自発的質量生成機構の解析

博　士　論　文

自発的質量生成機構の解析

金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻

学籍番号　1123102004
氏名　小内 伸之介
主任指導教員名　青木 健一
提出年月　2017 年 1 月 6 日

目 次

第1章　導入

この世界を構成する物質は質量を持っている。そのほとんどは陽子と中性子の質量である。現代の素粒子物理学では、この質量は、ゲージ理論におけるカイラル対称性の自発的破れによって生じていることがわかっている。

陽子や中性子は、クォークと呼ばれるスピン $\frac{1}{2}$ の基本的な素粒子からできている。クォークはグルーオンを媒介にした強い相互作用を持ち、その理論は量子色力学（Quantum Chromo Dynamics: QCD）と呼ばれるゲージ理論である。ゲージ理論は、Maxwell の電磁気学の理論を量子化した量子電気力学（Quantum electrodynamics: QED）がその代表理論として知られており、局所的な対称性（ゲージ対称性）を持つ理論である。QED においては、朝永振一郎博士らによって発明されたくりこみ理論による理論計算と実験が素晴らしい精度で一致している。

他方、湯川秀樹博士に始まる中間子論は、陽子や中性子の間の極めて短距離でのみ働く強い相互作用の存在を明らかにしたが、湯川博士の理論から数十年を経て、上のようなゲージ理論に基づく強い相互作用の理論が確立した。その理論では、ミクロの世界のクォークはその質量がほとんどない。そして、その理論はカイラル対称性というクォークの対称性を持っている。グルーオンとの相互作用を通じて、このカイラル対称性が自発的に破れ、クォークは大きな質量を獲得する。この質量が、クォークからできている陽子や中性子の質量となり、我々や周囲のあらゆる物体の質量となるのである。

このカイラル対称性の自発的破れによる質量の獲得というシナリオは、南部陽一郎博士によって初めて素粒子論に導入されたアイデア [1][2] である。南部博士はこの業績により 2008 年のノーベル物理学賞を受賞されている。

本論文では、このゲージ理論の有効理論として適当な、Nambu–Jona-Lasinio 模型（NJL 模型）によるカイラル対称性の破れを、どのようにして定量的に計算するかが課題である。カイラル対称性の自発的な破れは、本質的に非摂動的な現象であり、摂動論では扱えない。私たちは、非摂動的な方法を適用し、ミクロにおいて質量のないクォークが、マクロにおいては強い相互作用による補正を受けて、自発的に質量を獲得することを示す。

第2章　質量と自発的対称性の破れ

2.1　Nambu–Jona-Lasinio模型

QCDの有効理論を考えるとき、masslessのカイラル対称性のあるモデルで、真空がカイラル対称性を力学的に破り、質量が自発的に生成される理論が適当であると考えられる。このような性質を満たすよく知られたモデルとして、Nambu–Jona-Lasinio模型がある。そのラグランジアン密度$\mathcal{L}_{\rm NJL}$は、

$$\mathcal{L}_{\rm NJL} = \bar{\psi}_j \not{\partial} \psi_j + \frac{G}{2N}\left[(\bar{\psi}_j\psi_j)^2 + (\bar{\psi}_j i\gamma_5\psi_j)^2\right] \tag{2.1.1}$$

と書き表わせ、4-fermi相互作用が強い時、カイラル対称性が自発的に破れて質量が生成される。ここで、Gは結合定数で、Nはflavor数である。添字のjの和は全ての種類のフェルミオンについての和を表す。これ以降は簡便のために、ラグランジアン密度を単にラグランジアンと書く。

はじめに、この理論がカイラル対称性を持ち、質量項が禁止されていることを説明する。ディラック場ψから二つのカイラル場$\psi_{\rm R}, \psi_{\rm L}$を逆に定義する:

$$\psi_{\rm R} = \frac{(1+\gamma_5)}{2}\psi \ , \quad \psi_{\rm L} = \frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi \ . \tag{2.1.2}$$

カイラル場は、次の性質を満たす。

$$\bar{\psi}_{\rm R}\psi_{\rm R} = 0 \ , \quad \bar{\psi}_{\rm L}\psi_{\rm L} = 0 \ . \tag{2.1.3}$$
$$\bar{\psi}_{\rm R}\gamma_5\psi_{\rm R} = 0 \ , \quad \bar{\psi}_{\rm L}\gamma_5\psi_{\rm L} = 0 \ . \tag{2.1.4}$$
$$\bar{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\psi_{\rm R} = 0 \ , \quad \bar{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\psi_{\rm L} = 0 \ . \tag{2.1.5}$$
$$\bar{\psi}_{\rm L}\gamma_5\gamma^\mu\psi_{\rm R} = 0 \ , \quad \bar{\psi}_{\rm R}\gamma_5\gamma^\mu\psi_{\rm L} = 0 \ . \tag{2.1.6}$$

したがって、ラグランジアンには以下の項

$$\bar{\psi}_{\rm R}\psi_{\rm L} \ , \quad \bar{\psi}_{\rm L}\psi_{\rm R} \tag{2.1.7}$$
$$\bar{\psi}_{\rm R}\gamma_5\psi_{\rm L} \ , \quad \bar{\psi}_{\rm L}\gamma_5\psi_{\rm R} \tag{2.1.8}$$
$$\bar{\psi}_{\rm R}\gamma^\mu\psi_{\rm R} \ , \quad \bar{\psi}_{\rm L}\gamma^\mu\psi_{\rm L} \tag{2.1.9}$$
$$\bar{\psi}_{\rm R}\gamma_5\gamma^\mu\psi_{\rm R} \ , \quad \bar{\psi}_{\rm L}\gamma_5\gamma^\mu\psi_{\rm L} \tag{2.1.10}$$

を意味のある項として含むことができる。カイラル対称性とは、これらのカイラル場に対して位相回転を行うときの変換不変性のことである。すなわち、

$$\psi_{\rm R} = \exp(i\theta_{\rm R})\psi_{\rm R} \ , \quad \psi_{\rm L} = \exp(i\theta_{\rm L})\psi_{\rm L} \ . \tag{2.1.11}$$

全く同様に二つの位相回転を行えば、それはディラック場に対する位相回転に他ならない。つまり、電荷保存に対応する対称性と見なすことができ、フェルミオン数の保存を意味する。したがって、カイラル対称性とは、二つのカイラリティを持つ粒子、L と R のそれぞれの個数が個別に保存していることを意味する。

上に示したラグランジアンにおいて、運動項は、

$$\bar{\psi}_j \partial\!\!\!/ \psi_j = \bar{\psi}_{\mathrm{R}j} \partial\!\!\!/ \psi_{\mathrm{R}j} + \bar{\psi}_{\mathrm{L}j} \partial\!\!\!/ \psi_{\mathrm{L}j} \tag{2.1.12}$$

と変形できるので、カイラル対称性を持っている。つまり、運動項というのは基本的に場の励起の移動であるが、その過程においては、R は R に、L は L に移っていくのであって、R が L になったり、その逆もないということである。

また、上のラグランジアンにはフェルミオンの質量項が入っていない。質量項は、

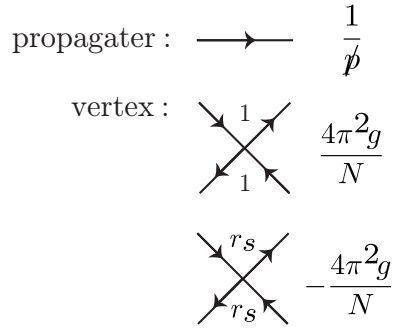
$$m\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_{\mathrm{L}}\psi_{\mathrm{R}} + \bar{\psi}_{\mathrm{R}}\psi_{\mathrm{L}} \tag{2.1.13}$$

と変形される。すなわち、L を R に、R を L に変える相互作用と見ることもできる。したがって、もし質量項を加えてしまうと、そのためにカイラル対称性は壊れてしまう。一方で、カイラル対称性を要求すると、このような質量項をラグランジアンに入れることはできない。

最後に、ラグランジアン $\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}}$ に含まれる N について説明する。種類の数 N をパラメタとし、相互作用結合定数を N によってスケールしておくのは、次の節で説明する $1/N$ 展開を定義するためである。この模型について通常行うような摂動論を構成し、結合定数の級数展開によって解析すると、自発的な質量生成は起こりえない。しかし、$1/N$ 展開では初項でさえ、結合定数による摂動の意味において、無限次数のものが含まれており、無限個のダイアグラムの和と定義できる。それにより、これから見るように非摂動論的な質量生成が可能となるのである。

2.2　摂動論と $\frac{1}{N}$ 展開

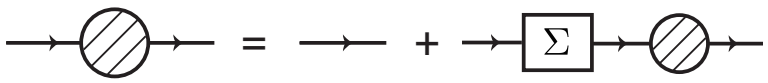
ここからはまず、この理論の摂動論を定義し、通常の相互作用結合定数による級数展開では、質量生成が起こらないことを見る。運動項からプロパゲーターを定義し、4 次の相互作用項から vertex を定義するとファインマン・ルールは次のように定義される。



フェルミオンのプロパゲーターを S とし、その tree 近似を S_0 と書く。tree 近似は上のファインマン・ルールのプロパゲーターに対応する。さらに、one-particle irreducible (1PI) な 2 点関数を Σ とすると、次の関係式が成立する。

$$S = S_0 + S_0 \Sigma S \ . \tag{2.2.1}$$

これをファインマン・ダイアグラムのように描けば、次のようになる。



この Σ は、自己エネルギー（self energy）と呼ばれている物理量である。上の式の両辺に S^{-1} と S_0^{-1} それぞれ右と左からかける。すると

$$S_0^{-1} = S^{-1} + \Sigma \tag{2.2.2}$$

が得られ、

$$S^{-1} = S_0^{-1} - \Sigma = \not{p} - \Sigma \tag{2.2.3}$$

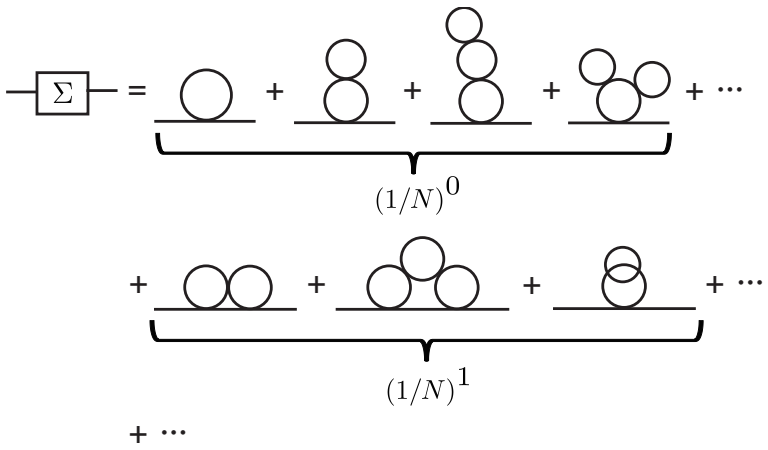
と変形される。

つまり、フェルミオンの質量とは、プロパゲーターの極を与えるエネルギー運動量に対応した質量に他ならない。もし、これから扱う対象のように Σ が運動量に依存しない定数で、行列としても 1 に比例するならば、

$$p^2 = \Sigma^2 \tag{2.2.4}$$

がプロパゲーターの極を与えるので、フェルミオンの質量は Σ そのもので与えられることになる。

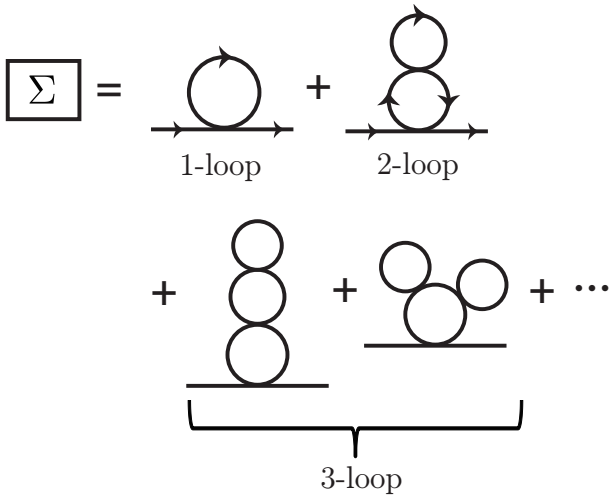
フェルミオンの質量を知るために、自己エネルギーを摂動論で計算する。ループ展開を行い、ループ数の低いものから並べると、次のように展開される。



ここでは、これから説明する $1/N$ の次数毎にループ数で並べている。相互作用の結合定数は先ほど見たように $1/N$ に比例しているので、相互作用を 1 回する毎に $1/N$ の因

子が現れる。また、フェルミオンがループになっている部分には、種類の和が寄与するために、因子 N が現れる。したがって、$1/N$ のある次数に限って考えたとしても、相互作用の結合定数の数としては無限個を考えることになる。

以後、この $1/N$ 展開の最低次の項だけを考える。それは、自己エネルギーに対して $(1/N)^0$ のダイアグラムであり、$N \to \infty$ でも残る項である。このような項を $1/N$ leading diagram と呼ぶ。それは以下のようなタイプのダイアグラムから構成される。



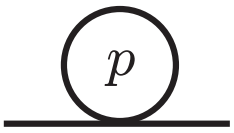
さて、このように摂動論によって計算される Σ により、果たして質量は生成されるだろうか。答えは否である。それを以下で説明する。

まず、Σ はフェルミオンが 1 つ入り、1 つ出て行くダイアグラムと見れる。この理論では 4 つのフェルミオンがひとつの vertex を構成しているが、理論がカイラル対称な相互作用によって作られているので、その vertex においてはカイラリティを持つ粒子、L と R のそれぞれの個数は保存している。そのため、もし入ってきたのが L ならば、出て行くのも必ず L となる。このような相互作用をどれほど使おうと、事情は変わらない。したがって、Σ の中には、L を R に、R を L に変えるような質量項は含まれないことになる。

カイラル対称性によって禁止されない質量項以外の項に $\not{p}$ があり、運動項の補正となりうる。しかし、今考えている $1/N$ leading のダイアグラムにおいては、フェルミオンループの部分は外線に流し込まれる運動量の影響を全く受けない。したがって、Σ は運動量によらない定数となるので、$\not{p}$ のような項は作れない。

質量項も作れず、外線の運動量にも頼れないということから、ダイアグラムの各項は全て 0 である。即ち、摂動展開をしても、その全ての項が自己エネルギーの補正を与えない。つまり、摂動論において、質量は生成されないということがわかった。

このようなタイプのダイアグラムを計算するときに、どの部分で 0 になるのかをファインマン・ルールにしたがって具体的に見てみる。どのダイアグラムにも、枝の先のようなループの先端が少なくとも一つは存在する。その一番先のループは、フェルミオンのプロパゲーターがひとつあってループしており、相互作用による vertex 一つだけある。ファインマン・ダイアグラムとしては、次の要素に対応する。



この部分は主に、

$$I = \mathrm{Tr} \int d^4p \frac{1}{\not{p}} \tag{2.2.5}$$

という寄与を含む。ここで、Tr はスピノールの index についての跡の意味である。相互作用 vertex の部分からの運動量が流れ込まないことが重要である。したがって、ループ運動量を p として、ループ積分は上式のように p だけの単純な積分となる。これを計算すれば、4 次元立体角積分を Ω_4 として、

$$I = \mathrm{Tr}\Omega_4 \int p^3 dp \frac{\not{p}}{p^2} \tag{2.2.6}$$

となるが、

$$\mathrm{Tr}\gamma^\mu = 0 \tag{2.2.7}$$

であるから必ず 0 となる。どのダイアグラムも先端に I をひとつは含むから、ダイアグラムの寄与は 0 となってしまう。

ここで一つ微妙に取り扱うべき事柄がある。摂動展開、つまり結合定数の次数による級数であれば、確かに有限個のダイアグラムが級数の各項を与えるので、0 の有限和は 0 であるから、級数としても 0 にならざるを得ない。しかし、$1/N$ 展開の leading という立場で見ると、無限個のダイアグラムが存在しているので、0 を無限個足しても本当に 0 なのかという問題が思い浮かぶ。

実際、NJL 模型においてよく行われる解析方法では、何らかの方法で、$1/N$ leading の寄与が満たすべき方程式を立て、その解を探索するという手法をとる。例えば、Schwinger-Dyson 方程式により非自明解を探すという手法である。もしくは、経路積分に補助場と呼ばれる場を導入し、フェルミオン場を経路積分することで、補助場の有効ポテンシャルを評価し、その最小値を探索する手法もよく使われている。これらの手法では、相互作用の結合定数がある値を越えると確かに非自明な解が現れ、有限の質量が生成されると結論される。そして実際に、そのような解を摂動論的な立場で理解しようとすると、無限個のダイアグラムの和で表現されていることもわかる。しかし、解が複数個存在する場合には、摂動論的な無限個のダイアグラムの和が一意的に定まらないのではないかという疑問も生じる。

更に、その解は必要条件を満たしているにすぎず、その解が物理的に実現すると言うには、有効ポテンシャルを評価するなどの解析が必要となる。つまり十分条件を満たすことを示さねばならない。

次章では、それらの疑問に答えるために、私たちは裸の質量を導入した摂動論を構成する。そして、それによって無限個のダイアグラムの和を一意的に計算する手法を逐次変換法によって与える。

第3章　逐次変換法・0密度 Nambu–Jona-Lasinio模型

前章では、NJL model の基本的な性質を述べた。カイラル対称性を要求すると、ラグランジアンに質量項を入れることは禁止され、摂動論では質量が生成されないことを示した。

一方で、自己無撞着方程式や補助場の方法などが NJL model の主な解析方法としてある。これらの方法から、相互作用の結合定数がある値を超えると非自明な解が現れることがわかる。その求まる非自明な解を摂動論として見直すと、無限個のバブル・ダイアグラムで表現される。しかし、前章で見たように、摂動論では各ダイアグラムはそれぞれが 0 となるはずであり、無限個のダイアグラムの和がどのように有限の質量を生成するのか明白ではない。また、これらの方法では必要条件しか与えられず、一般的に非物理的な解を含む中から物理的に正しい解を知るには追加の条件が必要となる。そこで、これらの疑問に答えるために、新たな論理的方法を提案する。

