と支持桁との合成作用による反力  $R_{xj}$ ,  $R_{zj}$  ( $j=1, t$ ) が働く。これらの力が作用する場合の A の床版下面の変位  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$  と、同様に B の床版上面の変位  $u_2$ ,  $v_2$ ,  $w_2$  を誘導する。ただし、伝達力と桁からの反力の大きさは単位荷重とする。
- ④ 伝達力の中心点におけるそれぞれの変位を連続させることにより、桁の反力  $R_{xj}$  と  $R_{zj}$  を単位荷重とする伝達力に関する柔性マトリックスからその大きさの比 (= 影響係数) を求めておく。
- ⑤ 床版 B の下面での  $x$  と  $z$  方向の変位  $u_3$ ,  $w_3$  と桁の上面の水平変位  $u_B$  とたわみ  $w_B$  との合成条件から、桁からの反力の大きさを決定する。さらにこれらの反力と影響係数を用いて、各々の伝達力の大きさを確定する。
- ⑥ 最終的に得られた界面の伝達力、桁反力および外荷重を考慮して、床版 A と B に生じる変位や応力、その積分値である断面力が算出される。

実橋を想定した補強床版の計算モデルを図-3.3.13 に示す。床版幅を 2500mm とし、橋軸方向の長辺を 5000mm とした。床版厚さは昭和 39 年の道路橋示方書による 190mm を基準とし、計算に用いた物性値は表-3.3.2 の通りで、下面増厚工法ではポリマーセメントモルタルのポリマーの増減によるヤング係数の変化を示すものとして 2 種類を設定した。なお、補強材料の硬化収縮が有害なひずみとなることも想定されるが、材料として扱う問題であるため、本研究では力学的見地から活荷重による影響のみを対象とする。解を得るための級数の項数は収束していることを確認して設定した。

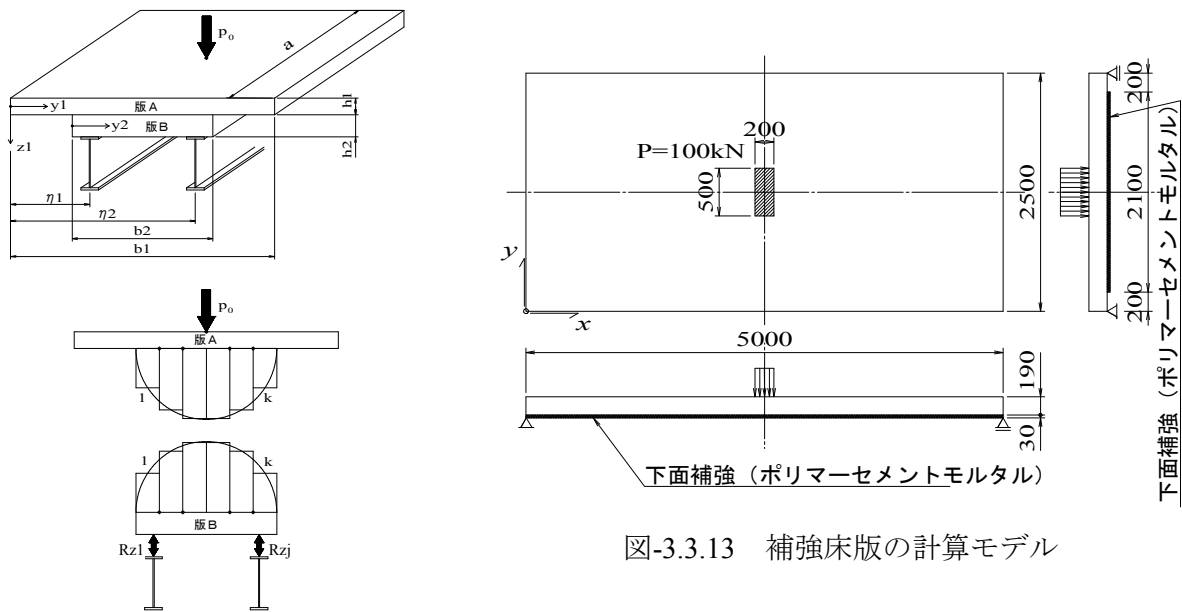


図-3.3.12 変断面版のモデル

図-3.3.13 補強床版の計算モデル

表-3.3.2 計算に用いた物性値

種 別	厚さ (mm)	ヤング係数 (kN/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比	計算種類
コンクリート床版	190	23.5	0.2	—
ポリマーセメントモルタル	30	15.0		CASE-1
		7.5		CASE-2

b) たわみと応力分布

計算結果を図-3.3.14 と図-3.3.15 に示す。選点法を用いた支持辺ではそのブロック層数を 10 としている。図-3.3.14 によれば、下面増厚材料のヤング係数が 1/2 に低下することで、床版中央のたわみが CASE-1 で 0.54mm, CASE-2 で 0.62mm となり、その比は約 1.14 倍まで大きくなることが判る。図-3.3.15(a)の床版下縁の曲げ応力分布では、版中央から 1050mm の近傍で直線的に変化していない。これは、増厚部の自由端の断面変化による影響と考えられる。また版中央点での

応力が他の点よりも低いのは分割ブロックの設定位置, すなわち中央点とブロックの端部が一致しているためと推察される. 図-3.3.15(b)は増厚材下縁の曲げ応力分布であり, 応力度レベルは床版下縁よりも小さい値で推移し, 端部近傍では僅かに大きくなる傾向が認められる.

図-3.3.16の付着せん断応力の分布は版中央から250mm離れた位置の荷重の端部付近でピーク値を示し, CASE-1 (ポリマーセメントモルタルのヤング係数  $E=15.0\text{kN/mm}^2$ ) の場合で  $\tau=0.12\text{N/mm}^2$  程度の値となっており, CASE-2 ( $E=7.5\text{kN/mm}^2$ ) の2倍近い値である. それらのピーク値付近は平坦な分布であるが, これは選点法のブロック分割の影響を受けているためと推量される. なお, 力学的には増厚材の最端部は特異点となるが, 荷重端付近に匹敵するピークが増厚材端部近傍にも発生しており, 端部近傍も弱点になることが伺える.

下面増厚工法では, 付着性能の改善の他にも施工後の増厚層のひび割れを制御するために, ポリマーの含有量を増加させることで対処される場合があるが, その際には補強効果が大きく変動することに注意を払う必要がある.

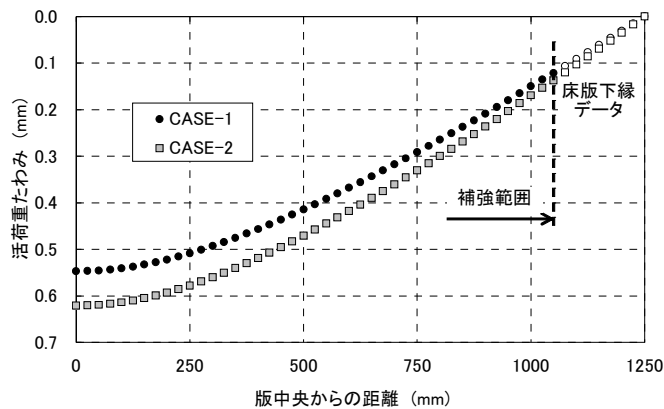
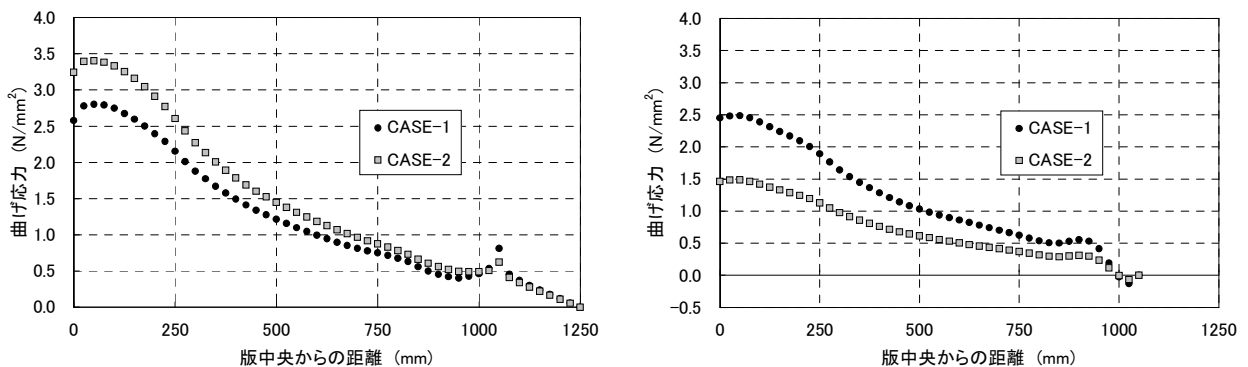


図-3.3.14 増厚材下縁の活荷重たわみ分布



(a) 床版下縁

(b) 増厚材下縁

図-3.3.15 下面増厚の直応力分布 (橋軸直角方向)



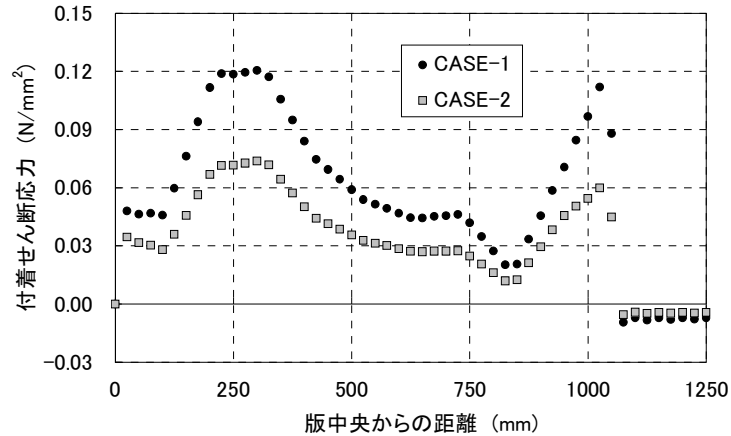


図-3.3.16 付着せん断応力分布

### 3. 4 まとめ

本章では厚板理論の級数解を特解に、境界条件を満たす補足解に薄板理論による同次解を採用して、それらを重ね合わせることで解を得る混合法を提案し、その手法を用いた数値計算から妥当性を評価した。以下に得られた成果を列挙する。

- ① 道路橋床版の輪荷重作用によるひび割れ問題は、荷重直下の局所応力が支配的になることから厚板理論の特長を残した混合法は合理的な手法である。
- ② 本章で計算例とした変断面問題は、新設床版のハッチ近傍の応力状態のみならず、鋼板接着工法や上面増厚工法を部分的に施した場合の応力集中問題にも適用できることから、これからの維持管理の時代に向けて威力を発揮する解析手法である。
- ③ 実橋床版は本章で対象とした変厚版に舗装などが加わる多層版構造であることから、そのような構造にも混合法を適用できることが求められる。

#### 参考文献

- 1) Hiroshi YOKOYAMA, Mikio SEKIGUCHI, Masakatsu SATO, Toshio HORIKAWA : An experimental study on precast slabs with haunches bonded with epoxy adhesive, Third International Conference on Concrete Under Severe Conditions, pp.2208-2215, 2001.6.
- 2) 横山広, 関口幹夫, 堀川都志雄 : 主桁近傍の床版最小厚さに関する研究, 構造工学論文集, Vol.51A, pp.1353-1358, 2005.3.
- 3) 社団法人土木学会鋼構造委員会鋼橋床版の調査研究小委員会 : 道路橋床版の新技术と性能照査型設計, 2010.10.
- 4) 横山広, 安東祐樹, 関口幹夫, 堀川都志雄 : 選点法と調和解析法を導入した混合法による道路橋補強床版の数値解析, コンクリート工学年次論文集, Vol.31, No.2, pp.469-474, 2009.7.



## 第四章 多層版解析のための調和解析法と

### 選点法の理論展開と床版構造への適用

本章では多層構造となる実橋床版への厚板理論の展開を図るため、多層版での解析手法の検討を実施する。解析の基本は三章で誘導した変位関数による厚板理論であり、境界条件の拡大を実現した混合法を活用している。本章で用いる用語として調和解析法と選点法を以下に定義する。

調和解析法：各層が接合する界面での伝達力を連続関数として扱い、級数解の各項毎に連続式を満足させる手法。接合面は完全合成となる。

選点法：連続関数である接合面での伝達力を、面的に離散的なブロックに分割してブロック内の任意点で伝達力を代表させる手法。

#### 4. 1 はじめに

道路橋床版は舗装とコンクリート床版から構成されており、複数の層からなる構造である。道路橋床版が輪荷重による繰返し載荷で疲労劣化すると、使用限界に至る前の段階で補修、補強が施されるが、現状で採用されている対策工法は既設床版に面的に接着させる工法が主流である。例えば床版上面から超速硬コンクリートを重ね打ちする上面増厚工法や、床版下面に機械式アンカーで固定した鋼板内部にエポキシ樹脂を注入充填して一体化させる鋼板接着工法（図-4.1.1）、並びに、炭素繊維やアラミド繊維をエポキシ樹脂などで床版下面に含浸接着させる繊維シート接着工法などがその代表例として挙げられる。これらの対策後には床版を構成する層数はさらに増加することになり3～4層からなる多層版構造となる。前述の通りこれらの層は接着することによって一体化されて剛性を発揮することから、はく離がその補強効果の持続性に大きな障害となる。はく離の原因には下地調整の不良や接着面での異物の混入、接着剤の硬化不良など各種に渡るが、本研究ではそれらの施工時の配慮によって除去できる問題は対象とせず、力学的見地からはく離の発生とそれが進展する危険性に着目し、その評価の手段として、簡単でかつ有効な解析手法を提案する。

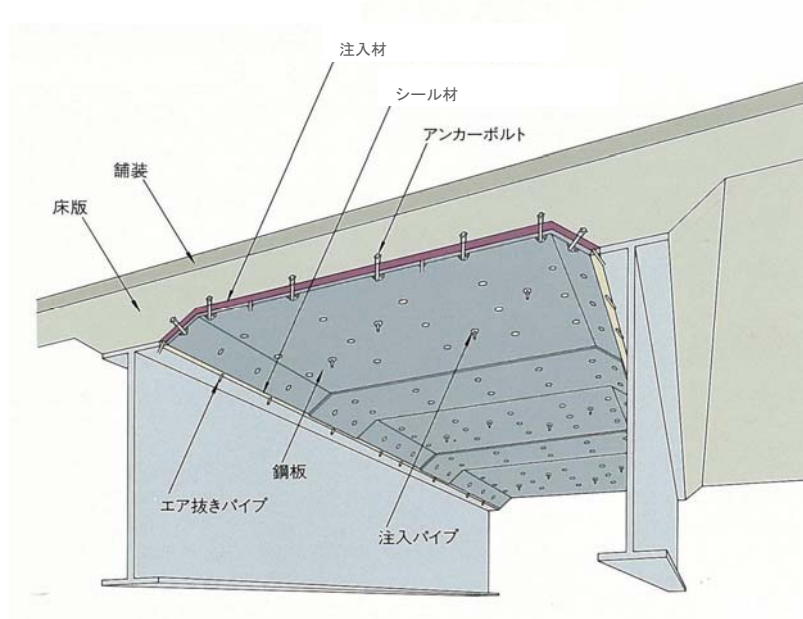


図-4.1.1 鋼板接着工法の概念図

#### 4. 2 調和解析法と選点法の概要

2. 3で示された応力法による厚板理論から誘導される単一版の上下面における  $x$ ,  $y$  および  $z$  方向の応力と変位  $u$ ,  $v$ ,  $w$  との関係式を誘導する. これらの式を図-4.2.1 に示す多層版界面での連続条件に適用して, 多層版界面の伝達力を求めると, 多層版の変位や応力の解析ができることになる. 通常, 多層版解析では各層の積分定数を未知量として扱っているため, その後の計算精度に難点が生じる. そこで式(2.3.21)の積分定数  $C_1 \sim C_6$  を式(2.3.16)に代入して上下面での各変位を求め, 変位を連続させる方法を以下に示す. この方法によれば級数の項数が増大しても発散が防止できる. なお上添字  $u$ ,  $l$  は上面と下面を意味している.

版の上下面での伝達力を図-4.2.1 のようにとれば, 上下面の変位  $u$ ,  $v$ ,  $w$  は次のように得られる. なお, 各式中の第7項は物体力による影響項である.

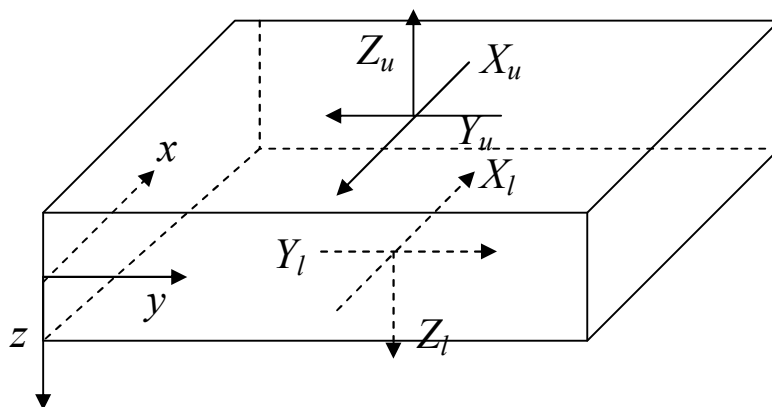


図-4.2.1 多層版の模式図

$$\begin{aligned}
2\mu u^u &= \sum_m \sum_n \left( X^u D_2 / \omega_a + Y^u D_3 / \omega_c + Z^u D_1 \alpha_m / \gamma^3 \right. \\
&\quad \left. + X^l D_5 / \omega_a + Y^l D_6 / \omega_c - Z^l D_8 \alpha_m / \gamma^3 - B_u^u \alpha_m \gamma^2 \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y / \gamma, \\
2\mu u^l &= -\sum_m \sum_n \left( X^u D_5 / \omega_a + Y^u D_6 / \omega_c + Z^u D_8 \alpha_m / \gamma^3 \right. \\
&\quad \left. + X^l D_2 / \omega_a + Y^l D_3 / \omega_c - Z^l D_1 \alpha_m / \gamma^3 - B_u^l \alpha_m \gamma^2 \right) \cos \alpha_m x \sin \beta_n y / \gamma, \\
2\mu w^u &= \sum_m \sum_n \left( X^u D_3 / \omega_c + Y^u D_2 / \omega_b + Z^u D_1 \beta_n / \gamma^3 \right. \\
&\quad \left. + X^l D_6 / \omega_c + Y^l D_5 / \omega_b - Z^l D_8 \beta_n / \gamma^3 - B_v^u \beta_n \gamma^2 \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y / \gamma, \\
2\mu w^l &= -\sum_m \sum_n \left( X^u D_6 / \omega_c + Y^u D_5 / \omega_b + Z^u D_8 \beta_n / \gamma^3 \right. \\
&\quad \left. + X^l D_3 / \omega_c + Y^l D_2 / \omega_b - Z^l D_1 \beta_n / \gamma^3 + B_v^l \beta_n \gamma^2 \right) \sin \alpha_m x \cos \beta_n y / \gamma, \\
2\mu w^u &= \sum_m \sum_n \left( X^u D_1 \alpha_m / \gamma + Y^u D_1 \beta_n / \gamma + Z^u D_4 \right. \\
&\quad \left. + X^l D_8 \alpha_m / \gamma + Y^l D_8 \beta_n / \gamma - Z^l D_7 - B_w^u \gamma^3 \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y / \gamma, \\
2\mu w^l &= \sum_m \sum_n \left( X^u D_8 \alpha_m / \gamma + Y^u D_8 \beta_n / \gamma + Z^u D_7 \right. \\
&\quad \left. + X^l D_1 \alpha_m / \gamma + Y^l D_1 \beta_n / \gamma - Z^l D_4 - B_w^l \gamma^3 \right) \sin \alpha_m x \sin \beta_n y / \gamma
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ここで,  $\omega_a = \gamma^2 / \alpha_m^2$ ,  $\omega_b = \gamma^2 / \beta_n^2$ ,  $\omega_c = \gamma^2 / \alpha_m \beta_n$ ,

$$D_1 = 1 + (1 - \nu)(1/D_p + 1/D_m),$$

$$D_2 = (1 - \nu)(tn\zeta / D_m + ct\zeta / D_p) - (tn\zeta + ct\zeta) \beta_n^2 / \alpha_m^2,$$

$$D_2' = (1 - \nu)(tn\zeta / D_m + ct\zeta / D_p) - (tn\zeta + ct\zeta) \alpha_m^2 / \beta_n^2,$$

$$D_3 = (1 - \nu)(tn\zeta / D_m + ct\zeta / D_p) + (tn\zeta + ct\zeta),$$

$$D_4 = (1 - \nu)(tn\zeta / D_p + ct\zeta / D_m),$$

$$D_5 = (1 - \nu)(tn\zeta / D_m - ct\zeta / D_p) + (tn\zeta + ct\zeta) \beta_n^2 / \alpha_m^2,$$

$$D_5' = (1 - \nu)(tn\zeta / D_m - ct\zeta / D_p) + (tn\zeta + ct\zeta) \alpha_m^2 / \beta_n^2,$$

$$D_6 = (1 - \nu)(tn\zeta / D_m - ct\zeta / D_p) + (tn\zeta + ct\zeta),$$

$$D_7 = (1 - \nu)(ct\zeta / D_m - tn\zeta / D_p),$$

$$D_8 = (1 - \nu)(1/D_m - 1/D_p)$$

$$D_p = \zeta(tn\zeta - ct\zeta) - 1, \quad D_m = \zeta(ct\zeta - tn\zeta) - 1,$$

$$\begin{aligned} B_u^u = & -\left[ \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_p \right\} S_{zp} - \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_m \right\} S_{zm} \right] \\ & + \left[ -\left\{ (1-\nu)/D_m + \beta_n^2/\alpha_m^2 \right\} S_{xp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p - \beta_n^2/\alpha_m^2 \right\} S_{xm}ct\zeta \right] \omega_a \\ & + \left[ -\left\{ (1-\nu)/D_m + 1 \right\} S_{yp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p + 1 \right\} S_{ym}ct\zeta \right] \omega_b \\ & + \left\{ 1 - 2(1-\nu)\omega_a \right\} \left( -A_x' h/2 + B_x' \right) \alpha_m / \gamma^5 (1-\nu) \\ & + \left( -A_y' h/2 + B_y' \right) \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) - A_z' / \gamma^5 (1-\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_u^l = & -\left[ \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_p \right\} S_{zp} + \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_m \right\} S_{zm} \right] \\ & + \left[ \left\{ (1-\nu)/D_m - \beta_n^2/\alpha_m^2 \right\} S_{xp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p - \beta_n^2/\alpha_m^2 \right\} S_{xm}ct\zeta \right] \omega_a \\ & + \left[ \left\{ (1-\nu)/D_m + 1 \right\} S_{yp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p + 1 \right\} S_{ym}ct\zeta \right] \omega_b \\ & + \left\{ 1 - 2(1-\nu)\omega_a \right\} \left( A_x' h/2 + B_x' \right) \alpha_m / \gamma^5 (1-\nu) \\ & + \left( A_y' h/2 + B_y' \right) \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) - A_z' / \gamma^5 (1-\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_v^u = & -\left[ \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_p \right\} S_{zp} - \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_m \right\} S_{zm} \right] \\ & + \left[ -\left\{ (1-\nu)/D_m + \alpha_m^2/\beta_n^2 \right\} S_{yp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p - \alpha_m^2/\beta_n^2 \right\} S_{ym}ct\zeta \right] \omega_b \\ & + \left[ -\left\{ (1-\nu)/D_m + 1 \right\} S_{xp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p + 1 \right\} S_{xm}ct\zeta \right] \omega_a \\ & + \left\{ 1 - 2(1-\nu)\omega_b \right\} \left( -A_y' h/2 + B_y' \right) \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) \\ & + \left( -A_x' h/2 + B_x' \right) \alpha_m / \gamma^5 (1-\nu) - A_z' / \gamma^5 (1-\nu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_v^l = & -\left[ \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_p \right\} S_{zp} + \left\{ 1/2 + (1-\nu)/D_m \right\} S_{zm} \right] \\ & + \left[ \left\{ (1-\nu)/D_m - \alpha_m^2/\beta_n^2 \right\} S_{yp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p - \alpha_m^2/\beta_n^2 \right\} S_{ym}ct\zeta \right] \omega_b \\ & + \left[ \left\{ (1-\nu)/D_m + 1 \right\} S_{xp}tn\zeta + \left\{ (1-\nu)/D_p + 1 \right\} S_{xm}ct\zeta \right] \omega_a \\ & + \left\{ 1 - 2(1-\nu)\omega_b \right\} \left( A_y' h/2 + B_y' \right) \beta_n / \gamma^5 (1-\nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( A'_x h/2 + B'_x \right) \alpha_m / \gamma^5 (1-\nu) - A'_z / \gamma^5 (1-\nu), \\
B_w^u = & - \left[ (1-\nu) / D_p S_{zp} t n \zeta - (1-\nu) / D_m S_{zm} c t \zeta \right] \\
& + \left[ - \left\{ (1-\nu) / D_m + 1/2 \right\} S_{yp} + \left\{ (1-\nu) / D_p + 1/2 \right\} S_{ym} \right] \omega_b \\
& + \left[ - \left\{ (1-\nu) / D_m + 1/2 \right\} S_{xp} + \left\{ (1-\nu) / D_p + 1/2 \right\} S_{xm} \right] \omega_a \\
& + \left( \alpha_m A'_x + \beta_n A'_y \right) / \gamma^6 (1-\nu) + \left\{ 2(1-\nu) \left( A'_z h/2 - B'_z \right) \right\} / \gamma^4 (1-\nu), \\
B_w^l = & \left[ (1-\nu) / D_p S_{zp} t n \zeta + (1-\nu) / D_m S_{zm} c t \zeta \right] \\
& + \left[ - \left\{ (1-\nu) / D_m + 1/2 \right\} S_{yp} - \left\{ (1-\nu) / D_p + 1/2 \right\} S_{ym} \right] \omega_b \\
& + \left[ - \left\{ (1-\nu) / D_m + 1/2 \right\} S_{xp} - \left\{ (1-\nu) / D_p + 1/2 \right\} S_{xm} \right] \omega_a \\
& + \left( \alpha_m A'_x + \beta_n A'_y \right) / \gamma^6 (1-\nu) - \left\{ 2(1-\nu) \left( A'_z h/2 + B'_z \right) \right\} / \gamma^4 (1-\nu)
\end{aligned}$$

多層版界面における連続条件から界面に作用する伝達力を求めるには、大別して2つの手法、すなわち 1)連続化手法と 2)離散化手法がある。前者は界面での伝達力を連続関数として扱い級数展開の各項( $m, n$ )ごとに連続式を満足させる調和解析法で、接合状況としては界面全域で完全合成となる状態を意味する。一方後者は連続関数である伝達力を離散的なブロックに分割し、ブロック内の任意点で伝達力を代表させる方法である。また離散化させる方法としては、a)矩形ブロックで代表点をブロックの midpoint とする場合、b)台形ブロックで代表点をブロック端点とする場合、c)離散化を滑らかな2次曲線に置き換える場合、d)連続関数を高次の多項式でブロックを表現する場合、等々が挙げられる。本論文では論理の簡潔さ、および計算の簡素化を図る目的で、矩形ブロックによる方法を採用する。さらに伝達力に関する連立方程式にある操作を施すことにより、接合界面の任意領域での不連続性が存在する、例えば伝達力が喪失することに伴う離散のずれ現象をもたらす場合の解析に、本方法が簡単でかつ有効な手段となることを明らかにする。

図-4.2.2 に示す  $N$  層からなる多層版を取り上げる。第  $i$  層と第  $(i+1)$  層の界面を考えると、第  $i$  層の上面の  $x, y, z$  方向の伝達力を  $(X_{i-1}, Y_{i-1}, Z_{i-1})$ 、下面の伝達力を  $(X_i, Y_i, Z_i)$ 、また第  $(i+1)$  層上面の伝達力は「作用・反作用の法則」から  $(X_i, Y_i, Z_i)$  となり、下面では  $(X_{i+1}, Y_{i+1}, Z_{i+1})$  の伝達力が作用する。

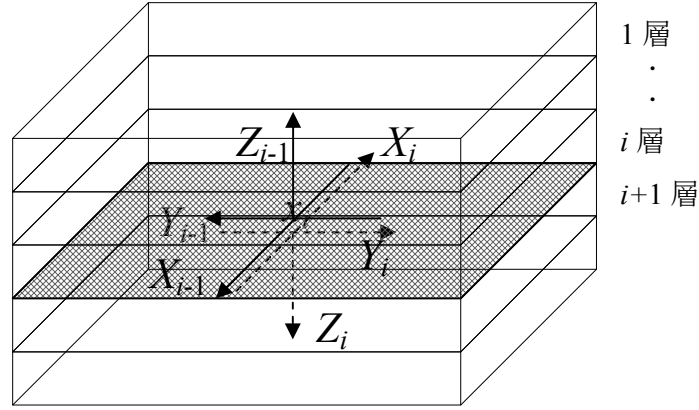


図-4.2.2 多層版モデル

界面での変位の連続条件式は次のように示される.

$$\begin{aligned}
 u_i^l &= u_{i+1}^u \\
 v_i^l &= v_{i+1}^u \\
 w_i^l &= w_{i+1}^u \quad (i=1, N-1)
 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

界面で既知のずれ現象が生じている場合には, 式(4.1.2)の右辺にずれ関数  $\delta(x, y)$  を考慮すればよい.

a) 調和解析法

この方法は前述のように Fourier 級数の各項( $m, n$ )ごとに, 変位の連続条件式を成立させる方法である. 式(4.1.1)を式(4.1.2)に代入すると, 各方向での式が得られる.