3.1　節長の定義

提案する私たちの方法は、摂動論によって直接的にダイアグラムの和を計算することを目指すものである。

まず始めに、先ほど示した各ダイアグラムが 0 になるという摂動論の問題を回避する。そのために、いわゆる裸の質量

$$m_0 = \bar{\psi}_j \psi_j \tag{3.1.1}$$

をラグランジアン $\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}}$ に加えると、質量項を持つ新たなラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\mathrm{NJL}} - m_0 \bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi + \frac{G}{2N}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i\gamma_5 \psi)^2\right] \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

となる。これにより、プロパゲーターは m_0 だけシフトするので、前章で示した関係式は次のように修正される。

$$\begin{aligned} iS(p) = \frac{i}{p\!\!\!/ - m_0} + \frac{i}{p\!\!\!/ - m_0}\left\{-i\Sigma(p)\frac{i}{p\!\!\!/ - m_0}\right\} \\ + \frac{i}{p\!\!\!/ - m_0}\left\{-i\Sigma(p)\frac{i}{p\!\!\!/ - m_0}\right\}\left\{-i\Sigma(p)\frac{i}{p\!\!\!/ - m_0}\right\} + \dots \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

自己エネルギー Σ は以前と同様の定義である。$S_0(p) = \frac{1}{\not{p} - m_0}$ を使って、上式を整理すると

$$iS(p) = iS_0(p) + iS_0(p)(-i\Sigma(p))iS(p) \tag{3.1.4}$$

となる。両辺に左から S_0^{-1}、右から S^{-1} をかけると、

$$\begin{aligned} S_0^{-1}SS^{-1} &= S_0^{-1}S_0S^{-1} + S_0^{-1}S_0\Sigma SS^{-1} && (3.1.5)\\ \Leftrightarrow \quad S_0^{-1} &= S^{-1} + \Sigma && (3.1.6)\\ \Leftrightarrow \quad S^{-1} &= S_0^{-1} - \Sigma && (3.1.7) \end{aligned}$$

となるから、フェルミオンのプロパゲーターは次のように表される。

$$S^{-1}(p) = \not{p} - m_0 - \Sigma(p)\ . \tag{3.1.8}$$

この裸の質量が入ったプロパゲーターを用いて全ての計算を実行し、物理量を裸の質量の関数として求め、最後に裸の質量を 0 にする極限を考えるという方法を採る。

カイラル対称性は裸の質量項によって破れいている。フェルミオンのプロパゲーターは裸の質量項によって

$$(\not{p} - m_0)^{-1} \tag{3.1.9}$$

と変更され、プロパゲーターの中で R と L を移り変わることができる。つまり、前章で見た各ダイアグラムは 0 ではなくなり、有限の質量生成を与える。前章で各ダイアグラムが 0 になるのは、次の部分 I に因る。

導入した裸の質量によって、このループ積分は

$$I = \mathrm{Tr}\int d^4p \frac{1}{\not{p} - m_0} \tag{3.1.10}$$

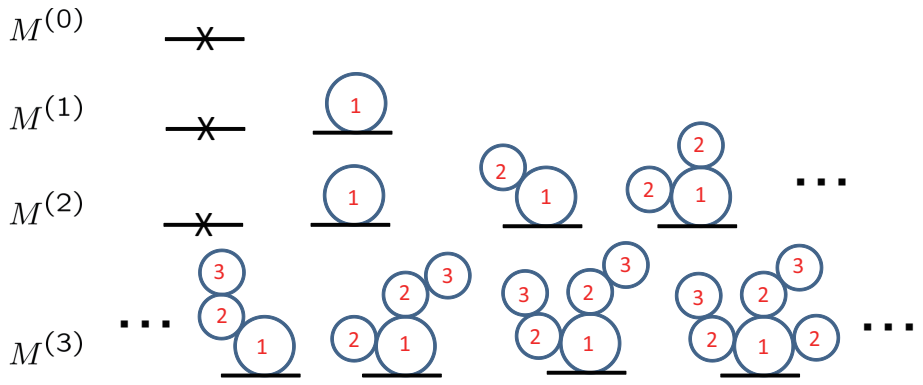
と修正され、

$$I = \mathrm{Tr}\Omega_4 \int p^3dp \frac{\not{p} + m_0}{p^2 - m_0^2} = 4\Omega_4 m_0 \int p^3dp \frac{1}{p^2 - m_0^2} \tag{3.1.11}$$

となり、裸の質量に比例する項が残る。$m_0 \to 0$ の極限ではこの項は 0 になるから、各項が 0 になるという事実はこの極限においてもそのままである。

問題となるのは、$1/N$ leading の Σ をどのようにして計算するかである。相互作用の結合定数に対する級数の形では、無限個のダイアグラムの和であるため各項の計算は難しく、それらを足す方法が必要となる。

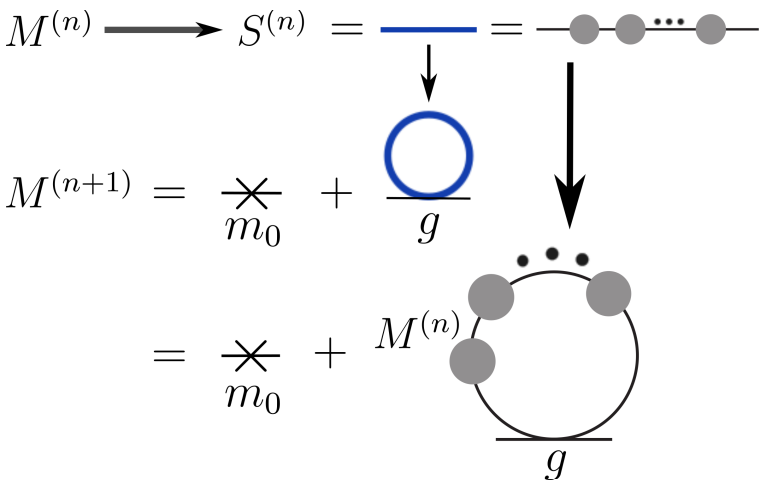
そこで、新たにダイアグラムを分類する方法を提案する。始めに、各ダイアグラムに対して節長という指標を定義する。節長とは、ダイアグラムが含む「足」の最大の長さと定める。足の長さとは、外線から始めて、連なるループの先端に至るまでに経由するフェルミオンのループ数のことである。0 から 3 までの節長に対応するダイアグラムを具体的に描いたのが次の図である。



ここで、節長が n までの全てのダイアグラムを考慮した質量項を $M^{(n)}$ と書く。私たちが求めたい質量は $M^{(\infty)}$ である。

3.2　逐次変換法

前節で定義した $M^{(n)}$ は、$n = 0$ から逐次的に求めていくことができる。初項 $M^{(0)}$ は裸の質量 m_0 そのものである。逐次的な変換として見るために、$M^{(n)}$ を質量項とするプロパゲーターを $S^{(n)}$ とする。この $S^{(n)}$ でループを作ると、作ったループによって節長が 1 伸びるので、$M^{(n)}$（の m_0 以外の部分）を与える。この操作を逐次的にに繰り返せば、n が一つずつ大きいものを作ることができる。この一連の変換をファインマン・ダイアグラムで表すと次のようになる。



この n から $n+1$ へのステップは、$M^{(n+1)}$ を $M^{(n)}$ で表す逐次変換式で表現できる。

$$M^{(n+1)} = F\left[M^{(n)}\right] \ . \tag{3.2.1}$$

変換関数 F を求める。裸の質量以外の部分は、プロパゲーター $S^{(n)}$ でのループ積分の計算に対応するので、質量 M についてプロパゲーターのループ計算をする。

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4p}{i(2\pi)^4}\frac{1}{M^2-p^2} &= \int \frac{d^4p_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\frac{1}{p_{\mathrm{E}}^2+M^2} \\ &= \frac{\Omega_4}{(2\pi)^4}\int_0^{\Lambda} dp \frac{p^3}{p^2+M^2} \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\Lambda^2} dp^2 \frac{p^2}{p^2+m^2}\ .\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

ここで、第一式において 4 次元積分をユークリッド化して実行した。この模型は、2 次発散を含むため、運動量を切断しないと不定性なく計算することはできない。そのため、ユークリッド化した運動量の長さが Λ となるところを積分の上限としてカットオフした。p^2 を u と変数変換し積分を実行すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\Lambda^2} dp^2 \frac{p^2}{p^2+m^2} &= \int_0^{\Lambda^2} du\left(1-\frac{m^2}{u+m^2}\right) \\ &= \left[u-m^2\ln(u+m^2)\right]_0^{\Lambda^2} \\ &= \Lambda^2 - M^2\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)\ .\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

よって、変換関数は

$$F(M) = m_0 + \frac{GM}{4\pi^2}\left(\Lambda^2 - M^2\ln\left(1+\frac{\Lambda^2}{M^2}\right)\right) \tag{3.2.4}$$

となるが、notation を簡素にするために、質量次元の全ての物理量をカットオフ Λ の単位として無次元量として表現する。即ち、

$$\hat{M} = \frac{M}{\Lambda},\quad \hat{m_0} = \frac{m_0}{\Lambda},\quad \hat{g} = \frac{\Lambda^2 G}{4\pi^2} \tag{3.2.5}$$

と書き直した上で、ハット記号を省略する。そうすると、変換関数は最終的に次の式で与えられる。

$$F(M) = m_0 + gM\left(1 - M^2\log\left(1+M^{-2}\right)\right)\ . \tag{3.2.6}$$

3.3　変換関数の解析

前節で求めた逐次変換式によって、求めたい質量 $M^{(\infty)}$ をどのように計算するかを考える。暫くグラフを用いながら逐次変換を表現していく。

まず、相互作用定数が十分に小さい場合を見てみる。ここでは例として、$g = 0.7$ の場合の変換関数 $F(x)$ を図 3.1 に示す。裸の質量 m_0 は負にとっても問題ないが、話を簡潔にするために、符号は正と固定する。

相互作用の結合定数が十分小さい場合、$y = F(x)$ の交点における微分係数が 1 よりも小さいことにより、$y = F(x)$ と直線 $y = x$ は原点近くで一度だけ交わる。交点の x 座標は m_0 の効果のために、正の領域にある。

逐次変換による質量変化がどのように起こるかをより詳しく調べるために、図 3.2 に交点近傍の領域を拡大した。逐次変換をグラフ上で行う方法を説明する。逐次変換は、出発点を x 軸上にとり、上に伸ばして関数 $F(x)$ とぶつかる点を求め、そこから横に伸ばして、直線 $y = x$ との交点を求める。この交点の x 座標が、変換された結果である。したがって、逐次変換を繰り返すには、このステップを繰り返せばよい。図 3.2 に、$M^{(0)}$ から始まる逐次変換を具体的に描いた。

出発点 $M^{(0)} = m_0$ は、簡単な考察により、交点の左側に存在する。つまり、交点の x 座標は m_0 よりも大きい。逐次変換を繰り返すと、グラフから明らかのように、数列は交点に吸い込まれて行く。最終的に、$M^{(\infty)}$ は交点における x 座標で与えられることになる。

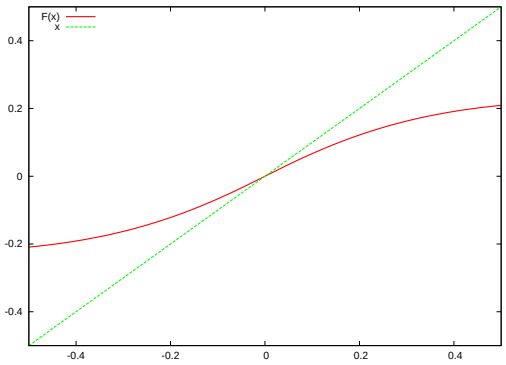


図 3.1: 変換関数 $F(x)$: g=0.7

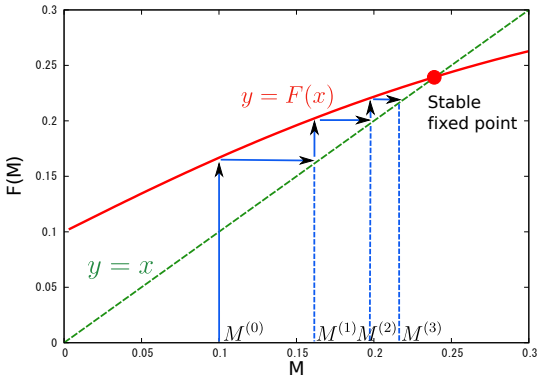


図 3.2: 逐次変換の動き: g=0.7

次に、相互作用の結合定数が強い場合を考える。ここでは $g = 1.5$ として、関数 $y = F(x)$（実線）と $y = x$（破線）を図 3.3 に描いた。この場合には、変換関数 $y = F(x)$ と $y = x$ は、先ほどの場合と同様に原点近傍で交わることに加え、正の領域と負の領域の両方で交わっている。また、原点近傍の交点における $y = F(x)$ の微分係数は 1 より大きくなっているのが特徴である。

逐次変換を調べるために、正の領域を拡大したのが図 3.4 である。原点近傍の交点は負の領域にあり、逐次変換の出発点は裸の質量であり、正の領域にある。また、この出発点は右端の交点よりは左側にある。したがって、出発点は原点近傍の交点の右側にあり、その出発点において、変換関数 $y = F(x)$ は $y = x$ より上にある。逐次変換を繰り返すと右側にずれていき、正の領域にある右端の交点に吸い込まれていくことになる。この動き自身は、相互作用の結合定数が小さい場合と同じである。つまり、$M^{(\infty)}$ の値は、右端の正の領域にある交点から与えられることになる。

3.4　変換関数の固定点構造

変換関数 F による変換は、形式的な意味において、離散的なくりこみ変換とみることができる。くりこみ変換の性質として重要なのは、固定点の構造である。固定点というのは、変換によって動かない点のことである。したがって、固定点 x^* は次の方程

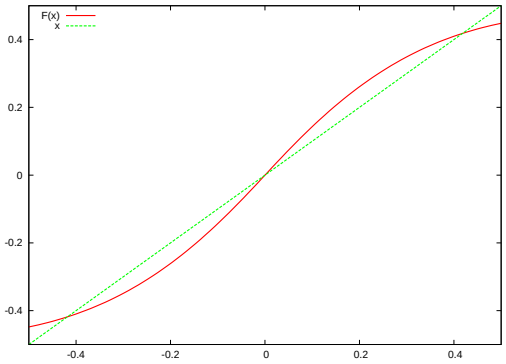


図 3.3: 変換関数 $F(x)$: g=1.5

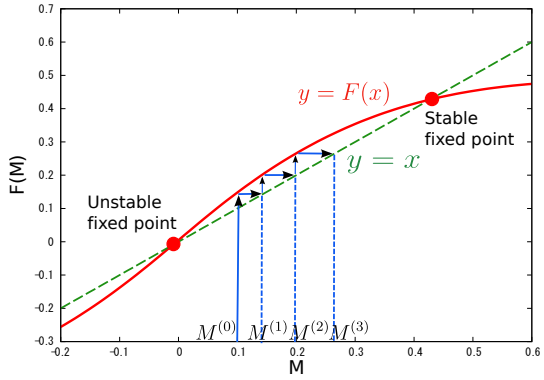


図 3.4: 逐次変換の動き: g=1.5

式を満たす。

$$x^* = F(x^*) \ . \tag{3.4.1}$$

固定点には 2 種類ある。つまり、固定点近傍における変換が、固定点に近づくか、固定点から遠ざかるかである。変換によって近づく固定点を安定固定点、あるいは、エネルギースケールの概念を準用して赤外固定点と呼ぶ。逆に、変換によって遠ざかる固定点を不安定固定点、あるいは、紫外固定点と呼ぶ。くりこみ変換を繰り返して行くと、一般には、赤外固定点と呼ばれる固定点に到達する。不安定固定点の直上にいる場合は、そのままであるが、それは更に高い対称性等の理由がないと一般には実現できない。

今の節長による逐次変換の場合、固定点の数は相互作用の結合定数によって変化する。結合定数が十分に小さい場合には、固定点は原点近傍の 1 個だけであって、それは不安定固定点になっている。結合定数がある値より大きくなると、固定点の数は 3 つとなり、真ん中のものが不安定固定点、両側の正と負の領域にあるものが、安定固定点となる。これを図 3.5 に示す。

ここでは、固定点の場所を横軸に、結合定数を縦軸にとって描いた。線が複数あるのは、裸の質量を変えたのものである。裸の質量が大きい程、線は原点に対して外側のものになっている。外側から、$m_0 = 0.001, 0.0006, 0.0003, 0$ の 4 つの場合が描かれている。相互作用の結合定数が小さい間は、固定点は正の領域にある一つだけであり、それは安定固定点である。結合定数がある値、臨界結合定数を超えると、負の領域で、二つの固定点は対発生する。それは、原点に近い方が不安定固定点であり、もう一つが安定固定点である。つまり、臨界結合定数より大きい結合定数の場合、固定点は 3 つあり、真ん中が不安定固定点、両側が安定固定点である。

この固定点の数が 1 つから 3 つに増えるところが、臨界結合定数に他ならないので、臨界結合定数は裸の質量を増やしていくと、だんだんと増加することがわかる。このため、相互作用の結合定数を 1 より大きいところで固定して考え、裸の質量を増やしていくと、ある臨界裸の質量があって、それ以上になると、固定点の数が 3 つから 1 つになってしまうと見ることができる。この点については、後に議論する。

ただし、ちょうど臨界のところでは、固定点は 2 つであり、負の領域にある固定点は、グラフとしては $y = F(x)$ と $y = x$ がその点で接する形となっている。このような