•  $x$  方向

$$\begin{aligned}
 & X_{i-1} D_5^i / \gamma \omega_a + Y_{i-1} D_6^i / \gamma \omega_c + Z_{i-1} D_8^i \alpha_m / \gamma^2 \\
 & + X_i (D_2^i + D_2^{i+1} E_i^{i+1}) / \gamma \omega_a + Y_i (D_3^i + D_3^{i+1} E_i^{i+1}) / \gamma \omega_c + Z_i (-D_1^i + D_1^{i+1} E_i^{i+1}) \alpha_m / \gamma^2 \\
 & + X_{i+1} D_5^{i+1} E_i^{i+1} / \gamma \omega_a + Y_{i+1} D_6^{i+1} E_i^{i+1} / \gamma \omega_c - Z_{i+1} D_8^{i+1} \alpha_m / \gamma^2 + (-B_{u,1}^l + B_{u,i+1}^u E_i^{i+1}) \alpha_m \gamma = 0
 \end{aligned}$$

•  $y$  方向

$$\begin{aligned}
 & X_{i-1} D_6^i / \gamma \omega_c + Y_{i-1} D_5^i / \gamma \omega_b + Z_{i-1} D_8^i \beta_n / \gamma^2 \\
 & + X_i (D_3^i + D_3^{i+1} E_i^{i+1}) / \gamma \omega_c + Y_i (D_2^i + D_2^{i+1} E_i^{i+1}) / \gamma \omega_b + Z_i (-D_1^i + D_1^{i+1} E_i^{i+1}) \beta_n / \gamma^2 \\
 & + X_{i+1} D_6^{i+1} E_i^{i+1} / \gamma \omega_c + Y_{i+1} D_5^{i+1} E_i^{i+1} / \gamma \omega_b - Z_{i+1} D_8^{i+1} \beta_n / \gamma^2 + (-B_{v,1}^l + B_{v,i+1}^u E_i^{i+1}) \beta_n \gamma = 0
 \end{aligned}$$



•  $z$  方向

$$\begin{aligned}
& X_{i-1} D_8^i \alpha_m / \gamma^2 + Y_{i-1} D_8^i \beta_n / \gamma^2 + Z_{i-1} D_7^i / \gamma \\
& + X_i (D_1^i - D_1^{i+1} E_i^{i+1}) \alpha_m / \gamma^2 + Y_i (D_1^i - D_1^{i+1} E_i^{i+1}) \beta_n / \gamma^2 - Z_i (D_4^i + D_4^{i+1} E_i^{i+1}) / \gamma \\
& - X_{i+1} D_8^{i+1} E_i^{i+1} \alpha_m / \gamma^2 - Y_{i+1} D_8^{i+1} E_i^{i+1} \beta_n / \gamma^2 + Z_{i+1} D_7^{i+1} / \gamma - (B_{w,1}^l - B_{w,j+1}^u E_i^{i+1}) \gamma^2 = 0 \quad (4.1.3)
\end{aligned}$$

ここで,  $E_i^{i+1} = \mu_i / \mu_{i+1}$

式(4.1.3)を多層版の各界面に適用し, 最上面と最下面の応力条件を考慮することから, 界面での伝達力が級数の各項( $m, n$ )ごとに,  $3(N-1)$ 元の連立方程式より求められる. また, 伝達力を各層の積分定数  $C_1^i \sim C_6^i (i=1, N)$ に代入することから, 各層の変位および応力が得られる. また, 変位法による解法は層状の地盤解析に威力を発揮するが, 本論文では割愛する.

b) 選点法

界面の伝達力を  $x$  方向に  $k_x$ ,  $y$  方向に  $k_y$ , つまり一界面当たり  $K=k_x \times k_y$  個のブロックに分割する. 伝達力を各ブロック内では一様な矩形状とすると, 式(4.1.1)で与えられる点( $x_j, y_j$ )での変位は次式のように変形される.

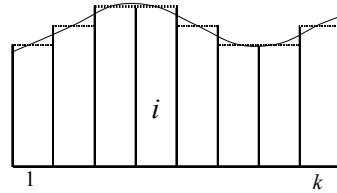


図-4.2.2 伝達力の分割の概念図

$$\begin{aligned}
2\mu_i u_j^u &= \sum_k \left[ \sum_m \sum_n \left( X^u_k \rho_x^k D_2 / \gamma \omega_a + Y^u_k \rho_y^k D_3 / \gamma \omega_c + Z^u_k \rho_z^k D_1 \alpha_m / \gamma^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + X^l_k \rho_x^k D_5 / \gamma \omega_a + Y^l_k \rho_y^k D_6 / \gamma \omega_c - Z^l_k \rho_z^k D_8 \alpha_m / \gamma^2 - B_u^u \alpha_m \gamma \right) \right] \cos \alpha_m x_j \sin \beta_n y_j, \\
2\mu_i u_j^l &= - \sum_k \left[ \sum_m \sum_n \left( X^u_k \rho_x^k D_5 / \gamma \omega_a + Y^u_k \rho_y^k D_6 / \gamma \omega_c + Z^u_k \rho_z^k D_8 \alpha_m / \gamma^2 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + X^l_k \rho_x^k D_2 / \gamma \omega_a + Y^l_k \rho_y^k D_3 / \gamma \omega_c - Z^l_k \rho_z^k D_1 \alpha_m / \gamma^2 + B_u^l \alpha_m \gamma \right) \right] \cos \alpha_m x_j \sin \beta_n y_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mu_i v^u_j &= \sum_k \left[ \sum_m \sum_n \left( X^u_k \rho_x^k D_3 / \gamma \omega_c + Y^u_k \rho_y^k D_2' / \gamma \omega_b + Z^u_k \rho_z^k D_1 \beta_n / \gamma^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + X^l_k \rho_x^k D_6 / \gamma \omega_c + Y^l_k \rho_y^k D_5' / \gamma \omega_b - Z^l_k \rho_z^k D_8 \alpha_m / \gamma^2 - B_v^u \beta_n \gamma \right) \right] \sin \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j, \\
2\mu_i v^l_j &= - \sum_k \left[ \sum_m \sum_n \left( X^u_k \rho_x^k D_6 / \gamma \omega_c + Y^u_k \rho_y^k D_5' / \gamma \omega_b + Z^u_k \rho_z^k D_8 \beta_n / \gamma^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + X^l_k \rho_x^k D_3 / \gamma \omega_c + Y^l_k \rho_y^k D_2' / \gamma \omega_b - Z^l_k \rho_z^k D_1 \alpha_m / \gamma^2 + B_v^l \beta_n \gamma \right) \right] \sin \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j, \\
2\mu_i w^u_j &= \sum_k \left[ \sum_m \sum_n \left( X^u_k \rho_x^k D_1 \alpha_m / \gamma^2 + Y^u_k \rho_y^k D_1 \beta_n / \gamma^2 + Z^u_k \rho_z^k D_4 / \gamma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + X^l_k \rho_x^k D_8 \alpha_m / \gamma^2 + Y^l_k \rho_y^k D_8 \beta_n / \gamma^2 - Z^l_k \rho_z^k D_7 / \gamma - B_w^u \gamma^2 \right) \right] \sin \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j, \\
2\mu_i w^l_j &= \sum_k \left[ \sum_m \sum_n \left( X^u_k \rho_x^k D_8 \alpha_m / \gamma^2 + Y^u_k \rho_y^k D_8 \beta_n / \gamma^2 + Z^u_k \rho_z^k D_7 / \gamma \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + X^l_k \rho_x^k D_1 \alpha_m / \gamma^2 + Y^l_k \rho_y^k D_1 \beta_n / \gamma^2 - Z^l_k \rho_z^k D_4 / \gamma - B_w^l \gamma^2 \right) \right] \sin \alpha_m x_j \cos \beta_n y_j \quad (4.1.4)
\end{aligned}$$

ここで、 $\rho_x^k = 16 \sin \alpha_m u_k \sin \beta_n v_k \cos \alpha_m \xi_k \sin \beta_n \eta_k$ ,

$$\rho_y^k = 16 \sin \alpha_m u_k \sin \beta_n v_k \sin \alpha_m \xi_k \cos \beta_n \eta_k$$

$$\rho_z^k = 16 \sin \alpha_m u_k \sin \beta_n v_k \sin \alpha_m \xi_k \sin \beta_n \eta_k$$

$$(k = 1, K)$$

$u_k, v_k$  : 各ブロックの  $x, y$  方向の幅

$\xi_k, \eta_k$  : 各ブロックの  $x, y$  方向の中心位置

また界面でのブロックの中央点( $x_j, y_j$ )で成立させる変位の連続条件式は、次のように示される。

$$u_{i,j}^1 = u_{i+1,j}^u$$

$$v_{i,j}^1 = v_{i+1,j}^u$$

$$w_{i,j}^1 = w_{i+1,j}^u \quad (4.1.5)$$

したがって、1つの界面で分割ブロックの個数が  $K$  であるとき、未知の伝達力の層数は  $3K$  となる。多層版の層数が  $N$  である場合には、未知伝達力は  $3K(N-1)$  元の連立方程式を解くことで得られる。

次に界面の任意領域ではく離現象の発生は、この位置でのある方向の伝達力が無いと想定される。以下の操作を伝達力に関する連立方程式に施せば、擬似的にこの現象が再現できる。簡単のために、未知量が  $n$  個のベクトル  $\mathbf{x}$  の連立方程式が与えられているとする。

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_2 \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
 \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

ここで、 $a_{ij} (i, j = 1, n)$  : 柔性マトリックス、 $b_i (i = 1, n)$  は既知量

例えば、 $x_2$  の値が零であるように設定する場合、 $x_2$  の対角要素  $a_{22}$  に大きな数  $A$  を加える。すると第 2 式は次のように変形される。

$$a_{21}x_1 + (a_{22} + A)x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

この式の両辺を  $A$  で除せば、上式は以下の式に変形されて、数値  $A$  を限りなく無限大に漸近させれば、最終的には  $x_2$  の値は零に近づくことになる。

$$a_{21}/Ax_1 + (a_{22}/A + 1)x_2 + a_{23}/Ax_3 + \cdots + a_{2n}/Ax_n = b_2/A$$

$$\therefore 1 \cdot x_2 \doteq 0$$

この操作をはく離領域内に存在するブロックに適用すれば、その領域に該当する伝達力はほぼ零と近似できる。

界面の全ブロックにこの操作を適用することを考えると、 $A$  の値を鉛直方向を除く  $x$  と  $y$  方向の全てに適用すれば、選点法による数値解は非合成時、すなわち重ね版の状態に至る。

## 4. 3 調和解析法と選点法を用いた数値計算例

前節で誘導した多層版の解析手法を用いた実橋床版に対する計算例として、アスファルト舗装を考慮した2層版や上面増厚工法を適用した劣化床版の計算を実施する。さらに選点法を用いて防水層のはく離問題を取り上げ、その適用性を評価する。

### 4. 3. 1 調和解析法による道路橋補強床版の数値解析

輪荷重の繰り返し作用により疲労劣化した道路橋床版への対策工法として、各種の補強工法が提案されており、輪荷重走行試験によってその耐久性が確認され広く採用されている。それぞれの補強工法では、既設床版との一体化で補強効果を確保するために、面的な接着を図ることが共通点として挙げられる。しかし、接着状態を力学的に適切であると判断できる評価手法が見当たらないのが現状である。本項ではこのような現状に対して、調和解析法による多層版解析で接着界面の応力状態を把握し、はく離発生の危険性を検討する<sup>1)</sup>。はく離現象は活荷重のもたらす多層版構造の界面に作用する付着せん断応力に支配されるので、本論文では横せん断応力に着目する。また、多層版解析の応用として劣化床版を打ち替える際に観察される上側鉄筋に沿った水平ひび割れ（写真-4.3.1）に関しても同様の解析法を駆使して、その発生の危険性を検討する。

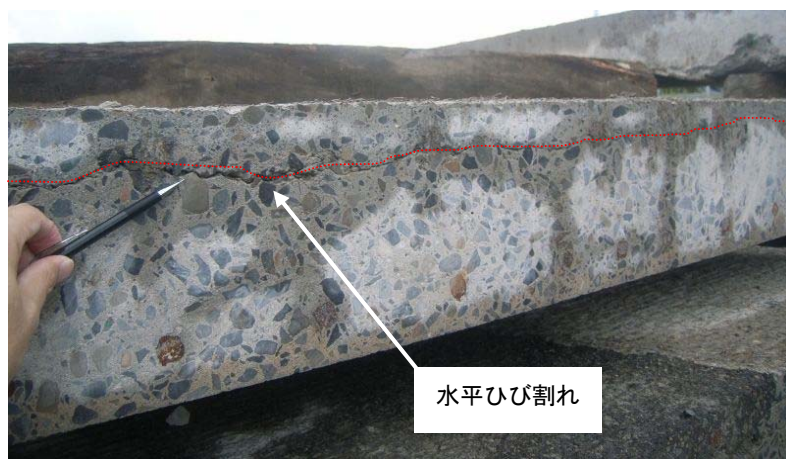


写真-4.3.1 劣化床版の切断面

#### a) 計算モデル

計算対象となる床版は図-4.3.1 に示すとおり、橋軸方向が 5000mm で橋軸直角方向が 2500mm の単純支持長方形版で、その厚さを 200mm とした。載荷荷重は道路橋示方書に準じて 100kN とし、接触面の載荷形状は 200×500mm で床版中央に載荷した。健全床版 a) ではアスファルト舗装 50mm が床版上面に敷設された現状と同様のモデルであり、舗装と床版にはズレがないものとしている。上面増厚工法の解析モデル b) では、施工時に既設床版上面を 10mm 切削すること

を考慮して床版厚さを 190mm とし，増厚コンクリートの厚さは一般的な 60mm で，床版劣化の検討と同様に既設床版との付着界面にはズレがないものとした．何れの計算でも既設床版の状態として健全床版と劣化床版を設定しており，健全床版の設計基準強度を  $f'_{ck}=21\text{N/mm}^2$  とし，道路橋示方書のヤング係数  $E_c=21.5\text{kN/mm}^2$  を採用した．劣化床版は床版剛性が低下している状態を表現するものとし，引張無視（ひび割れ考慮）のヤング係数比  $n=15$  に加え，既往の研究<sup>2)</sup> で確認されている等価なヤング係数比  $n=31$  でも計算している．本研究では，コンクリートのひび割れ断面での骨材のかみ合わせ，鉄筋とコンクリートとの付着切れおよび鉄筋のダウエル効果等による劣化床版のマクロ的な表現として，劣化床版のたわみと全断面有効時を想定する厚板理論によるたわみ値とを等価にする床版の曲げ剛性から，劣化床版の換算ヤング係数を導入している．床版と舗装，あるいは増厚コンクリートとの付着特性の把握には，床版の変形状態が主として影響するため，ヤング係数を操作する手法で概ね問題はないと推量される．表-4.3.1 は計算に用いた物性値である．なお，解を得るための級数の項数は，収束していることを確認して設定した．

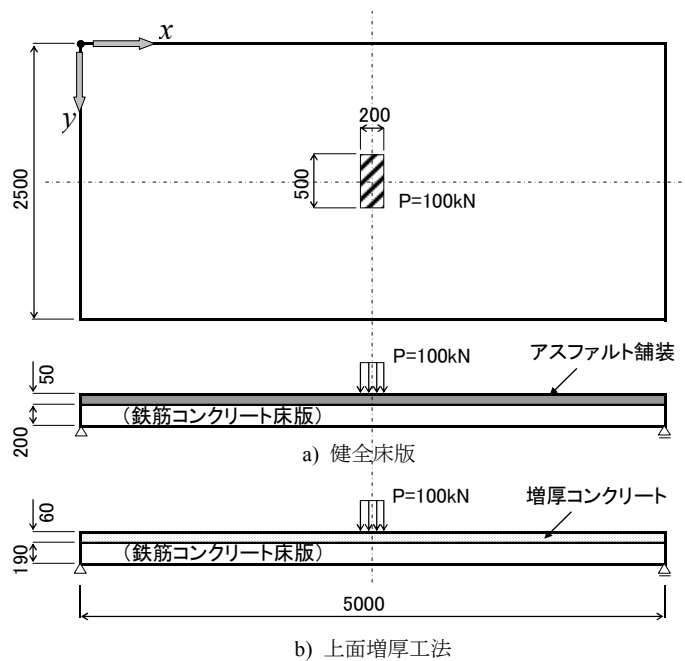
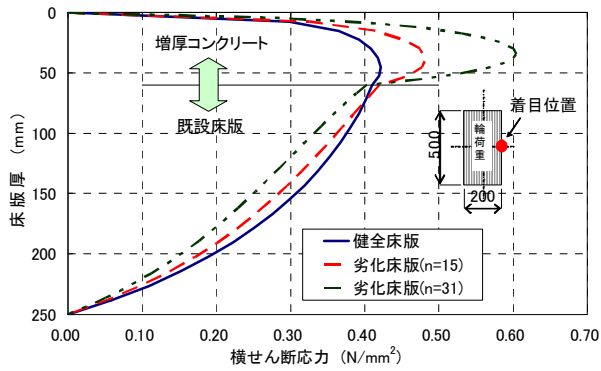


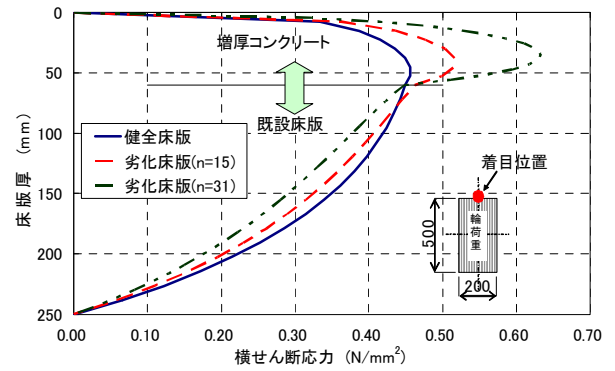
図-4.3.1 計算モデル

表-4.3.1 計算に用いた物性値

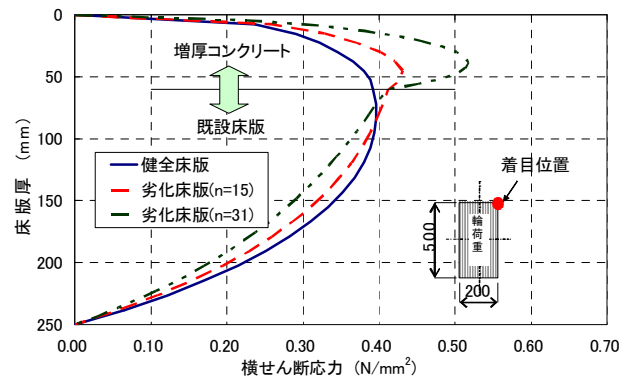
材料	ヤング係数 ( $\text{kN/mm}^2$ )	ポアソン比
アスファルト舗装(冬季)	2.0	0.4
増厚コンクリート	33.0	0.2
既設コンクリート床版(健全)	21.5	0.2
既設コンクリート床版(劣化 $n=15$ )	14.0	0.2
既設コンクリート床版(劣化 $n=31$ )	6.5	0.2



(a) 輪荷重の橋軸方向端部中央



(b) 輪荷重の橋軸直角方向端部中央



(c) 輪荷重の隅角部

図-4.3.2 上面増厚工法における横せん断応力分布

図-4.3.2 は多層版解析による既設床版と増厚コンクリートとの境界部分に発生する横せん断応力の輪荷重載荷周辺での計算結果で、輪荷重の橋軸方向端部中央と橋軸直角方向の端部中央、およびその隅角部の値を示した。応力の方向は、橋軸方向と橋軸直角方向は輪荷重の端部の辺に直交する外向き方向で、隅角部は橋軸方向と橋軸直角方向を合せん断応力ベクトルとする方向である。

図によればほとんどの計算結果で増厚コンクリートの内部に横せん断応力のピーク値が存在すること、既設床版では増厚コンクリートとの境界面、もしくはその付近に発生していることが判る。横せん断応力のピーク値は、橋軸直角方向>橋軸方向>隅角部となっており、劣化床版の計算結果が健全床版と比較して大きい値となっている。ただし、境界面のみに着目すれば、既設床版の劣化状態に関係なく横せん断応力の発生レベルはほぼ同等となっている。この理由は増厚コンクリートの厚さとヤング係数の大きさが影響しているためと考えられる。

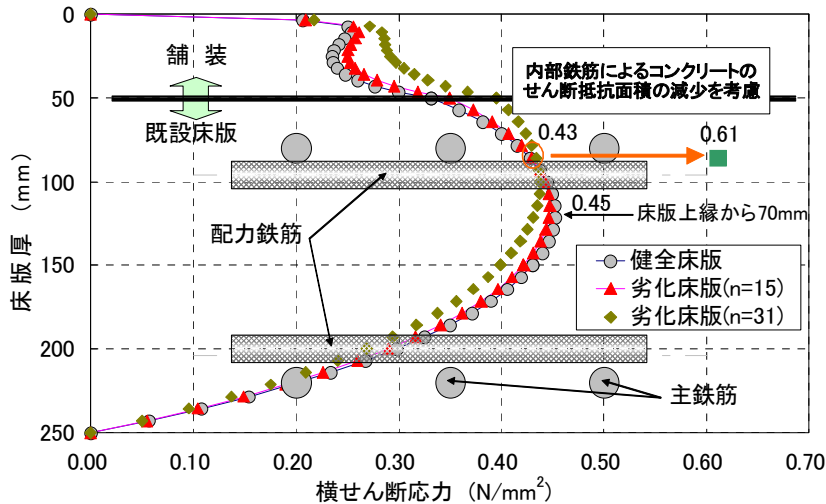


図-4.3.3 劣化床版の横せん断応力の分布

劣化床版の横せん断応力の計算結果を図-4.3.3 に示す。図は荷重端部の橋軸直角方向（主鉄筋方向）の分布を示したもので、舗装と床版の境界と内部鋼材の配置を示している。ここで示した内部鋼材は D16 が使用されていると仮定した主鉄筋・配力鉄筋の位置である。図によれば健全床版の横せん断応力のピーク値は  $0.45\text{N/mm}^2$  程度で床版上面から約 70mm の位置に発生している。ヤング係数比を  $n=15$  とした劣化床版ではピーク値はほぼ同等であるが、その位置は床版上縁から 65mm と健全床版よりもやや上側にシフトしている。それに対し  $n=31$  の劣化床版では、ピーク値が  $0.44\text{N/mm}^2$  と僅かに減少しているが、その位置は床版上縁から 50mm と大きく移動している。この位置は上側配力鉄筋の直近となっており、打ち替え対象となった既設床版の水平ひび割れの発生位置にもほぼ一致している。ここで床版を構成するコンクリートに着目すれば断面内部に配置される鉄筋は抵抗断面を減少させる異物であり、断面の減少からコンクリートの横せん断応力も増加することが推察される。図中の鉄筋考慮の■印は、D16 鉄筋が主鉄筋方向と配力鉄筋方向のそれぞれに 100mm ピッチに配置された場合の平面投影面積を減じたコンクリート部のみの純面積を勘案した割り増し係数を横せん断応力に乗じた仮定値である。主鉄筋と配力鉄筋は厳密に言えば同一平面上にはなく、断面減少率は過大となる可能性がある。ただし、コンクリートは 20mm 程度の粗骨材を含む複合材料であり、せん断破壊面が鏡面のような平滑さを持つとは考えにくいことから、矛盾はないと考えている。このような考え方による鉄筋位置の横せん断応力の仮定値は大きく突出し、水平ひび割れの発生および進展の要因となる可能性が増大する。しかしながら、コンクリートのせん断破壊に進展するせん断強度よりも小さい値であることから、他の要因が影響していることになる。コンクリートの打ち込みでは、内部鉄筋の下側にブリージング水が滞留し空隙となる場合もあることから、その部分での応力集中的な要因が影響している可能性もある。ただし、この仮定は推論の域を出ないので、鉄筋と接触する部分の応力集中の検討や、例えばスタッドジベルの評価で用いられる 2 面せん断試験を模擬したモデル供試体によるせん断試験等を実施し、妥当性を検証する必要がある。

#### 4. 3. 2 選点法による舗装と床版の局所的なはく離問題の検討

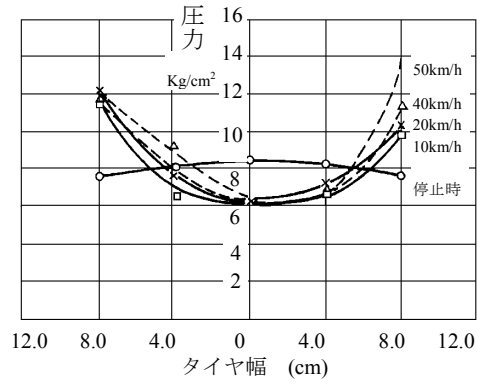
高速走行する大型車の接地圧はタイヤの側壁近傍に大きく偏った分布となることを念頭に、多層版の解析手法を舗装と床版からなる構造系に適用し、床版に作用する応力状態を把握する。また、防水層の局所的な接着不良を想定した場合に対して選点法を用いて応力状態を調べる。さらに防水層の曲げ剛性や延び剛性は床版全体の剛性に比べてその影響が小さいので、防水層の輪荷重に対する力学的寄与は少ないと仮定し、舗装と床版との接合面（＝防水層）に作用する版厚方向の応力や界面内に働くせん断応力の大きさと分布形状に着目する<sup>3)</sup>。

数値計算に用いる走行速度を停止時、中速時（60km/h）および高速時（80km/h）の3ケースとして、既往の研究<sup>4)</sup>を基に接地圧分布を放物線形状で近似する。一般に、道路橋示方書では後輪荷重（49kN）のみが2つのタイヤを介して舗装面に垂直な方向の力のみが作用すると規定されているが、実際の防水層に働く応力をより忠実に算定するには舗装表面と平行な水平方向に作用する制動荷重も考慮する必要があることから以下のような場合を想定する。

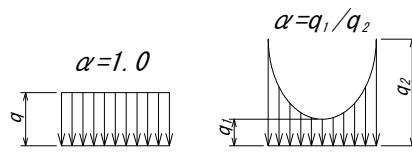
- ① 走行車両が急停止する場合、舗装表面には水平方向に制動荷重が作用し、接合面でのせん断応力に大きな値が発生することが予測される。制動荷重の大きさをエネルギー保存則や、文献から得られる摩擦係数を用いて推定する。また最大付着せん断応力の大きさとその発生する位置を推定する。
- ② 舗装と床版界面に位置する防水層に施工不良等の初期損傷を伴う部分的なはく離が存在する場合に、その接合面には局所的に付着せん断応力が発生するものと推測される。そこで部分的な防水層のはく離のモデル化を行い、それが付着せん断応力にどのような影響を及ぼすのかを検討する。

以上の数値をもとに、舗装と床版界面に作用する直応力と付着せん断応力について言及し、防水層の規格値<sup>5)</sup>との比較検討を行うこととする。本解析手法の妥当性を評価するために有限要素法による同条件のモデルとの計算結果とも比較する。





(a) 貞升による接地圧分布<sup>4)</sup>



(b) 接地圧分布のモデル

図-4.3.4 橋軸直角方向の輪荷重の接地圧分布

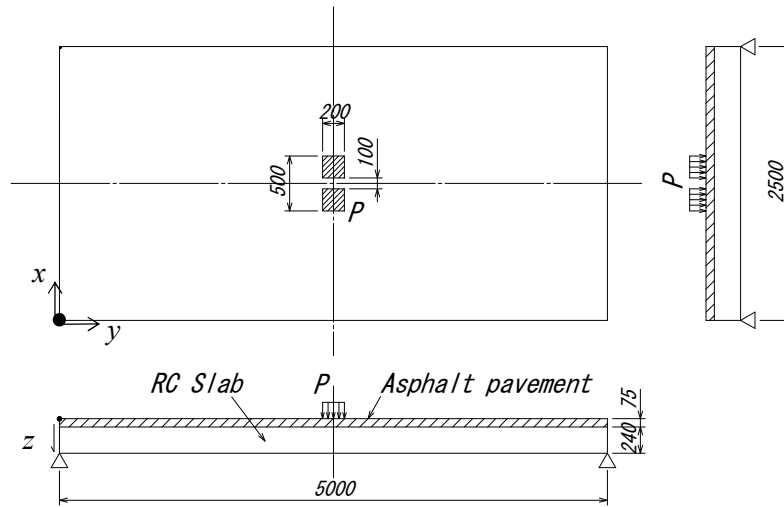


図-4.3.5 計算モデル

表-4.3.2 材料の諸元

材 料	ヤング係数 (kN/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比
アスファルト舗装 (夏季)	0.05	0.4
アスファルト舗装 (冬季)	2.0	0.4
RC 床版	30.0	0.2

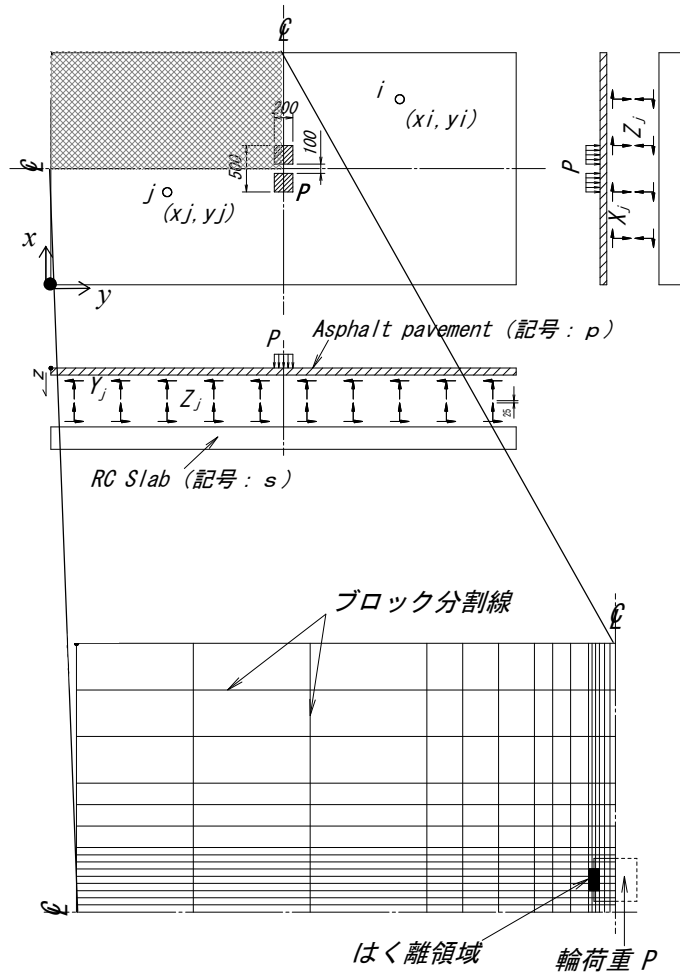


図-4.3.6 選点法概念図

a) 輪荷重の接地圧分布

走行車両の接地圧分布は走行速度によって、タイヤ側壁部に偏った分布になることが貞升の研究<sup>4)</sup>によって明らかにされており、それによる橋軸直角方向の接地圧分布は図-4.3.4(a)に示す通りである。図によれば走行速度が増せばタイヤ側壁部の接地圧が大きくなり、中央部の最小値  $q_1$  と側壁部の最大値  $q_2$  との比  $q_1/q_2 = \alpha$  (図-4.3.4(b)) は速度 50km/h で約 0.5 程度になることが読みとれる。そこで本研究では、走行速度 60km/h では速度 50km/h と同等であると仮定して  $\alpha_{60} = 0.5$  を採用し、図に示されていない 80km/h では速度向上により  $\alpha$  が大きくなることも想定されるが、本解析では  $\alpha_{80} = 0.3$  と仮定して解析を進めることとする。