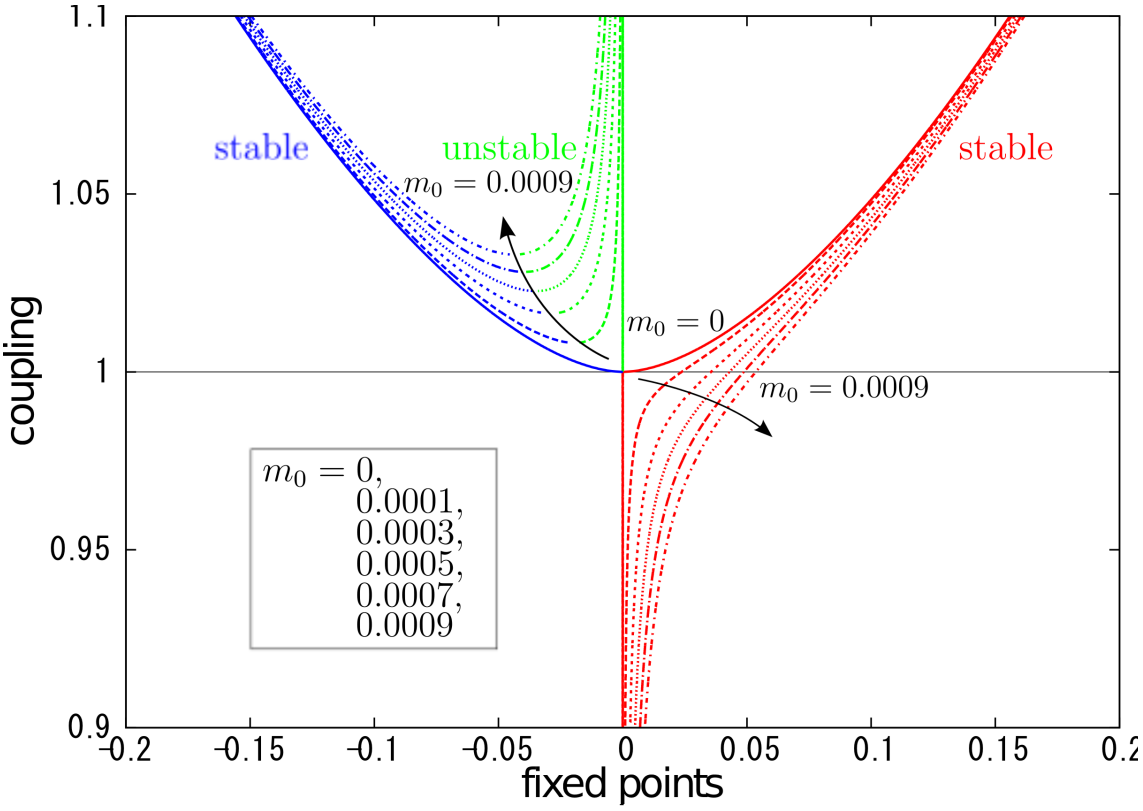


図 3.5: 変換関数の固定点構造の結合定数と裸の質量による変化

固定点では、左からは安定固定点、右からは不安定固定点となっていて、動きが方向によっている。臨界を少し越えると、まさに、左側に安定固定点、右側に不安定固定点と分離されるわけだから、ちょうど臨界では、この二つの固定点が重なって存在しているような状況になっている。裸の質量を小さくしていくと、固定点を表す 2 本の曲線は、全体として原点に寄ってくる。裸の質量が 0 となる極限では、原点にいつでも存在する固定点がある。臨界結合定数はちょうど 1 となり、結合定数が 1 以下ではこの原点の固定点のみで、それは安定固定点である。結合定数が 1 を越えると、原点の固定点が不安定固定点に変化し、その代わりに安定固定点が正と負の領域にそれぞれひとつずつ発生する。

逐次変換で求まる節長が無限大の時の値は、結合定数が臨界結合定数より小さい場合には、存在する一つの固定点で与えられる。その固定点の値は、裸の質量を 0 にすると 0 となる。結合定数が臨界結合定数より大きい場合には、固定点は 3 つあるが、出発点である裸の質量は真ん中と右端の二つの固定点の間にある。したがって、節長無限大の時の値は、右端の固定点で与えられる。これは、正の裸の質量に対しては、正の安定固定点が選ばれると言ってもよい。

臨界結合定数を超えた場合、右端の固定点の値自身は、裸の質量を 0 としてもほとんど変わらない。ましてや 0 にはならない。したがって、節長が無限大の質量の値も、裸の質量が 0 の極限でほとんど変わらず、有限に保たれる、とできる。

節長が無限大の質量の値は固定点で与えられる。逆に言うと、この変換をくりかえせば必ず対応する安定固定点に行くので、出発点の情報は失われていることになる。も

ちろん、安定固定点は複数あるので、どのどちらに行くかは、出発点がどちらの支配領域にあるかで決まっている。しかし、出発点の値そのものの詳細にはよらない。このような性質は、くりこみ変換においては、ミクロの情報を失うという性質に対応しており一般的なことである。

自発的に生成される質量の大きさが、その出発点に依存しないといっても、それには大きな物理的意味はないだろう。各 $M^{(n)}$ が、正確な意味で、節長が n までのダイアグラムの和になっているという物理的性質は、あくまで、その出発点を正しく $M^{(0)} = m_0$ とした場合にのみ成立する。それ以外の出発点では、最後の結果は同じところになるが、途中の値には、ダイアグラムの意味でのはっきりした意味をつけることはできない。

3.5　節長拡大に伴う質量生成

前節までで、節長による逐次変換によって、質量の生成を具体的に計算することができた。その結果は、変換関数 F の固定点構造だけで決まっており、それが臨界結合定数を決定していた。ここでは、もう少し詳細に立ち入って、節長が伸びるにしたがって、質量が生成されていく様子を検証しよう。

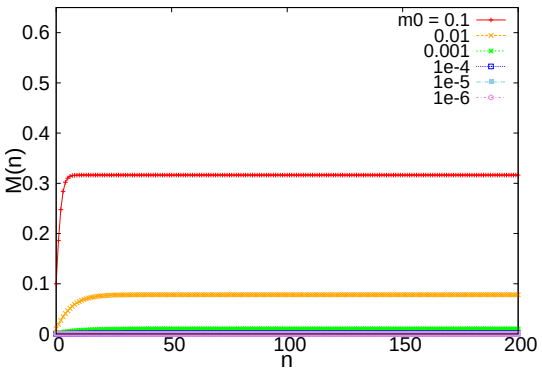


図 3.6: 節長拡大に伴う質量生成: g=0.7

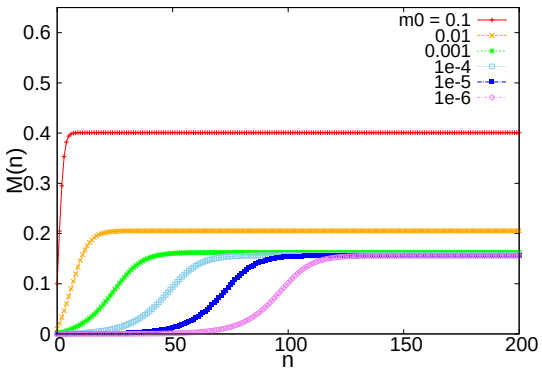


図 3.7: 節長拡大に伴う質量生成: g=1.5

まず、相互作用の結合定数が臨界結合定数よりも小さい場合を図 3.6 にプロットする。質量を与えるダイアグラムの節長を伸ばしていくと、かなり急激に質量は立ち上がり、早い段階で一定になる。しかし、裸の質量を減らして行くと、最終的に一定になる質量が、裸の質量程度の質量に減少してしまう。

相互作用の結合定数が臨界結合定数を超える場合を、図 3.7 にプロットした。臨界結合定数に満たない場合と対称的に、節長が伸びても最初の方ではあまり質量は増加しない。ある特定の節長の領域で、質量は急速に立ち上がり、それ以降、一定の値に近づく。

裸の質量を減らして行くと、質量が立ち上がる特定の節長がどんどん長くなる。しかし、十分に長い節長の時に得られる一定の質量の値は少し下がるだけで、ほぼ同じである。

この状況は、ある意味で非常に不思議である。節長という指標によるファインマン・ダイアグラムの分類で、質量の数列を定義してきた。節長を伸ばして行くと、質量が一定の値に収束していく。発散も振動もしない。

裸の質量と節長の関係は、それらの極限の順序によって得られる質量が全く異なることを意味している。すなわち、最大の節長を適当なところに固定しておき、裸の質量を 0 に近づけると、最初はまず小さくなり、一定のところで安定しているように見えるが、最終的には、0 に向かって急速に落ち込む。逆に、裸の質量を固定して、節長を伸ばして行くと、裸の質量に応じて質量が立ち上がる特徴的な節長は長くなるが、それを越えて伸ばせば一定の値に収束する。

これらの振る舞いは、単にファインマン・ダイアグラムの分類によって定義された質量の数列というだけの知識からはとても理解できない。しかし、逐次変換をくりこみ群による変換と同じように捉えて固定点構造から理解してしまえば、全ての性質は非常に明らかなことである。

すなわち、節長を伸ばすことによって、不安定固定点である原点近傍交点より正側にある初期点から、正の領域にある安定固定点に向かって質量のフローは進んでいく。質量がある節長によって急速に立ち上がるのは、ちょうど、二つの固定点の間の中間的な場所を、フローが通り抜ける「タイミング」に対応している。この発展期がどの節長のあたりで現れるかは、出発点がどれくらい原点近傍の不安定固定点の近くにあるかによっている。つまり、裸の質量を小さくすればするほど、原点近傍の不安定固定点から離れるのに「時間」がかかるのである。しかし、どんなに時間はかかっても、結局は、不安定固定点からは離れることができて、質量の成長期に入る。この意味で、裸の質量が異なるフローはほぼ正確に節長をずらせば重なるはずである。これは、図 3.7 から見て取れることである。ほぼ正確、と限定する意味は、裸の質量が異なると、変換関数 F が異なるので、全く同じ変換に対して初期値が異なるだけのフローというわけではないからである。

いかに大きな節長をとっても、それが有限である限り、裸の質量を 0 にすれば、その質量も 0 になってしまう。逆に、どんなに裸の質量が小さくても、それが 0 でない限り、十分に長い節長までくりこみを進めれば、必ず質量は生成され、安定固定点の値に近づく。節長と裸の質量という二つのパラメタの極限順序によって得られる質量の結果は異なるが、本来、節長に対する制限はないのであって、この意味で、節長を無限大にする極限が先にとられるべきなのである。

つまり、相互作用の結合定数が臨界結合定数より大きい場合、対称性は自発的に破れ、質量は自発的に生成されると結論するべきなのである。

もちろん、臨界結合定数の存在、自発的対称性の破れ、質量の自発的生成などの定量的結果は、これまでの他の解析方法による結果と同じである。しかし、ここで示した方法は、節長という指標を持ち込むことによって、摂動論のダイアグラムの無限和への道を定義し、一意的に質量を計算する方法を与えている。しかも、節長による逐次変換をくりこみ変換に擬すことによって、固定点構造の解析から、節長を伸ばすことによる質量生成の振る舞いを、裸の質量と節長の関係で完全に捉えることに成功したものである。これは、ともすれば、ややあいまいなところを残した議論にたよりがちな、自発的対称性の破れに伴う質量の自発的生成のこれまでの説明を、極めて明快

に与えたものと言えよう。

図 3.8 の真ん中の図は、ちょうど臨界点であり、原点での接線の傾きは無限大になる。m_0 に対する M の傾きは、カイラル感受率を表している。したがって、その感受率は逐次変換を経るごとに大きくなり、$n \to \infty$ で発散する。これは 2 次転移の特徴である。さらに、一番下の図は、超臨界の様子を示しており、裸の質量のゼロ極限において、物理的な質量も消滅する。これは、有限の節長 n において起こるので、自発的な質量生成は起きないことがわかる。

3.6　Legendre 有効ポテンシャル

$$M^{(n+1)}(m_0) = m_0 + gM^{(n)}\left[1 - \left(M^{(n)}\right)^2 \ln\left(1 + \left(M^{(n)}\right)^{-2}\right)\right] \tag{3.6.1}$$

裸の質量 m_0 が入った生成汎関数は、ユークリッド化された NJL 模型のラグランジアン $\mathcal{L}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{NJL}}$ を使って

$$Z(m_0) = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[-\int d^4x_{\mathrm{E}}(\mathcal{L}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{NJL}} - m_0\bar{\psi}\psi)\right] \tag{3.6.2}$$

であり、その対数をとったものを自由エネルギーと定義する:

$$W(m_0) \equiv \ln Z(m_0). \tag{3.6.3}$$

自由エネルギー $W(m_0)$ は、connected diagram の生成汎関数である。これを m_0 で微分すると、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(m_0)}{\partial m_0} &= \frac{\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\{\int d^4x_{\mathrm{E}}\bar{\psi}\psi\}\exp[-\int d^4x_{\mathrm{E}}(\mathcal{L}^{\mathrm{E}}_{\mathrm{NJL}} - m_0\bar{\psi}\psi)]}{Z(m_0)} \\
&= \left\langle \int d^4x_{\mathrm{E}}\bar{\psi}(x_{\mathrm{E}})\psi(x_{\mathrm{E}}) \right\rangle_{m_0} = \int d^4x_{\mathrm{E}} \left\langle \bar{\psi}(0)\psi(0) \right\rangle_{m_0} \\
&= \Omega \left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle_{m_0} \equiv \Phi
\end{aligned} \tag{3.6.4}$$

となる。ここで、$\langle\cdots\rangle_{m_0}$ は真空期待値を表し、真空の並進対称性より、$\left\langle \bar{\psi}\psi \right\rangle_{m_0}$ の x_{E} 依存性はなくなった。ここで、自由エネルギー $W(m_0)$ を Legendre 変換したものを Legendre 有効作用 $\Gamma(\Phi)$ と定義する。

$$\Gamma(\Phi) \equiv -W(m_0) + m_0\Phi\ . \tag{3.6.5}$$

これを、Φ で微分すると、

$$\frac{\partial\Gamma(\Phi)}{\partial\Phi} = -\frac{\partial m_0}{\partial\Phi}\frac{\partial W(m_0)}{\partial m_0} + \frac{\partial m_0}{\partial\Phi}\Phi + m_0 = m_0 \tag{3.6.6}$$

となる。

次に、Legendre 有効ポテンシャル V_L を

$$V_L(\Phi) \equiv \frac{\Gamma(\Phi)}{N\Omega} \tag{3.6.7}$$

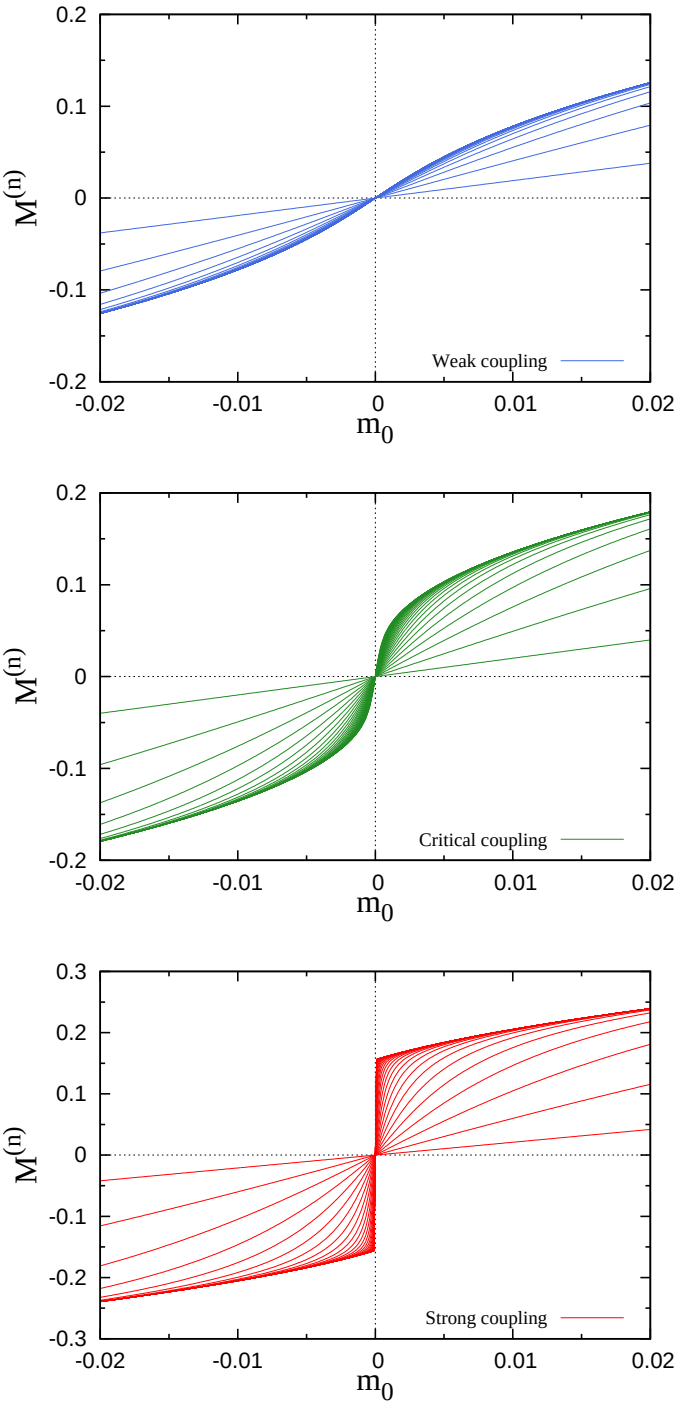


図 3.8: 結合定数 $g = 0.9, 1.0, 1.1$ における m_0 と $M^{(n)}$ の関係

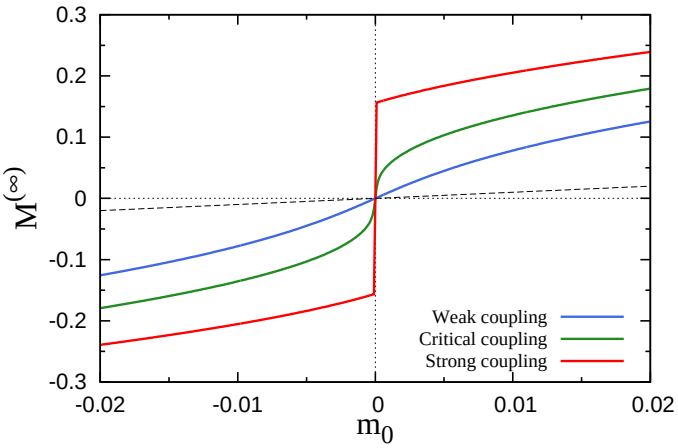


図 3.9: 結合定数 $g = 0.9, 1.0, 1.1$ における m_0 と $M^{(\infty)}$ の関係

と定義し、さらに自由エネルギー密度 $w(m_0)$ を

$$w(m_0) \equiv \frac{W(m_0)}{N\Omega} \tag{3.6.8}$$

と定義する。この二つは、$\Gamma(\Phi)$ と $W(m_0)$ と同様に、

$$V_L(\phi) \equiv -w(m_0) + m_0\phi \qquad (\frac{\Phi}{N\Omega} \equiv \phi) \tag{3.6.9}$$

という Legendre 変換で結ばれている。また、Legendre 有効ポテンシャル V_L を ϕ で微分すると、

$$\frac{\partial V_L(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial \Gamma}{\partial \Phi} = m_0 \tag{3.6.10}$$

となる。

次に、$\phi(M)$ を求める。$\Phi/\Omega = \left\langle \bar{\psi}_a \psi_a \right\rangle_{m_0} = -\left\langle \psi_a \bar{\psi} \right\rangle_{m_0}$ を示すダイアグラムは、large N 極限での 1PI ダイアグラムの外線による symmetry factor 2 と vertex と-1 がなくなったものなので、

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi}{\Omega} &= \frac{1}{2} \times \frac{2N}{iG} \times -1 \times (-i\Sigma) \\
&= \frac{N}{G} \times \Sigma \\
&= \frac{N}{G} \times M \left(\frac{G\Lambda^2}{4\pi^2}\right) \left[1 - \left(\frac{M}{\Lambda}\right)^2 \ln\left\{1 + \left(\frac{M}{\Lambda}\right)^{-2}\right\}\right] \qquad (3.6.11) \\
&= \frac{N\Lambda^3}{4\pi^2} \left(\frac{M}{\Lambda}\right) \left[1 - \left(\frac{M}{\Lambda}\right)^2 \ln\left\{1 + \left(\frac{M}{\Lambda}\right)^{-2}\right\}\right] \qquad (3.6.12)
\end{aligned}$$

これにより、無次元化された $\tilde{\phi}$ は、

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi} &\equiv \frac{\phi}{\Lambda^3} = \frac{\Psi}{\Omega N \Lambda^3} \qquad (3.6.13) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \tilde{M} \left[1 - \tilde{M}^2 \ln\{1 + \tilde{M}^{-2}\}\right] \qquad (3.6.14)
\end{aligned}$$

となる。無次元量 $\tilde{\phi}$ もこれ以降、単に ϕ とする。

$$\phi = \frac{M - m_0}{G}. \tag{3.6.15}$$

この関係式に逐次変換法を適用すると、ϕ, w と V_{L} はそれぞれ、

$$\phi^{(n)}(m_0) = \frac{M^{(n)} - m_0}{G} \ , \tag{3.6.16}$$

$$\frac{\partial w^{(n)}(m_0)}{\partial m_0} = \phi^{(n)}(m_0) \ , \quad V_{\mathrm{L}}^{(n)}(\phi^{(n)}) = -w^{(n)}(m_0) + m_0\phi^{(n)}. \tag{3.6.17}$$

これらの関係式を用いて、まず $\phi^{(n)}$ を m_0 の関数として計算する。さらにそれを積分することで、$w^{(n)}(m_0)$ を求め、最終的に Legendre 有効ポテンシャルを得る。これら全ての結果を数値的に計算したものを以下に図示する。Legendre 有効ポテンシャルは、任意の節長 n で凸であり、我々の逐次変換法によって物理的に正しい結果が自動的に得られた。

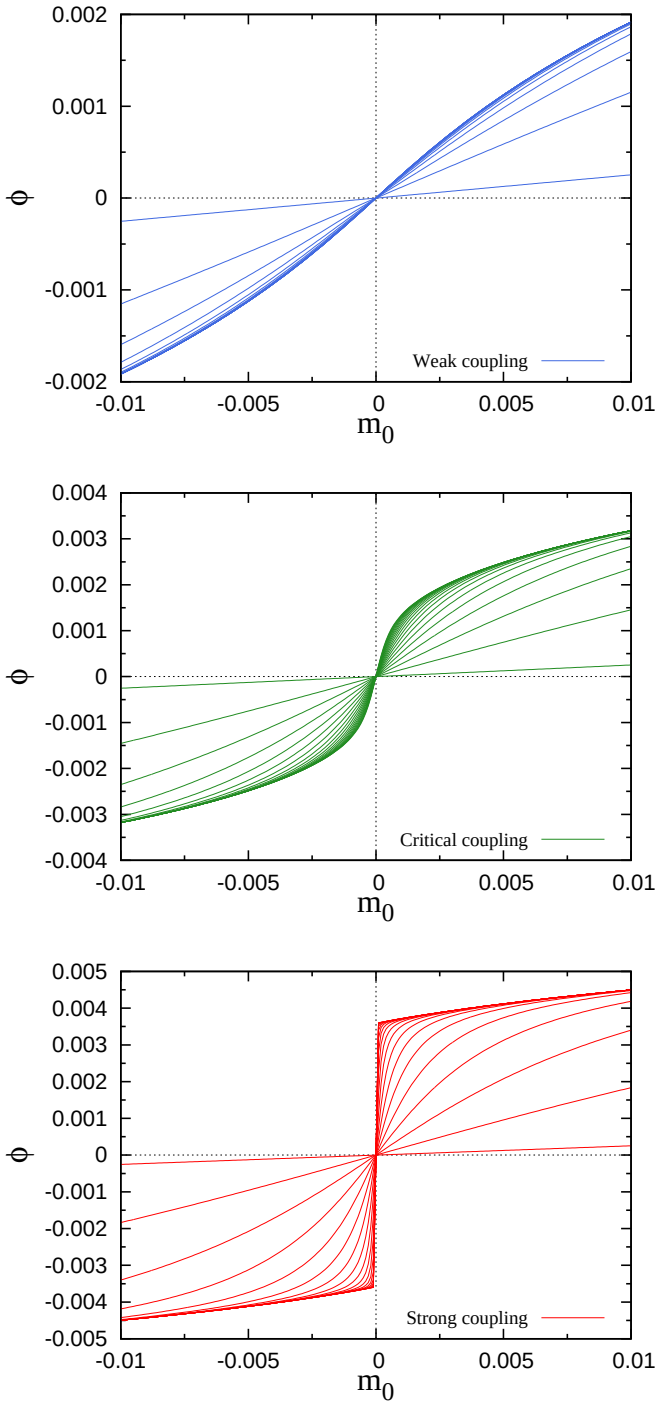


図 3.10: 結合定数 $g = 0.9, 1.0, 1.1$ における $\phi^{(n)}$

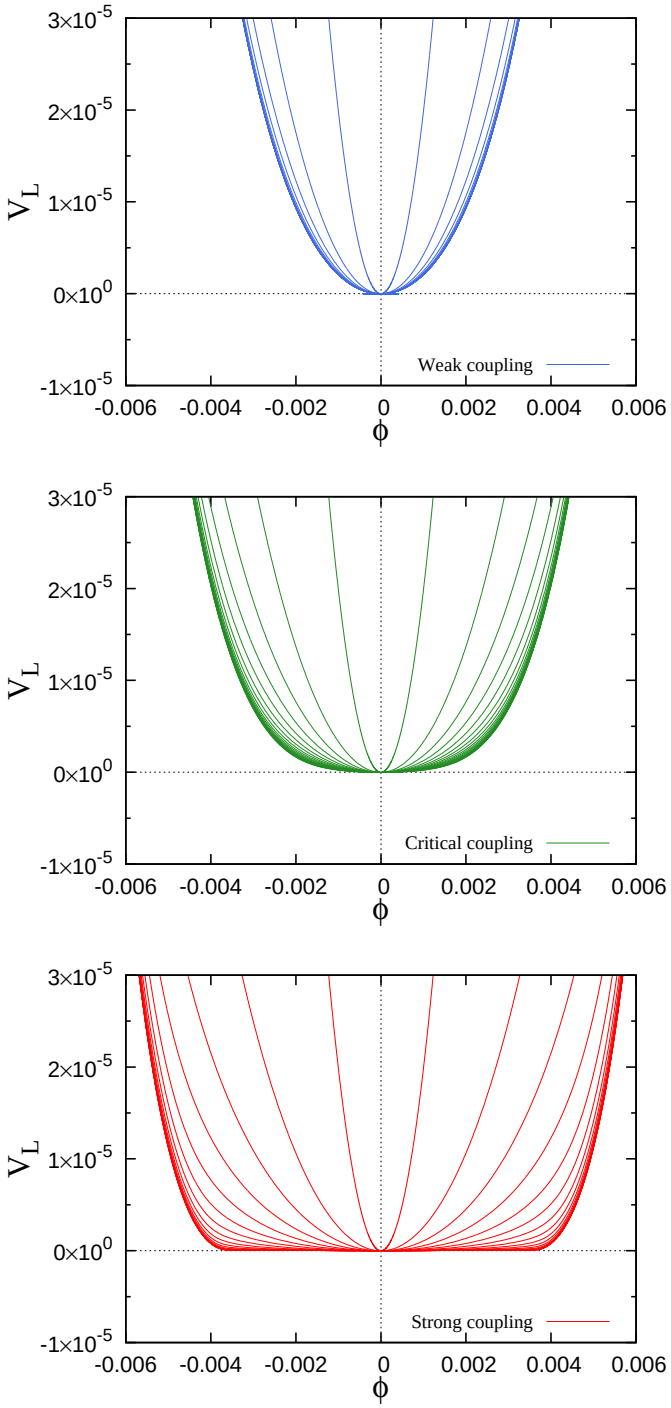


図 3.11: 結合定数 $g = 0.9, 1.0, 1.1$ における有効ポテンシャル $V_{\mathrm{L}}^{(n)}$

第4章　逐次変換法・有限密度 Nambu–Jona-Lasinio模型

4.1　有限密度の Nambu–Jona-Lasinio 模型

これまでは 0 密度の NJL 模型を扱ってきたが、この章からその理論を有限密度系へと拡張する。有限密度 NJL 模型のラグランジアンは、0 密度のそれに化学ポテンシャル μ に関する項を加える。すなわち、

$$\mathcal{L}_{\substack{\mathrm{NJL}\\(\mu=0)}} \to \mathcal{L}_{\substack{\mathrm{NJL}\\(\mu\neq 0)}} = \mathcal{L} + \mu q_{\mathrm{U}(1)} \ . \tag{4.1.1}$$

ここで、$\mu q_{\mathrm{U}(1)}$ は

$$\int d^3x q_{\mathrm{U}(1)} = Q_{\mathrm{U}(1)} \tag{4.1.2}$$

である。フェルミオンのネーターカレントは

$$j^\mu = -\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)}\Delta\psi = -[\bar{\psi}i\gamma^\mu]\cdot(i\psi) = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{4.1.3}$$

であるから、保存電荷 $Q_{U(1)}$ は

$$Q_{U(1)} = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{4.1.4}$$

であり、$\bar{\psi}\gamma^0\psi$ が $q_{U(1)}$ となる。

したがって、有限密度 NJL 模型では、ラグランジアンは次のように書き換わる。ハミルトニアンは $\mathcal{H} \to \mathcal{H} - \mu q_{U(1)}$ であるから、ラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \pi\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} - \mathcal{H} \to \mathcal{L} + \mu q_{U(1)} \tag{4.1.5}$$

と変形される。すなわち、

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{NJL}} &= \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi + \mu\bar{\psi}\gamma^0\psi - m_0\bar{\psi}\psi + \frac{G}{2N}\left[(\bar{\psi}_j\psi_j)^2\right] \\ &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ + \mu\gamma^0 - m_0)\psi + \frac{G}{2N}\left[(\bar{\psi}_j\psi_j)^2\right] \ .\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

そして、プロパゲーターは次のように書き換わる。

$$\frac{i}{p\!\!\!/ - m_0} \to \frac{i}{p\!\!\!/ + \mu\gamma^0 - m_0} = \frac{i(p\!\!\!/ + \mu\gamma^0 + m_0)}{(p\!\!\!/ + \mu\gamma^0 - m_0)(p\!\!\!/ + \mu\gamma^0 + m_0)} \ . \tag{4.1.7}$$

ここで、$(\not{p}+\mu\gamma^0)^2$ は

$$\begin{aligned}(\not{p}+\mu\gamma^0)^2 &= p^2+\mu^2(\gamma^0)^2+\mu(p_\mu\gamma^\mu\gamma^0+p_\mu\gamma^0\gamma^\mu)\\ &= p^2+\mu^2+\mu p_\mu\{\gamma^\mu,\gamma^0\}\\ &= p^2+\mu^2+2\mu p^0\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

と計算でき、分母の計算を実行すると、free propagator S_{free} は

$$S_{\text{free}}=\frac{i(\not{p}+\mu\gamma^0+m_0)}{p^2+\mu^2+2\mu p^0-{m_0}^2} \tag{4.1.9}$$

となる。

質量 m_0 のループ積分 I は

$$\begin{aligned}I &= \frac{iG}{2N}\times\mathrm{tr}[-\psi(0)\bar{\psi}(0)]\times 2\times N\\ &= iG\ \mathrm{tr}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(\not{p}+\mu\gamma^0+m_0\mathbf{1})}{p^2+\mu^2+2\mu p^0-{m_0}^2}\ e^0\\ &= 4G\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{m_0}{p^2+2\mu p^0+\mu^2-{m_0}^2}\ .\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

m_0 を M に置き換えることで full propagator にすると、質量 M のループ I' となり

$$I'\equiv -i\Sigma \tag{4.1.11}$$

即ち、

$$M=m_0+\Sigma \tag{4.1.12}$$

の関係式を得る。まとめると、

$$M=m_0+4iG\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{M}{p^2+2\mu p^0+\mu^2-M^2}\ . \tag{4.1.13}$$

4.2　３次元カットオフ

ここからは上式の運動量積分について計算を実行する。その運動量積分は明らかに発散するので、運動量切断（カットオフ）Λ を導入する。ここでは、３次元カットオフの場合について計算する。３次元カットオフとは

$$\begin{cases}p^0\colon -\infty\to\infty\\ |\boldsymbol{p}|\colon 0\to\Lambda\end{cases} \tag{4.2.1}$$

のように、運動量 $\boldsymbol{p}$ の積分範囲に上限を与える。

自己エネルギー Σ は

$$\begin{aligned}\Sigma &= 4iG\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{M}{p^2+2\mu p^0+\mu^2-M^2}\\ &= 4iG\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{M}{(p^0+\mu)^2-\omega_{\boldsymbol{p}}{}^2}\\ &= 4iG\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{M}{(p^0+\mu+\omega_{\boldsymbol{p}})(p^0+\mu-\omega_{\boldsymbol{p}})}\ .\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

ここで、${\omega_{\boldsymbol{p}}}^2 = \boldsymbol{p}^2 + M^2$ である。

次に Euclid 化を行う。$p^0 \equiv ip^4, \gamma^0 = \gamma^4$ とすると、

$$d^4p = dp^0 d^3p = id(-ip^0)d^3p = idp^4 d^3p \equiv id^4p_{\mathbf{E}} \tag{4.2.3}$$

より、

$$\begin{aligned}\Sigma &= 4iG \int \frac{d^4p_{\mathbf{E}}}{(2\pi)^4} \frac{M}{(ip^4 + \mu + \omega_{\boldsymbol{p}})(ip^4 + \mu - \omega_{\boldsymbol{p}})} \\ &= 4G \int \frac{d^4p_{\mathbf{E}}}{(2\pi)^4} \frac{M}{\{p^4 - i(\mu + \omega_{\boldsymbol{p}})\}\{p^4 - i(\mu - \omega_{\boldsymbol{p}})\}} \\ &= \frac{4GM}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda d^3p \int_{-\infty}^{\infty} dp^4 \frac{1}{\{p^4 - i(\mu + \omega_{\boldsymbol{p}})\}\{p^4 - i(\mu - \omega_{\boldsymbol{p}})\}} \ .\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

p^4 積分では、${\omega_{\boldsymbol{p}}}^2 = \boldsymbol{p}^2 + M^2 > 0,\ \mu > 0$ だから、場合分ける必要がある。

見通しをよくするために、Σ を部分に分けて積分する。まずは、p^4 積分から行い

$$X(\boldsymbol{p}) = \int_{-\infty}^{\infty} dp^4 \frac{1}{\{p^4 - i(\mu + \omega_{\boldsymbol{p}})\}\{p^4 - i(\mu - \omega_{\boldsymbol{p}})\}} \tag{4.2.5}$$

と置く。

積分 $X(\boldsymbol{p})$ の変数 p を x とおき、さらに$\mu + \omega_{\boldsymbol{p}} = A,\ \mu - \omega_{\boldsymbol{p}} = B$ とすると、$X(\boldsymbol{p})$ は

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x - iA)(x - iB)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{i(A - B)} \left[\frac{1}{x - iA} - \frac{1}{x - iB}\right] \tag{4.2.6}$$

と簡略化でき、この積分を $\mu - \omega_{\boldsymbol{p}} > 0$ と$\mu - \omega_{\boldsymbol{p}} \leq 0$ の 2 つの場合で留数定理を用い実行する。

(i) $\mu - \omega_{\boldsymbol{p}} > 0$ のとき

$$X(\boldsymbol{p}) = \oint_C dx \frac{1}{(x - iA)(x - iB)} = 2\pi i \left[\mathrm{Res}\left[X(\boldsymbol{p}), iA\right] + \left[\mathrm{Res}\left[X(\boldsymbol{p}), iB\right]\right]\right] \ , \tag{4.2.7}$$

$$\mathrm{Res}\left[X(\boldsymbol{p}), iA\right] = \lim_{x \to iA} \frac{1}{(x - iA)(x - iB)} \times (x - iA) = \frac{1}{i(A - B)} \ , \tag{4.2.8}$$

$$\mathrm{Res}\left[X(\boldsymbol{p}), iB\right] = \lim_{x \to iB} \frac{1}{(x - iA)(x - iB)} \times (x - iB) = \frac{1}{i(B - A)} \ , \tag{4.2.9}$$

であるから、結局

$$X(\boldsymbol{p}) = 2\pi i \left[\frac{1}{i(A - B)} + \frac{1}{i(B - A)}\right] = 0 \tag{4.2.10}$$

と求まる。

(ii) $\mu - \omega_{\boldsymbol{p}} \leq 0$ のとき

$$\begin{aligned}X(\boldsymbol{p}) &= \oint_C dx \frac{1}{(x - iA)(x - iB)} \\ &= 2\pi i \left[\mathrm{Res}\left[X(\boldsymbol{p}), iA\right]\right] \\ &= 2\pi i \frac{1}{i(A - B)} \\ &= \frac{2\pi}{A - B} \ .\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