また、床版各部に発生する応力は輪荷重直下が最大となる局部現象であるため、連行する荷重の影響は無視して作用荷重にはダブルタイヤ 1 組のみを考慮する。

解析モデルを図-4.3.5 に、計算に用いた物性値を表-5.3.2 に示す。モデルは全周単純支持版(辺長比 1:2)で、床版上には厚さ  $t_p = 75\text{mm}$  のアスファルト舗装を考慮している。アスファルトのヤング係数は表-5.3.2 の通り、夏季と冬季で想定される一般的な値を設定している。また、輪荷

重は前述の通りダブルタイヤとしている。

舗装と床版の界面に部分的な損傷，ここではポットホールに繋がるような小規模なはく離を想定する．解析上，最もはく離進展に影響する付着せん断応力が大きくなる点は荷重の端部になることが想定されるため制動力が作用する方向，すなわち，荷重の橋軸方向にはく離部分を設定した．そのような状態は境界条件に制約のある調和解析法では表現できないので選点法を採用した．

なお，本研究の計算に用いた荷重には衝撃を考慮していない．よって，伸縮継手付近に段差がある場合等には本研究の値より大きな応力が発生すると予想される．

舗装と床版が  $k$  個の接合点で変位が連続しているとすれば伝達力に関する  $3 \times k$  元の連立方程式が得られる．この式を解いて伝達力を求め，その値を各層の上下面の表面力として厚板理論を適用すれば各層のたわみと応力が求められる．なお，本研究では計算の都合上，平面形状での中央線で分割される  $1/4$  部分を抽出し，はく離領域を橋軸方向  $50\text{mm}$ ，橋軸直角方向を  $100\text{mm}$  の大きさとなるように調整して  $x, y$  の各方向を  $15$  分割して得られる  $225$  個の不均等ブロックで計算した (図-4.3.6)．計算で解を得るための級数の項数は，解が収束していることを確認して設定している．

#### b) 制動荷重による水平力の算出

車両の制動時に作用する荷重は，タイヤと路面の摩擦によってその大きさが決定されることになる．本研究ではその摩擦係数を道路構造令に準じて縦すべり摩擦係数と称する．縦すべり摩擦係数は，乾燥路面のものが  $0.7 \sim 0.8$  の範囲で，湿潤路面では  $0.5 \sim 0.6$  の範囲が一般的<sup>6)</sup> なようである．因みに道路構造令<sup>7)</sup> では乾燥路面で  $0.6$  程度を採用しており，湿潤路面は  $0.3$  程度である．ここで，大型車両における既往の制動距離に関する公表数値から縦すべり摩擦係数を算出した値を表-4.3.3 に示す．縦すべり摩擦係数の算出方法は，図-4.3.7 の状態で与えられるエネルギー保存則から算出できる．ここで，運動エネルギーと仕事量との関係から，その式を整理すれば縦すべり摩擦係数を算出する式(4.3.1)が得られる．

$$\beta = \frac{T}{W} = \frac{v_0^2 - v^2}{2Sg} \quad (4.3.1)$$

ここに，

$S$  : 制動距離，  $v_0$  : 初速，  $v$  : 終速，  $\beta$  : 縦すべり摩擦係数

表-4.3.3 の大型車両の制動距離から算出した縦すべり摩擦係数によれば，一般道路での走行速度を  $v=60\text{km/h}$  として減速した場合の値は  $0.425 \sim 0.481$  の範囲にある．なお，摩擦係数が  $20\text{km/h}$  を下回る範囲で逆転しているが，これは減速距離の影響によるものと想定される．

本研究で対象とする係数は乾燥路面の最大値として想定される  $0.8$  に加え，一般道での通常の使用状態を意識した走行速度  $v=60\text{km/h}$  に対応する値を  $0.5$  として，これらの値を用いて舗装と床版での界面の応力度を算出する．

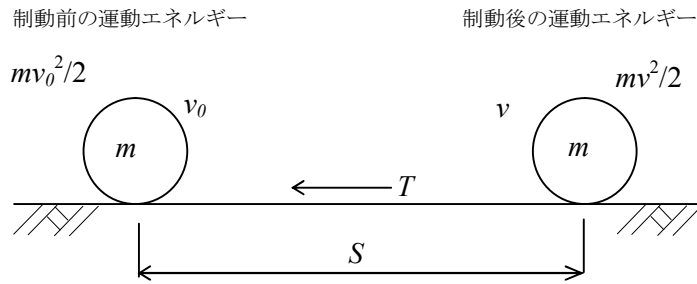


図-4.3.7 縦すべり摩擦係数の計算モデル

表-4.3.3 大型車両の縦すべり摩擦係数

走行速度 $v_0=60\text{km/h}$					
減速速度 $v$ (km/h)	50	40	30	20	0
減速距離 (m)	9	18	25	28	32
摩擦係数 (T/W)	0.481	0.437	0.425	0.450	0.443

表-4.3.4は水平力として制動荷重を考慮して直進走行する場合の舗装と床版の界面の応力状態を示したもので、着目しているのは橋軸方向の分布である。表中の①-③は縦すべり摩擦係数を示しており、摩擦係数を表-4.3.4(a)の床版上面における橋軸直角方向の直応力が停止状態( $v=0$ )よりも大きく、停止状態と比較した舗装のヤング係数別の応力では(b)の鉛直応力が直応力よりも大きい倍率となっている。(c)の付着せん断応力では停止状態との差がさらに顕著になっており、ヤング係数の大小に関わらず付着せん断応力の規格値<sup>4)</sup>である $\tau_a=0.2\text{N/mm}^2$ を超過している。既往の研究<sup>8)</sup>によれば、荷重を三角形分布にした曲線走行での遠心力作用の計算結果では舗装のヤング係数が $1.5\text{N/mm}^2$ を超えてから規格値を超過することが明らかになっているので、制動荷重は遠心力による水平方向の荷重作用よりも厳しい応力状態になる。縦すべり摩擦係数の大きさによる付着せん断応力の違いは、高速時からの急制動を考慮した係数0.8が最も大きな値となっているが、一般道レベルの $v=60\text{km/h}$ の係数0.5でも規格値を超過していることは、特殊な環境下のみで生じるのではなく、通常の供用レベルでも起こり得ることを示唆している。

表-4.3.5は、舗装のヤング係数を冬季を想定した $Ea=2.0\text{kN/mm}^2$ に固定して、荷重位置を支持辺方向に移動させた場合の付着せん断応力の値を示したものである。表中の荷重位置は支持辺からの距離で $L=1250\text{mm}$ が中央である。表によれば、作用位置による値の変化は殆どなく、輪荷重の作用が局所的挙動であることが判る。また、全ての位置で規格値を超過していることから、荷重の作用位置に関係なく急制動時での付着せん断応力が規格値を超過することが判った。

表-4.3.4 制動力作用時の舗装と床版界面の応力比較

(a) 橋軸方向のコンクリート応力

$\sigma_x$ (N/mm <sup>2</sup> )												
速度 $v$ (km/h)	0	60					80					
摩擦係数 $\beta$	0	① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		
					②/①	③/①				②/①	③/①	
ヤング係数 Ea (kN/mm <sup>2</sup> )	0.05	1.15	1.15	1.19	1.22	1.03	1.06	1.14	1.2	1.22	1.05	1.06
	0.1	1.14	1.14	1.19	1.22	1.04	1.07	1.14	1.19	1.22	1.04	1.07
	0.2	1.14	1.14	1.19	1.22	1.04	1.07	1.14	1.19	1.22	1.04	1.07
	0.5	1.13	1.13	1.17	1.2	1.04	1.06	1.13	1.17	1.2	1.04	1.06
	1	1.1	1.1	1.15	1.18	1.05	1.07	1.1	1.15	1.18	1.05	1.07
	1.5	1.08	1.08	1.13	1.15	1.05	1.06	1.08	1.13	1.15	1.05	1.06
2	1.06	1.06	1.11	1.13	1.05	1.07	1.06	1.11	1.13	1.05	1.07	
2.5	1.04	1.04	1.09	1.11	1.05	1.07	1.04	1.09	1.11	1.05	1.07	

(b) 界面の鉛直応力

$\sigma_z$ (N/mm <sup>2</sup> )												
速度 $v$ (km/h)	0	60					80					
摩擦係数 $\beta$	0	① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		
					②/①	③/①				②/①	③/①	
ヤング係数 Ea (kN/mm <sup>2</sup> )	0.05	-0.291	-0.247	-0.351	-0.414	1.42	1.68	-0.213	-0.318	-0.38	1.49	1.78
	0.1	-0.291	-0.246	-0.351	-0.413	1.43	1.68	-0.213	-0.317	-0.38	1.49	1.78
	0.2	-0.291	-0.246	-0.35	-0.413	1.42	1.68	-0.213	-0.317	-0.379	1.49	1.78
	0.5	-0.29	-0.246	-0.349	-0.411	1.42	1.67	-0.212	-0.316	-0.378	1.48	1.78
	1	-0.288	-0.244	-0.347	-0.408	1.42	1.67	-0.212	-0.314	-0.375	1.48	1.77
	1.5	-0.287	-0.243	-0.344	-0.405	1.42	1.67	-0.211	-0.312	-0.372	1.48	1.76
2	-0.286	-0.243	-0.342	-0.402	1.41	1.65	-0.21	-0.31	-0.37	1.48	1.76	
2.5	-0.284	-0.242	-0.34	-0.399	1.4	1.65	-0.209	-0.308	-0.367	1.47	1.76	

(c) 界面の付着せん断応力

$\tau_{yz}$ (N/mm <sup>2</sup> )												
速度 $v$ (km/h)	0	60					80					
摩擦係数 $\beta$	0	① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		
					②/①	③/①				②/①	③/①	
ヤング係数 Ea (kN/mm <sup>2</sup> )	0.05	0.163	0.144	0.249	0.312	1.73	2.17	0.129	0.235	0.298	1.82	2.31
	0.1	0.163	0.144	0.249	0.312	1.73	2.17	0.13	0.235	0.298	1.81	2.29
	0.2	0.163	0.144	0.249	0.312	1.73	2.17	0.13	0.235	0.297	1.81	2.28
	0.5	0.165	0.146	0.249	0.311	1.7	2.13	0.131	0.235	0.297	1.79	2.27
	1	0.167	0.148	0.249	0.31	1.68	2.09	0.134	0.235	0.295	1.75	2.2
	1.5	0.169	0.15	0.249	0.309	1.66	2.06	0.136	0.235	0.294	1.73	2.16
2	0.171	0.152	0.249	0.307	1.64	2.02	0.138	0.235	0.293	1.7	2.12	
2.5	0.173	0.154	0.249	0.306	1.62	1.99	0.14	0.235	0.292	1.68	2.09	

表-4.3.5 制動力による冬季の付着せん断応力

速度 $v$ (km/h)	0	60					80					
摩擦係数 $\beta$	0	① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		① 0 <sub>0</sub>	② 0.5	③ 0.8	倍率		
					②/①	③/①				②/①	③/①	
荷重位置	450	0.171	0.152	0.249	0.308	1.64	2.05	0.138	0.235	0.294	1.73	2.75
	650	0.171	0.152	0.249	0.307	1.64	2.05	0.138	0.235	0.293	1.73	2.75
	850	0.171	0.152	0.249	0.307	1.64	2.05	0.138	0.235	0.293	1.73	2.75
	1050	0.171	0.152	0.249	0.307	1.64	2.05	0.138	0.235	0.293	1.73	2.75
	1250	0.171	0.152	0.249	0.307	1.64	2.05	0.138	0.235	0.293	1.73	2.75

c) はく離に対する計算例

防水層の一部に施工不良や輪荷重の影響によりはく離が生じた場合には、その直上の輪荷重作用によって局所的な付着せん断応力が作用し、小規模なはく離が拡大することで舗装の損傷に繋がることが懸念される。舗装の損傷は通行車両の走行性および安全性に影響することになり、防水層の損傷は床版の疲労耐久性にも悪影響を及ぼすと推察される。

そこで選点法による計算モデルで、4.2節で示した界面の一部で応力伝達を強制的に遮断する計算を行い、はく離境界部分の付着せん断応力を算出する。なお、選点法の計算手法の妥当性を確認するために、はく離のないモデルでの調和解析法による値との比較、また計算結果の妥当性を吟味するために、はく離を有する3次元ソリッドモデルの有限要素法で、汎用プログラムであるMSC Software社のMSC.Marcを使用した<sup>9)</sup>。モデルの形状は1/4で節点数は8、分割数はx:y:z=15:23:6による計算値とも比較する(図-4.3.8)。なお載荷荷重は理論解析と同等となるように、道路橋示方書に設定されている接地面積の分布荷重としている。有限要素法による変位とひずみの形状関数(1次関数)による解法を式(4.3.1)に示す。

$$u_i(x) = N_i(x)\bar{u}_i$$

$$\varepsilon_{ij}(x) = 1/2 \left( \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_i} \right) \quad (4.3.1)$$

ここに、 $u(x)$  :  $x$  における変位、 $N$  : 形状関数、 $\bar{u}$  : 接点変位  
 $\varepsilon(x)$  :  $x$  におけるひずみ

はく離がない場合の調和解析法、選点法および有限要素法の各計算による床版中央下縁のたわみを表-4.3.6に示す。厚板理論による厳密解と選点法による計算結果は一致しているが、有限要素法による値は2.4%程度の誤差となっている。

図-4.3.9は界面における橋軸直角方向の付着せん断応力の分布を示しており、はく離のない付着応力の厳密解と選点法の計算結果を表している。応力の分布形状とピークの位置は両方の計算結果も同じであるが、選点法の値が厳密解に対して118%と大きな値となっている。この理由は選点ブロックの大きさに起因するものと考えられる。しかしながら、橋軸直角方向の直応力を表す図-4.3.10では厳密解とよく整合しているので、付着せん断応力での差は全ての計算結果に表れるものではなく、はく離問題の傾向を評価するに際しては十分であると判断される。

図-4.3.10は床版上縁の応力分布であるが、厚板理論による厳密解と選点法による計算結果はほぼ一致しているが有限要素法の値は小さいレベルで推移している。

図-4.3.11は鉛直応力 $\sigma_z$ の分布を示したもので、冬季と夏季での舗装のヤング係数の変化は鉛直応力には影響がないことと、有限要素法の結果にはばらつきのあることが読み取れる。有限要素法による計算で100mm付近に突出した値が現れているが、この原因は部分的に付着をなくした計算でも舗装の水平せん断力の分配が残るためと考えられる。

図-4.3.12 は床版上面でのねじりによるせん断応力  $\tau_{xy}$  の分布を示したものである。選点法の値は冬季よりも夏季の方が大きいことから、舗装のヤング係数が季節で変化することによる剛性への寄与による差が生じた結果であると推察される。図にははく離範囲を示しているが、ねじりによるせん断応力がはく離の影響を受けていることが判る。有限要素法の値は界面の応力と同様に選点法と比較して小さな値で推移している。

図-4.3.13 は部分的なはく離を考慮した計算結果で、選点法の値ははく離領域で応力の値が零付近まで低下し、付着領域の前後で増加する傾向となった。ピーク位置は接着・はく離境界から 10mm 離れた位置となっており、その値は冬季の舗装のヤング係数が大きくなる場合で  $0.464\text{N/mm}^2$  であり、はく離のない選点法の計算結果  $0.346\text{ N/mm}^2$  の 134%にまで大きくなっている。選点法の特徴として選点ブロックの大きさが精度に影響を及ぼすものの、比較的密なブロック分割による計算であることと付着の有無の他は条件を合わせているため計算結果の比率は信頼できるものと考えている。また、荷重載荷範囲の外側の接着・はく離境界でも規格値を超えている部分があり、はく離範囲が走行方向に関係なく左右に広がる危険性が伺える。舗装のヤング係数を変化させた冬季と夏季の違いに着目すれば、ピークの位置で夏季の方が冬季に対して 5% 程度低下しているものの何れも規格値を大きく超えていることが認められる。

本研究では選点法の妥当性確認するために有限要素法による解析を行ったが、計算結果からは、適用する際の留意点、すなわち、たわみ等の変位では精度が得られるが、変位の微分形である応力に関するピーク値等の算出には限界があることが認められた。

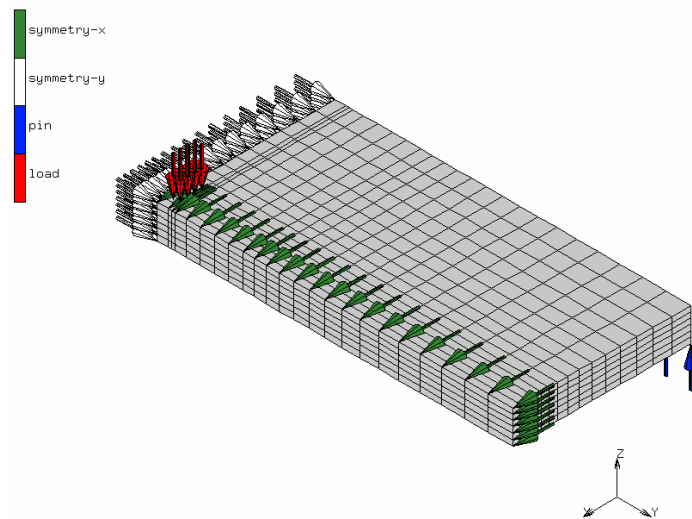


図-4.3.8 有限要素法によるモデル図  
(ソリッドモデル節点数 8, 分割数  $x:y:z=15:23:6$ )

表-4.3.6 各計算手法によるたわみの比較

計算手法	厚板理論	選点法	FEM
たわみ(mm)	0.2417	0.2417	0.2360

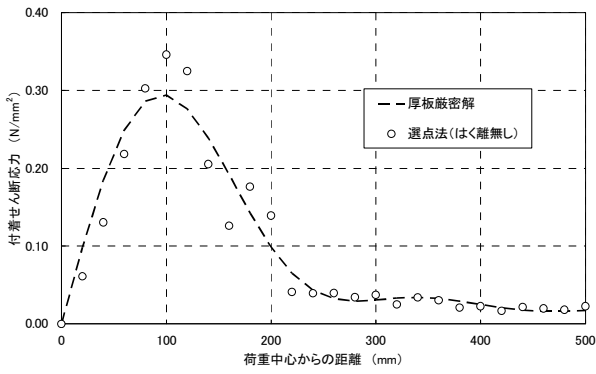


図-4.3.9 付着せん断応力分布 (はく離無し)

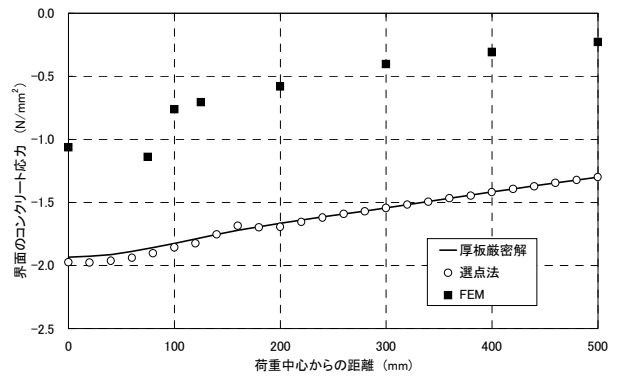


図-4.3.10 床版上面の応力 (橋軸直角方向)

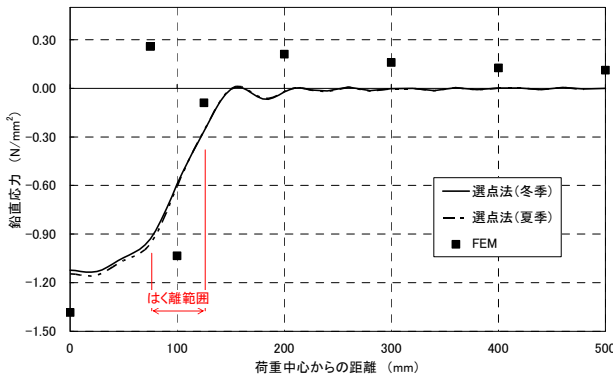


図-4.3.11 床版上面の鉛直応力分布

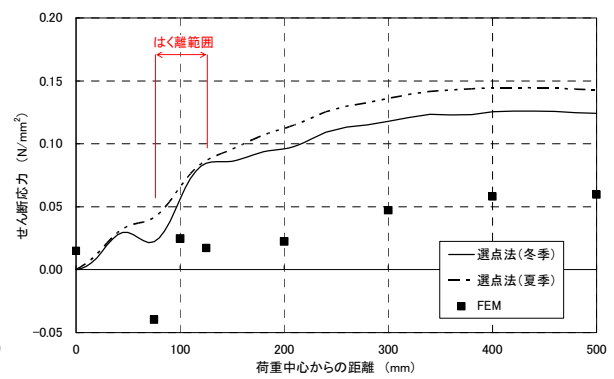


図-4.3.12 床版上面のねじりによる応力

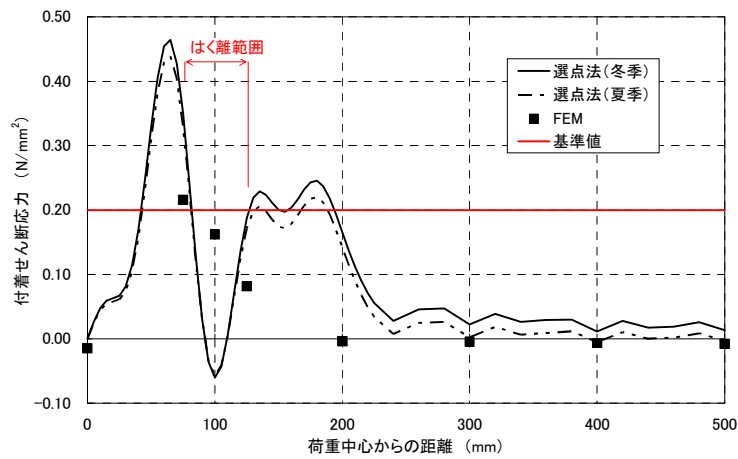


図-4.3.13 付着せん断応力



### 4. 3. 3 実橋床版での載荷試験における劣化度評価への適用

鉄筋コンクリート床版の劣化度評価では、これまでひび割れ密度による方法が主流となって実施されてきた。しかしながら、輪荷重走行による疲労作用が主原因となる疲労現象であればその適用が中心となるが、材料劣化が相乗する場合には信頼性に乏しくなる。その際には現場での静的な載荷試験を併用することで耐荷性を把握する調査が実施されている。また、橋梁点検の場面でも桁高が大きい場合には点検車による近接が困難となり、劣化の実態が把握できないという実情がある。その際には足場を仮設することになるが、規模が大きい橋梁になるとコストも膨大になり、調査に要する期間も長くなる。さらに一部の鋼箱桁橋では、桁上に埋設型枠が設置される場合があり、床版下面の状況が把握できないという橋梁も実在し、このような橋梁では床版下面側への計器類の設置が困難となることから、静的な載荷試験すら実施できなくなる。

これらの背景から、より簡便に路面上からのみのアプローチで可能な載荷試験を実施する手法として、床版構造に対しての衝撃荷重載荷試験が開発され、その実用化が進められている<sup>2)</sup>。本研究ではその載荷手法を都市内の橋梁や海上橋に適用し、ひび割れ床版の劣化度や過去に補強済みの床版の補強効果の健全性を評価した。検討に当たっては調和解析法に、実橋での複雑な支持条件に対しても煩雑な操作なしに精度を確保できる選点法を組み入れた手法で理論上のたわみ値を算出し、載荷試験結果と比較するたわみ劣化度の指標で評価した<sup>10)</sup>。一般に有限要素法による解析が橋梁の載荷試験でも採用される傾向にあるが、実橋での鋼板接着工法や炭素繊維シート接着工法等による補強済み床版では、付着問題やせん断応力を対象とした場合、4. 3. 2項で指摘したように厳密解を求めることが困難であるばかりか多大な労力と煩雑な操作が必要となる。

#### a) 都市内高架橋への適用

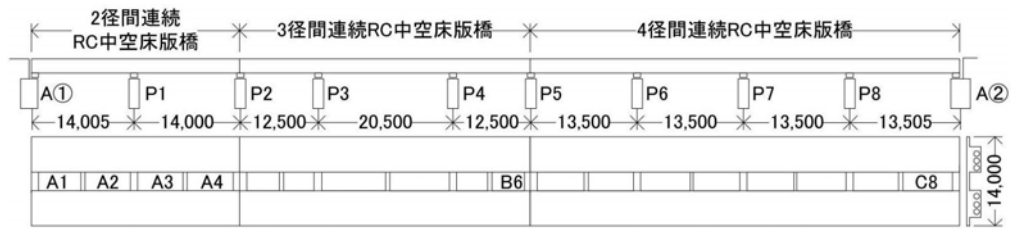
##### ・載荷試験の状況

東京都では歴史的鋼橋を含め多くの橋梁を管理しており、その中で道路橋床版を効率よく維持管理する手法として写真-4.3.2に示すIIS(Impulse Input System Method)を開発している。このシステムは衝撃荷重を発生させる重錘落下のための装置を小型化することで車線と主桁配置で制約を受ける載荷可能範囲を広げており、速度計センサを任意に配置可能にして橋梁形式を問わず載荷位置と支持桁位置のデータが取得できるように構成されている。実際の計測では同一箇所ですら3～5回の試験で速度計センサから得られる波形データを積分処理することで変位に変換し、平均化したたわみとしている。この手法の利点は前述の通り足場が不要であることに加え、試験が短時間で可能であり1箇所の計測が数分で終了することが挙げられる。

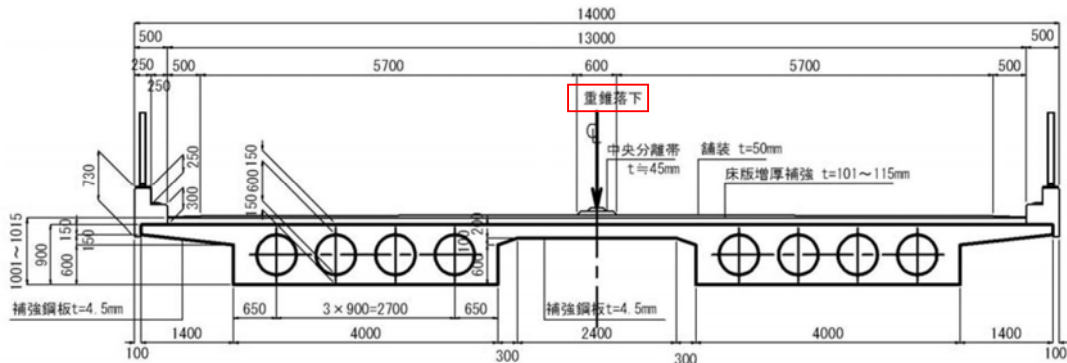
載荷試験の対象となった橋梁の概要を図-4.3.14に示す。本橋はRC中空床版橋で主版が中間床版で連続化している上下線一体型の構造である。載荷対象は中央部分の床版で過去に上面増厚工法と鋼板接着工法で上下面から補強されている。



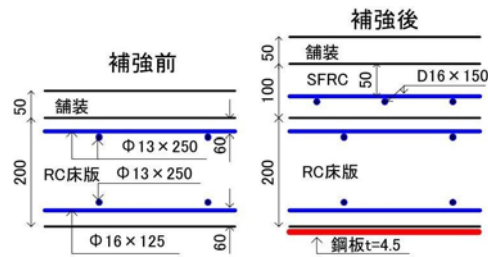
写真-4.3.2 IIS(Impulse Input System Method)による計測状況



(a) 一般形状および調査位置



(b) 橋梁断面図



(c) 床版の補強断面

図-4.3.14 載荷試験対象橋梁の概要

・計算モデル

本橋の床版の支持条件は比較的剛性の高い主版に剛結された状態であり、固定版モデルによって解析した。この手法は第五章で詳述しているが単純支持点近傍に剛性無限大のダミー桁を配置することによって固定支持を生み出すものであり、厚板理論のみで解を得ることも可能となる簡便な計算手法である。表-4.3.7 は計算に用いた物性値で RC 床版のヤング係数は竣工時の  $E_c=25\text{kN/mm}^2$  と鉄筋コンクリートの計算に用いる引張無視の状態を表現する  $n=15$ 、劣化がさらに進展した状態の  $n=31$  も考慮した。床版補強の上面増厚補強は補強鉄筋を配置するタイプで  $t_c=100\text{mm}$  で、接着鋼板の厚さは  $t_p=4.5\text{mm}$  である。なお、計算で解を得るための級数の項数は、収束したことを確認して設定している。

表-4.3.7 計算に用いた物性値

材料	厚さ	ヤング率	ポアソン比	備考
	H (mm)	E (N/mm <sup>2</sup> )	$\nu$	
アスファルト舗装	50.0	500	0.40	夏季
RC床版(n=8)	200.0	25,000	0.17	竣工時
RC床版(n=15)	200.0	13,720	0.20	全断面有効時
RC床版(n=31)	200.0	6,461	0.20	引張り無視時
鋼板接着	4.5	200,000	0.30	
上面増厚(SFRC)	100.0	35,000	0.17	

表-4.3.8 IIS の測定値と静的換算荷重によるたわみ

パネル No.	補強形式	横桁間隔 (mm)	IIS測定値			静的50kN換算値	
			3回の平均値		50kN換算 たわみmm	荷重係数 $\alpha$	たわみ (mm)
			荷重 (kN)	たわみ (mm)			
A1	鋼板+増厚	5870	54.278	0.0466	0.0429	2.275	0.0977
A2	鋼板+増厚	6125	55.503	0.0526	0.0474	2.275	0.1078
A3	鋼板+増厚	6125	50.880	0.0479	0.0471	2.275	0.1071
A4L	鋼板+増厚	5850	50.997	0.0287	0.0281	2.275	0.0640
A4	鋼板+増厚	5850	51.626	0.0383	0.0371	2.275	0.0844
A4R	鋼板+増厚	5850	50.697	0.0469	0.0463	2.275	0.1052
A6L	鋼板+増厚	5100	53.748	0.0388	0.0361	2.275	0.0821
A6	鋼板+増厚	5100	50.328	0.0426	0.0423	2.275	0.0962
A6R	鋼板+増厚	5100	50.508	0.0435	0.0431	2.275	0.0980
A8L	鋼板+増厚	5620	52.067	0.0407	0.0391	2.275	0.0890

・IIS による試験結果

IIS法は100kgの重錘を740~760mmの高さから自由落下させる衝撃荷重載荷システムであり、直径300mmの載荷板を用いている。重錘落下でのロードセルで検出される値はパネルA1で54kNとなっており、その作用時間は約23msであった。なお、本計測ではたわみ測定値を50kNに換算して取り扱うものとする。

本研究で採用した衝撃荷重載荷試験では、これを静的荷重として取り扱う際に、一例として路盤上のコンクリート舗装で計測される動的たわみのAASHO道路試験の解析によると衝撃荷重の30~60%が等価なたわみとなる静的荷重と報告されている。本試験では後述する試験車両を用いた載荷試験の結果から得られた換算弾性係数  $n=31$  を用いて、IISによるたわみの値から

荷重を求め静的荷重の基準値である 50kN に換算して評価する。表-4.3.8 に IIS による計測たわみと静的換算たわみの計算結果を示す。この時の換算荷重は 21.937kN で基準値である 50kN との比は  $\alpha=2.275$  となった。

$$\alpha = \frac{\text{載荷試験と同じ支持条件での理論計算 50kN 載荷でのたわみ}}{\text{載荷試験での 50kN 換算たわみ}}$$

次にヤング係数を変化させた計算結果と静的換算たわみを比較することで健全性を評価する。表-4.3.9 は中央載荷の場合の比較を示したもので、載荷試験の結果を静的 50kN 載荷に換算したたわみは劣化が進展していると想定される  $n=31$  の付着が無い計算結果よりも小さくなっている。 $n=15$  と  $n=31$  の計算値が近似しているが、現実問題として補強は劣化が進展した状態で施されるので、 $n=31$  はコンクリートの劣化状態を過小評価しているとは考えにくい。よって、劣化した床版に施された上面増厚と鋼板接着の各補強工は十分な付着性能を保持していると推定される。

よって、上面増厚コンクリートならびに下面の補強鋼板は有効に機能していると評価できる。以上の結果から IIS による載荷試験で補強済み床版の評価が可能で、維持管理に効果的な手法であることが示された。

表-4.3.9 中央載荷でのたわみの計算値と測定値の比較

計測位置	横桁間隔 (mm)	n=8		n=15 全断面有効		n=31 引張無視		測定値 (静的50kN換算)
		付着あり	付着なし	付着あり	付着なし	付着あり	付着なし	
A1	5,870	0.0556	0.0711	0.1001	<b>0.1029</b>	0.1817	<b>0.0977</b>	
A2	6,125	0.0555	0.0709	0.1001	<b>0.1030</b>	0.1815	<b>0.1078</b>	
A3							<b>0.1071</b>	
A4	5,850	0.0557	0.0713	0.1004	<b>0.1030</b>	0.1819	<b>0.0844</b>	
B6	5,100	0.0555	0.0710	0.1001	<b>0.1021</b>	0.1813	<b>0.0962</b>	

b) 海上橋への適用

・ 載荷試験の状況

試験で使用した衝撃荷重載荷には舗装の分野で開発, 運用されている写真-4.3.3 のFWD(Falling Weight Deflectometer)を使用した. その載荷機構は図-4.3.15 のとおりである. 荷重は衝撃荷重 10tonf (98kN)でその際の重錘落下高さは 1510mm である. たわみの計測は前述の IIS と同様に写真-4.3.4 に示す速度センサを載荷点と支持桁上に配置して波形データを取得した.