$A = \mu + \omega_{\boldsymbol{p}},\ B = \mu - \omega_{\boldsymbol{p}}$ であったから、

$$X(\boldsymbol{p}) = \begin{cases} 0 & (\mu - \omega_{\boldsymbol{p}} > 0) \\ \frac{\pi}{\omega_{\boldsymbol{p}}} & (\mu - \omega_{\boldsymbol{p}} \leq 0) \end{cases} \tag{4.2.12}$$

となるので、階段関数を用いてまとめると、

$$\begin{aligned} X(\boldsymbol{p}) &= \theta(\mu - \omega_{\boldsymbol{p}}) \cdot 0 + \theta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)\frac{\pi}{\omega_{\boldsymbol{p}}} \\ &= \theta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)\frac{\pi}{\omega_{\boldsymbol{p}}}\ . \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

したがって、自己エネルギー Σ は

$$\begin{aligned} \Sigma &= \frac{4GM}{(2\pi)^4}\int_0^\Lambda d^3p\theta(\omega_{\boldsymbol{p}} - \mu)\frac{\pi}{\omega_{\boldsymbol{p}}} \\ &= \frac{4\pi GM}{(2\pi)^4}\int_0^\Lambda d^3p\theta(\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2} - \mu)\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}} \\ &= \frac{4\pi GM}{(2\pi)^4}\cdot 4\pi\int_0^\Lambda dp\theta(\sqrt{p^2 + M^2} - \mu)\frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}} \\ &= \frac{GM}{\pi^2}\int_0^\Lambda dp\ \theta(\sqrt{p^2 + M^2} - \mu)\frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}\ . \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

ここで、

$$d^3p = |p|^2 d|p|d\Omega,\ |p| = p,\ \int d\Omega = 4\pi$$

の関係を使った。

求めたい自己エネルギーの被積分関数である階段関数が積分変数を含むので、積分を実行するためには場合分けを行う必要がある。

(I) $|M| - \mu > 0$ のとき
(II) $|M| - \mu \leq 0$ かつ $\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \mu > 0$ のとき
(III) $|M| - \mu \leq 0$ かつ $\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \mu \leq 0$ のとき

$\theta(|M| - \mu)$ のとき、$\theta(\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \mu)$ は常に成り立つので、Σ は次のようにまとまる。

$$\Sigma = \frac{GM}{\pi^2}\theta(\sqrt{\Lambda^2 + M^2} - \mu)\left[\theta(|M| - \mu)\int_0^\Lambda dp\ F(p) + \theta(\mu - |M|)\int_{\sqrt{\Lambda^2+M^2}-\mu}^\Lambda dp\ F(p)\right], \tag{4.2.15}$$

where

$$F(p) = \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M^2}}.$$

ここで、$F(p)$ の p 積分 の一般形を求めるために次の計算を先に行う。

$$I(\alpha,\beta) \equiv \int_\alpha^\beta dp\ \frac{p^2}{\sqrt{p^2+M^2}} \tag{4.2.16}$$

$$= \int_\alpha^\beta dp\ \frac{M^2\left(\frac{p}{M}\right)^2}{M\left(\left(\frac{p}{M}\right)^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.2.17}$$

注意されたいのは、α,β は関数 I の独立変数ではなく、積分範囲を明示的に書いたものである。$\frac{p}{M}\equiv x, dp = Mdx$ と変数変換すると、積分範囲が変わり

$$\begin{cases} p:\ \alpha \to \beta \\ x:\ \frac{\alpha}{M} \to \frac{\beta}{M} \end{cases}$$

より

$$I(\alpha,\beta) = M^2\int_{\frac{\alpha}{M}}^{\frac{\beta}{M}} dp\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\ . \tag{4.2.18}$$

さらに、$x=\sinh\theta, dx=\cosh\theta d\theta$ と変数変換すれば

$$\begin{cases} x:\ \frac{\alpha}{M} \to \frac{\beta}{M} \\ \theta:\ \sinh^{-1}\frac{\alpha}{M} \to \sinh^{-1}\frac{\beta}{M} \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} I(\alpha,\beta) &= M^2\int_{\sinh^{-1}\frac{\alpha}{M}}^{\sinh^{-1}\frac{\beta}{M}} d\theta\ \cosh\theta\frac{\sinh^2\theta}{\cosh\theta} \\ &= M^2\int_{\sinh^{-1}\frac{\alpha}{M}}^{\sinh^{-1}\frac{\beta}{M}} d\theta\sinh^2\theta \\ &= \frac{M^2}{2}\int_{\sinh^{-1}\frac{\alpha}{M}}^{\sinh^{-1}\frac{\beta}{M}} d\theta(\cosh 2\theta-1) \\ &= \frac{M^2}{2}\left[\frac{\sinh 2\theta}{2}-\theta\right]_{\sinh^{-1}\frac{\alpha}{M}}^{\sinh^{-1}\frac{\beta}{M}} \\ &= \frac{M^2}{2}\left[\sinh\theta\sqrt{\sinh^2\theta+1}-\theta\right]_{\sinh^{-1}\frac{\alpha}{M}}^{\sinh^{-1}\frac{\beta}{M}} \\ &= \frac{M^2}{2}\left[\frac{\beta}{M}\sqrt{\left(\frac{\beta}{M}\right)^2+1}-\frac{\alpha}{M}\sqrt{\left(\frac{\alpha}{M}\right)^2+1}\right]-\sinh^{-1}\frac{\beta}{M}+\sinh^{-1}\frac{\alpha}{M}\ . \end{aligned}$$

ここで、$\sinh^{-1}\theta = \ln\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right)$ であるから、

$$I(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}\left[\beta\sqrt{\beta^2+M^2}-\alpha\sqrt{\alpha^2+M^2}+M^2\ln\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+M^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2+M^2}}\right]\ . \tag{4.2.19}$$

求めたい Σ は、

$$\Sigma = \frac{GM}{\pi^2}\theta(\sqrt{\Lambda^2+M^2}-\mu)\left[\theta(|M|-\mu)I(0,\Lambda)+\theta(\mu-|M|)I(\Lambda^2+M^2,\Lambda)\right] \quad (4.2.20)$$

であるから、先ほどの $I(\alpha,\beta)$ を用い計算すると、自己エネルギー Σ は

$$\begin{aligned}\Sigma = \frac{GM}{2\pi^2}\theta(\sqrt{\Lambda^2+M^2}-\mu)\Bigg[&\theta(|M|-\mu)\left\{\Lambda\sqrt{\Lambda^2+M^2}+M^2\ln\frac{|M|}{\Lambda+\sqrt{\Lambda^2+M^2}}\right\}\\ &+\theta(\mu-|M|)\left\{\Lambda\sqrt{\Lambda^2+M^2}-\mu\sqrt{\mu^2-M^2}+M^2\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\Lambda+\sqrt{\Lambda^2+M^2}}\right\}\Bigg]\end{aligned} \quad (4.2.21)$$

となる。自己無撞着方程式は $M = m_0 + \Sigma$ であったが、両辺を Λ で割り、物理量を無次元化する。無次元化されたものをチルダ記号で次のように書く。

$$g = \frac{G\tilde{M}}{4\pi^2},\ \tilde{M} = \frac{M}{\Lambda},\ \tilde{m_0} = \frac{m_0}{\Lambda},\ \tilde{\Sigma} = \frac{\Sigma}{\Lambda},\ \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\Lambda}\ . \quad (4.2.22)$$

このとき先ほど求めた Σ は

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma} = \frac{G}{2\pi^2}\tilde{M}\theta(\sqrt{1+\tilde{M}^2}-\tilde{\mu})\Bigg[&\theta(|\tilde{M}|-\tilde{\mu})\left\{\sqrt{1+\tilde{M}^2}+\tilde{M}^2\ln\frac{|\tilde{M}|}{1+\sqrt{1+\tilde{M}^2}}\right\}\\ &+\theta(\tilde{\mu}-|\tilde{M}|)\left\{\sqrt{1+\tilde{M}^2}-\tilde{\mu}\sqrt{\tilde{\mu}^2-\tilde{M}^2}+\tilde{M}^2\ln\frac{\tilde{\mu}+\sqrt{\tilde{\mu}^2-\tilde{M}^2}}{1+\sqrt{1+\tilde{M}^2}}\right\}\Bigg]\end{aligned} \quad (4.2.23)$$

となる。ここで、チルダ記号のついた文字を再び無次元化されたという意味で元に戻す。したがって、

$$\begin{aligned}M = m_0 + 2gM\ \theta(\sqrt{1+M^2}-\mu)\Bigg[&\theta(|M|-\mu)\left\{\sqrt{1+M^2}+M^2\ln\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}}\right\}\\ &+\theta(\mu-|M|)\left\{\sqrt{1+M^2}-\mu\sqrt{\mu^2-M^2}+M^2\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}}\right\}\Bigg]\end{aligned} \quad (4.2.24)$$

を得る。$\sqrt{1+M^2}$ と $|M|$ の大小関係に注意すると、

$$\begin{aligned}M = m_0 + 2gM\Bigg[&\theta(|M|-\mu)\left\{\sqrt{1+M^2}+M^2\ln\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}}\right\}\\ &+\theta(\mu-|M|)\left\{\sqrt{1+M^2}-\mu\sqrt{\mu^2-M^2}+M^2\ln\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}}\right\}\Bigg]\end{aligned} \quad (4.2.25)$$

とまとめられる。

4.3　３次元カットオフでの数値解析

0 密度 NJL 模型で導入した逐次変換法を有限密度系にも同様に適用する。0 密度 NJL 模型と同様に節長を n とした逐次変換式は、

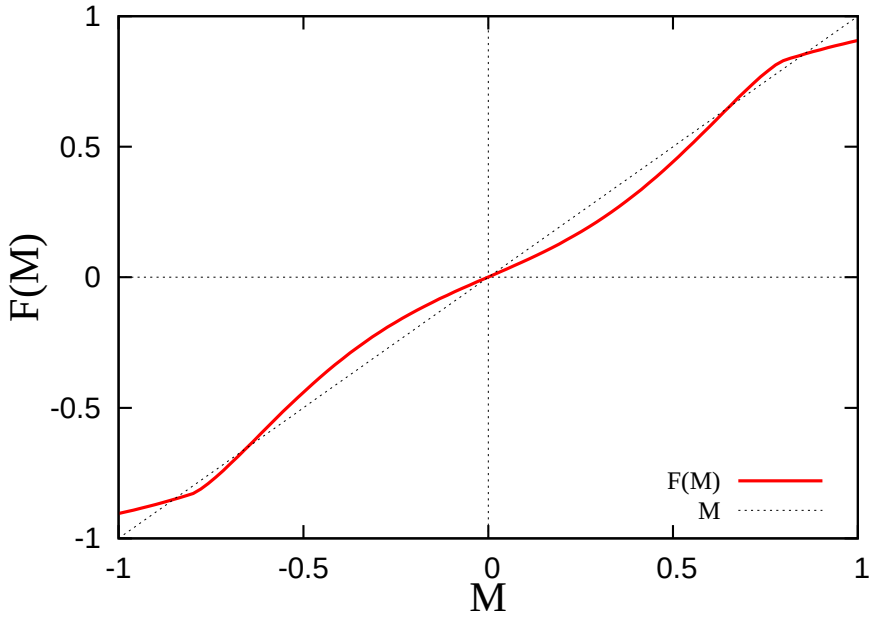


図 4.1: $g = 0.85, \mu = 0.7, m_0 = 0$ における逐次変換関数.

$$M^{(n+1)} = m_0 + 2gM^{(n)} \left[\theta(|M^{(n)}| - \mu) \left\{ \sqrt{1 + {M^{(n)}}^2} + {M^{(n)}}^2 \ln \frac{|M^{(n)}|}{1 + \sqrt{1 + {M^{(n)}}^2}} \right\} \right.$$
$$\left. + \theta(\mu - |M^{(n)}|) \left\{ \sqrt{1 + {M^{(n)}}^2} - \mu \sqrt{\mu^2 - {M^{(n)}}^2} + {M^{(n)}}^2 \ln \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - {M^{(n)}}^2}}{1 + \sqrt{1 + {M^{(n)}}^2}} \right\} \right] \tag{4.3.1}$$

逐次変換関数を得たので、0 密度の場合と同様に有限密度における逐次変換を見る。プロットした図は、相互作用の結合定数が強い場合のものである。0 密度の場合、最大で交点は 3 つあったが、今回は 5 つに増加したのが特徴的である。

逐次変換の動きを調べるために任意の m_0 から出発し変換を繰り返す。具体的に原点近傍の裸の質量から出発して、逐次変換を繰り返すと、原点付近の交点に近づく動きをする。よってその固定点は安定固定点であることがわかる。同様にして、固定点が安定かどうかを調べるために、様々な裸の質量 m_0 から出発して、逐次変換の動きを見る。5 つの固定点は、最も左端の交点から右へと順に、安定、不安定、安定、不安定、安定の固定点であることがわかる。

図 4.2 は裸の質量を変えながら、固定点をプロットした。話を簡単にするために $m_0 = 0$ の赤い線に注目する。化学ポテンシャルを 1 から 0 に追うと固定点の対生成が起こるが、これは明らかに 1 次相転移の描像である。その固定点の一方は安定固定点で、他方は不安定固定点である。また、5 つの固定点が存在する領域は、ポテンシャルの山が 3 つあることに対応する。

結合定数 $g = 0.35, 0.5, 0.85$ それぞれの場合において、物理的な質量が生成されるかをみる。今、化学ポテンシャル $\mu = 0.7$ とする。

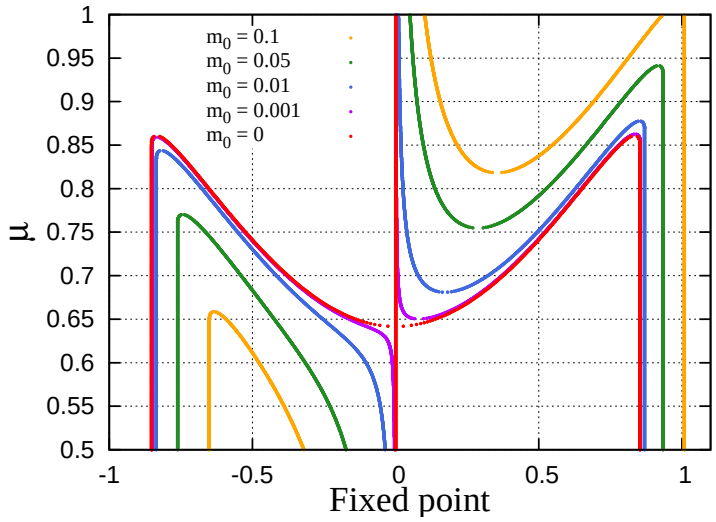


図 4.2: $g = 0.85, \mu = 0.7$ での固定点構造.

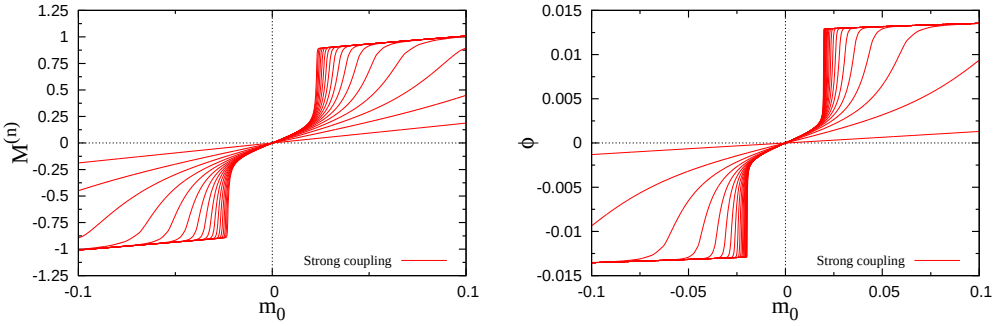


図 4.3: $M^{(n)}, \phi^{(n)}$ の逐次変換 $g = 0.85, \mu = 0.7$.

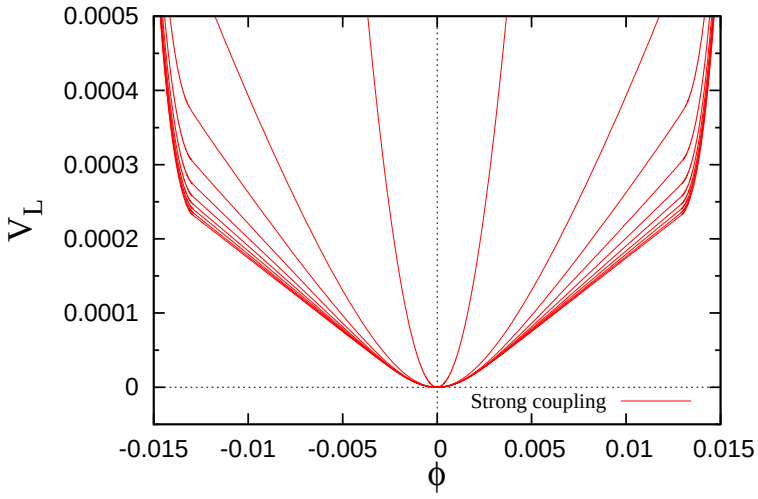


図 4.4: V_{L} の逐次変換 $g = 0.85, \mu = 0.7$.