対象橋梁の断面は図-4.3.16 に示すように 3 主桁の合成桁の中間に縦桁が増設されており, 主桁の桁高が 2200mm でその間隔は 2750mm である. 載荷位置は外観目視による床版の損傷度を考慮しながら, 主桁と縦桁間の中央でその位置を選定した (図-4.3.17).



写真-4.3.3 FWD 試験車



写真-4.3.4 重錘落下位置と速度計の配置状況

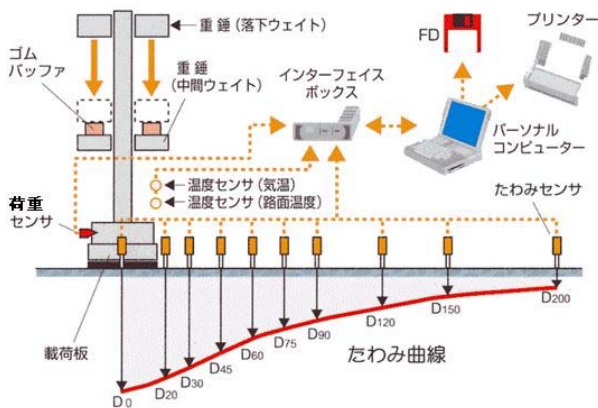


図-4.3.15 FWD 試験装置の載荷機構

(本試験では荷重載荷のみで変位形等はいっていない)

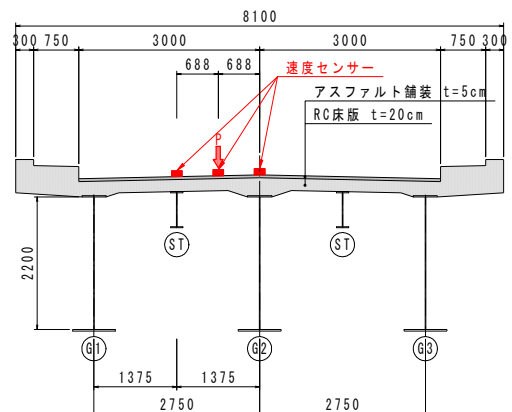


図-4.3.16 橋りょうの断面

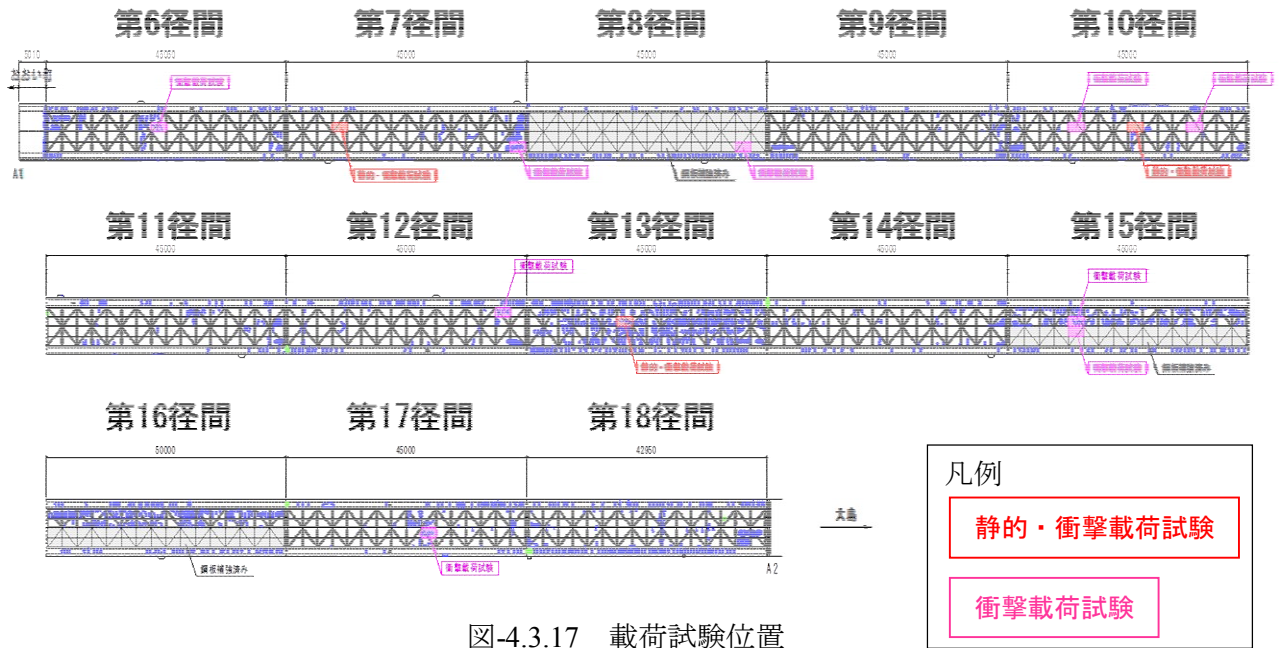


図-4.3.17 荷重試験位置

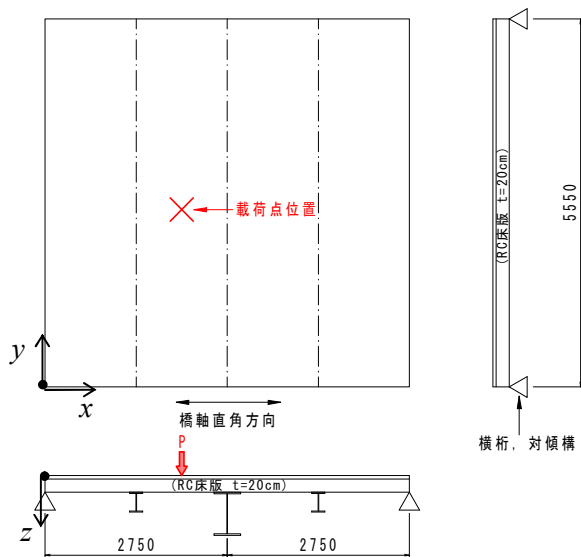


図-4.3.18 計算モデル

表-4.3.10 計算に用いた物性値

種別	劣化状態	ヤング係数 ( $\text{kN}/\text{mm}^2$ )	ポアソン比
アスファルト舗装	—	4.0	0.3
コンクリート床版	健全	23.5	0.2
	引張無視 (n=15)	13.3	
	劣化 (n=31)	6.5	

・計算モデル

たわみ値の計算ではその精度を確保する必要があり、実橋梁の断面をできるだけ忠実に再現するため図-4.3.18 に示すようにモデル化した。舗装を含めた2層版とし、版の周辺は単純支持で中央の主桁と縦桁はその断面形状として幅と高さ、および剛性を考慮し、上フランジの変形は考慮しない。ただし、本橋では床版の一部に鋼板接着工法による補強が実施されており、その部分の荷重試験の評価では3層版として解析している。解析に用いた物性値は表-4.3.10 のとおりである。

・床版の劣化度評価

調査対象床版の劣化度の評価ではたわみによる劣化度を用いた。その手法は松井が提案<sup>11)</sup>したもので、解析上の引張無視の断面におけるたわみ値に実測たわみが達した状態を使用限界とするものである(式-4.3.2)。この評価手法ではひび割れがない健全な状態の劣化度を零として、実測活荷重たわみが引張側コンクリートを無視した理論値に到達した時点を使用限界と定義している。

$$D_{\delta} = (W - W_0) / (W_c - W_0) \quad (4.3.2)$$

ここに、 $D_{\delta}$ ：たわみ劣化度 ( $D_{\delta}=1.0$  で使用限界に到達,  $D_{\delta}>1.0$  で使用限界を超え対策必要)

$W$ ：実測活荷重たわみ(mm)

$W_0$ ：コンクリートの全断面を有効と仮定した理論たわみ(mm)

$W_c$ ：引張側コンクリート無視の状態での理論たわみ(mm)

表-4.3.11 はたわみ劣化度を評価した結果である。ここで、試験位置の第 7, 10(2), 13 径間の結果は、衝撃荷重載荷と同時にを行った静的な載荷試験の結果を示している。静的な試験は全載荷位置の一部で実施しており、載荷によるデータ取得の他に衝撃荷重載荷試験のキャリブレーションとしての位置づけでもある。

計算結果によれば、第 6 径間でたわみ劣化度が使用限界の指標となる 1 を超過しているが、他は下回っており、健全な状態を維持していると評価できる。鋼板接着が施されている第 8, 15(2) 径間では、計算結果が零を下回っていることから補強効果ならびにそれが維持されていることが伺える。図-4.3.19 は劣化度が 1 を超過した第 6 径間と、比較的健全な第 10 径間(3)の解析結果による橋軸直角方向のたわみ分布に実測たわみをプロットしたものである。ここで、解析上で設定した  $n=31$  は筆者らの研究<sup>2)</sup> で新たに設定した値である。図によれば、解析上で劣化状態を設定することにより実測たわみの評価が容易になることが判る。さらに、経年後のデータが蓄積されれば、実測たわみの比較も可能になることから、より精度の高い劣化度の評価と維持管理計画が策定できることになる。

表-4.3.11 たわみ劣化度の計算結果

試験位置	荷重方法	床版の種類	たわみによる判定			
			W	W <sub>o</sub>	W <sub>c</sub>	D <sub>δ</sub>
第6径間	FWD	無補強	0.133	0.077	0.121	1.27
第7径間(1)	静荷重	無補強	0.080	0.130	0.202	<0
〃	FWD	無補強	0.080	0.097	0.149	<0
第7径間(2)	FWD	無補強	0.133	0.113	0.174	0.33
第8径間	FWD	鋼板接着	0.071	0.091	0.124	<0
第10径間(1)	FWD	無補強	0.095	0.100	0.152	<0
第10径間(2)	静荷重	無補強	0.100	0.107	0.172	<0
〃	FWD	無補強	0.088	0.088	0.138	0.00
第10径間(3)	FWD	無補強	0.081	0.067	0.104	0.38
第12径間	FWD	無補強	0.092	0.113	0.173	<0
第13径間	静荷重	無補強	0.153	0.132	0.205	0.29
〃	FWD	無補強	0.112	0.096	0.146	0.32
第15径間(1)	FWD	無補強	0.102	0.100	0.153	0.04
第15径間(2)	FWD	鋼板接着	0.065	0.073	0.101	<0
第17径間	FWD	無補強	0.094	0.086	0.134	0.17

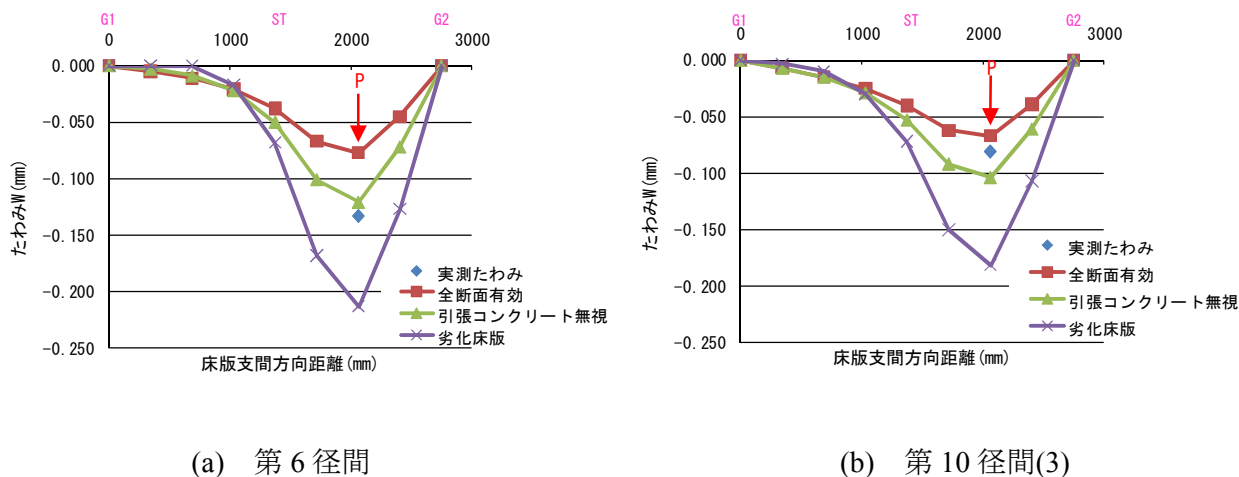


図-4.3.19 たわみ劣化度の評価



## 4. 4 まとめ

本章では多層版解析の手法として調和解析法と選点法の概要を紹介した。劣化床版への対策工法には各種の工法が実施されてきているが、それらは既設床版との接着による一体性を確保しており、界面の一部にはく離現象が発生する場合にはその補強効果を揺るがす大きな問題となる。近年、床版の疲労耐久性を向上させるための方策として橋面防水の必要性が叫ばれているが、防水に関してもはく離は重要な問題であり、各種の検討が実施されつつある。本章で得られた成果を以下に列挙する。

- ① 数値計算例として、調和解析による多層版解析を実施した。対象は上面増厚工法による補強床版と床版の水平ひび割れに関する問題である。結果として、上面増厚工法は輪荷重直下のエッジ部分で横せん断応力が最大となり、はく離の危険性が示唆された。
- ② 水平ひび割れ問題では、上面増厚工法を採用した場合には、その増厚効果により横せん断応力の版厚方向の最大値の位置が上方に変化し、上側鉄筋の付近となることが示された。横せん断応力に着目する場合には鉄筋はコンクリートの断面積を減少させる異物とも言えるので、そのピーク値に鉄筋の断面投影面積をコンクリートの断面積から減じれば、見かけ上の横せん断応力が増加することになり、水平ひび割れ発生危険性は増大することになる。
- ③ 選点法を用いた多層版解析による防水層のはく離問題を検討した結果、輪荷重の制動荷重をも考慮した場合には、防水層のはく離現象の危険性をはらんでいることが判った。さらに、部分的にはく離した防水層では、さらにはく離が進展する危険性が認められた。また、解析の妥当性を評価するものとして、有限要素法による解析もあわせて実施したが、結果として横せん断応力に着目した場合には有限要素法による解析では混合法とは一致せず、はく離問題のように界面の状態を検討する際には限界のあることが示された。
- ④ 実橋床版の載荷試験による補強済み床版やひび割れ劣化床版のたわみ劣化度の評価に、多層版解析を用いることで劣化度の評価が精度良く、かつ容易に可能なことが示された。対象とした載荷試験法は衝撃荷重によるもので、足場を必要とせず短時間で試験が可能となることから、この解析法による検証と組み合わせることで床版の維持管理に対する強力なツールになることが期待される。

## 参考文献

- 1) 横山広, 浦修造, 関口幹夫, 堀川都志雄: 床版の劣化現象および床版補強工法に関する解析的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.32, No.2, pp.451-455, 2010.7.
- 2) 関口幹夫, 横山広, 堀川都志雄: リブ付き多層版解析による各種補強床版の実測たわみの評価, 構造工学論文集, Vol.54A, pp.442-451, 2008.3.
- 3) 横山広, 安東祐樹, 谷口義則, 関口幹夫, 堀川都志雄: 局部はく離を考慮した輪荷重下における舗装と床版界面の応力解析, 構造工学論文集, Vol.53A, pp.980-987, 2007.3.
- 4) 貞升文槌: 自動車走行時におけるタイヤ接地圧, 土木技術資料, Vol.11 No.8, 1969.8.
- 5) 財団法人災害科学研究所 道路橋床版高機能防水システム研究委員会: 道路橋床版高機能防水システムの耐久性評価に関する研究, 2005.9.
- 6) 山崎俊一, 山口泉, 加賀美公彦: 大型車の停止距離と制動初速度の算出, 自動車研究, 第24巻 第6号, pp.11-18, 2002.6.
- 7) 社団法人日本道路協会: 道路構造令の解説と運用, 1984.2.
- 8) 横山広, 関口幹夫, 谷口義則, 堀川都志雄: 水平力を考慮した輪荷重下での舗装と床版界面の応力解析, 第5回道路橋床版シンポジウム講演論文集, pp.137-142, 2006.7.
- 9) MSC Software: Marc 2000 ユーザーズマニュアル A 編, 理論編
- 10) 亀田浩昭, 横山広, 関口幹夫, 堀川都志雄: 衝撃荷重載荷試験による床版剛性の評価, 土木学会第66回年次学術講演会概要集, pp.31-32, 2011.9.
- 11) 松井繁之, 前田幸雄: 道路橋 RC 床版の劣化度判定法の一提案, 土木学会論文集, 第374号 / I -6, pp.419-426, 1986.10.

## 第五章 混合型境界辺を有する版の解析

二章で誘導された変位関数による厚板理論は、厳密な解が得られるものの Timoshenko が指摘したように境界条件に制約を受けるため、それらを解析するために薄板理論で境界条件を満足させる混合法を三章で提案した。ただし、混合法では支持辺全長に渡る自由境界や固定境界は扱えないものの、支持辺の一部が自由境界や固定境界となる問題には適用できない。本章では、それらの混合型境界で解を得る手法を提案する。本章で用いる用語として混合型境界を以下に定義する。

混合型境界：板を支持する一辺に単純支持，固定支持，自由支持が混在する境界条件

### 5. 1 はじめに

道路橋床版の設計では、現行の道路橋示方書に準拠する曲げモーメントを算出し、その値から断面諸元を決定している。その際単純版、片持版および連続版等の境界端の支持条件は辺上で一様な一方向版と限定されている<sup>1)</sup>。プレートガーダー橋の垂直補剛材付近では支持桁の首振り変形が抑制されるため、力学的に見れば同じ桁内でも場所に応じて回転条件が変動する複雑な状況に至ると推察される。また近年高速道路で採用されているプレストレストコンクリート箱桁橋の張出し長を大きくしてストラットで支持する構造(図-5.1.1)は、床版の境界条件が単純支持、部分固定支持、および部分的な自由辺を同時に持つ変則的な支持条件となっている。このような混合型境界を示す床版設計は、実験による値や有限要素法による数値結果から断面定数が決定されているようである。

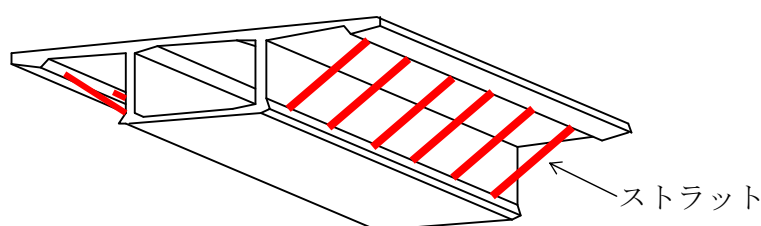


図-5.1.1 ストラット付きPC箱桁橋

床版構造の多様化にともない、変則的な境界条件で支持される多層系床版の数は増加すると推察されるが、それらを扱う解析法は前述のように有限要素法が有力となろう。しかし異種材料間の界面でのずれ現象を解析する場合、インターフェイス要素等の特別な要素導入が必要であり、かつ解析結果についての照査・評価法が確立しているとは言い難い。

混合型境界の代表例である部分固定支持版を対象とした既往の研究には、薄板理論を用いた倉田らによる方法がある<sup>2) 3)</sup>。倉田らは単純支持辺上に作用させる端モーメントの素解を駆使し、与えられた固定区間内のみで辺と直交する方向の回転角を零とするようにFourier級数解をその固定区間内で再展開する手法を提案した。しかしこの手法は固定区間に任意の長さを与えたり、その位置を変化させることは解析上の煩雑さを招くとともに、多層版への適用には一層の困難さを生じさせると予測される。

本章では、混合型境界を有する厚板や多層版の解析が可能となる簡便な方式として、選点法を併用する手法を解説する。また自由辺を持つ床版を対象として混合法を採用して本手法の拡張を試みる。これらの解析手法が自由辺、単純支持辺、ならびに固定辺等の各境界条件で変則的に構成される混合型境界辺を有する場合にも活用できることを計算例で示す。なお、計算手法の評価として、公表されている実験結果との比較や有限要素法を用いた解析を実施する。

## 5. 2 部分固定化手法の解説

### a) 単純支持の境界条件を固定化する方法

単純支持条件を固定化する方法を以下に説明する。この方法を簡潔に述べれば「単純支持辺近傍に曲げ剛性が無限大のダミー桁を配置する方法」と言える。この方法に対する理解を容易にするために、はりモデルを例にとり説明する。

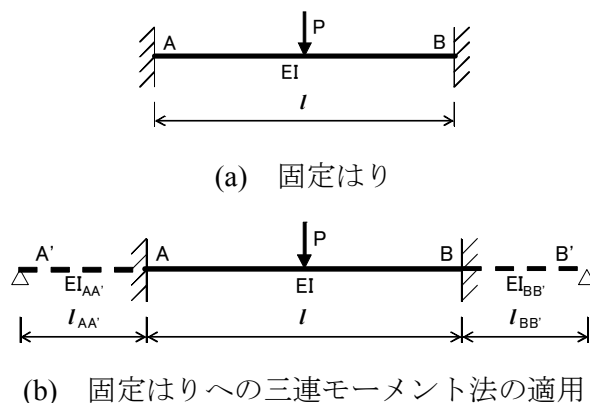


図-5.2.1 固定化手法のはりモデル

図-5.2.1(a)に示す両端固定はりの断面力を得るために、図-5.2.1(b)に示すモデルを設定する。AA'間とBB'間に仮想桁を配置すれば、三連モーメント法により式(5.2.1)が得られる。

点Aにおいて

$$\frac{l_{AA'}}{6EI_{AA'}}M_{A'} + \left( \frac{l_{AA'}}{3EI_{AA'}} + \frac{l}{3EI} \right) M_A + \frac{l}{6EI} M_B = -\theta_l^0 \quad (5.2.1a)$$

点Bにおいて

$$\frac{l}{6EI} M_A + \left( \frac{l}{3EI} + \frac{l_{BB'}}{3EI_{BB'}} \right) M_B + \frac{l_{BB'}}{6EI_{BB'}} M_{B'} = -\theta_r^0 \quad (5.2.1b)$$

ここで、 $\theta_l^0$ 、 $\theta_r^0$  ははりAB内に作用する荷重による点AとBのたわみ角

次に、支持条件を固定化するために仮想桁AA'とBB'の曲げ剛性 $EI_{AA'}$ と $EI_{BB'}$ を無限大にすれば、点AとBの固定端モーメントの断面力に関する関係式が得られる。

$$\frac{l}{3EI} M_A + \frac{l}{6EI} M_B = -\theta_l^0 \quad (5.2.2a)$$

$$\frac{l}{6EI} M_A + \frac{l}{3EI} M_B = -\theta_r^0 \quad (5.2.2b)$$

式(5.2.2a)と(5.2.2b)の連立方程式から $M_A$ 、 $M_B$ が得られる。そこで、式(5.2.1a)と(5.2.1b)の三連モーメントの式に着目すれば、仮想桁の曲げ剛性と支間長は反比例の関係にあることが判る。すなわち、曲げ剛性を無限大とすることと仮想桁の支間を無限小とすることは同じ効果となり、固定支持の境界条件が得られることになる。この手法を版構造へ応用して、本研究では単純支持辺の直近に曲げ剛性が無限大のダミー桁を配置することとした。

## b) 版構造における固定化

### i) 薄板理論による解説

薄板理論を用いて、版構造での固定化を説明する。計算モデルは図-5.2.2の通りである。全周固定される薄板 ( $x$ 方向スパン= $a$ ,  $y$ 方向スパン= $b$ ) の級数解は、全周単純支持される解を特解に、 $x$ および $y$ 軸方向の固定条件を満足させる同次解を重ね合わせて次のように表される。

$$\begin{aligned} D \cdot w = & \sum_m \sum_n q_{mn} / \gamma^4 \sin \beta_n y \sin \alpha_m x \\ & + \sum_m (A_m ch \alpha_m y + B_m sh \alpha_m y + C_m \alpha_m y ch \alpha_m y + D_m \alpha_m y sh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \\ & + \sum_n (E_n ch \beta_n x + F_n sh \beta_n x + G_n \beta_n x ch \beta_n x + H_n \beta_n x sh \beta_n x) \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

ここで、 $a$  :  $x$  方向のスパン、 $b$  :  $y$  方向のスパン

$$\alpha_m = m\pi/a, \quad \beta_n = n\pi/b,$$

$$D : \text{版剛性}, \quad \gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2,$$

$$ch \alpha_m y = \cosh \alpha_m y, \quad sh \alpha_m y = \sinh \alpha_m y,$$

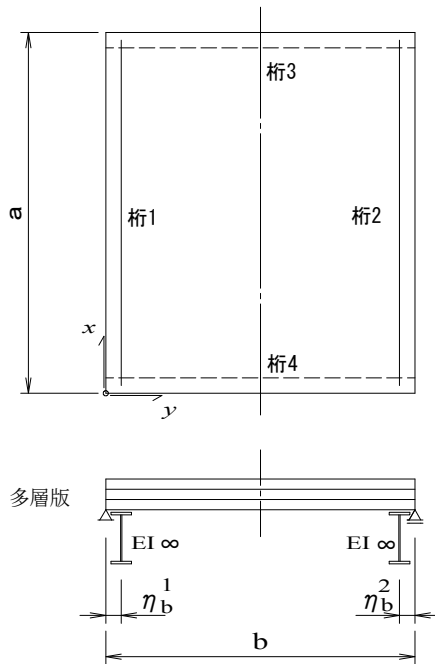


図-5.2.2 計算モデル

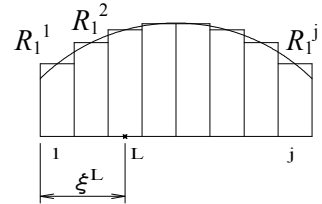


図-5.2.3 反力分布の  
選点ブロック

$q_{mn}$  : 荷重の Fourier 係数

$A_m \sim D_m, E_n \sim H_n$  :  $x=0, a, y=0, b$  の境界条件から決定される未定定数

$x=0, a$  での固定条件  $w=0$  と  $\theta_x=0$ , および  $y=0, b$  での固定条件  $w=0$  と  $\theta_y=0$  を同時に満足させるには, 例えば式(5.2.3)中の双曲線関数を sine あるいは cosine 級数で次式のような再展開する等の工夫が必要である.

$$sh\alpha_m y = 2/b \sum_n \beta_n sh\alpha_m b (-1)^{n+1} / \gamma^2 \sin \beta_n y$$

$$ch\alpha_m y = 2/b \sum_n \beta_n \{1 - (-1)^n ch\alpha_m b\} / \gamma^2 \sin \beta_n y \quad (5.2.4)$$

未定係数  $A_m \sim H_n$  は再展開式での特有の連立方程式から決定されるが, 得られた数値解の収束性が問題になる. したがって, この方法を多層版に持ち込むことは煩雑な計算過程を経ることになり得策とは言えない.

本研究では桁 1~桁 4 の反力分布に関して選点法を組み合わせ, 以下の手順で任意荷重下での全周固定版の解析を進める.