0 密度のにおいて、固定点構造が結合定数によることがわかったが、有限密度の場合には、固定点構造はさらに化学ポテンシャルにも依存する。臨界結合定数よりも強いとき $g = 0.85$ の様子を以下に示す。

ここで、横軸を固定点の場所、縦軸を化学ポテンシャルとした。プロット線の色の違いは、裸の質量の違いである。図の中心から順に $m_0 = 0, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1$ となっている。具体的に理解するために、赤線に注目しよう。化学ポテンシャルが小さいとき、すなわち $\mu = 0.5$ のとき、固定点は 3 つある。さらに μ を大きくすると、ある値から固定点が分岐し 5 つに増える領域があり、最終的には 1 つに変化する。

第5章　他の解析方法

前章では、有限密度の NJL 模型では、逐次変換法では正しい物理的質量を得られない場合があることを示した。この章では、その他の方法として、外場の方法、赤外スケールカットオフを導入する方法、常微分方程式を用いる方法について解説する。

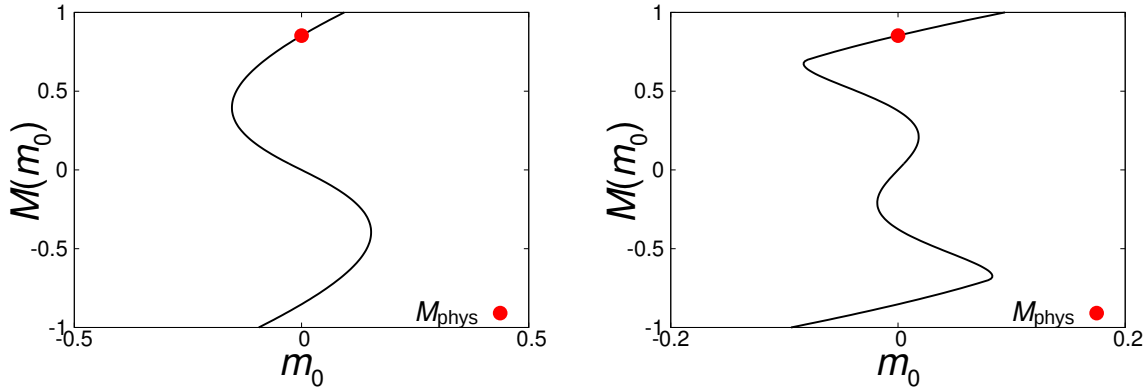
5.1　外場の方法

まず、無次元化された結合定数を

$$g \equiv \frac{G{\Lambda_0}^2}{4\pi^2} \tag{5.1.1}$$

とおく。また、これ以降、物理量はすべて紫外カットオフ Λ_0 で無次元化されているとする。

3D カットオフの NJL 模型の自己無撞着方程式の $g = 0.85$、$\mu = 0, 0.7, 0.8$ の時の解を $M(m_0)$ と書くと、それぞれ図 5.1 と図 5.2 となる。



(a)　(b)

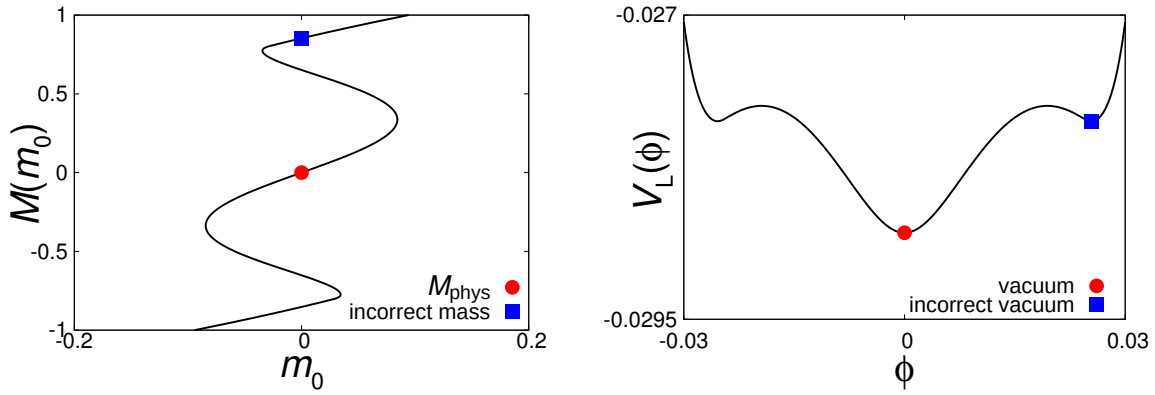
図 5.1: 物理的質量 $M(m_0)$ $(g = 0.85)$. (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 0.7$.

外場の方法により物理的質量 $M_{\rm phy}$ は、

$$M_{\rm phy} = \lim_{m_0 \to 0_+} M(m_0) \tag{5.1.2}$$

の様に一意に定義される。

この方法は図 5.1 では、それぞれ赤い丸のように正しい物理的質量を与える。$\mu = 0$ の図は 2 次相転移を示し、$\mu = 0.7$ の図は 1 次転移を示す。しかし、外場の方法から得



(a)　(b)

図 5.2: 自己無撞着方程式の解 ($g = 0.85,\ \mu = 0.8$). (a) 物理的質量. (b) Legendre 有効ポテンシャル.

られる図 5.2 の青い四角の物理的質量は正しくない。この青い四角は物理的質量が値を持つ事を示しているが、実際はカイラル対称性は破れてない。これは Legendre 有効ポテンシャル $V_{\mathrm{L}}(\varphi)$ の高さを比較することにより確認できる。

図 5.2 の $V_{\mathrm{L}}(\varphi)$ の最小値の赤い点が正しい真空に対応し、最小値ではない青い点は真空ではない。これらの結果より、図 5.2 の例のように、Legendre 有効ポテンシャル $V_{\mathrm{L}}(\varphi)$ の高さの情報無しでは、正しい真空に対応する物理的質量は得られない。よって次節以降、自己無撞着方程式のみから正しい物理的質量を選び出す方法を考える。

5.2　スケーリング赤外カットオフによる方法

非摂動くりこみ群では、量子効果がどれだけ入っているかを示すスケールパラメータを変化させることにより、それに伴う物理量の変化を見る。それと同様の手法として、Schwinger–Dyson 方程式にスケール依存性を持たせて、3 変数の非線形方程式として取り扱う方法を解説する。

5.2.1　スケール依存性のある Schwinger–Dyson 方程式

Schwinger–Dyson 方程式の運動量積分の動径方向の上限を紫外カットオフの Λ_0、下限をくりこみスケールに対応したカットオフ $\Lambda(t) \equiv \mathrm{e}^{-t}\Lambda_0$ にする。この変更によりスケール t 依存性のある Schwinger–Dyson 方程式は、

$$M(m_0, t) = m_0 + \Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t)) \tag{5.2.1}$$

となる。この 2 変数関数となった物理的質量 $M(m_0, t)$ を、物理的質量関数と呼ぶ。$\Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t))$ は質量の補正項であり、2 つの引数はそれぞれ積分の上限と下限を示す。また

$$\Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t)) = \Sigma(\Lambda_0, 0) - \Sigma(\Lambda(t), 0) \tag{5.2.2}$$

が成立する。そしてこの $\Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t))$ は、$M(m_0, t)$ と t を変数とする 2 変数関数でもあるので

$$\Delta(M(m_0,t),t) \equiv \Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t)) \tag{5.2.3}$$

と書くと、スケール t 依存性のある Schwinger–Dyson 方程式は、

$$M(m_0,t) = m_0 + \Delta(M(m_0,t),t) \tag{5.2.4}$$

と書ける。

このスケール依存性を持たせたことにより、他の物理量も同様に、

$$\begin{cases} \varphi(m_0) \to \varphi(m_0,t), \\ W(m_0) \to W(m_0,t), \\ V_{\mathrm{L}}(\varphi) \to V_{\mathrm{L}}(\varphi,t), \\ M_{\mathrm{phys}} \to M_{\mathrm{phys}}(t). \end{cases} \tag{5.2.5}$$

のように t 依存性を持った 2 変数関数となる。

5.2.2　NJL 模型

3 次元カットオフの場合の NJL 模型の有限密度系の質量補正項は

$$\begin{aligned} \Sigma(\Lambda_0, \Lambda(t)) &= 4iG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 + 2\mu p^0 + \mu^2 - M^2} \\ &\xrightarrow{\text{Euclid 化}} \frac{4GM}{(2\pi)^4} \int_{\Lambda(t)}^{\Lambda_0} d|\boldsymbol{p}| \int d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} dp^4 \frac{1}{\{p^4 - i(\mu + \omega_{\boldsymbol{p}})\}\{p^4 - i(\mu - \omega_{\boldsymbol{p}})\}} \\ &(p^4 \equiv -ip^0, \quad \omega_{\boldsymbol{p}} \equiv \boldsymbol{p}^2 + M^2) \end{aligned} \tag{5.2.6}$$

と変更される。

3 次元カットオフ・有限密度の場合、質量補正項の中に現れる $\Sigma(\Lambda_0, 0)$ は、

$$\begin{aligned} \Sigma(\Lambda_0,0) =& \frac{GM}{2\pi^2} \theta\left(\sqrt{{\Lambda_0}^2 + M^2} - \mu\right) \\ &\times \left[\theta(|M| - \mu) \left(\Lambda_0 \sqrt{{\Lambda_0}^2 + M^2} + M^2 \log \frac{|M|}{\Lambda_0 + \sqrt{{\Lambda_0}^2 + M^2}} \right) \right. \\ &\left. + \theta(\mu - |M|) \left(\Lambda_0 \sqrt{{\Lambda_0}^2 + M^2} + M^2 \log \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - M^2}}{\Lambda_0 + \sqrt{{\Lambda_0}^2 + M^2}} - \mu\sqrt{\mu^2 - M^2} \right) \right] \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

となる。よって質量補正項は

$$
\begin{aligned}
&\Delta(M,t) = \Sigma(\Lambda_0,0) - \Sigma(\Lambda(t),0) \\
&= 2M\frac{G{\Lambda_0}^2}{4\pi^2}\times \\
&\Bigg[\theta\left(\sqrt{{\Lambda_0}^2+M^2}-\mu\right)\Bigg\{\theta(|M|-\mu)\left(\sqrt{1+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2}+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2\log\frac{|M|}{\Lambda_0+\sqrt{{\Lambda_0}^2+M^2}}\right) \\
&+\theta(\mu-|M|)\left(\sqrt{1+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2}+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\Lambda_0+\sqrt{{\Lambda_0}^2+M^2}}-\frac{\mu}{\Lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\mu}{\Lambda_0}\right)^2-\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2}\right)\Bigg\} \\
&-\theta\left(\sqrt{\Lambda(t)^2+M^2}-\mu\right)\Bigg\{\theta(|M|-\mu)\left(\mathrm{e}^{-t}\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2}+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2\log\frac{|M|}{\Lambda(t)+\sqrt{\Lambda(t)^2+M^2}}\right) \\
&+\theta(\mu-|M|)\left(\mathrm{e}^{-t}\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2}+\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\Lambda(t)+\sqrt{\Lambda(t)^2+M^2}}-\frac{\mu}{\Lambda_0}\sqrt{\left(\frac{\mu}{\Lambda_0}\right)^2-\left(\frac{M}{\Lambda_0}\right)^2}\right)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{5.2.8}
$$

となる。よって紫外カットオフ Λ_0 で無次元化されたスケール t 依存性のある Schwinger–Dyson 方程式は、

$$
\begin{aligned}
&M = m_0 + \Delta(M,t) \\
&\quad = m_0 + 2Mg\times \\
&\Bigg[\theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\Bigg\{\theta(|M|-\mu)\left(\sqrt{1+M^2}+M^2\log\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}}\right) \\
&\qquad\qquad +\theta(\mu-|M|)\left(\sqrt{1+M^2}+M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}}-\mu\sqrt{\mu^2-M^2}\right)\Bigg\} \\
&-\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\Bigg\{\theta(|M|-\mu)\left(\mathrm{e}^{-t}\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}+M^2\log\frac{|M|}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}\right) \\
&\qquad\qquad +\theta(\mu-|M|)\left(\mathrm{e}^{-t}\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}+M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}-\mu\sqrt{\mu^2-M^2}\right)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

となる。

この M, m_0, t を変数とする Schwinger-Dyson 方程式を解くと図 5.3 を得る。左の列は、物理的質量関数 $M(m_0,t)$ の t 発展を示した図であり、右の列はそれぞれの $m_0=0$ の解である $M(0,t)$ の t 発展の図である。物理的質量関数はスケール t 依存性がある場合も多価解となり、この手法では正しい物理的質量を得られないが、スケール t 依存性のある Schwinger–Dyson 方程式は次節以降の手法の元となる重要な式である。

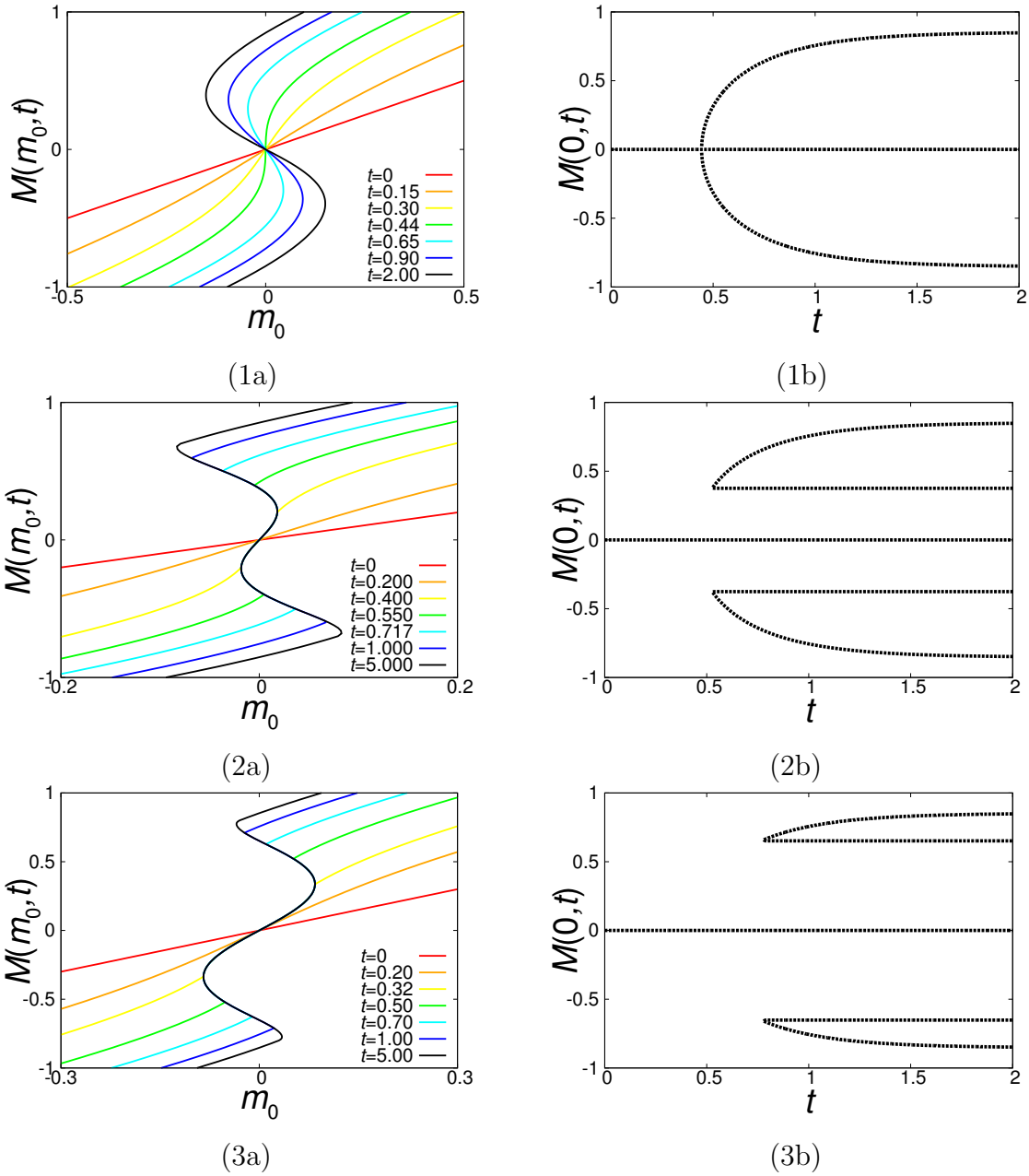


図 5.3: 物理的質量関数の t 発展 ($g = 0.85,\ \mu = 0,\ 0.7,\ 0.8$). (a) 物理的質量関数. (b) $M(0,t)$.