- ① 剛性が無限大のダミー桁 1~桁 4 に作用する反力分布を, 例えば桁 1 について図-5.2.3 に

示す  $L$  個の矩形形状選点ブロック  $R_1^k(k=1, L)$  に置き換える。級数の発散を防止するために桁反力を幅方向に分布させ、その形状を一様とする。

- ② 桁  $i$  ( $i=1, 4$ ) における各選点ブロックの中央位置  $x=\xi_j$  ( $j=1, L$ ) で①から得られる各反力によるたわみと荷重による総たわみの和がこの点で零となるように、桁 1～桁 4 の反力群  $R_1 \sim R_4$  を決定する。
- ③ 荷重およびダミー桁に伝達される反力を版に作用させて、版内のたわみ、応力、および曲げモーメント等を求める。

以上の手法を用いて分割ブロック数5で計算した結果とTimoshenkoの古典解<sup>4)</sup>を比較すると、版中央点での誤差は3%未満であるが固定辺中央での曲げモーメントの誤差は比較的大きく7%程度となっている(表-5.2.1)。これはダミー桁の配置位置( $a/200$ )と支持幅( $a/100$ )、および選点ブロックの形状が影響しており、算出する値に応じて調整する必要があることを示唆している。

なお、厚板理論での全周固定される版の解析は、薄板理論と同様の手順に従って上面の応力条件を用いて荷重  $q$  を考慮しながら、下面にダミー桁 1 と 2 で反力ブロックを作用させる。選点ブロックの中央位置での総たわみを連続させる条件から、反力分布  $R_i^j$  ( $i=1,4, j=1,L$ ) を計算し、荷重  $q$  および桁からの反力を重ね合わせて版解析の数値解が得られることになる。

表-5.2.1 本手法の計算結果と古典解との比較

(a) 中央点でのたわみと曲げモーメント

	$w(qa^4/D)$	$Mx(qa^2)$	$My(qa^2)$
Timoshenko	0.00126	0.0231	0.0231
本解法	0.00128	0.0255	0.0231
誤差 (%)	1.6	2.6	0.9

(b) 固定辺中央での曲げモーメント

	$My(qa^2)$
Timoshenko	-0.0513
本解法	-0.0479
誤差 (%)	6.6

b) ダミー桁の最適位置に関する検討

ダミー桁を配置して固定化する手法では、その配置位置が解の精度に影響を及ぼすことが推量される。そこで代表的な例として全周固定版を取り上げ、桁位置を変数として計算を実施した。荷重は等分布満載で正方形版の辺長を  $a$  とし、版厚は  $a/10$ 、ダミー桁が版と接する幅を  $a/100$  に設定している。選点法を用いたダミー桁上の選点ブロック数は 12 であり、ポアソン比は 0.3 で、対象とするのは版中央点でのたわみと応力である。図-5.2.4 は全周固定版の計算結果である。たわみと応力では桁位置に対する応答が異なる結果を示しており、直応力が桁位置の影響を受け

にくいことがその勾配から読み取れる。次章で詳述する倉田の解と比較した結果、厚板理論による計算では±5%未満を目安とする桁位置は支間長との比で、約  $a/60$  よりも単純支持辺側に近づければ良いことが判る。ただし、この桁位置の影響は厚板理論や薄板理論等の解析手法により異なり、各解析手法での最適位置はそれぞれの支持条件に対して検討する必要がある。本研究における各種計算では  $a/20 \sim a/200$  の範囲で調整しながら精度を確保している。

以下ではダミー桁による固定化手法①～③を、厚板理論、薄板理論、および混合法による厚板理論のそれぞれの解法に適用し、混合型境界条件を有する版問題を検討する。

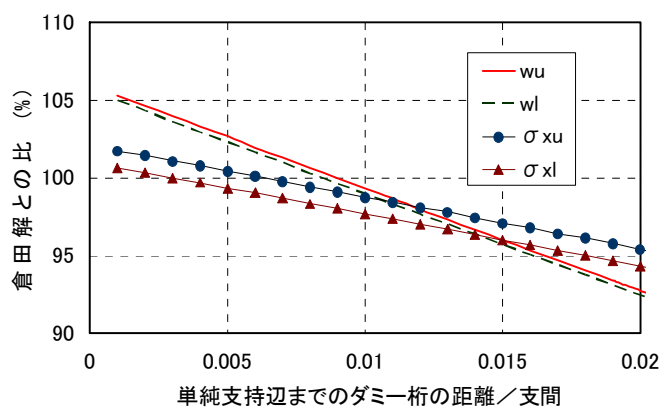


図-5.2.4 ダミー桁位置と数値解との関係



### 5. 3 混合型境界の数値計算例

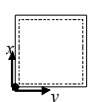
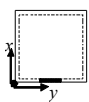
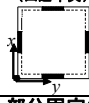

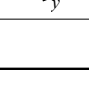
前節で提案したダミー桁を配置する部分固定化手法を用いて、各種の境界条件を有する版の計算を実施する。解の妥当性を評価するために既往の解析的研究で公表されている結果との比較と、実験結果、有限要素法との比較も実施する。

#### 5. 3. 1 既往の解との比較

##### a) 四辺支持版

四辺支持版を基本とする版の中央点における計算結果を表-5.3.1に示す。表には倉田の解<sup>2)</sup>を示しており、本研究における薄板理論解、および厚板理論解と比較する。比較対象の物理量はたわみ $w$ と直応力 $\sigma_x$ および $\sigma_y$ である。表中の上添字 $u$ と $l$ は版の上縁と下縁を示している。なお、計算条件は前述の桁位置の計算と同様で、荷重状態は等分布満載で辺長を $a$ とし、版厚 $h$ は $a/10$ 、ダミー桁の配置は $a/200$ でその支持幅は $a/100$ に設定している。選点法を用いた辺の選点ブロック数は12で統一しており、ポアソン比は0.3である。計算では局所的な応力分布の3次元解が得られる厚板理論の特性を考慮し、たわみの他に応力値を床版の上下面で算出するものとした。なお、解を得るための級数の項数は、計算の種類毎に解が収束するまで繰り返し計算で確認している。

表-5.3.1 四辺支持での計算結果

支持条件	照査項目	倉田の解	薄板の解	厚板の解	B/A	C/A
		A	B	C		
① 単純支持 	$W^u$	0.0443	0.0443	0.0460	1.00	1.04
	$W^l$	0.0443	0.0443	0.0460	1.00	1.04
	$\sigma_x^u/q = \sigma_y^u/q$	-28.68	-28.73	-29.00	1.00	1.01
	$\sigma_x^l/q = \sigma_y^l/q$	28.68	28.73	28.90	1.00	1.01
② 部分固定1 (←辺) 	$W^u$	0.0323	0.0321	0.0313	0.99	0.97
	$W^l$	0.0323	0.0321	0.0313	0.99	0.97
	$\sigma_x^u/q$	-21.00	-20.80	-20.37	0.99	0.97
	$\sigma_x^l/q$	21.00	20.80	20.27	0.99	0.97
	$\sigma_y^u/q$	-24.30	-24.34	-23.67	1.00	0.97
③ 部分固定2 (四辺中央) 	$W^u$	0.0155	0.0151	0.0159	0.97	1.03
	$W^l$	0.0155	0.0151	0.0158	0.97	1.02
	$\sigma_x^u/q = \sigma_y^u/q$	-14.40	-14.23	-14.40	0.99	1.00
	$\sigma_x^l/q = \sigma_y^l/q$	14.40	14.23	14.25	0.99	0.99
④ 部分固定3 (四辺角部) 	$W^u$	0.0213	0.0201	0.0211	0.94	0.99
	$W^l$	0.0213	0.0201	0.0211	0.94	0.99
	$\sigma_x^u/q = \sigma_y^u/q$	-17.64	-17.14	-17.41	0.97	0.99
	$\sigma_x^l/q = \sigma_y^l/q$	17.64	17.14	17.26	0.97	0.98
⑤ 全周固定 	$W^u$	0.0138	0.0134	0.0142	0.97	1.03
	$W^l$	0.0138	0.0134	0.0141	0.97	1.02
	$\sigma_x^u/q = \sigma_y^u/q$	-13.74	-13.52	-13.80	0.98	1.00
	$\sigma_x^l/q = \sigma_y^l/q$	13.74	13.52	13.65	0.98	0.99

ただし、 $W^u = w^u Eh^3/qa^4$  ,  $W^l = w^l Eh^3/qa^4$

表によれば、薄板解に比べて厚板解は倉田の解との差が小さい。以上の結果、四辺支持版を基本とした混合型の境界条件では、倉田解に対してほぼ同等の値が得られており、ダミー桁による固定化手法は良好な精度を確保できていると言える。

表-5.3.1に示した支持条件②の1辺の中央部のみが固定される場合の版上縁におけるたわみと $x$ 方向、 $y$ 方向の直応力 $\sigma_x$ と $\sigma_y$ の等高線を図-5.3.1に示す。図中の赤線は圧縮域を示している。計算は厚板理論によるものである。図によればそれぞれのピーク位置は固定位置の影響を受けて版中央から偏倚していることが読み取れる。また、部分固定の影響は $\sigma_x$ の方が顕著となっており、支持条件の効果が反映されていることが判る。固定支持近傍に着目すると、 $\sigma_x$ が $\sigma_y$ の2倍程度となっている。

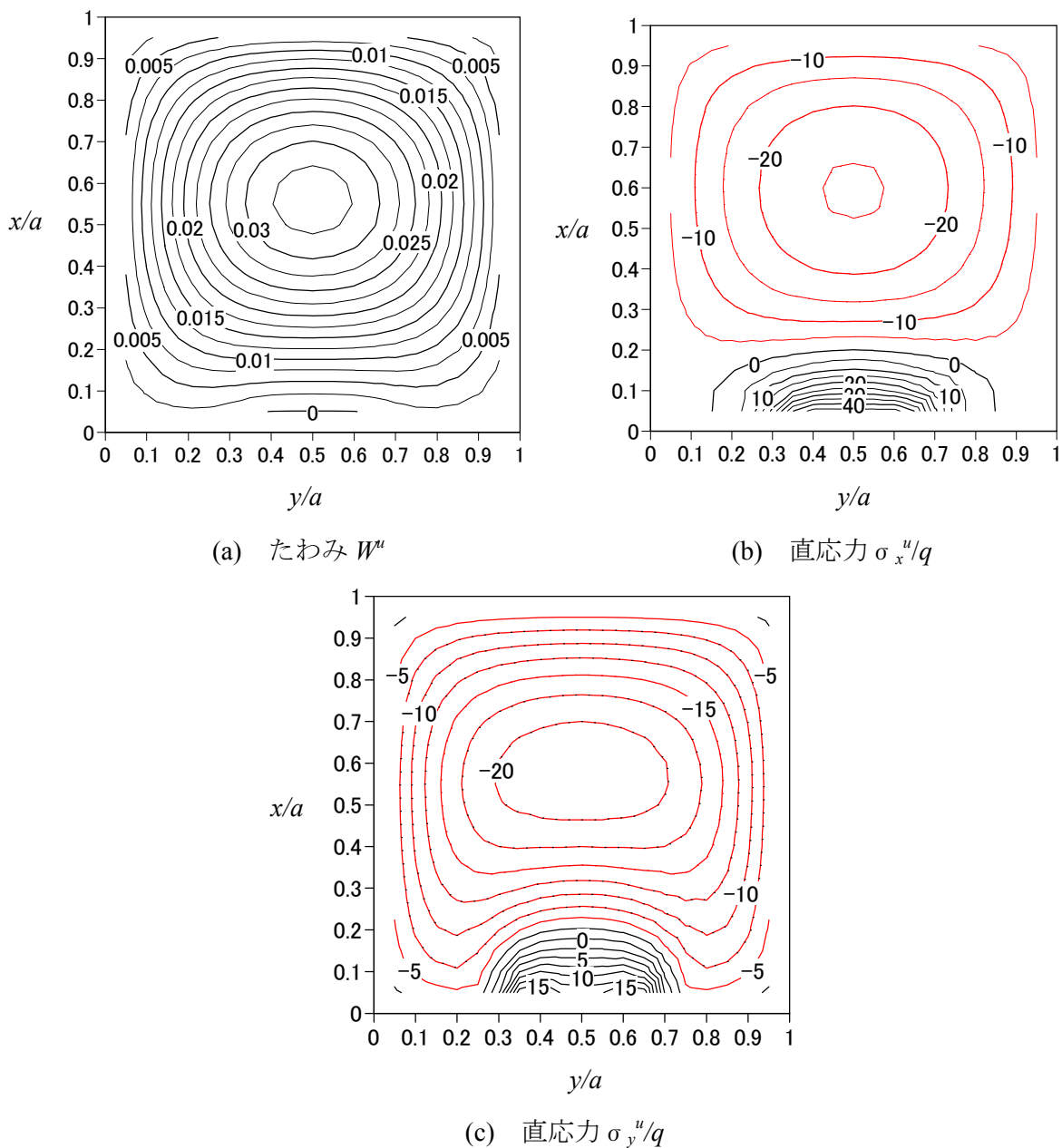


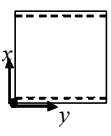
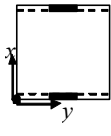
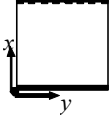
図-5.3.1 たわみと応力の等高線（四辺支持部分固定，表-5.3.1 ②）

b) 相対する2辺が自由で，残りの2辺が支持される版

表-5.3.2に相対する2辺が自由で，他の2辺で支持される場合の版中央点での計算結果を示し，薄板による解，混合法による解，および倉田・岡村の解<sup>3)</sup>とを比較する．ここで，表-5.3.1では厚板理論解による比較を行っているが，自由辺を含む境界条件では厚板理論のみでの解を得ることは困難であるため混合法を採用している．ここで，本計算におけるダミー桁位置は解析手法や支持条件に合わせて $a/20 \sim a/200$ まで変化させながら，たわみや応力が収束性を示す範囲で調整した．版形状，ポアソン比は前節の四辺支持版と同様で，荷重は等分布満載である．

表によれば部分固定での応力 $\sigma_x$ が倉田・岡村の解と数%異なる結果となったが，薄板解もほぼ同レベルで異なっている．他の解は倉田の解と同等であることから，ダミー桁による固定化手法は相対する2辺が自由となる支持条件についても適用できることが判る．

表-5.3.2 相対2辺自由，2辺部分固定版での比較

支持条件	照査項目	倉田の解	薄板の解	混合法の解	B/A	C/A
		A	B	C		
⑥ 	単純支持					
	$W^u$	0.1430	0.1424	0.1443	1.00	1.01
	$W^l$	0.1430	0.1424	0.1442	1.00	1.01
	$\sigma_x^u/q$	-73.50	-73.28	-73.62	1.00	1.00
	$\sigma_x^l/q$	73.50	73.28	73.54	1.00	1.00
	$\sigma_y^u/q$	-16.26	-16.32	-16.49	1.00	1.01
	$\sigma_y^l/q$	16.26	16.32	16.50	1.00	1.01
⑦ 	部分固定					
	$W^u$	0.0458	0.0442	0.0473	0.97	1.03
	$W^l$	0.0458	0.0442	0.0472	0.97	1.03
	$\sigma_x^u/q$	-33.60	-32.93	-33.84	0.98	1.01
	$\sigma_x^l/q$	33.60	32.93	33.60	0.98	1.00
	$\sigma_y^u/q$	-2.40	-2.83	-2.64	1.18	1.10
	$\sigma_y^l/q$	2.40	2.83	2.91	1.18	1.21
⑧ 	固定支持					
	$W^u$	0.0283	0.0270	0.0276	0.95	0.98
	$W^l$	0.0283	0.0270	0.0276	0.95	0.98
	$\sigma_x^u/q$	-24.60	-24.06	-23.82	0.98	0.97
	$\sigma_x^l/q$	24.60	24.06	23.73	0.98	0.96
	$\sigma_y^u/q$	-6.60	-6.59	-7.04	1.00	1.07
	$\sigma_y^l/q$	6.60	6.59	7.23	1.00	1.10

ただし， $W^u = w^u Eh^3/qa^4$  ，  $W^l = w^l Eh^3/qa^4$

表-5.3.2に示した支持条件⑦の支持辺の中央部分を固定とした場合のたわみとx方向, y方向に関する直応力の等高線を図-5.3.2に示す. ダミー桁で用いている選点法の分割数は18でダミー桁は辺長に対し $a/20$ の位置に配置し, 支持幅は $a/10$ である.

計算した支持条件は版中央に対して各方向とも対称形であり, 応力分布も対称条件を満足している.

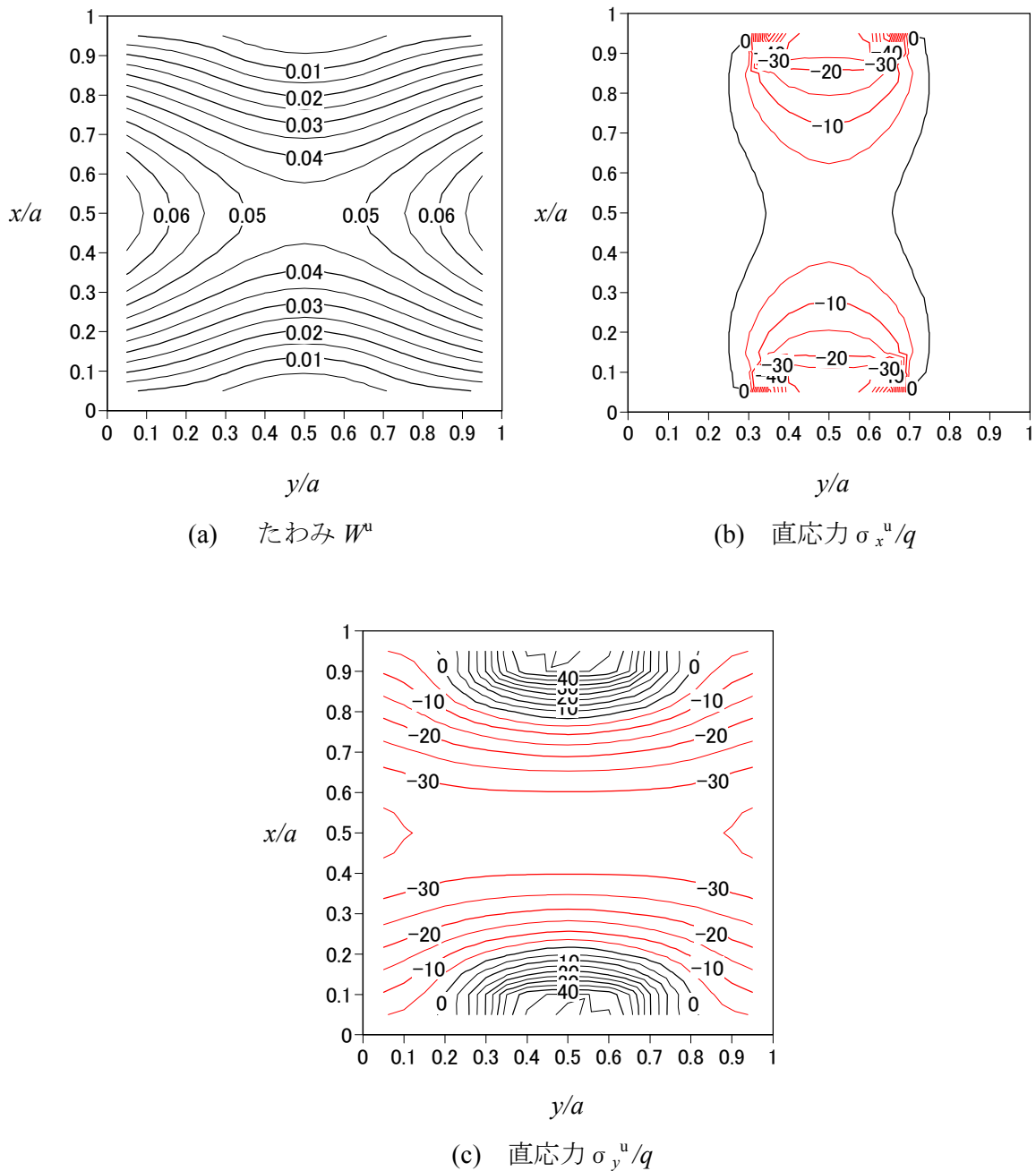


図-5.3.2 たわみと応力の等高線 (相対2辺自由, 他2辺部分固定⑦)

### 5. 3. 2 固定支持と自由支持が混在する

#### 混合型境界条件を有する版の計算

前節では四辺支持で部分固定を設定した支持条件と、相対する2辺が自由で、他の2辺に部分固定を設定した支持条件における既往の解との比較を行ったが、何れも同等の数値が得られており、本研究によるダミー桁を単純支持辺近傍に配置する方法は部分固定版に適用できることが示された。本項ではこれまで数値解が提示されていない、同一辺内の一部に自由辺を有する混合型境界をテーマとする。この計算では相対する2つの自由辺の各辺にそれぞれ2本のダミー桁を接近させて配置し、それらの桁の支持辺長を調整することで、自由辺や単純支持、および固定支持を任意の幅、長さに設定できる。解析理論は混合法で、荷重条件は等分布荷重である。残り2辺は単純支持に対してダミー桁を配置する固定支持や単純支持（ダミー桁がない状態）を設定する。

本計算では版厚 $h$ を $a/10$ とし、固定条件を創るための2本の桁を配置する辺では、境界辺に近い桁位置を外側として $a/200$ 、内側を $a/50$ とし、それぞれの支持幅は外側が $a/100$ で内側が $a/50$ である。残りの2辺での単純支持辺の内側に配置するダミー桁は2本桁の内側桁と同様の位置である。計算に用いたポアソン比は0.3で、単純支持辺側で設定している選点法による分割数は30とした。各条件の設定長さを辺長の $a/3$ としているが、これまでの計算同様、任意の長さに対応できる。

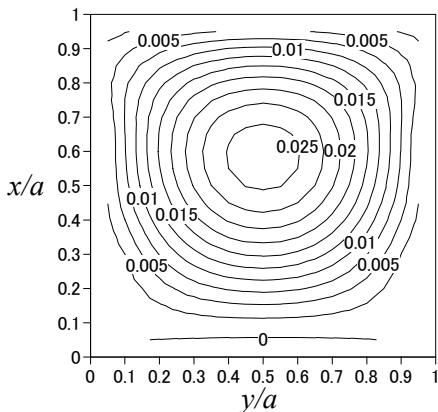
表-5.3.3は各種混合型境界における計算結果で、算出した値は版中央のたわみと直応力である。表では3種類の境界条件の組み合わせを、2本の桁を有する辺で単純支持、固定支持を使い分けている。この計算例の応用として、自由辺の中央部分を固定支持とする条件（支持条件⑨）では、支持部分の幅を狭くすることでストラットで固定されるプレストレストコンクリート箱桁の張出し床版が模擬できることから、固定支持とした場合の支持辺近傍の複雑な応力分布が把握できることになる。なお、本研究ではダミー桁の曲げ剛性を無限大に設定しているが、ストラットのような弾性変形が無視できない場合には、桁の剛性を調整することで対応できる。

数値計算例の中から、相対する2辺に3種類の混合型境界を設定して、他の2辺が単純支持と固定支持の場合（表-5.3.3, ⑭）の曲げモーメントとたわみ、および直応力の等高線表示を図-5.3.3に示す。図-5.3.3(b)の曲げモーメント  $Mx/qa^2$  によれば、固定辺の位置関係に合わせてその分布は複雑になっており、特に同一辺内に3種類の支持条件を有している部分では、正負が交番する分布となっている。それに対応する直応力  $\sigma_x/q$  も同様の分布となっている。

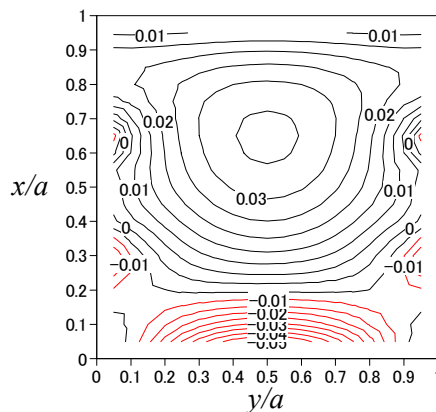
表-5.3.3 自由辺を有する混合境界を有する版の計算結果 ( $x/a=y/a=0.5$ )

支持条件	計算対象	計算結果	支持条件	計算対象	計算結果
	$W^u$	0.0231		$W^u$	0.0146
	$W^l$	0.0231		$W^l$	0.0145
	$\sigma_x^u/q$	-14.41		$\sigma_x^u/q$	-13.55
	$\sigma_x^l/q$	14.70		$\sigma_x^l/q$	13.66
	$\sigma_y^u/q$	-19.84		$\sigma_y^u/q$	-12.87
	$\sigma_y^l/q$	20.89		$\sigma_y^l/q$	13.69
	$W^u$	0.0140		$W^u$	0.0164
	$W^l$	0.0139		$W^l$	0.0163
	$\sigma_x^u/q$	-13.53		$\sigma_x^u/q$	-13.70
	$\sigma_x^l/q$	13.63		$\sigma_x^l/q$	13.85
	$\sigma_y^u/q$	-12.74		$\sigma_y^u/q$	-15.05
	$\sigma_y^l/q$	13.50		$\sigma_y^l/q$	15.85
	$W^u$	0.0158		$W^u$	0.0140
	$W^l$	0.0157		$W^l$	0.0139
	$\sigma_x^u/q$	-15.51		$\sigma_x^u/q$	-13.53
	$\sigma_x^l/q$	15.70		$\sigma_x^l/q$	13.63
	$\sigma_y^u/q$	-12.94		$\sigma_y^u/q$	-12.74
	$\sigma_y^l/q$	13.41		$\sigma_y^l/q$	13.50

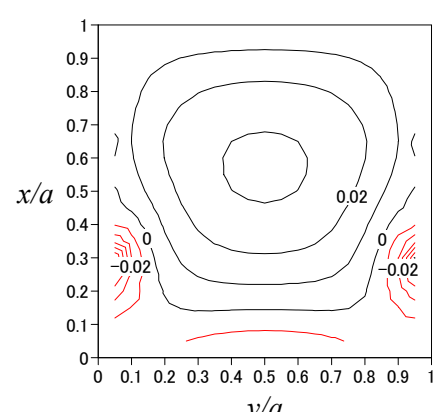
ただし、 $W^u=w^u Eh^3/qa^4$  ,  $W^l=w^l Eh^3/qa^4$



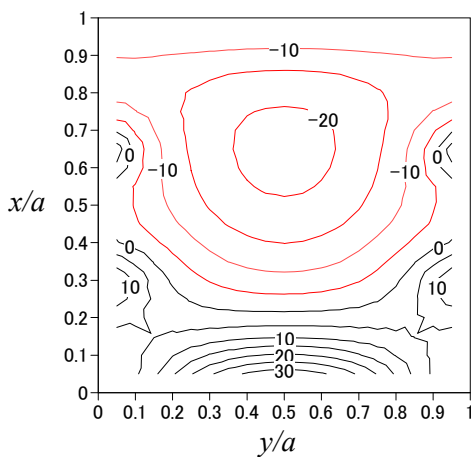
(a) たわみ  $W^u$



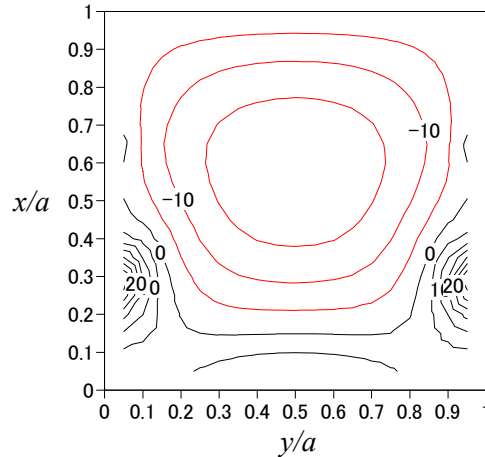
(b) 曲げモーメント  $M_x/qa^2$



(c) 曲げモーメント  $M_y/qa^2$



(d) 直応力  $\sigma_x^u/q$



(e) 直応力  $\sigma_y^u/q$

図-5.3.3 たわみ, 曲げモーメント, 直応力の等高線 (混合境界⑭)

### 5. 3. 3 実験結果および有限要素法との比較

#### a) 実験結果による解析手法の評価<sup>5)</sup>

前節で示した固定辺を持つ床版の解析法の妥当性と応用性を評価するために、横桁で支持される合成床版の移動載荷疲労試験を扱った萩原らの論文<sup>6)</sup>と比較する。試験供試体の平面形状は橋軸方向長さ 10.5m、橋軸直角方向長さ 6.50m（主桁間隔）であり、橋軸方向に 3.50m 間隔で 4本の横桁が配置されている。本研究における解法を適用する際には、固定辺を生み出すためのダミー桁の曲げ剛性を実際の剛性に合わせた横桁を配置し、図-5.3.4 に示すようにモデル化した。計算に用いた物性値を表-5.3.4 に示す。

表-5.3.5 に本解法による計算結果と萩原らの報告値の一覧を示す。表中の萩原らの値は論文中に示されている図からの引用値であるため、若干の誤差を含んでいる。

萩原らの解析値は 3次元有限要素法によるもので主桁、横桁、合成床版の底鋼板をシェル要素で、コンクリートと底鋼板の補剛リブをソリッド要素でモデル化しており、底鋼板に溶植される頭付きスタッドはコンクリートと底鋼板の節点を共有するモデル化を行っている。なお、本解法による計算では、底鋼板の補剛リブは寄与しないものとして無視しており、コンクリートと底鋼板の界面にはずれがなく完全に一体化しているものと見なした。

表によれば、本解法による鋼板とコンクリートが完全合成される計算のたわみは萩原らの値よりも小さくなっており、その差は 20%程度となっている。ひずみに関してはたわみとは逆に本解法が大きめの 18%程度の値を示しており、コンクリートひずみでは萩原らの解析値とほぼ同等である。これらの計算結果の差はコンクリートと鋼板の合成状態の取り扱いの違いによるものと推察されるが、本計算手法は実用上十分な精度であると考えられる。よって、本研究で提案する厚板理論による多層版の解析手法は、固定辺を有する各種の構造体への適応性が高いと判断できる、萩原らの実験値に対してさらに精度を向上させるためには頭付きスタッドの位置でのみ鋼板との接合を図る選点法による不完全合成の状態とする必要がある。

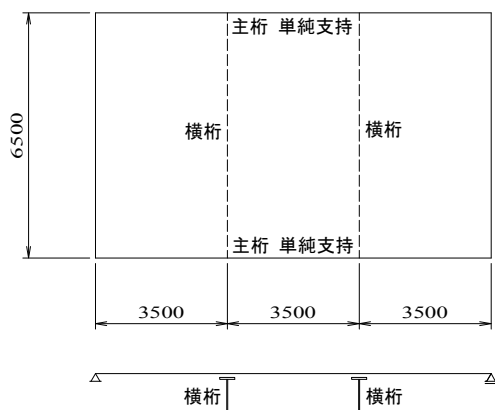


図-5.3.4 計算モデル (単位: mm)

表-5.3.4 材料物性値

種別	ヤング係数(N/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比
コンクリート	2.88×10 <sup>4</sup>	0.167
鋼	2.0×10 <sup>5</sup>	0.3
床版厚	267mm (底鋼板を含む)	
鋼板厚さ	8mm (補剛リブ22mm)	

表-5.3.5 計算結果の比較表

着目位置		単位	萩原らの値		本論文の 方法 <i>c</i>	数値の比較	
			計測値 <i>a</i>	解析値 <i>b</i>		<i>a/c</i>	<i>b/c</i>
たわみ	中央側載荷点直下	mm	0.43	0.45	0.37	1.16	1.22
	載荷点の中間部		0.41	0.42	0.35	1.17	1.20
	支点側載荷点直下		0.34	0.34	0.30	1.13	1.13
圧縮縁コンクリートひずみ		$\times 10^{-6}$	-38.0	-52.0	-54.0	0.70	0.96
引張縁鋼板ひずみ		$\times 10^{-6}$	40.0	40.0	48.5	0.82	0.82

b) 有限要素法による計算

全周固定される長方形多層床版（辺長比 1 : 4）問題を取り上げ、輪荷重点近傍に発生する応力および変位に着目する（図-5.3.5）。

ダミー桁 1 は  $y=100\text{mm}$ 、桁 2 は  $y=2900\text{mm}$ 、および桁 3 と 4 はそれぞれに  $x=100\text{mm}$  と  $11900\text{mm}$  に配置し、各桁のフランジ幅は何れも  $100\text{mm}$  に設定している。

実橋床版で遭遇するのと同様な多層版の諸元を表-5.3.4 にまとめる。載荷荷重は道路橋示方書に示されている  $P=100\text{kN}$  を採用し、その形状は実車輛を想定したダブルタイヤとした。載荷パターンは輪荷重が床版中央に位置する対称載荷の case1 と偏心載荷の case2 とする。比較のために 3次元有限要素法による結果と本計算結果を掲げ、本計算手法の妥当性を吟味する。なお、有限要素法は汎用プログラムである MSC Software 社の MSC.Marc<sup>7)</sup> を使用した。要素は 8 節点のアイソパラメトリック要素であり分割数は  $x:y=48:40$  で、 $z$  方向は図-5.3.6 に示す舗装 2 層、コンクリート版 5 層、鋼板 1 層の要素分割を採用した。ただし線形内挿関数を使用するため、ひずみは全体を通じて一定になる傾向にあり、変形挙動が緩慢となることから、曲げ変形の影響を強く受ける鋼板に想定ひずみ法を用いることによって曲げ特性の改善を図った。なお、舗装とコンクリートの付着せん断応力の解析では、ヤング係数が大きく異なる材料の界面への着目であることから、節点を共有した方法では精度が期待できないので Coulomb Friction モデルによる接触条件を考慮した接着要素（インターフェイス要素）を界面部に導入し、ずれがないものとして解析した。



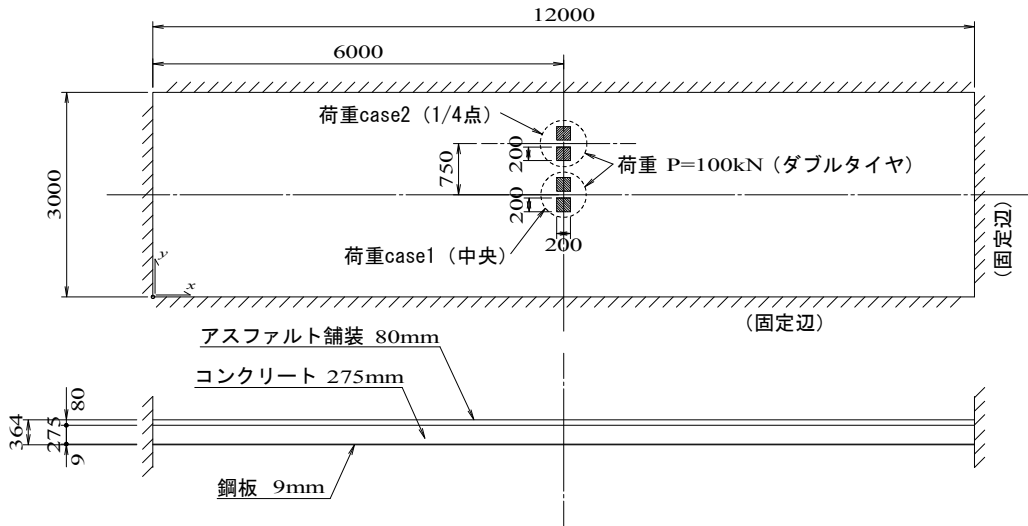


図-5.3.5 鋼・コンクリート合成床版の計算モデル (単位: mm)

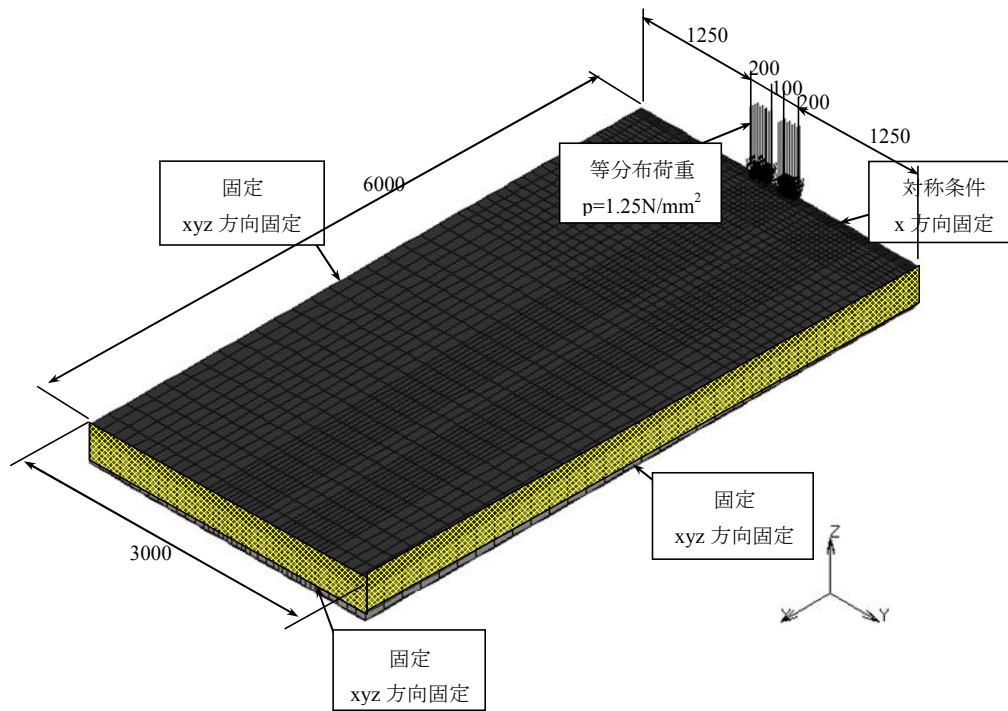


図-5.3.6 有限要素法の計算モデル (単位: mm)

表-5.3.4 計算に用いた物性値

種別	ヤング係数 (N/mm <sup>2</sup> )	ポアソン比
コンクリート	$2.80 \times 10^4$	0.167
鋼	$2.10 \times 10^5$	0.3
アスファルト舗装	$5.00 \times 10^2$	0.4
床版厚	284 mm (底鋼板を含む)	
鋼板厚さ	9 mm	
舗装厚さ	80 mm	

i) たわみおよび鋼板に発生する応力

図-5.3.7 に版中央に荷重を載荷する case1 における橋軸直角方向のたわみの計算結果を示す。ピーク値は版中央で発生しており、有限要素法の値が約 0.08mm で本研究の解法による値が約 0.1mm と本解法の値の方が 25%程度大きい値を示している。

図-5.3.8 は鋼板下面に発生する橋軸直角方向の応力分布を示したもので、case1 の荷重状態を図-5.3.8(a)、case2 を図-5.3.8(b)にまとめる。版中央に載荷した case1 では分布形状とそのレベルがほぼ一致しており、荷重位置が版中央から橋軸直角方向に 750mm ずれた位置に載荷した case2 でも分布形状はほぼ一致している。応力の大きさは何れの荷重ケースでも本解法による数値が大きいめの値を示しており、case2 でのピーク値は本解法が約 20%程度大きくなっている。たわみおよび鋼板応力に差が生じている理由は多層構造の版モデルに対しての有限要素法の要素分割が影響していると考えられる。また、桁端部付近では応力値が急変する傾向が見られるが、これはダミー桁による影響であると考えている。

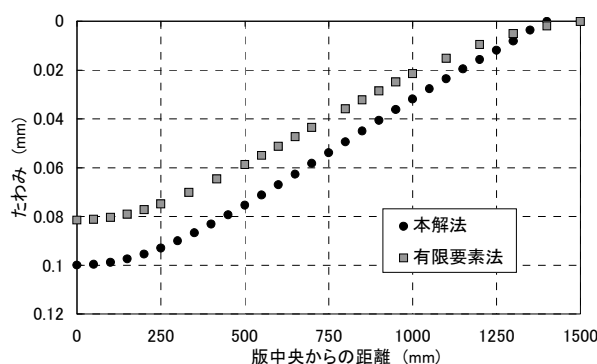
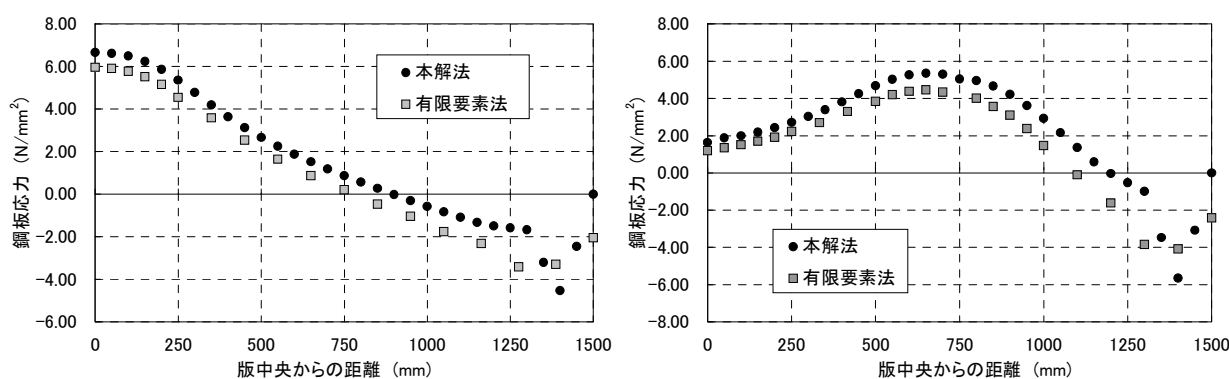


図-5.3.7 床版下面のたわみ



(a) case1 (版中央載荷)

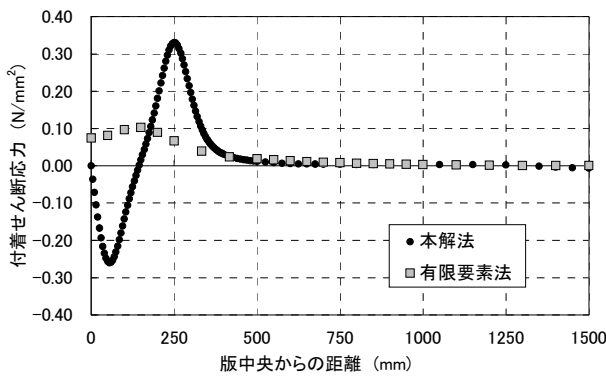
(b) case2 (版中央から 750mm 橋軸直角方向が荷重中心)

図-5.3.8 鋼板の橋軸直角方向応力

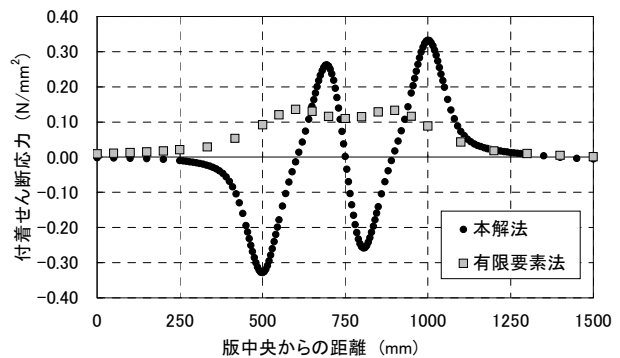
ii) 舗装とコンクリート界面での付着せん断応力

材料物性の異なる多層版では、各層間で付着せん断応力が発生することになり、特に繰り返し作用を受ける道路橋床版構造では、その発生レベルが使用性や耐久性に影響することは明白である。図-5.3.9はアスファルト舗装とコンクリート床版の接触界面における橋軸直角方向の付着せん断応力の分布を示したものである。図-5.3.9(a)は case1 の荷重状態のものであり、本解法の数値はダブルタイヤの両側端をピークとした分布形状が得られているのに対して、有限要素法はなめらかな分布形状になっており一致していない。図-5.3.9(b)は case2 の荷重状態のものであるが case1 と同様に、ダブルタイヤの接地形状に合致した付着せん断応力の分布が得られるのに対して、有限要素法ではその応力レベルも小さくかつ分布形態も異なる。たわみと鋼板応力について述べた前節と同様、採用された形状関数では、界面応力を忠実に表現できていないことが判る。

本解法の計算結果は case1 と case2 でその最大値が  $0.33\text{N/mm}^2$  程度と一致しており、最大値の発生位置もダブルタイヤの両外側の側端となっている。このことから、付着せん断応力は荷重位置に関係なく載荷位置付近の局所的挙動であることが理解できる。因みに、床版防水を設計する際のせん断応力の基準値として  $\tau_a=0.20\text{N/mm}^2$  が提唱されていることから、実際の後輪 1 輪当たりの荷重  $50\text{kN}$  に衝撃係数を加味した場合を想定すれば、この規格値を超過することになり、舗装とコンクリートの接触界面や防水層の接着面ではく離等の問題が生じる危険性があることが伺われる。



(a) case1 (版中央載荷)



(b) case2 (版中央から 750mm 橋軸直角方向が荷重中心)

図-5.3.9 舗装・コンクリート界面の付着せん断応力

## 5. 4 まとめ

本章では厚板理論の特長を残して固定支持の境界条件の解析を可能とする手法を提案し、その有効性を把握した。その手法は単純支持辺近傍に曲げ剛性が無限大のダミー桁を配置する方法で、解析上その他の処理を必要としない簡便な手法である。本章で得られた成果を以下に列挙する。

- ① 提案した手法の数値計算例として、支持辺の一部が固定化される単純支持版の解析を実施し、その基礎解と既往の研究結果と比較して妥当性を確認した。ダミー桁による手法では固定位置の長さや位置を自由に設定できる利点から、任意の位置での自由、単純支持および固定辺が組み合う混合型境界条件を有する版の解析が可能となった。
- ② この解析手法の実用性を評価するために、既往の実験結果における解析例との比較から良好な一致を確認した。また、実橋の合成床版をモデル化した解析では有限要素法による解析も実施し、たわみや応力はほぼ一致するが、横せん断応力は一致しない問題点を指摘した。これにより有限要素法の適用に当たり、留意する点があることが明らかになった。

### 参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅱ鋼橋編，pp.239-246，2002.3.
- 2) M.Kurata：Bending of Simply Supported Rectangular Plates With Clamped Portions Along Arbitrary Sections of the Edges，Ing.Arch.，XXVII.Band，pp.385-416，1960.11.
- 3) M.Kurata,H.Okamura：Bending of a Rectangler Plate with Two Opposite Free Edges and Other Two Simply Supported Edges Having Any Clamped Portion,ZAMM 40,pp.310-327,1960.
- 4) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-krieger；Theory of Plate and Shells，2nd ed，McGraw- Hill
- 5) 横山広，安東祐樹，関口幹夫，堀川都志雄；全周固定される多層版解析の一手法について，構造工学論文集，Vol.54A，pp.910-917，2008.3.
- 6) 萩原直樹，青木圭一，栗田繁実，阪野崇人，永山弘久；横桁で支持された合成床版の移動載荷疲労試験，第5回道路橋床版シンポジウム講演論文集，pp.285-290，2006.7.
- 7) MSC Software：Marc 2000 ユーザーズマニュアル A 編，理論編

## 第六章 物体力を受ける床版の解析

物体力は表面力による外力の作用とは異なり、遠心力のような物体内部に直接作用する力である。第二章では温度を考慮した変位関数の他に、圧密方程式の変位関数を誘導しており、本章ではそれらを床版構造に適用した解析を実施することで材料劣化の影響を検討する。

### 6. 1 はじめに

道路橋床版は活荷重作用が全体の発生応力に占める割合が大きく、主として表面力に対する解析のみが行われている。しかしながら、積雪寒冷地における融雪装置として用いられる散水用配管やロードヒーティングが床版のコンクリート内部や表面に設置される場合には、床版内部に温度差が生じることになり内部応力が生じることになる。さらに、防水層を持たない床版コンクリート内部の空隙に水が充填され、輪荷重が作用すれば水圧作用による内部応力が生じることになる。本章では、温度作用や水圧作用を物体力として解析することで、床版に及ぼす影響を把握するものとする。

### 6. 2 物体力が作用する問題

物体力による数値計算として、基礎解を得るための正方形床版による計算例を示す。一般的な道路橋床版では活荷重による応力の比率が大きいため物体力を考慮することはないが、温度問題の理解を助けるために、先に表面力と物体力の差異について解説する。

計算に用いた正方形版のモデルは単純支持で支間長を  $a$  とし、版厚は実橋床版に見合う  $h/a=0.1$  で、ヤング係数  $E=1.0$ 、ポアソン比  $\nu=0.3$  とした。また、Fourier 級数による項数は変位・応力が収束値に至る 200 項とした。

版に作用させる物体力にはその大きさ  $Z_0$  が床版全域で版厚方向に一様に分布するケースと、版厚方向に線形分布するケース、すなわち上面で大きさが零、下面での大きさが  $2Z_0$ 、平均の大きさが  $Z_0$  となる傾斜分布の 2 ケースを対象とした。なお、比較のために表面力として等価な荷重値  $q = Zh$  が床版上面に作用する状態の計算も実施する。

3 つの荷重条件での数値解の比較を表-6.2.1 と図-6.2.1 にまとめる。上添字の  $u$  と  $l$  はそれぞれ版の上面と下面を意味する。表-6.2.1 によれば、鉛直方向応力以外の算出結果はほぼ同等の結果となっていることが判る。鉛直方向応力  $\sigma_z$  は表面力の版上縁側の値の他は零もしくは零と見なせる値である。図-6.2.1 は鉛直方向応力の版厚方向の分布を示したもので、表面力は版上縁が最大となり下方で零となる分布である。それに対して版内で一様に作用する物体力では、版内で正

負が交番する形状となっており、線形分布では下方で大きくなる応力分布であることが判る。このように作用力としての荷重が同値でも、その形態が異なることで鉛直方向応力の分布が異なることが判る。

表-6.2.1 物体力の計算結果

解析対象	物体力		表面力 ③ (等分布)	物体力/表面力 比率	
	一様分布 ①	線形分布 ②		①/③	②/③
$w_u E/Z_0 a^2$	4.63	4.63	4.60	1.01	1.01
$w_l E/Z_0 a^2$	4.62	4.63	4.59	1.01	1.01
$\sigma_x^u/Z_0 a$	-2.82	-2.83	-2.84	0.99	1.00
$\sigma_x^l/Z_0 a$	2.95	2.95	2.95	1.00	1.00
$\sigma_y^u/Z_0 a$	-2.82	-2.83	-2.84	0.99	1.00
$\sigma_y^l/Z_0 a$	2.95	2.95	2.95	1.00	1.00
$\sigma_z^u/Z_0 a$	-0.001	0	-0.099	0.01	0.00
$\sigma_z^l/Z_0 a$	-0.001	-0.002	0	—	—

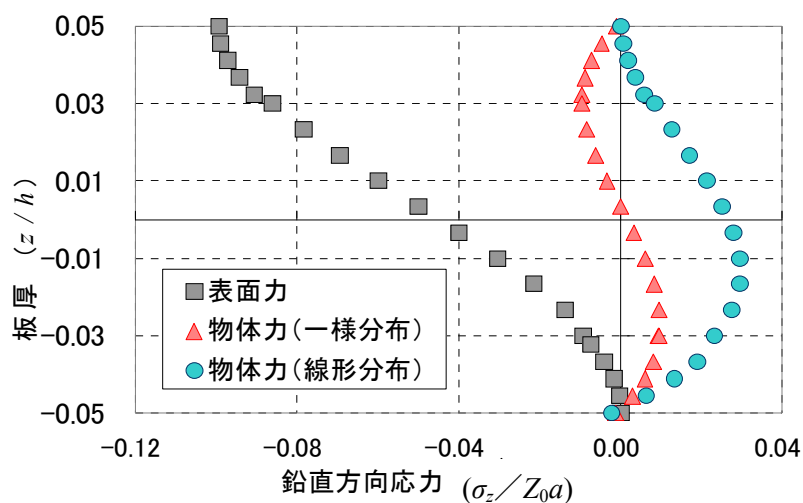


図-6.2.1 物体力による版厚方向の鉛直方向応力の分布

### 6. 3 熱負荷を受ける版の数値計算例

積雪寒冷地では融雪装置が道路橋床版に設置されることがあり、その際には局所的な温度負荷を受けることになる。融雪装置による温度負荷の形態は、①散水用の配管が床版に埋設される場合の線的な作用、②床版上面に敷設されるロードヒーティングによる面的な作用に大別される。

①の散水による消雪装置は、消雪（融雪）のために地下水等を路面に散布するため、配管部分が床版の温度よりも高くなることによる作用で床版を劣化させる場合がある（写真-6.1.1）。ロードヒーティングによる加温では床版内には、上面から下面に向かって温度勾配が生じることになり内部応力が発生する。この時、劣化床版の補強工法として上面増厚工法が施されていると、既設床版とのはく離の問題が無視できなくなる。このことを踏まえ、版内の温度差が生じる際の計算や実橋モデルでの応力状態を把握することにした<sup>1)</sup>。



写真-6.1.1 温度負荷を受ける床版劣化の例

#### 6. 3. 1 上面と下面温度が既知の温度問題

##### a) 全周単純支持床版の計算

温度負荷を受ける多層版の解析手法として、本研究では調和解析法と選点法を採用しており、温度問題にも適用できることを異なる計算手法として薄板理論でも解析を実施して各種法の解を比較する。

計算における積層数は調和解析法、および選点法の双方ともに3層とした。なお、選点法における選点ブロックの分割数は $x$ 、 $y$ 方向ともに12分割とした。解を得るための級数の項数は収束することを確認したうえで設定している。版内の温度設定は線形分布すると仮定し、温度分布を

各界面に与える。辺長  $a$  で版厚が等厚でその合計が  $h/a=0.1$  となる正方形版に作用する温度負荷は、上面温度  $T_u=0.0^\circ\text{C}$ 、下面温度  $T_l=1.0^\circ\text{C}$  であり、各層の線膨張係数  $\alpha$  を  $1.0^\circ\text{C}$  で同一としている。なお、ヤング係数は  $E=1.0$  で、ポアソン比は  $\nu=0.3$  とした。

図-6.2.2 は各解析方法によるたわみと応力分布を示したものである。図-6.2.2(a)のたわみ分布では、薄板理論では平面保持の仮定を考慮しているため版厚方向での変化はないが、厚板理論を用いる多層版理論では 3 次元解となるため上縁と下縁ではたわみ値が異なる。  $x, y$  方向の下縁での応力分布は図-6.2.2 の(b), (c)に示す通りで、薄板理論、多層版解析共にほぼ同等の値となっている。特に  $x$  方向の応力  $\sigma_x$  は、版中央部から端部に向けて応力値が大きくなり、端部付近でピーク値となることが判った。なお、  $y$  方向の応力  $\sigma_y$  は支点付近で  $\sigma_x$  とは異なる傾向が認められる。

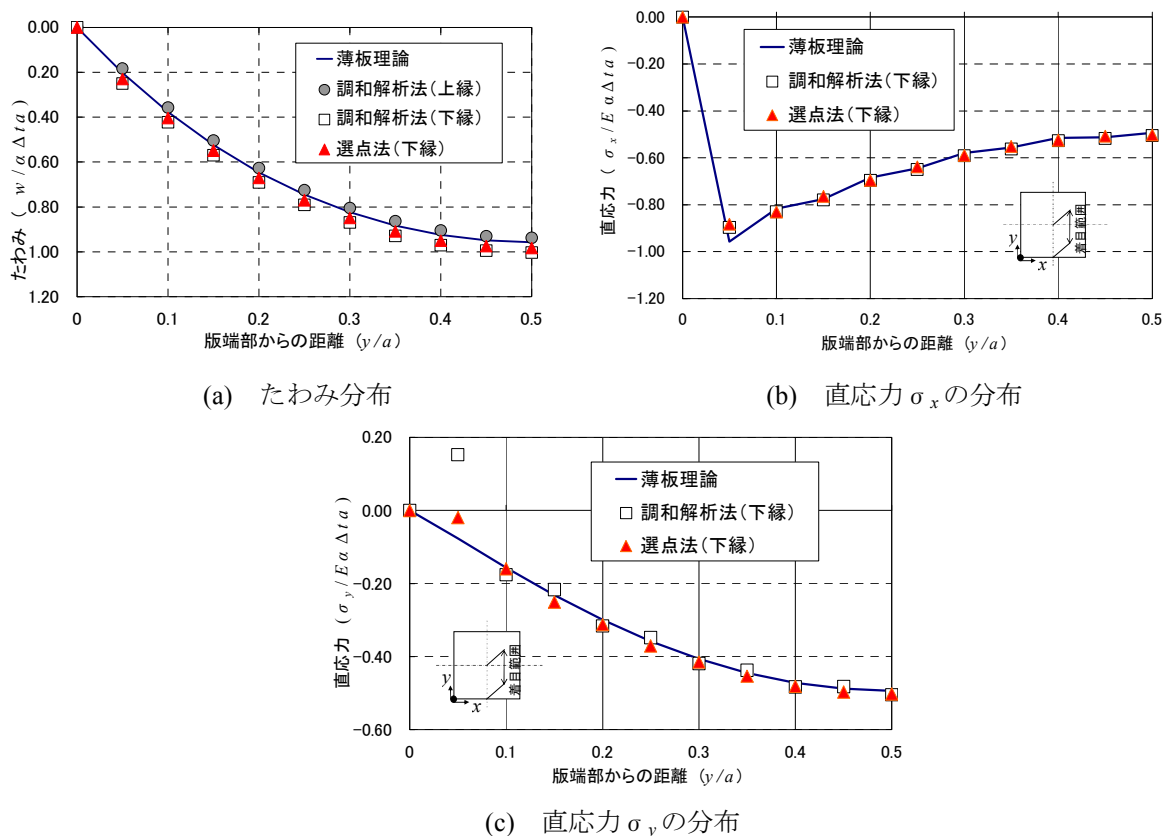


図-6.2.2 温度問題におけるたわみと直応力( $\Delta t = T_l - T_u$ )

表-6.2.2 は版中央点での計算結果の一覧表であり、多層版での解を確認するために調和解析法では 1 層での計算も実施している。

薄板理論のたわみは多層版解析との誤差が認められるがそれぞれの計算結果は概ね同等であると言える。特に調和解析法と選点法が同等であることから、離散化手法である選点法の特徴を



考慮すれば、はく離等の不連続性を示す問題に対しても有効であると推察される。

表-6.2.2 温度問題の計算結果

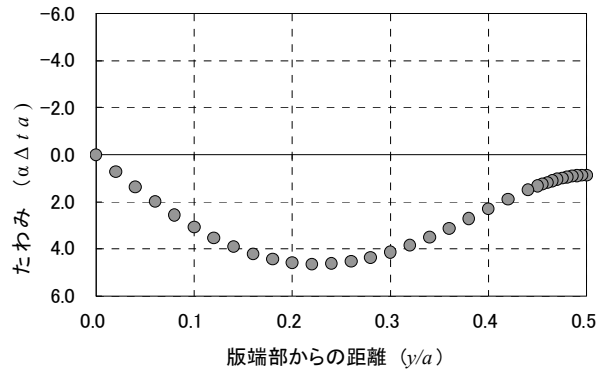
解析対象	薄板理論	多層版理論			単層との比較		
		調和解析法		選点法	①/②	③/②	④/②
		単層	3層	3層			
	①	②	③	④			
$w^u / \alpha \Delta t a$	0.958	0.938	0.938	0.941	1.02	1.00	1.00
$w^l / \alpha \Delta t a$	0.958	1.003	1.003	0.983	0.96	1.00	0.98
$\sigma_x^l / E \alpha \Delta t$	-0.494	-0.505	-0.497	-0.503	0.98	0.98	1.00
$\sigma_y^l / E \alpha \Delta t$	-0.494	-0.505	-0.497	-0.503	0.98	0.98	1.00

b) 固定辺を有する床版

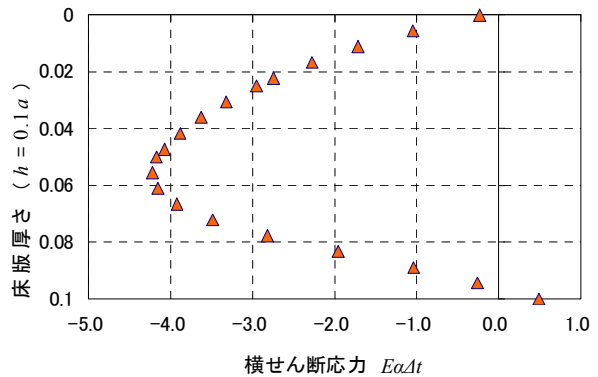
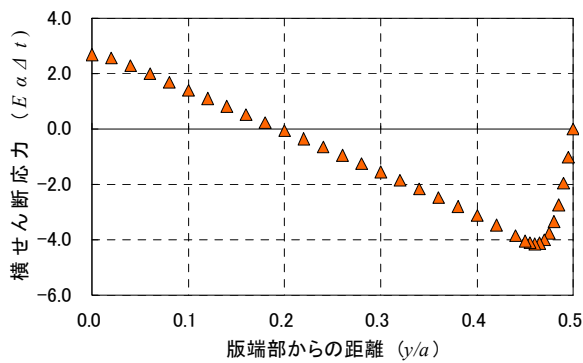
前節までは単純支持辺を対象としたが、固定辺を有する場合には、その支持桁付近で版内に発生する横せん断応力がピーク値を示すことが容易に想定できる。よって、全周単純支持された3層からなる正方形版の中央に桁を配置することで固定辺を模擬した床版の解析を行う。

版形状はこれまでの計算と同じで支間長を  $a$ 、版厚は  $h/a=0.1$  で、中央に配置した桁の幅を  $b=0.2a$  とした。計算に用いたヤング係数は  $E=1.0$ 、ポアソン比を  $\nu=0.3$  とした。温度の設定は上面温度  $T_u=1.0^\circ\text{C}$ 、下面温度  $T_l=0.0^\circ\text{C}$  であり、各層の線膨張係数  $\alpha$  を  $1.0^\circ\text{C}$  で同一としている。

図-6.2.3 は選点法によるたわみと横せん断応力の計算結果を図化したもので、図-6.2.3(a)の版上縁のたわみは温度が上縁で高い分布であることを反映した正の向きとなっている。版中央部分で零となっていないが、これは版の板厚方向の変形によるもので、中央下縁の値は零であることを確認している。図-6.2.3(b)は板厚方向の中央面で  $y/a=0.5$  の位置における横せん断応力の分布である。ピーク値は桁付近の  $y/a=0.04$  の位置で発生しており、そのピーク位置における板厚方向の横せん断応力は図-6.2.3(c)の分布となる。温度の影響を受ける実橋床版でも同様に桁付近が最大となることが予測される。



(a) たわみ分布



(b) 板厚方向の横せん断応力分布 ( $x/a=0.5$ )

(c) 板厚方向の横せん断応力 ( $y/a=0.04$ )

図-6.2.3 固定辺を有する版のたわみと横せん断応力

### 6. 3. 2 実橋床版でのロードヒーティングによる影響

#### a) 計算条件

実橋床版の温度負荷問題として、ロードヒーティングが設置されている全周単純支持された床版を想定して版内部の横せん断応力を計算する。版形状は図-6.2.4 に示すとおりで橋軸直角方向の床版支間長が 2.0m、橋軸方向長さを 5.0m、床版厚さは 170mm で、60mm の上面増厚コンクリートが敷設されている。なお、増厚コンクリートは普通コンクリートとして、計算の都合上最下層の床版と同等の物性値とした。ロードヒーティングによる温度上昇はアスファルト舗装と増厚コンクリートの界面に熱源が設置されているものとして計算している。計算に用いた既設床版と増厚コンクリートのヤング係数は  $E_c=14.0\text{kN/mm}^2$  で、ポアソン比は  $\nu=0.2$  で、アスファルト舗装では  $E_p=5.0\text{kN/mm}^2$ 、 $\nu=0.4$  とした。線膨張係数は各層共通で  $10.0 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$  である。ロードヒーティングの形式は電熱線方式であり、設計発熱量を 250W に設定した。なお、最低気温の設定では、積雪寒冷地を想定して  $-6^\circ\text{C}$  としている。環境条件から版内の温度分布を図-6.2.5 に示す 3

ケースを模擬的に設定した<sup>2)</sup>. CASE1 は床版と舗装が $-6^{\circ}\text{C}$ まで温度低下した際に熱が供給され、舗装表面温度が目標温度の $2^{\circ}\text{C}$ まで上昇した時点の状態を想定している. CASE2 は増厚コンクリートの温度が最大となる状態で、既設床版はロードヒーティングによる熱で温度上昇中の状態である. CASE3 は定常状態として熱供給により版内の温度が一定となる状態を想定している. 舗装と増厚部を含め実橋床版を5層からなる多層版として扱い、舗装の変形を考慮した状態I (層数5) と舗装が無いものとした状態II (層数4) を設定する. 解析手法は何れも調和解析法を採用し、基準温度は $0^{\circ}\text{C}$ としている.