5.3　常微分方程式による方法

式 (5.2.4) の $M(m_0,t)$ を常微分方程式の解、t を独立変数、m_0 を解の初期値と解釈することができる。この常微分方程式を導出するために式 (5.2.4) を t で全微分すると

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial t}. \tag{5.3.1}$$

を得る。よって式を整理すると、

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}M(m_0,t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\dfrac{\partial\Delta(M,t)}{\partial t}}{1-\dfrac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M}}, \\ \text{初期条件: } M(m_0,0)=m_0. \end{cases} \tag{5.3.2}$$

という常微分方程式を得る。ここで少し冗長ではあるが、計算を書き下す。

$\Delta(M,t)$ を t で偏微分すると

$$\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial t}=\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\frac{4gM\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} \tag{5.3.3}$$

となり、M で偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M}=2g\Big[&A(M,t)+\theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)B(M,t)\\&+\theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)C(M,t)\\&+\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)D(M,t)\\&+\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)E(M,t)\Big],\end{aligned}$$

$$A(M,t)\equiv\frac{\Delta(M,t)}{2Mg},$$

$$B(M,t)\equiv\frac{M^2}{\sqrt{1+M^2}}+2M^2\log\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}}+M^4\left(\frac{1}{|M|^2}-\frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right),$$

$$\begin{aligned}C(M,t)\equiv&\frac{M^2}{\sqrt{1+M^2}}+2M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}}+\frac{\mu M^2}{\sqrt{\mu^2-M^2}}\\&-M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})}+\frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right),\end{aligned}$$

$$D(M,t)\equiv-\frac{2\mathrm{e}^{-t}M^2}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}-2M^2\log\frac{|M|}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}},$$

$$\begin{aligned}E(M,t)\equiv&-\frac{\mathrm{e}^{-t}M^2}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}-2M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}-\frac{\mu M^2}{\sqrt{\mu^2-M^2}}\\&+M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})}+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})}\right)\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

を得る。$A(M,t)$ をそれぞれの項に足すと

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M} = 2g\Big[\quad & \theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)B'(M,t) \\
& + \theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)C'(M,t) \\
& + \theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)D'(M,t) \\
& + \theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)E'(M,t)\Big], \\
B'(M,t) \equiv{}& \frac{2M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}} + M^4\left(\frac{1}{|M|^2} - \frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right), \\
C'(M,t) \equiv{}& \frac{2M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{\mu M^2}{\sqrt{\mu^2-M^2}} - \mu\sqrt{\mu^2-M^2} \\
& - M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right) \\
D'(M,t) \equiv{}& -\frac{\mathrm{e}^{-t}(2M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{|M|}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} \\
& - M^4\left(\frac{1}{|M|^2} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})}\right), \\
E'(M,t) \equiv{}& -\frac{\mathrm{e}^{-t}(2M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - \frac{\mu M^2}{\sqrt{\mu^2-M^2}} + \mu\sqrt{\mu^2-M^2} \\
& + M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})}\right).
\end{aligned}
\tag{5.3.5}
$$

さらに整理すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M} = 2g\Big[\quad & \theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)B'(M,t) \\
& +\theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)C'(M,t) \\
& +\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)D'(M,t) \\
& +\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)E'(M,t)\Big], \\
B'(M,t) \equiv{}& \frac{2M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{M^2}{\sqrt{1+M^2}}, \\
C'(M,t) \equiv{}& \frac{2M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{\mu(2M^2-\mu^2)}{\sqrt{\mu^2-M^2}} \\
& - M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right) \\
D'(M,t) \equiv{}& -\frac{\mathrm{e}^{-t}(2M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{|M|}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - \frac{\mathrm{e}^{-t}M^2}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}, \\
E'(M,t) \equiv{}& -\frac{\mathrm{e}^{-t}(2M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - \frac{\mu(2M^2-\mu^2)}{\sqrt{\mu^2-M^2}} \\
& + M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})}\right)
\end{aligned}
\tag{5.3.6}
$$

となる。さらに

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M} = 2g\Big[\ & \theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)B'(M,t) \\
& +\theta\left(\sqrt{1+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)C'(M,t) \\
& +\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(|M|-\mu)D'(M,t) \\
& +\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\theta(\mu-|M|)E'(M,t)\Big], \\
B'(M,t) \equiv\ & \frac{3M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{|M|}{1+\sqrt{1+M^2}}, \\
C'(M,t) \equiv\ & \frac{2M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{\mu(2M^2-\mu^2)}{\sqrt{\mu^2-M^2}} \\
& - M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right), \\
D'(M,t) \equiv\ & -\frac{\mathrm{e}^{-t}(3M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{|M|}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}, \\
E'(M,t) \equiv\ & -\frac{\mathrm{e}^{-t}(2M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - \frac{\mu(2M^2-\mu^2)}{\sqrt{\mu^2-M^2}}, \\
& + M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})}\right)
\end{aligned}
\tag{5.3.7}
$$

となる。θ 関数も整理できるので、結局、式 (5.3.2) の右辺のそれぞれの項は以下のように与えられる。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial t} =\ & \theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu\right)\frac{4gM\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}, \\
\frac{\partial\Delta(M,t)}{\partial M} =\ & 2g\Big[\theta(|M|-\mu)A + \theta(\sqrt{1+M^2}-\mu)\theta(\mu-|M|)B + \theta(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu)\theta(\mu-|M|)C\Big], \\
A \equiv\ & \frac{3M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} - \frac{\mathrm{e}^{-t}(3M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} + 3M^2\log\frac{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}}, \\
B \equiv\ & \frac{2M^2+1}{\sqrt{1+M^2}} + 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{1+\sqrt{1+M^2}} + \frac{\mu(2M^2-\mu^2)}{\sqrt{\mu^2-M^2}} \\
& - M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{1+M^2}(1+\sqrt{1+M^2})}\right), \\
C \equiv\ & -\frac{\mathrm{e}^{-t}(2M^2+\mathrm{e}^{-2t})}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - 3M^2\log\frac{\mu+\sqrt{\mu^2-M^2}}{\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}} - \frac{\mu(2M^2-\mu^2)}{\sqrt{\mu^2-M^2}} \\
& + M^4\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2-M^2}(\mu+\sqrt{\mu^2-M^2})} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})}\right).
\end{aligned}
\tag{5.3.8}
$$

この常微分方程式 (5.3.2) を、いくつかの初期値 m_0 に関して解いた結果が図 5.4 と図 5.5 となる。物理的質量は初期値 m_0 の極限 $m_0 \to 0_+$ を取ることによって得られる。図 5.4 の $\mu = 0, 0.8$ の場合は、正しい物理的質量が得られるが、図 5.5 の $\mu = 0.7$ の場合は物理的質量が 0 となり、正しくない。よってこの手法でも、正しい物理的質量が得られない場合があることがわかる。

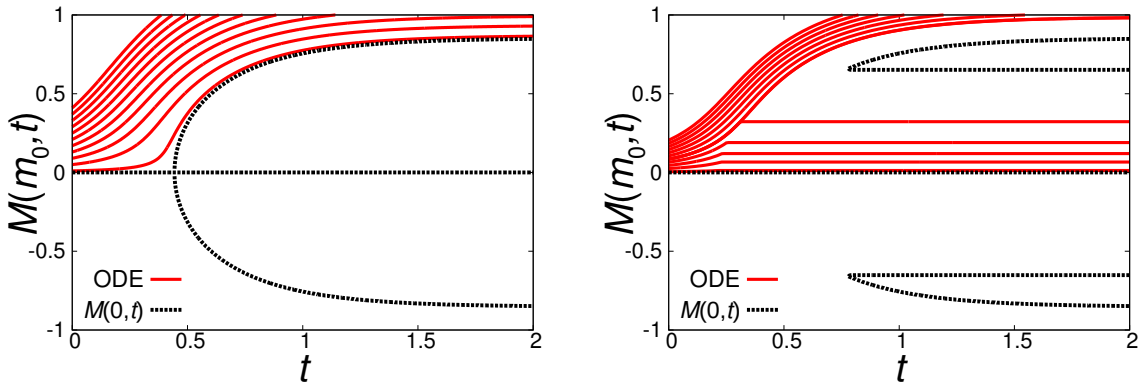


図 5.4: 常微分方程式の解 ($g = 0.85$). (a) $\mu = 0$. (b) $\mu = 0.8$.

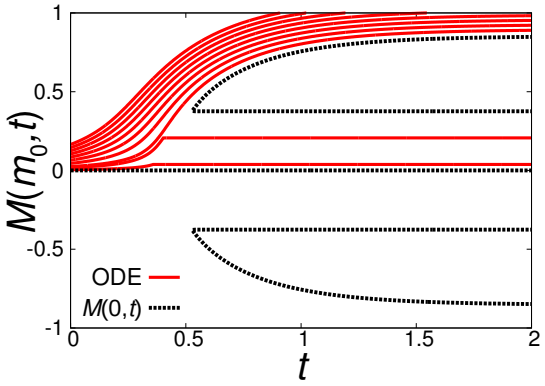


図 5.5: 常微分方程式の解 ($g = 0.85$, $\mu = 0.7$).

第6章　偏微分方程式による方法

この章では偏微分方程式を用いる方法を解説する。この方法では、「弱解」という数学的に拡張された概念を導入し、それが正しい物理的質量を与えることを示す。また弱解から得られる物理量の計算結果も示す。さらにこの偏微分方程式の弱解を用いた解析方法を Ising 模型に適用し、その物理的正しさを解説する。

6.1　偏微分方程式

式 (5.2.4) の $M(m_0,t)$ をある偏微分方程式の解とし、m_0 と t を独立変数と解釈することができる。まず、その偏微分方程式を導出するために、3 変数関数 $F(M,m_0,t)$ を

$$F(M,m_0,t) \equiv M - m_0 - \Delta(M,t). \tag{6.1.1}$$

のように定義する。よって、スケール t 依存性のある Schwinger–Dyson 方程式 (5.2.4) は、

$$F(M(m_0,t),m_0,t) = 0. \tag{6.1.2}$$

と書ける。次にこの式の両辺独立変数の m_0 と t でそれぞれ全微分すると

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}F(M(m_0,t),m_0,t)}{\mathrm{d}m_0} = \dfrac{\partial F}{\partial M}\dfrac{\partial M}{\partial m_0} + \dfrac{\partial F}{\partial m_0} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}F(M(m_0,t),m_0,t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial F}{\partial M}\dfrac{\partial M}{\partial t} + \dfrac{\partial F}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{6.1.3}$$

という二つの方程式を得る。そして、この二つの方程式を合わせると

$$-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial m_0}}{\dfrac{\partial M}{\partial m_0}} = -\frac{\partial F}{\partial M} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial M}{\partial t}}. \tag{6.1.4}$$

となる。

よって、式 (6.1.4) は、

$$\frac{\partial M(m_0,t)}{\partial t} - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\dfrac{\partial F}{\partial m_0}}\frac{\partial M(m_0,t)}{\partial m_0} = 0, \tag{6.1.5}$$

という偏微分方程式になる。F に関する部分はそれぞれ、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = -\dfrac{\partial \Delta(M,t)}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial F}{\partial m_0} = -1. \end{cases} \tag{6.1.6}$$

となるため、最終的には

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(m_0,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial \Delta(M(m_0,t),t)}{\partial t}\dfrac{\partial M(m_0,t)}{\partial m_0} = 0, \\ \text{初期関数}: M(m_0,0) = m_0, \end{cases} \tag{6.1.7}$$

という偏微分方程式を得る。

次に、新たに $H(M,t)$ という関数を導入し、以下のように定義する。

$$\begin{cases} H(M,t) \equiv -\displaystyle\int_0^M \mathrm{d}M' \, \frac{\partial \Delta(M',t)}{\partial t} \\ \qquad\quad = -4g\mathrm{e}^{-3t}\left[\theta(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu)\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2} + \theta(\mu-\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2})\mu\right], \\ \dfrac{\partial H(M,t)}{\partial M} = -\dfrac{\partial \Delta(M,t)}{\partial t} = -\theta(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}-\mu)\dfrac{4gM\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+M^2}}. \end{cases} \tag{6.1.8}$$

これより式 (6.1.7) は、

$$\frac{\partial M(m_0,t)}{\partial t} + \frac{\partial H(M,t)}{\partial M}\frac{\partial M(m_0,t)}{\partial m_0} = \frac{\partial M(m_0,t)}{\partial t} + \frac{\partial H(M(m_0,t),t)}{\partial m_0} = 0 \tag{6.1.9}$$

となる。この式の $M(m_0,t)$ を電荷とし、$H(M,t)$ を電流と解釈すると、この偏微分方程式は電荷保存則と同じ形をしている。よってこのタイプの偏微分方程式は「保存則」と呼ばれる。またこの NJL 模型の物理的質量関数を解とする保存則は、Wegner-Houghton 方程式という非摂動くりこみ群の方法により得られる偏微分方程式と等価である [3, 4, 5, 6, 7]。

6.2　弱解

保存則の式 (6.1.9) は、非線形偏微分方程式であり、その解を通常の差分法や Taylor 展開で数値計算することはできない。差分法の場合には、数値的に不安定な解や振動解などの物理的に明らかに正しくない解が得られる。また Taylor 展開では、ある次数の展開係数が有限の t で発散してしまい、計算不能になることがある。このような問題は偏微分方程式の非線形性に起因する。よってここでは特性曲線の方法 [1] という、偏微分方程式を特性曲線方程式という連立常微分方程式に帰着させて解く方法を用いる。式 (6.1.9) から得られる特性曲線方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}m_{0\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = \left.\dfrac{\partial H(M,t)}{\partial M}\right|_{M=M_{\mathrm{c}}(t)}, \\ \dfrac{\mathrm{d}M_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = 0, \\ \text{初期条件: } M_{\mathrm{c}}(0) = m_{0\mathrm{c}}(0). \end{cases} \tag{6.2.1}$$

[1] これは Hamilotn-Jacobi 方程式に対応する正準方程式を解くことに相当する。詳細は Appendix 参照。

となる。ここで $M_{\mathrm{c}}(t) \equiv M(m_{0\mathrm{c}}(t), t)$ と定義した。

そしてこの特性曲線方程式を解くと、$M(m_0, t)$ は図 5.3 と同じように、式 (5.2.4) の多価解となる。物理量として解は 1 価でなければならないので、多価解から 1 価解を選ばなければならない。それにより物理的解 $M(m_0, t)$ は不連続点（微分不可能点）を持つ。よってその不連続点では偏微分方程式は満たされず、そのような $M(m_0, t)$ は通常の意味での解ではない。

そこで不連続点も許される解として、弱解という数学的に定義が拡張された解を導入する。まず式 (6.1.9) に、連続かつ微分可能で無限遠方（$t = \infty$、 $m_0 = \pm\infty$）で 0 となるような任意のテスト関数 $\xi(m_0, t)$ をかけて、これを t と m_0 の全平面に対して積分する。よってこの積分方程式は

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}m_0 \left[\frac{\partial M(m_0, t)}{\partial t} + \frac{\partial H(M, t)}{\partial m_0} \right] \xi(m_0, t) = 0. \tag{6.2.2}$$

となる。さらに部分積分し、整理すると

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}m_0 \left[M(m_0, t) \frac{\partial \xi(m_0, t)}{\partial t} + H(M, t) \frac{\partial \xi(m_0, t)}{\partial m_0} \right] + \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}m_0 \; M(m_0, 0) \xi(m_0, 0) = 0. \tag{6.2.3}$$

を得る。連続かつ微分可能で無限遠方で 0 となるような任意のテスト関数 $\xi(m_0, t)$ に関して、式 (6.2.3) を満たす $M(m_0, t)$ を元の偏微分方程式 (6.1.9) の弱解と定義する。この定義式では、$M(m_0, t)$ に関すると m_0 と t による微分が無く、代わりに $\xi(m_0, t)$ に関する微分のみが残る。よって弱解 $M(m_0, t)$ は、もはや連続（微分可能）な関数である必要はない。

そして実際に多価解から弱解を選ぶには、不連続点の位置がわかればいい。不連続点が発生する場所は、$\frac{\partial M(m_0, t)}{\partial m_0}$ が $\pm\infty$ となる点とわかっているので、あとはその不連続点が t の発展によりどう変化するのかがわかればよい。その弱解の不連続点を $S(t)$ と書くと、その t による変化を与える式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{H(M_+, t) - H(M_-, t)}{M_+ - M_-} \\ M_\pm \equiv \lim\limits_{\epsilon \to 0} M(S(t) \pm \epsilon, t) \end{cases} \tag{6.2.4}$$

となる。この式は Rankine-Hugoniot（RH）条件と呼ばれ、弱解の定義式 (6.2.3) から導出できる。

次に RH 条件の幾何的な意味を説明する。まず図 6.1 の多価になっている点線は特性曲線方程式の結果だとし、黒い実線が弱解だとする。灰色の縦線は、弱解が不連続関数で値がジャンプしていることを示す。RH 条件は A の面積と B の面積の差が不変であるということを意味している。そして多価部分は、A の面積と B の面積差が 0（等面積）で発生する。つまり A と B の面積は同じで、RH 条件はそれを満たすように不連続点が移動するということを意味している。よって特性曲線方程式から得られる多価解から A と B の面積が同じになるように不連続点を決めた解が弱解となる（等面積則 [9]）。

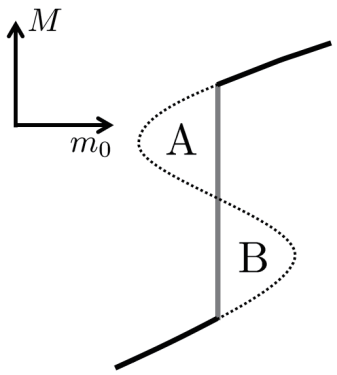


図 6.1: 等面積則.

6.3　計算結果

偏微分方程式 (6.1.9) の弱解である物理的質量関数 $M(m_0,t)$ を特性曲線方程式の結果と等面積則により数値計算する。 有限密度に関しては、さらにその弱解から自由エネルギー $W(m_0,t)$ と Legendre 有効ポテンシャル $V_{\rm L}(\varphi,t)$ を計算する。まず、図 6.2 は、$\mu=0$ の時の弱解 $M(m_0,t)$ である。この結果は他の方法（外場の方法、常微分方程式を用いる方法）と一致している。

次に図 6.3 と図 6.4 はそれぞれ、$\mu=0.7,\ 0.8$ の時の弱解 $M(m_0,t)$ とそれに対応する $W(m_0,t)$、$V_{\rm L}(\varphi,t)$ の t 発展を示している。それぞれの図で、点線は特性曲線方程式の結果であり、黒い実線は弱解とそれに対応する量を示している。

図 6.2 の結果は、外場の方法と常微分方程式による方法の両方からも得ることができる。一方、図 6.3 と図 6.4 の結果は、他の方法では得られない。また注目すべき点は、弱解 $M(m_0,t)$ により得られた Legendre 有効ポテンシャル $V_{\rm L}(\varphi,t)$ は、特性曲線方程式の結果が凸化されものになっている [2]。よって Legendre 有効ポテンシャルは、最小値のみを持ち、それ以外の極小値を持たない凸関数となる。Legendre 有効ポテンシャルはもともと凸関数として定義されたので、等面積則による Legendre 有効ポテンシャルの凸化は物理的にも望ましい結果である。よってこの物理的質量関数の弱解は物理的に正しいと考えられる。

[2] このような凸関数は、特性曲線方程式の結果の非凸関数を 2 回 Legendre 変換すれば得られる。またこの等面積則により Legendre 有効ポテンシャルが凸化される仕組みは、Van der Waals の状態方程式で Maxwell の等面積則が、Gibbs の自由エネルギーを凸化させるのと同じである

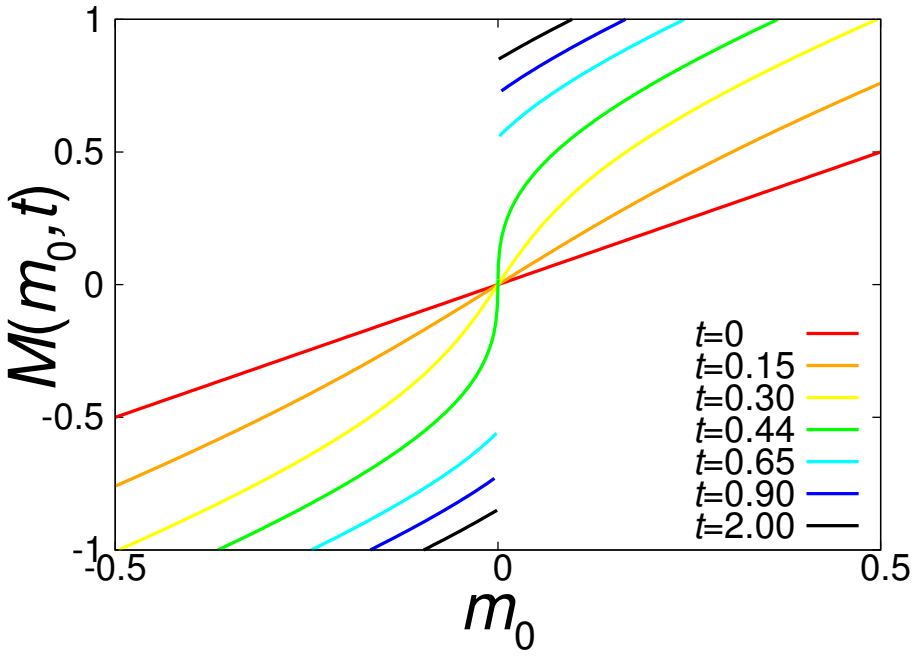


図 6.2: 物理的質量関数の弱解 ($g = 1.7g_c,\ \mu = 0$).