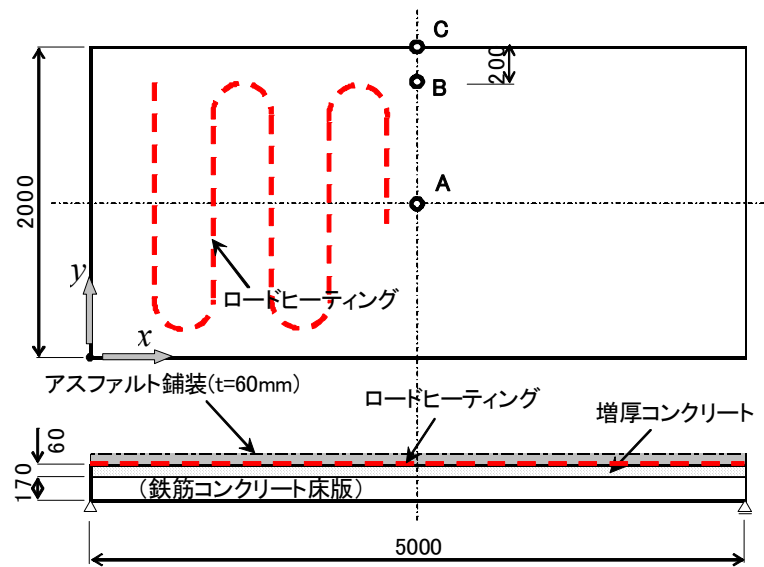


図-6.2.4 実橋床版の温度問題のモデル

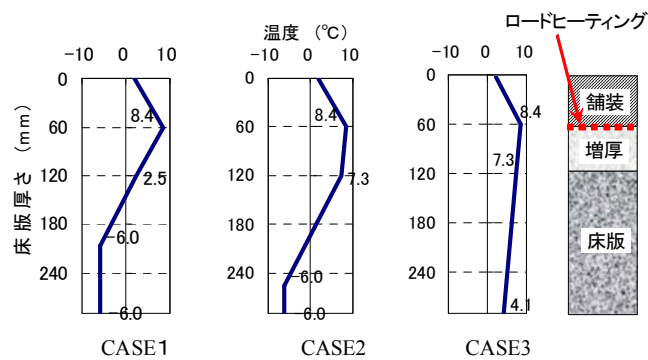


図-6.2.5 実橋床版の温度分布

b) 温度応力の計算結果

実橋床版に発生する中央点のたわみ, 直応力, および端部近傍における増厚コンクリート下面の付着せん断応力の計算結果を表-6.2.3 に示す. 周知のように冬期のアスファルト舗装のヤング係数が大きくなることは, 現場の載荷実験および解析結果からも裏付けられている. 状態 I のたわみが状態 II に比べて小さいのは舗装が床版剛性の増大に寄与していることを意味している. CASE1 と CASE3 の温度差はそれぞれ 14.4°C と 4.3°C になり, CASE1 の方が温度による曲げ効果の影響が大きくなり, たわみや応力が大きな値となっている. またロードヒーティング稼働の初期時に増厚部と既設床版との界面応力が端部で大きくなっていることが判る. 増厚部と既設床版との界面での付着せん断応力は床版端部で最大で, CASE3 の定常状態でもその値は 0.17N/mm<sup>2</sup> に達し, 防水層での規格値<sup>4)</sup> である 0.2N/mm<sup>2</sup> に近くなる. これに加えて自動車荷重による影響を考慮すれば, 規格値を超過することもあると懸念される.

表-6.2.3 実橋床版の温度問題

解析対象	着目点	単位	CASE1	CASE2	CASE3
$w_u$	A	mm	-0.397 (-0.399)	-0.433 (-0.460)	-0.116 (-0.134)
$w_l$			-0.404 (-0.402)	-0.428 (-0.455)	-0.099 (-0.109)
$\sigma_x^u$		N/mm <sup>2</sup>	-1.196 (-1.196)	-1.044 (-1.024)	-1.116 (-0.002)
$\sigma_x^l$			0.656 (0.657)	0.762 (0.734)	-0.546 (-0.549)
$\sigma_y^u$			-0.377 (-0.376)	0.233 (0.310)	-0.057 (0.154)
$\sigma_y^l$			-0.528 (-0.517)	-0.106 (-0.210)	-0.026 (-0.046)
$\tau_{yz}$	B	-0.002 (-0.005)	0.007 (0.008)	0.028 (0.020)	
	C	0.431 (0.367)	-0.017 (-0.048)	-0.168 (0.113)	

注) 上段の数値は状態 I, 下段の( )内の数値は状態 II を示す.

## 6. 4 水圧作用による劣化現象の解析的検討

道路橋の鉄筋コンクリート床版の劣化として、昭和40年代に問題が顕在化した疲労による損傷が挙げられるが、当時の劣化床版の中にはコンクリート床版の上面が砂利化しているものも確認されていた。疲労劣化のメカニズムはその当時に開発された輪荷重走行試験機によって解明され、砂利化現象も再現されるに至った。しかしながら、それらの試験によって再現された砂利化現象は、比較的大きな移動荷重の繰り返し载荷の結果で生じたものであり、一般の交通条件で発生する砂利化は異なる要因が影響していると考えべきである。写真-6.4.1は寒冷積雪地域の山間部における道路橋床版の舗装撤去後のコンクリート上面の状況であるが、上鉄筋まで砂利化が進展していた。この床版はアルカリシリカ反応被害が生じていることが判明しているが、反応生成物が膨張するだけでは微細に砂利化することはない。さらに砂利化の状況を観察すると、全体に湿潤していることが認められる。この湿潤状態と砂利化の関連は不明であるが、少なくとも水がコンクリートに浸透できる環境であることは疑いがない。

そこで、床版上面コンクリートの砂利化に水が関与していると仮定し、解析的にその影響を検討する。水の悪影響への対策には防水層の設置が有効であるが、新設橋では採用されているものの既設橋では設置されていないものも未だ数多く存在している。さらに塗膜型の防水層ではアスファルト敷設時の転圧により塗膜が損傷するという指摘もあることから、それが採用された際には状況により新設橋でも水が浸透する危険性が残されている。



写真-6.4.1 劣化床版上縁の砂利化

## 6. 4. 1 舗装と床版の一部に水圧が作用する問題

本節では、雨水で満たされたコンクリートの劣化部に輪荷重が作用するとき、水圧の大きさは輪荷重（100kN で載荷形状 200×500mm）の面圧  $1.0\text{N/mm}^2$  となる．これらを多層版に適用する場合、各層の上下面での水圧の大きさを決定して計算を実行する．すなわち、舗装と上鉄筋のかぶり部まで劣化部分やひび割れが存在する場合には、その層には水圧が考慮できる Biot の式を適用し、上鉄筋よりも下位の床版部には通常の式を用いることになる．

### a) 計算モデルと諸元

図-6.4.1 に計算モデルとして採用した単純版と桁を有する連続版のモデルを示す．橋軸直角方向の支間は単純支持の間隔と桁中心までの距離は、1 方向版としての境界条件とするために双方のモデルで 2.5m とし、橋軸方向はその 2 倍の長さとなる 5.0m とした．支持桁の曲げ剛性は無限大( $EI=\infty$ )として、その幅を 300mm に設定した．水圧の作用条件は図-6.4.2 に示すとおりで、舗装と床版（上被り 30mm）の一部に水圧を作用させるものとして、ポットホールのような輪荷重の接地面積よりも小さい範囲を対象とした CASE1 と、輪荷重幅程度の比較的大きな劣化範囲を設定した CASE2 を設定した．

計算に用いた物性値は表-6.4.1 の通りで、コンクリート床版のヤング係数はひび割れ状態である  $n=15$  を考慮した等価換算係数  $E_c=14.0\text{kN/mm}^2$  に設定し、アスファルト舗装は感温性を考慮して冬期の想定値となる  $E_a=2.0\text{kN/mm}^2$  とした．

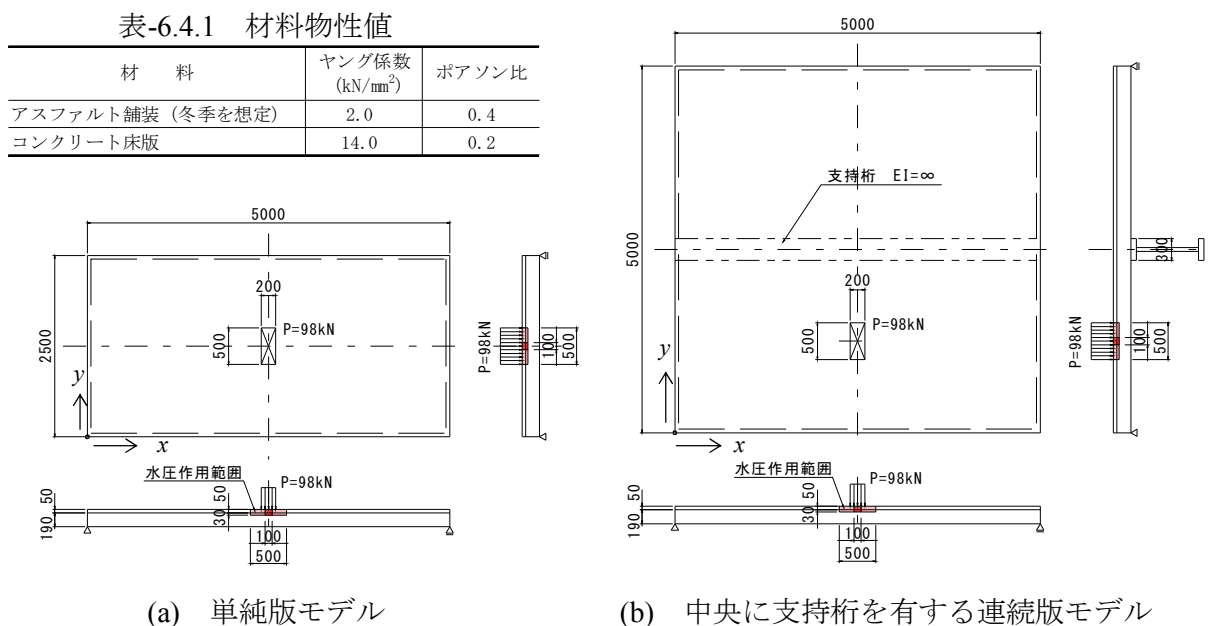


図-6.4.1 計算モデル

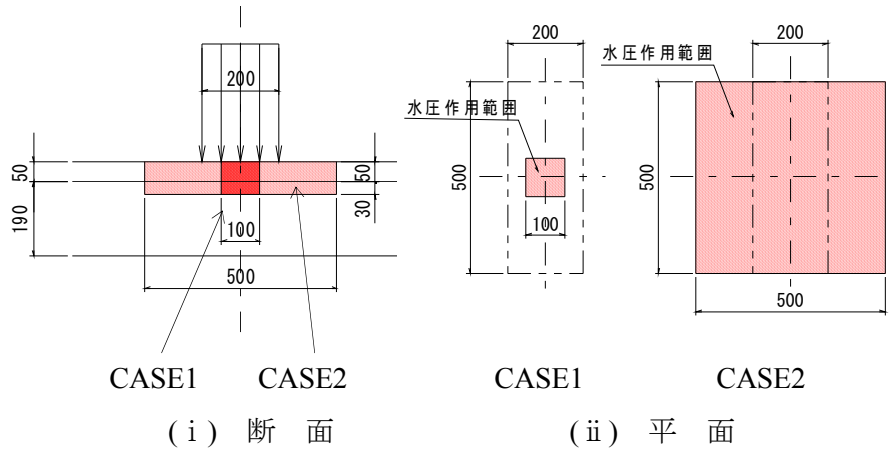


図-6.4.2 床版と舗装の一部に水圧が作用するモデル

b) 単純版の計算結果

舗装と床版の一部に水が浸透し、輪荷重が作用した際の横せん断応力を図-6.4.3 に示す。図-6.4.3 (a)はCASE1の水圧を荷重中心部 ( $y=1250\text{mm}$ ) の  $100 \times 100$  の範囲に作用させたもので、水圧作用端の  $c+50\text{mm}$  の位置で舗装と床版の界面、床版コンクリート内部の水圧作用下端で横せん断応力のピークがあり、床版コンクリート内部の値が  $\tau_{yz}=0.67\text{N/mm}^2$  で、荷重が作用している端部の値である  $\tau_{yz}=0.47\text{N/mm}^2$  の 1.42 倍と大きな値となっている。

図-6.4.3(b)は水圧の作用端と荷重端とを合わせた場合の横せん断応力であるがピーク値はCASE1 よりも大きい  $\tau_{yz}=1.09\text{N/mm}^2$  となっており、水圧作用がない場合のピーク値の 2.32 倍まで大きくなっている。計算値は一般の床版コンクリートの純せん断強度を考慮すると、直ちにひび割れが発生するレベルではないが、コンクリート内部に水が浸透している場合に、ひび割れ発生に繋がる可能性が高いと考えている。

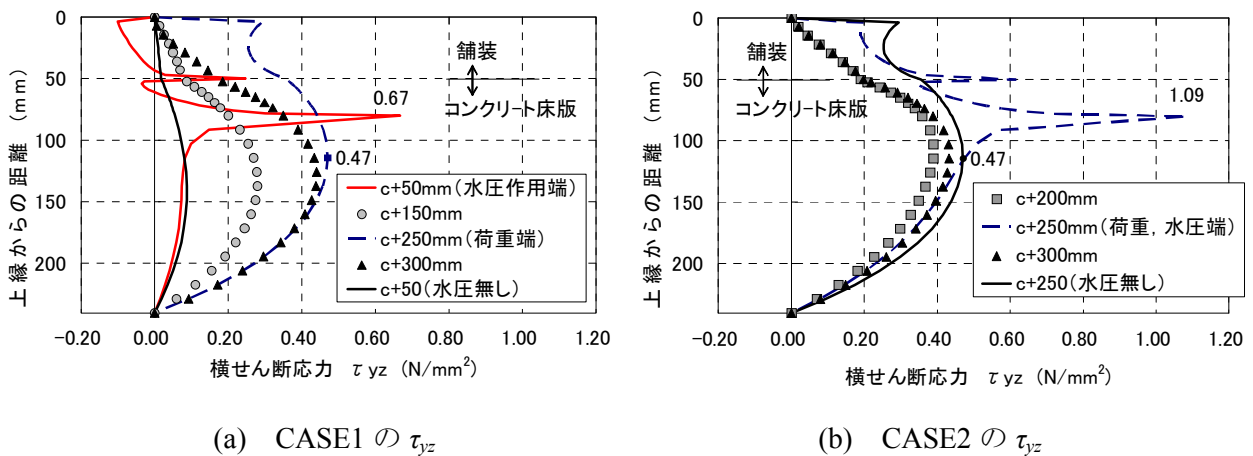


図-6.4.3 単純版の水圧作用による横せん断応力

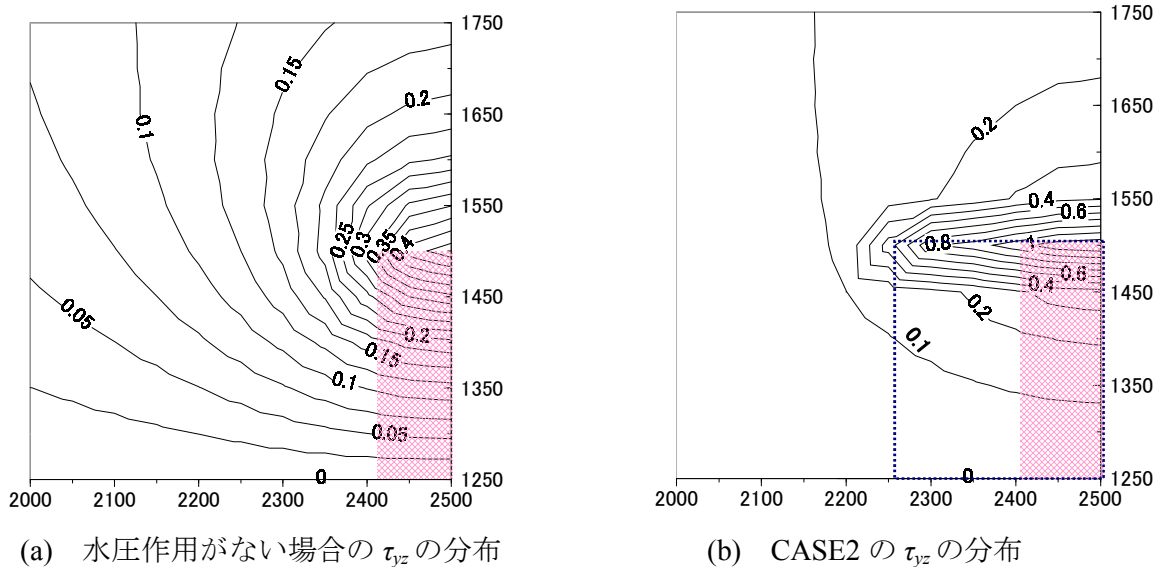


図-6.4.4 横せん断応力の等高線表示

図-6.4.4(a)は水圧が作用していない場合の輪荷重のみによる横せん断応力の分布を等高線表示したものである。着目しているのは床版上縁から 30mm の上鉄筋位置を想定した。輪荷重の作用範囲は薄墨で表示しており、図-6.4.4(b)では水圧作用範囲を青の破線で表示している。図によれば水圧が作用しない状態でも荷重端で横せん断応力が大きくなっているが、CASE2 の水圧を作用させた場合ではさらに顕著に横せん断応力が集中しており、ひび割れ発生の始点になる可能性のあることが判る。

CASE1 と CASE2 の計算ではコンクリート床版の水圧作用範囲を上縁から 30mm 深さの上鉄筋位置としている。横せん断応力に対しては内部鉄筋の存在によりコンクリートの抵抗断面が欠損している状態となる。すなわち、劣化床版の水平ひび割れが上鉄筋付近に発生している事例が散見される理由として、水の影響による横せん断応力の増大化が挙げられる。

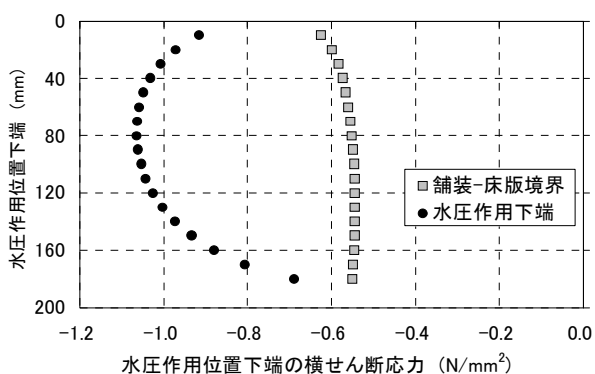


図-6.4.5 水圧範囲を下端へ移動した場合の横せん断応力

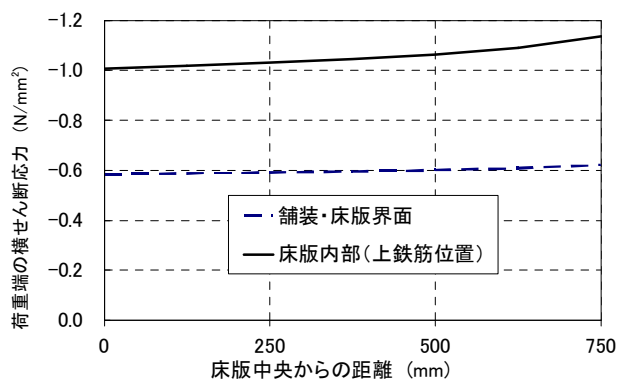


図-6.4.6 荷重と水圧作用位置を支持桁へ移動した場合の横せん断応力



c) 連続版の計算結果

水圧の作用範囲を床版厚さ方向に変化させた場合の横せん断応力の影響を図-6.4.5 に示す。本解析では連続版の支持条件で CASE2 の水圧条件を床版支間中央位置 ( $y=1250\text{mm}$ ) としている。着目位置は舗装と床版の界面、および水圧作用位置の下端である。図によれば、横せん断応力のピーク位置は床版厚さに対して中央面付近よりやや上方となっており、舗装と床版の界面のそれに対して大きい値で推移していることが判る。またその応力レベルは厚さ方向に広い範囲で大きい値となっており、前述の上鉄筋位置のほかにも、水が浸透している状態ではその浸透深さが版厚に対して中央付近である場合に、ひび割れ発生危険性を孕んでいる。

図-6.4.6 は荷重と CASE2 の水圧作用位置を支持桁方向に移動させた場合の、床版上縁から 30mm 深さでの横せん断応力を示している。横せん断応力は載荷位置が支持桁に近づくときと大きくなる傾向を示している。増加の程度は緩やかではあるが、ほぼ床版全体で同じレベルのひび割れ発生に関する危険性を内包していることが伺える。

### 6. 4. 2 床版内の水平ひび割れを模擬した層内に 水圧が作用する問題

本節では床版内部の上側鉄筋付近に水平ひび割れが発生したと仮定して、単純版の中央と連続版で中央から支持桁側に 500mm の位置に、輪荷重ならびにその接地面積相当のひび割れ範囲とした CASE3 と輪荷重の大きさよりも辺長を 100mm 大きくした CASE4 モデルで水圧を作用させた際の発生応力を算出する。なお、水平ひび割れの厚さは 1.0mm とし、水圧は面圧  $1.0\text{N}/\text{mm}^2$  としてその範囲内にもみ作用させている (図-6.4.7)。

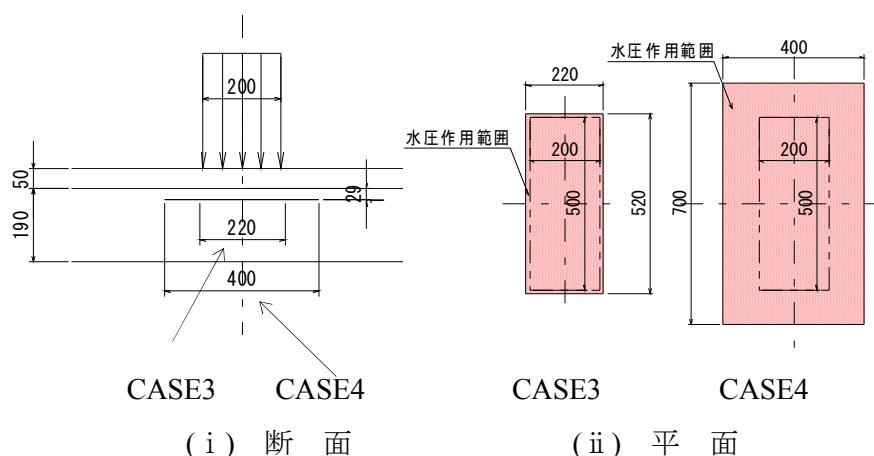


図-6.4.7 水平ひび割れ内部に水圧が作用するモデル

a) 横せん断応力の計算結果

図-6.4.8 に横せん断応力の計算結果を示す。水平ひび割れを模擬した位置での算出結果は CASE3, CASE4 のいずれもが単純版の中央載荷での値が大きくなっている。上鉄筋より下の床版の分布では、連続版の値が大きくなっており、支持桁の影響が伺える。CASE3 と CASE4 の異なる点は水圧作用位置の範囲の差と輪荷重からの離れの影響が表れており、CASE3 の水圧作用端と荷重端が近い方が横せん断応力が大きい結果となった。

b) 垂直応力の計算結果

垂直応力  $\sigma_z$  の計算結果を図-6.4.9 に示す。両方のケースでひび割れを模擬した位置では連続版の値が突出しており、荷重位置が支持桁に近づくときひび割れを模擬した端部の垂直応力が突出し、局所的に引張応力の発生することが判る。ひび割れ位置のほかの値は双方のケースで単純版、連続版ともに同等となっている。よって、CASE2 の計算で横せん断応力によるひび割れ発生危険性を指摘したが、そのひび割れ位置に横せん断応力の他に引張りの垂直応力が加わり、はく離が進展する可能性のあることが示された。

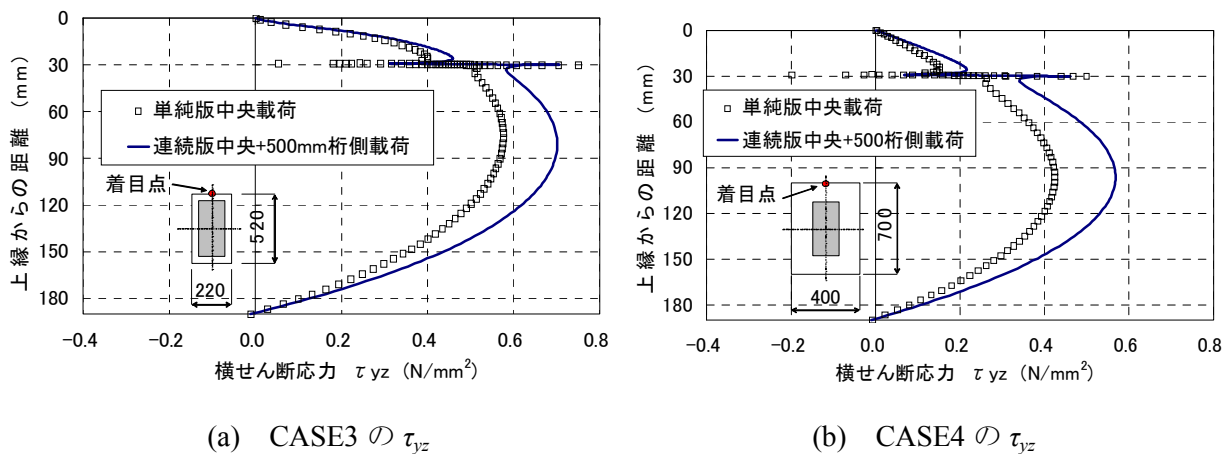


図-6.4.8 横せん断応力  $\tau_{yz}$

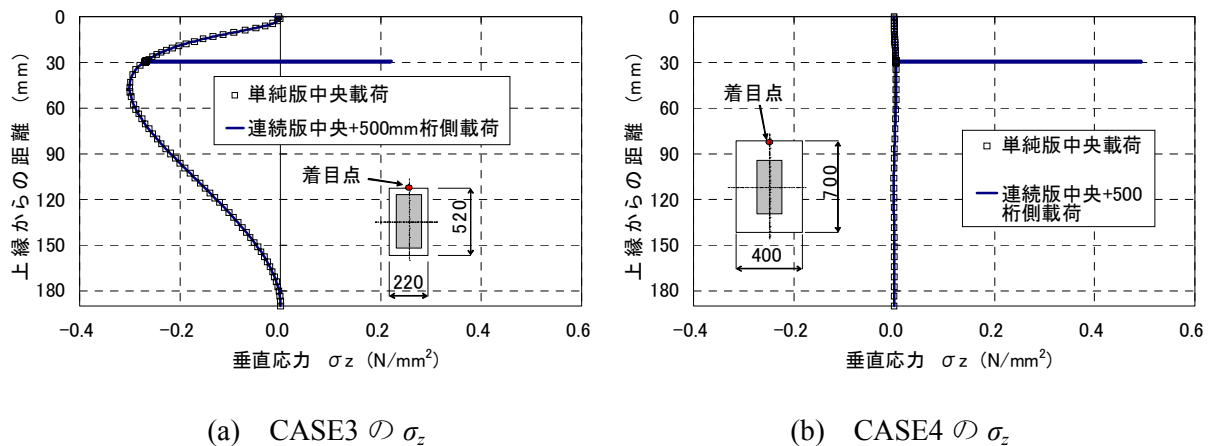


図-6.4.9 垂直応力  $\sigma_z$

## 6. 5 まとめ

物体力は表面力による外力の作用とは異なり、遠心力のような物体内部に直接作用する力である。第二章では、温度を考慮した変位関数の他に、圧密方程式の変位関数を誘導しており、本章ではそれらを床版構造に適用した解析を実施することで材料劣化の影響を検討した。本章で得られた成果を列挙する。

- ① 道路橋床版で熱負荷を受ける問題は、床版厚さが大きい場合の新設床版における温度収縮の他には議論されていない。しかしながら寒冷積雪地域で採用されている消雪装置は地下水やヒーターを熱源とするため、床版上面に設置される場合には作動時に温度勾配が生ずることになる。ロードヒーティングでは面的な熱源となるが、地下水を散布する消雪パイプでは線状に温度負荷を与えることになり、床版内に発生する応力分布は複雑なものとなることが推察される。さらに、既設床版に劣化対策として上面増厚工法が採用されている場合には、増厚部分が温度負荷を受けて先行して膨張するためはく離の危険性が顕在化することになる。
- ② 道路橋床版の劣化に寄与する水圧の影響を解析的に検討した結果、コンクリートに浸透する水圧作用端と荷重端が一致する場合に版内に発生する際の横せん断応力値が増大し、水圧作用位置端部でひび割れが発生する危険性があることが示された。さらに着目した水圧作用範囲の上側鉄筋位置では、横せん断に抵抗するコンクリートの断面が欠損する状態となるため、水平ひび割れの起点となる危険性がさらに増大する。また、輪荷重と水圧の作用範囲を連続版の支持条件で支持桁近傍へ移動させた場合には、横せん断応力は増加傾向にある。全幅で高い応力レベルとなっていることから、荷重位置による差は顕著ではなく、水が浸透している条件ではどの位置でもひび割れ発生の可能性がある。
- ③ 水平ひび割れを模擬した範囲に水圧を作用させた場合には、その端部に横せん断応力に加えて引張り側の垂直応力による引き剥がしが作用するため、ひび割れが進展する可能性がある。

### 参考文献

- 1) 横山広, 関口幹夫, 堀川都志雄: 温度負荷を受ける多層版の変位関数の開発とその応用について, 構造工学論文集, Vol.57A, pp.1346-1353, 2011.3.
- 2) 北海道開発局: 北海道開発局道路設計要領, 第5集 電気通信施設, pp.5-4-1 - 5-4-21, 2010.4.
- 3) 横山広, 関口幹夫, 榎谷浩, 堀川都志雄: 道路橋床版への水圧作用による劣化現象の解析的検討, コンクリート工学年次論文集, Vol.34, No.2, pp.409-414, 2012.7.
- 4) 財団法人災害科学研究所 道路橋床版高機能防水システム研究委員会: 道路橋床版高機能防水システムの耐久性評価に関する研究, 2005.9.



## 第七章 結 論

道路橋床版の疲労問題は次第に解明されてきているが、床版の劣化は車両の走行による疲労ばかりでなく材料劣化が原因となる問題も顕在化している。例えばアルカリシリカ反応では微細ひび割れによるヤング係数の低下が及ぼす影響や塩害劣化による内部鋼材の断面減少など、耐荷性を評価するうえで材料劣化の問題も重要である。疲労問題がそうであったように材料劣化問題でも輪荷重走行試験による耐久性の確認が必要であるが、その際にも劣化プロセスを評価するための解析的な検討がなければ論理的な根拠は得られないものと推察される。

近年、構造物解析の現場では複雑な形状が扱えることから有限要素法が多用されるようになってきているが、使用性が向上しているとは言え、異種材料間の接触問題などその処理に困難さが伴う場面も少なくない。また近似解であることからその精度を確認する手法の開発も求められている。現実問題として有限要素法が万能であるかのごとく扱われる場面にも遭遇するが、適材適所の考えから、全てに有限要素法を用いることが効果的であるとは言えない。例えば道路橋床版が劣化した際に採用される補強工法では、その床版厚さに対して補強層が極端に薄いことから有限要素法の適用には注意が必要である。

以上の問題は、本研究で得られた成果を基にすれば力学的見地からの評価が可能になると考えられる。床版の最適厚さ問題や補強工法の評価、多層版としての床版の検討、および防水層のはく離問題や混合型境界問題、温度負荷問題に関して、本研究で得られた知見をまとめる。

**第一章**では3次元弾性体および厚板理論に係わる既往研究の概要を年代順に調査し、変位関数に関しては静的問題と動的問題に分け整理した。3次元問題による厳密解への探求は1848年のL.Kelvinに始まり、その後数多くの研究者に議論されて現在に至っているが、有限要素法の出現により1980年代以降は停滞の傾向にある。

次に研究目的を整理し、各種床版問題と本研究の解析的検討の関係を示した。前述の通り道路橋床版では疲労劣化の他にも解決すべき問題は山積しており、変位関数の誘導とそれによる解析手法の開発はそれらの問題解決にあたっての強力なツールになることが推察される。

**第二章**では従来の変位関数を拡張し、既往の研究成果で得られている変位関数を比較した。

変位場と温度場が連成する場合の静的問題での変位関数は、W.Nowackiの提示した変位関数と同様であるが、Boussinesqの関数に相当する関数がなく、Nowackiの変位関数は完全系ではないと言える。非連成時の場合、得られた変位関数はGalerkin-vectorとBoussinesqの関数に帰着する。次に、一般化したVoigtモデルで表現される粘弾性体の変位関数を導いた。粘性に関する項を除去すれば、それぞれの変位関数は静的および動的問題で得られこれまでの変位関数に一致してい

る。また、M.A.Biot による圧密方程式の変位関数は、静的熱弾性問題の変位関数のパラメータを書き換えることで、容易に求められることが判った。

物体力が版厚方向に線形分布する場合の変位関数に基づく厚板理論を級数展開することにより、版の厳密解を得るための応力法と変位法による方法を誘導した。これらの方法は多層版への適用する際の基礎式となる。

誘導された厚板理論を適用して、版の表面に荷重が作用する問題の例として、曲げひび割れの発生の有無に着目して、道路橋示方書に規定されている最小版厚を力学的立場から捉え直し、一部で版厚が不足していることを指摘した。局所的な変位や応力の挙動を厳密に把握するには、変位関数に依拠した厚板理論が必要であると推察される。

**第三章**では厚板理論の級数解を特解に、境界条件を満たす補足解に薄板理論による同次解を採用して、それらを重ね合わせることで解を得る混合法を提案し、その手法を用いた数値計算から妥当性を評価した。道路橋床版の輪荷重作用によるひび割れ問題は、荷重直下の局所応力が支配的になることから厚板理論の特長を残した混合法は合理的な手法となる。

本章で計算例とした変断面問題は、新設床版のハンチ近傍の応力状態のみならず、鋼板接着工法や上面増厚工法を部分的に施した場合の応力集中問題にも適用できることから、これからの維持管理の時代に向けても威力を発揮する解析手法であるといえる。

**第四章**では多層版解析の手法として調和解析法と選点法を誘導した。劣化床版への対策工法には各種の工法が実施されてきているが、それらは既設床版との接着による一体性を確保しており、界面の一部にはく離現象が発生する場合にはその補強効果を揺るがす大きな問題となる。近年、床版の疲労耐久性を向上させるための方策として橋面防水の必要性が叫ばれているが、防水に関してもはく離は重要な問題である。

数値計算例として、調和解析による多層版解析を実施した。対象は上面増厚工法による補強床版と床版の水平ひび割れに関する問題である。結果として、上面増厚工法は輪荷重直下のエッジ部分で横せん断応力が最大となり、はく離の危険性が示唆された。

水平ひび割れ問題では、上面増厚工法を採用した場合には、その増厚効果により横せん断応力の版厚方向の最大値の位置が上方に変化し、上側鉄筋の付近となることが示された。横せん断応力に着目する場合には鉄筋はコンクリートの断面積を減少させる異物とも言えるので、そのピーク値に鉄筋の断面投影面積をコンクリートの断面積から減じれば、見かけ上の横せん断応力が増加することになり、水平ひび割れ発生の危険性は増大することになる。

選点法を用いた多層版解析による防水層のはく離問題を検討した結果、輪荷重の制動荷重をも考慮した場合には、防水層のはく離現象の危険性ははらんでいることが判った。さらに、部分的にはく離した防水層では、さらにはく離が進展する危険性が認められた。また、解析の妥当性を評価するものとして、有限要素法による解析もあわせて実施したが、結果として横せん断応力に着目した場合には有限要素法による解析では混合法とは一致せず、はく離問題のように界面の状態を検討する際には限界のあることが示された。

実橋床版の載荷試験による補強済み床版やひび割れ劣化床版のたわみ劣化度の評価に、多層版解析を用いることで劣化度の評価が精度良く、かつ容易に可能なことが示された。対象とした載荷試験法は衝撃荷重によるもので、足場を必要とせず短時間で試験が可能となることから、この解析法による検証と組み合わせることで床版の維持管理に対する強力なツールになることが期待される。

**第五章**では厚板理論の特長を残して固定支持の境界条件の解析を可能とする手法を提案し、その有効性を把握した。その手法は単純支持辺近傍に曲げ剛性が無限大のダミー桁を配置する方法で、解析上その他の処理を必要としない簡便な手法である。

提案した手法の数値計算例として、支持辺の一部が固定化される単純支持版の解析を実施し、その基礎解と既往の研究結果と比較して妥当性を確認した。ダミー桁による手法では固定位置の長さや位置を自由に設定できる利点から、任意の位置での自由、単純支持および固定辺が組み合う混合型境界条件を有する版の解析が可能となった。この解析手法の実用性を評価するために、既往の実験結果における解析例との比較から良好な一致を確認した。また、実橋の合成床版をモデル化した解析では有限要素法による解析も実施し、たわみや応力はほぼ一致するが、横せん断応力は一致しない問題点を指摘した。これにより有限要素法の適用に当たり、留意する点があることが明らかになった。

**第六章**では誘導した物体力としての熱問題、ならびに水圧問題に関する変位関数により、物体力そのものが作用する場合や熱負荷、間隙水圧を受ける版の解析を実施した。

道路橋床版で熱負荷を受ける問題は、床版厚さが大きい場合の新設床版における温度収縮の他には議論されていない。しかしながら寒冷積雪地域で採用されている消雪装置は地下水やヒーターを熱源とするため、床版上面に設置される場合には作動時に温度勾配が生ずることになる。ロードヒーティングでは面的な熱源となるが、地下水を散布する消雪パイプでは線状に温度負荷を与えることになり、床版内に発生する応力分布は複雑なものとなることが推察される。さらに、既設床版に劣化対策として上面増厚工法が採用されている場合には、増厚部分が温度負荷を受けて先行して膨張するためはく離の危険性が顕在化することになる。

道路橋床版の劣化に寄与する水圧の影響を解析的に検討した結果、コンクリートに浸透する水圧作用端と荷重端が一致する場合に版内に発生する際の横せん断応力値が増大し、水圧作用位置端部でひび割れが発生する危険性があることが示された。さらに着目した水圧作用範囲の上側鉄筋位置では、横せん断に抵抗するコンクリートの断面が欠損する状態となるため、水平ひび割れの起点となる危険性がさらに増大する。また、輪荷重と水圧の作用範囲を連続版の支持条件で支持桁近傍へ移動させた場合には、横せん断応力は増加傾向にある。全幅で高い応力レベルとなっていることから、荷重位置による差は顕著ではなく、水が浸透している条件ではどの位置でもひび割れ発生の可能性がある。また、水平ひび割れを模擬した範囲に水圧を作用させた場合には、その端部に横せん断応力に加えて引張り側の垂直応力による引き剥がしが作用するため、ひび割れが進展する可能性がある。

## 謝 辞

本論文を取り纏めるに当たり、熱心に暖かくご指導いただきました金沢大学理工研究域環境デザイン学系教授 榎谷浩先生に感謝します。

本論文の審査に当たり金沢大学理工研究域環境デザイン学系、教授 鳥居和之先生、准教授 深田宰史先生、ならびに准教授 久保善司先生には貴重なご意見を頂戴しました。ここに感謝いたします。特に久保先生にはオランダで開催された IABSE の国際会議でお世話になり、忘れられない思い出が増えました。

大阪市立大学大学院工学研究科都市系専攻（土木工学）教授 鬼頭宏明先生にも解析に関する貴重なご意見を賜りました。感謝いたします。

これまでの永きにわたる研究活動を支えて頂きました大阪工業大学名誉教授 堀川都志雄先生に感謝します。早いもので自走式輪荷重走行試験機による補強床版の実験からお世話になって約 17 年が経ちました。その間、先生には床版の理論から数値計算にいたるまで数多くの厳しく、そして暖かいご指導を賜りました。先生のお力添えが無ければこの研究も纏められなかったと思います。

大阪大学名誉教授 松井繁之先生には土木学会鋼橋床版の調査研究小委員会の活動から現在に至るまで各種の床版に関する問題でご助言を頂きました。ここに感謝いたします。

東京都土木技術支援・人材育成センター 関口幹夫様には、実橋レベルで起こっている各種問題から、維持管理の実務までご教示いただき、さらにその解決に至る過程で多くのご助言を頂きました。ここに感謝いたします。

土木学会の床版委員会では 4 期に亘って参加させて頂き、その中で床版問題に関する多くの情報を得ることができました。また、床版シンポジウムを通じて貴重な発表の機会も頂きました。第一期委員長 松井繁之先生、第二期委員長 堀川都志雄先生、第三期委員長 日野伸一先生（九州大学大学院工学研究院教授）、第四期委員長 太田孝二様（一般財団法人 土木研究センター）、ならびに委員の皆様に感謝いたします。

土木学会中部支部の寒冷積雪地域における複合劣化を想定したコンクリート構造物の調査・診断委員会（委員長、久保先生）、ならびに ASR と輪荷重との複合作用による床版劣化の実態調査委員会複合劣化に関する委員会（委員長、榎谷先生）では、床版問題に材料劣化を考慮すべきであるという貴重な知見を得ることができました。委員長と委員の皆様に感謝いたします。

株式会社国土開発センター代表取締役社長 新家久司様、常務取締役 金子慶一様、取締役 新



保明夫様，設計事業部部門長 笹谷輝彦様，に感謝します。中途入社でありながらも研究を続ける機会を与えて頂き，この論文を纏めることができました。

ショーボンド建設株式会社代表取締役会長 上田昭様に感謝します。この研究の大半は小生が貴社でお世話になった時間に残したものです。その際のご支援なしにこの研究が成し遂げられなかったと思います。同社取締役常務執行役員 岳尾弘洋様には小生の社会人生活の多くの時間をともに過ごさせていただきました。その時の数え切れないほどの経験が今の私の礎となっています。心より感謝いたします。

小生の存在は父と今は亡き母が出会った奇跡にあります。親孝行らしきこともできていませんが感謝の気持ちは言葉に代えられないものがあります。最後に，ともに過ごす時間を犠牲にしながらもこの貴重な経験を支えてくれた妻へ，そして我が子に感謝の気持ちを伝えます。

「本当に，ありがとう。これからも，よろしく」



# 付 録

## 薄板理論の誘導と級数表示

3次元弾性体から2次元弾性体である薄板理論を誘導し、その級数解法について概説する。薄板理論は応力が主体の厚板理論と異なり、モーメントや軸力等の断面力を中心とする力学である。線形弾性体を扱う薄板理論では曲げ問題と引張り問題とに分離される。

### a) 薄板理論の展開

非連成時の平面応力問題に限定して議論を進める。式(3.2.35)より応力  $\sigma_x$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 4(\lambda + \mu)\varepsilon_x / (\lambda + 2\mu) + 2\lambda\mu\varepsilon_y / (\lambda + 2\mu) - 2\mu\gamma_x T / (\lambda + 2\mu) \\ &= E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) / (1 - \nu^2) - E\alpha T / (1 - \nu)\end{aligned}\quad (\text{付.1})$$

ここで、 $\lambda$ 、 $\mu$ ；ラメの定数、 $E$ ；弾性係数、 $\nu$ ；ポアソン比、 $\alpha$ ；線膨張係数  
同様に、 $\sigma_y$ 、 $\tau_{xy}$  も求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_y &= E(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y) / (1 - \nu^2) - E\alpha T / (1 - \nu) \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = E\gamma_{xy} / 2(1 + \nu)\end{aligned}\quad (\text{付.2})$$

応力のつりあい式(3.2.14)の  $x$  方向について考える。この式の両辺に  $z$  を乗じて版の全厚  $h$  に亘って積分すれば、次のような曲げ問題での  $x$  軸に関するつりあい式が得られる。

$$\partial_x M_x + \partial_y M_{xy} - Q_x + t_{xp} h / 2 + \int Xz dz = \int \rho \partial_t^2 u z dz \quad (\text{付.3})$$

ここで、 $M_x = \int \sigma_x z dz$ 、 $M_{xy} = \int \tau_{xy} z dz$ 、 $Q_x = \int \tau_{xz} dz$ 、 $t_{xp} = t_{xl} + t_{xu}$ 、  
 $\rho$ ；単位体積当たりの質量

なお、積分値は下面( $z=h/2$ )から上面( $z=-h/2$ )までの値である。

同様に、 $y$  軸および  $z$  軸に関するつりあい式が求められる。

$$\partial_x M_{xy} + \partial_y M_y - Q_y + t_{yp} h / 2 + \int Yz dz = \int \rho \partial_t^2 v z dz \quad (\text{付.4})$$

$$\partial_x Q_x + \partial_y Q_y - q_m + \int Z dz = \int \rho \partial_t^2 w dz \quad (\text{付.5})$$

ここで、 $Q_y = \int \tau_{yz} dz$ 、 $t_{yp} = t_{yl} + t_{yu}$ 、 $q_m = q_l + q_u$

式(付.3)および(付.4)を式(付.5)に代入すると、断面力のつりあい式が得られる。

$$\begin{aligned} & \partial_x^2 M_x + 2\partial_x \partial_y M_{xy} + \partial_y^2 M_y + (\partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp})h/2 + q_m + \int (\partial_x X + \partial_y Y)zdz + \int Zdz \\ & = \partial_x \int \rho \partial_t^2 u z dz + \partial_y \int \rho \partial_t^2 v z dz + \int \rho \partial_t^2 w dz \end{aligned} \quad (\text{付.6})$$

一方、版の変位について考える。版厚方向のせん断変形 $\gamma_{xz}$ および $\gamma_{yz}$ を無視すれば、 $x$ および $y$ 方向の変位 $u$ と $v$ は以下のように得られる。

$$u = u_0 - z\partial_x w, \quad v = v_0 - z\partial_y w \quad (\text{付.7})$$

ここで、 $u_0$ 、 $v_0$ ；中央面( $z=0$ )での $x$ 、 $y$ 方向の変位

式(付.7)から得られるひずみを式(付.1)と(付.2)に代入すれば、応力が求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E(\varepsilon_{x0} + \nu\varepsilon_{y0})/(1-\nu^2) - zE(\partial_x^2 w + \nu\partial_y^2 w)/(1-\nu^2) - E\alpha T/(1-\nu), \\ \sigma_y &= E(\varepsilon_{y0} + \nu\varepsilon_{x0})/(1-\nu^2) - zE(\partial_y^2 w + \nu\partial_x^2 w)/(1-\nu^2) - E\alpha T/(1-\nu), \\ \tau_{xy} &= E\gamma_{xy0}/2(1+\nu) - 2zE\partial_x \partial_y w/2(1+\nu) \end{aligned} \quad (\text{付.8})$$

ここで、 $\varepsilon_{x0} = \partial_x u_0$ 、 $\varepsilon_{y0} = \partial_y v_0$ 、 $\gamma_{xy0} = \partial_y u_0 + \partial_x v_0$

曲げモーメント $M_x$ 、 $M_y$ および $M_{xy}$ とたわみ $w$ との関係式は次の通りである。

$$\begin{aligned} M_x &= -D(\partial_x^2 w + \nu\partial_y^2 w) - E\alpha \int Tzdz/(1-\nu), \\ M_y &= -D(\partial_y^2 w + \nu\partial_x^2 w) - E\alpha \int Tzdz/(1-\nu), \\ M_{xy} &= -(1-\nu)D\partial_x \partial_y w \end{aligned} \quad (\text{付.9})$$

ここで、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ；版の曲げ剛性

式(付.9)を式(付.6)に代入すると、たわみに関する基礎微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & D\Delta\Delta w + \rho h(1-h^2\Delta/12)\partial_t^2 w \\ & = q_m + (\partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp})h/2 + \int (\partial_x X + \partial_y Y)zdz + \int Zdz - E\alpha\Delta \int Tzdz/(1-\nu) \end{aligned} \quad (\text{付.10})$$

ここで、 $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$

また、引張り問題でのつりあい式は次のように示される。

$$\partial_x N_x + \partial_y N_{xy} + t_{xm} + \int Xdz = \int \rho \partial_t^2 u dz \quad (\text{付.11})$$

$$\partial_x N_{xy} + \partial_y N_y + t_{ym} + \int Ydz = \int \rho \partial_t^2 v dz \quad (\text{付.12})$$

ここで、 $N_x = \int \sigma_x dz$ 、 $N_y = \int \sigma_y dz$ 、 $N_{xy} = \int \tau_{xy} dz$ 、 $t_{xm} = t_{xl} - t_{xu}$ 、 $t_{ym} = t_{yl} - t_{yu}$

式(付.8)より求められる軸力は次のように与えられる。

$$N_x = Eh(\partial_x u_0 + \nu\partial_y v_0)/(1-\nu^2) - E\alpha \int Tdz/(1-\nu),$$

$$\begin{aligned}
N_y &= Eh(\partial_y v_0 + \nu \partial_x u_0) / (1 - \nu^2) - E\alpha \int T dz / (1 - \nu) \\
N_{xy} &= Eh(\partial_y u_0 + \partial_x v_0) / 2(1 + \nu)
\end{aligned} \tag{付.13}$$

式(付.13)を式(付.11)および(付.12)に代入すれば、引張り問題での Navier 式が得られる。

$$\begin{aligned}
& H \left[ \left\{ 2\partial_x^2 + (1 - \nu)\partial_y^2 - 2\rho h \partial_t^2 \right\} u_0 + (1 + \nu)\partial_x \partial_y v_0 \right] \\
&= -2 \int X dz + 2E\alpha \partial_x \int T dz / (1 - \nu) - 2t_{xm}, \\
& H \left[ (1 + \nu)\partial_x \partial_y u_0 + \left\{ (1 - \nu)\partial_x^2 + 2\partial_y^2 - 2\rho h \partial_t^2 \right\} v_0 \right] \\
&= -2 \int Y dz + 2E\alpha \partial_y \int T dz / (1 - \nu) - 2t_{ym}
\end{aligned} \tag{付.14}$$

ここで、 $H = Eh / (1 - \nu^2)$ ；版の伸び剛性

式(付.14)を満たす変位を次のように設定する。

$$\begin{aligned}
u_0^1 &= \left[ \left\{ (1 - \nu)\partial_x^2 + 2\partial_y^2 \right\} - 2\rho h \partial_t^2 \right] \phi_1, \\
v_0^1 &= -(1 + \nu)\partial_x \partial_y \phi_1
\end{aligned} \tag{付.15}$$

式(付.15)を式(付.14)に代入すると、式(付.14)の第2番目の式を自明で満たしていることが判る。そこで第1式を満足するように関数 $\phi_1$ を決定すれば、関数 $\phi_1$ は変位関数となる。この変位関数の基礎式は、

$$\begin{aligned}
& H \left\{ (1 - \nu)\Delta - 2\rho h \partial_t^2 \right\} \left( \Delta - \rho h \partial_t^2 \right) \phi_1 \\
&= -t_{xm} - \int X dz + E\alpha \partial_x \int T dz / (1 - \nu)
\end{aligned} \tag{付.16}$$

同様にして、変位関数 $\phi_2$ も導入でき、その基礎式は次のように示される。

$$\begin{aligned}
& H \left\{ (1 - \nu)\Delta - 2\rho h \partial_t^2 \right\} \left( \Delta - \rho h \partial_t^2 \right) \phi_2 \\
&= -t_{ym} - \int Y dz + E\alpha \partial_y \int T dz / (1 - \nu)
\end{aligned} \tag{付.17}$$

変位関数 $\phi_2$ に伴う変位は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned}
u_0^2 &= -(1 + \nu)\partial_x \partial_y \phi_2, \\
v_0^2 &= \left[ \left\{ 2\partial_x^2 + (1 - \nu)\partial_y^2 \right\} - 2\rho h \partial_t^2 \right] \phi_2
\end{aligned} \tag{付.18}$$

静的問題の場合には上式で慣性項、すなわち $\rho h \partial_t^2$ に関する項を削除することで得られる。例えばたわみと変位関数に関するそれぞれの基礎方程式は次のようにまとめられる。

・ 曲げ問題

$$D\Delta\Delta w = q_m + (\partial_x t_{xp} + \partial_y t_{yp})h / 2 + \int (\partial_x X + \partial_y Y) dz + \int Z dz - E\alpha \Delta \int T dz / (1 - \nu) \tag{付.19}$$

・引張り問題

$$\begin{aligned}
 H(1-\nu)\Delta\Delta\phi_1 &= -t_{xm} - \int Xdz + E\alpha\partial_x \int Tdz / (1-\nu) \\
 H(1-\nu)\Delta\Delta\phi_2 &= -t_{ym} - \int Ydz + E\alpha\partial_y \int Tdz / (1-\nu)
 \end{aligned}
 \tag{付.20}$$

b) 薄板理論の級数展開

従来、薄板解析では S.P.Timoshenko に代表される Fourier 級数による古典的な級数解法が用いられてきたが、近年では shell 要素を用いる有限要素法が研究・実用面でも盛んに取り入れられている。しかしこの計算法では代数式で示される形状関数に近似度を有しているため、高次の微分項である横せん断力や面内せん断力の算出には疑問が残る。そこで本論文では厳密解と位置づけられる級数解法を採用する。

簡単な概要に留めるために、静的外荷重を受ける曲げ問題を取り上げ、特解と同次解について以下に説明する。一般解は特解と同次解との和で表される。なお引張問題では同次解のみを記載する。

b-1) 特解

式(付.19)の特解のうち  $q_u$  のみが作用する場合について述べる。荷重  $q_u$  の Fourier 級数の展開は次のように得られ、他の荷重  $t_{xu}$ ,  $t_{yu}$  等についても同様である。

$$q_u = \sum_m \sum_n q'_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \tag{付.21}$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$ ,  $\beta_n = n\pi/b$ ,  $a, b$ ;  $x, y$  方向のスパン、 $q'_{mn}$  は  $q_u$  の Fourier 係数、特解によるたわみ  $w^p$  を次のような三角級数に仮定する。

$$w^p = D \sum_m \sum_n w_{mn} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \tag{付.22}$$

式(付.19)に上式を代入して級数項( $m, n$ )に関して調和解析を行えば、係数  $w_{mn}$  いわゆる Navier 解の係数が得られる。

$$w_{mn} = q'_{mn} / \gamma^4 \tag{付.23}$$

ここで、 $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$

特解にはこの他に Levy タイプと呼ばれているはりの解が用いられることもある。

b-2) 同次解

同次解は版の境界条件を満足させるために導入する。誘導過程は式(3.3.15)と同様にして求められる。この同次解を  $w^h$  とすると次のように表される。

$$w^h = D \sum_m [A_m ch \alpha_m y + B_m sh \alpha_m y + C_m \alpha_m y ch \alpha_m y + D_m \alpha_m y sh \alpha_m y] \sin \alpha_m x \quad (\text{付.24})$$

ここで,  $ch \alpha_m y = \cosh \alpha_m y$ ,  $sh \alpha_m y = \sinh \alpha_m y$ ,

$A_m \sim D_m$  は  $y$  方向端辺の境界条件から決定される積分定数

曲げモーメント  $M_x^h$ ,  $M_y^h$ ,  $M_{xy}^h$ , およびせん断力  $Q_x^h$ ,  $Q_y^h$  は以下のように得られる.

$$\begin{aligned} M_x^h &= (1-\nu) \sum_m [A_m ch \alpha_m y + B_m sh \alpha_m y + C_m \{\alpha_m y ch \alpha_m y - 2\nu sh \alpha_m y / (1-\nu)\} \\ &\quad + D_m \{\alpha_m y sh \alpha_m y - 2\nu ch \alpha_m y / (1-\nu)\}] \alpha_m^2 \sin \alpha_m x, \\ M_y^h &= (1-\nu) \sum_m [A_m ch \alpha_m y + B_m sh \alpha_m y + C_m \{\alpha_m y ch \alpha_m y + 2sh \alpha_m y / (1-\nu)\} \\ &\quad + D_m \{\alpha_m y sh \alpha_m y + 2ch \alpha_m y / (1-\nu)\}] \alpha_m^2 \sin \alpha_m x, \\ M_{xy}^h &= -(1-\nu) \sum_m [A_m sh \alpha_m y + B_m ch \alpha_m y + C_m (\alpha_m y sh \alpha_m y + ch \alpha_m y) \\ &\quad + D_m (\alpha_m y ch \alpha_m y + sh \alpha_m y)] \alpha_m^2 \cos \alpha_m x, \\ Q_x^h &= -2 \sum_m [C_m sh \alpha_m y + D_m ch \alpha_m y] \alpha_m^3 \cos \alpha_m x, \\ Q_y^h &= -2 \sum_m [C_m ch \alpha_m y + D_m sh \alpha_m y] \alpha_m^3 \sin \alpha_m x \end{aligned} \quad (\text{付.25})$$

同様にして, 引張り問題の同次解は式(付.20)より求められる.

$$\phi_1^h = H \sum_m [I_m ch \alpha_m y + J_m sh \alpha_m y + K_m \alpha_m y ch \alpha_m y + L_m \alpha_m y sh \alpha_m y] \sin \alpha_m x \quad (\text{付.26})$$

ここで,  $I_m \sim L_m$  は  $y$  方向端辺の境界条件から決定される積分定数

軸力  $N_x^h$ ,  $N_y^h$ ,  $N_{xy}^h$  は次のように示される.

$$\begin{aligned} N_x^h &= -(1+\nu) \sum_m [I_m ch \alpha_m y + J_m sh \alpha_m y + K_m \{\alpha_m y ch \alpha_m y + 2(2+\nu) sh \alpha_m y / (1+\nu)\} \\ &\quad + L_m \{\alpha_m y sh \alpha_m y + 2(2+\nu) ch \alpha_m y / (1+\nu)\}] \alpha_m^3 \sin \alpha_m x, \\ N_y^h &= (1+\nu) \sum_m [I_m ch \alpha_m y + J_m sh \alpha_m y + K_m \{\alpha_m y ch \alpha_m y + 2sh \alpha_m y / (1+\nu)\} \\ &\quad + L_m \{\alpha_m y sh \alpha_m y + 2ch \alpha_m y / (1+\nu)\}] \alpha_m^3 \sin \alpha_m x, \\ N_{xy}^h &= (1+\nu) \sum_m [I_m sh \alpha_m y + J_m ch \alpha_m y + K_m \{\alpha_m y ch \alpha_m y + (3+\nu) ch \alpha_m y / (1+\nu)\} \\ &\quad + L_m \{\alpha_m y ch \alpha_m y + (3+\nu) sh \alpha_m y / (1+\nu)\}] \alpha_m^3 \cos \alpha_m x \end{aligned} \quad (\text{付.27})$$