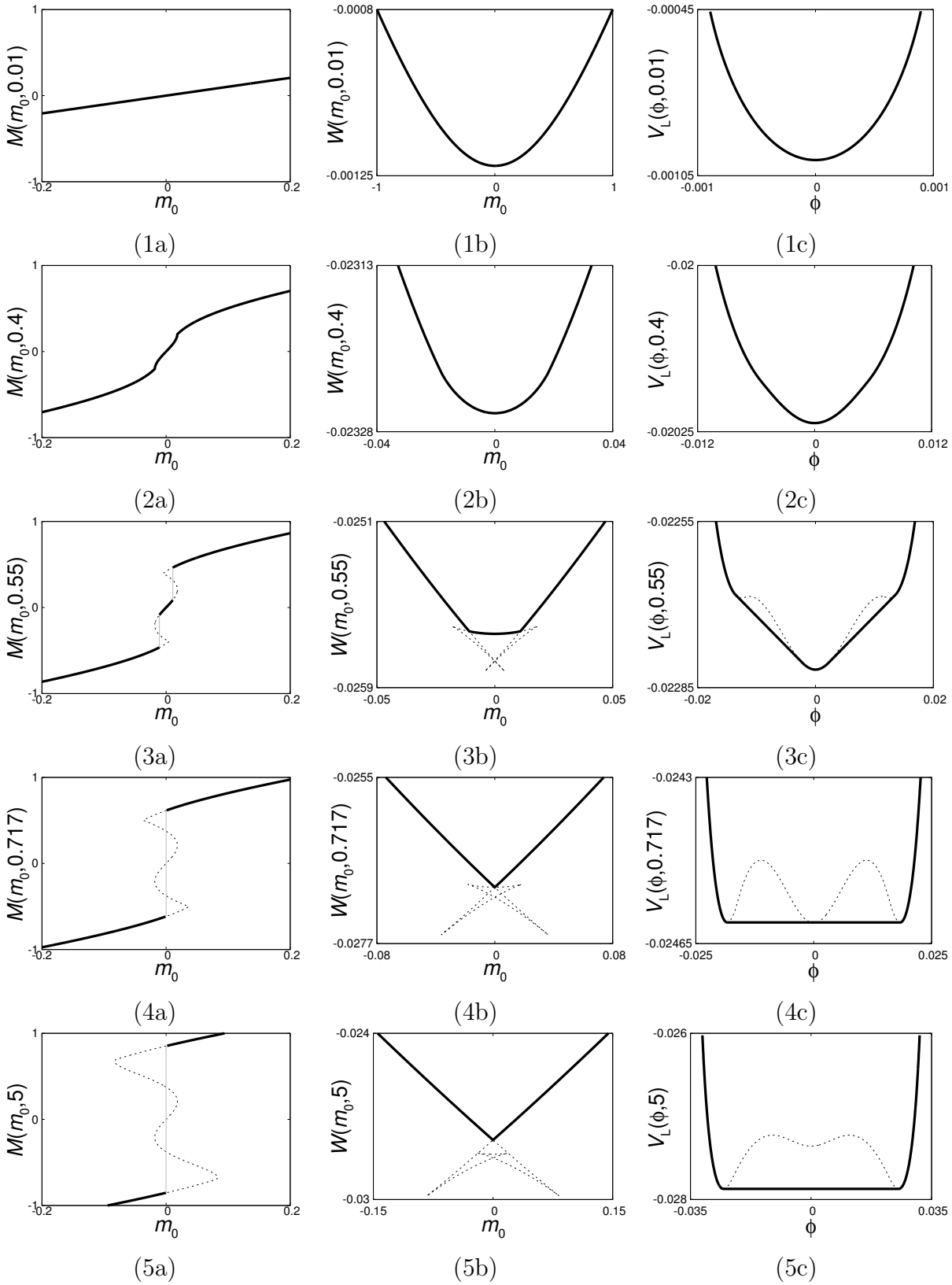


図 6.3: 弱解により得られる物理量の t 発展 ($g = 0.85$, $\mu = 0.7$, $t = 0.01$, 0.4, 0.55, 0.717, 5). (a) 物理的質量関数. (b) 自由エネルギー. (c) Legendre 有効ポテンシャル.

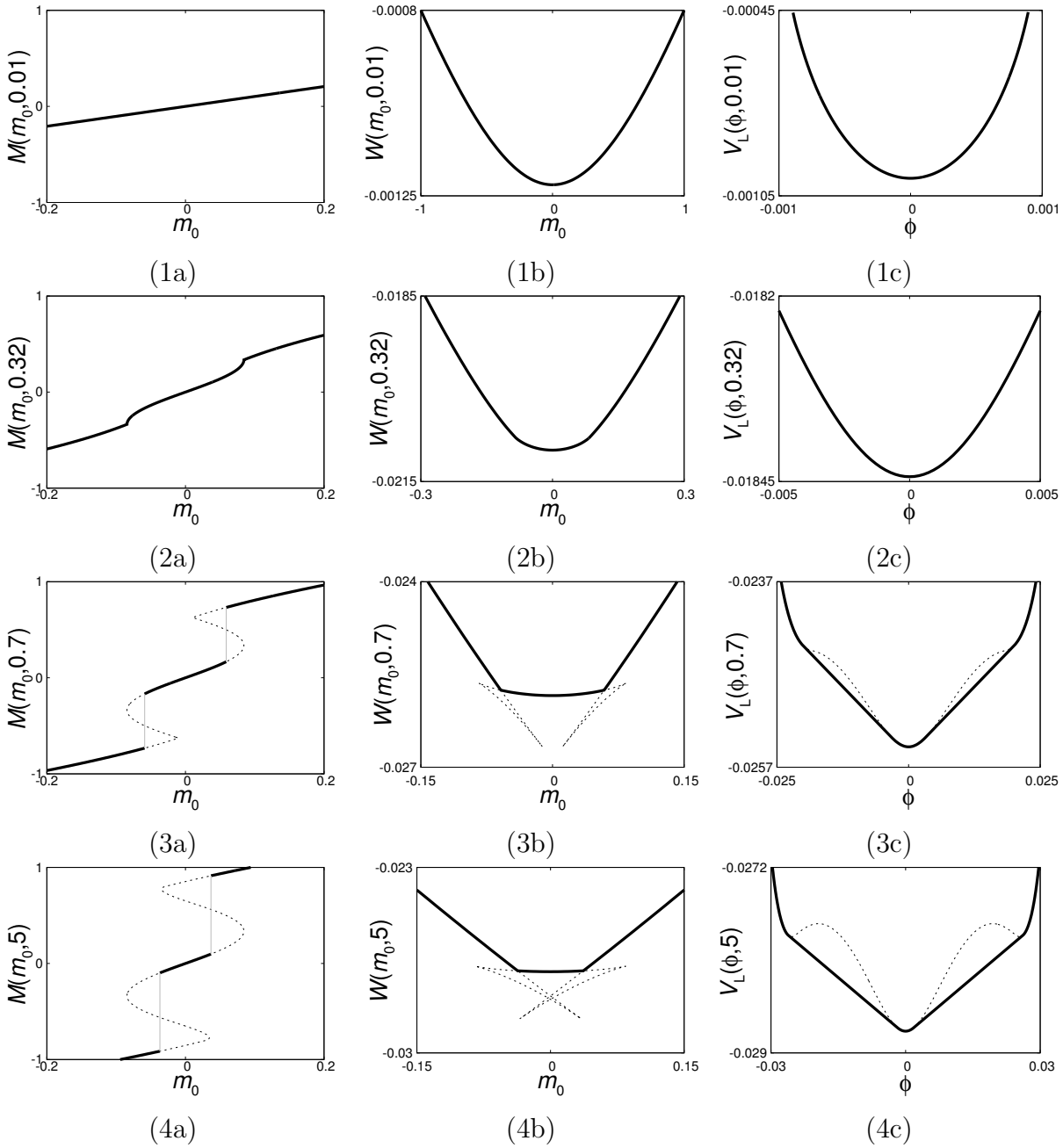


図 6.4: 弱解により得られる物理量の t 発展 ($g = 0.85$, $\mu = 0.8$, $t = 0.01$, 0.32, 0.7, 5). (a) 物理的質量関数. b) 自由エネルギー. (c) Legendre 有効ポテンシャル.

図 6.5、図 6.6、図 6.7 は、自己無撞着方程式から得られた $M(0,t)$ を黒い点線で、弱解により得られた物理的質量を赤い実線で、それぞれの密度に関してプロットしたものである。図 6.5 は 2 次相転移を示し、図 6.6 は 1 次相転移をしめす。赤い線の微分不可能な点（不連続点）が相転移が起きた（質量が生成された）スケール t_{c} である。図 6.7 はカイラル対称性が破れておらず、物理的質量は生成されない。

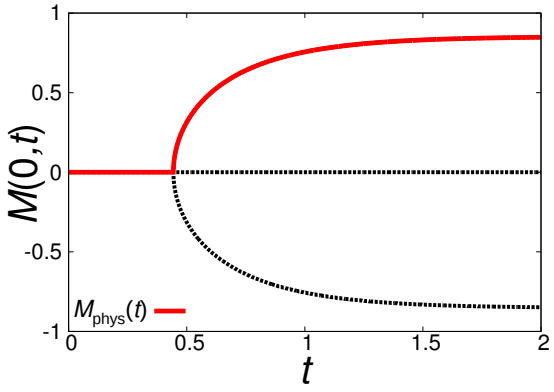


図 6.5: 物理的質量 $(g = 0.85,\ \mu = 0)$.

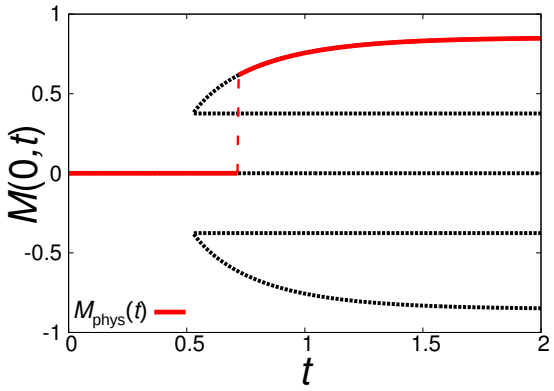


図 6.6: 物理的質量 $(g = 0.85,\ \mu = 0.7)$.

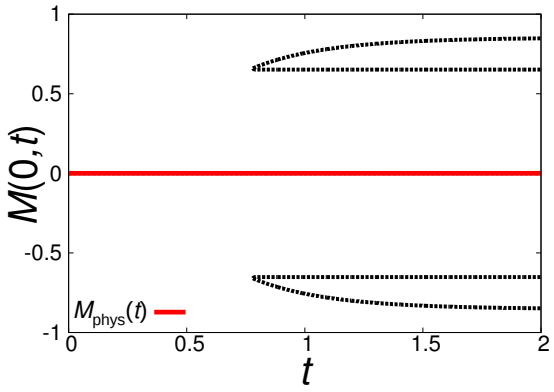


図 6.7: 物理的質量 $(g = 0.85,\ \mu = 0.8)$.

6.4　Ising 模型への応用

偏微分方程式の弱解を用いた相転移現象の解析法は Ising 模型へも応用できる。Ising 模型の平均場近似をしたギャップ方程式（自己無撞着方程式）は、

$$m = \tanh(\beta z J m + \beta h), \tag{6.4.1}$$

である。ここで $m,\ h,\ \beta,\ z,\ J$ はそれぞれ、1 スピンあたりの磁化の期待値、外場としての磁場、逆温度、最近接スピンの数、最近接相互作用の結合定数である。ここで 3 変数関数 $F(m, h, \beta)$ を

$$F(m, h, \beta) \equiv m - \tanh(\beta z J m + \beta h). \tag{6.4.2}$$

のように定義すると、

$$\frac{\partial m(h,\beta)}{\partial \beta} - \frac{\dfrac{\partial F}{\partial \beta}}{\dfrac{\partial F}{\partial H}} \frac{\partial m(h,\beta)}{\partial h} = 0, \tag{6.4.3}$$

という偏微分方程式を得る。よって

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = \left(-1 + \tanh^2(\beta z J m + \beta h)\right)(z J m + h), \\ \dfrac{\partial F}{\partial H} = \left(-1 + \tanh^2(\beta z J m + \beta h)\right)\beta. \end{cases} \tag{6.4.4}$$

より、Ising 模型のギャップ方程式から得られる偏微分方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m(h,\beta)}{\partial \beta} - \dfrac{z J m + h}{\beta} \dfrac{\partial m(h,\beta)}{\partial h} = 0, \\ \text{初期関数: } m(h, 0) = 0, \end{cases} \tag{6.4.5}$$

となる。注目すべき点は、この偏微分方程式は保存則ではない事である。

次に特性曲線方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}h_{\mathrm{c}}(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = -\dfrac{z J m_{\mathrm{c}}(\beta) + h_{\mathrm{c}}(\beta)}{\beta}, \\ \dfrac{\mathrm{d}m_{\mathrm{c}}(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = -p_{\mathrm{c}}(\beta)\dfrac{z J m_{\mathrm{c}}(\beta) + h_{\mathrm{c}}(\beta)}{\beta} + q_{\mathrm{c}}(\beta), \\ \dfrac{\mathrm{d}p_{\mathrm{c}}(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = \dfrac{p_{\mathrm{c}}(\beta)(1 + z J p_{\mathrm{c}}(\beta))}{\beta}, \\ \dfrac{\mathrm{d}q_{\mathrm{c}}(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = -\dfrac{p_{\mathrm{c}}(\beta)}{\beta}\left(\dfrac{z J m_{\mathrm{c}}(\beta) + h_{\mathrm{c}}(\beta)}{\beta} - z J q_{\mathrm{c}}(\beta)\right), \\ \left(p \equiv \dfrac{\partial m}{\partial h},\ \ q \equiv \dfrac{\partial m}{\partial \beta}\right) \end{cases} \tag{6.4.6}$$

となる[3]。

[3] Appendix の式 (7.0.18) 参照。

ここで h, m, p, q の初期値について説明する。まず、初期値を与える逆温度を β_0 とする。$m_{\rm c}(\beta_0)$ を任意の値に固定すると、ギャップ方程式 (6.4.1) から $h_{\rm c}(\beta_0)$ が決まる。次に $q_{\rm c}(\beta_0)$ を得るためにギャップ方程式を β で偏微分すると、

$$q = \{1 - \tanh^2\big(\beta z J m + \beta h\big)\}\{z J m + \beta z J q + h\}. \tag{6.4.7}$$

となり、これを整理し、$\beta = \beta_0,\ m = m_{\rm c}(\beta_0),\ h = h_{\rm c}(\beta_0)$ を代入すると

$$q_{\rm c}(\beta_0) = \frac{\{1 - \tanh^2\big(\beta_0 z J m_{\rm c}(\beta_0) + \beta_0 h_{\rm c}(\beta_0)\big)\}\{z J m_{\rm c}(\beta_0) + h_{\rm c}(\beta_0)\}}{1 - \beta_0 z J\{1 - \tanh^2\big(\beta_0 z J m_{\rm c}(\beta_0) + \beta_0 h_{\rm c}(\beta_0)\big)\}}, \tag{6.4.8}$$

を得る。最後に、$p_{\rm c}(\beta_0)$ は、$p = \frac{\partial m}{\partial h}$ より、$m_{\rm c}(\beta_0)$ を変えて得られた $h_{\rm c}(\beta_0)$ の値から差分を計算し、近似的にその差分から微分を計算すれば得られる。

まとめると、$zJ = 1$ の場合、初期値は

$$\begin{cases} h_{\rm c}(\beta_0) = \dfrac{\tanh^{-1} m_{\rm c}(\beta_0)}{\beta_0} - m_{\rm c}(\beta_0), \\ p_{\rm c}(\beta_0) = \dfrac{\partial m_{\rm c}(\beta_0)}{\partial h_{\rm c}(\beta_0)}, \\ q_{\rm c}(\beta_0) = \dfrac{\{1 - \tanh^2\big(\beta_0 m_{\rm c}(\beta_0) + \beta_0 h_{\rm c}(\beta_0)\big)\}\{m_{\rm c}(\beta_0) + h_{\rm c}(\beta_0)\}}{1 - \beta_0\{1 - \tanh^2\big(\beta_0 m_{\rm c}(\beta_0) + \beta_0 h_{\rm c}(\beta_0)\big)\}}. \end{cases} \tag{6.4.9}$$

のように得られる。

初期値の逆温度 $\beta_0 = 0.4$ で特性曲線方程式 (6.4.6) を解いた結果は、図 6.8 となり [4]、ギャップ方程式と同じ多価解となった。

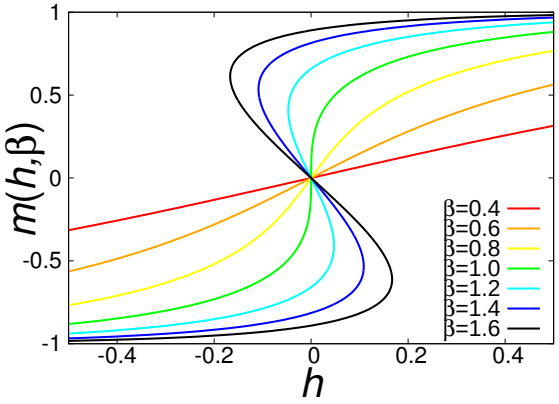


図 6.8: β-evolution of magnetization ($zJ = 1,\ \beta_{\rm cr} = 1$).

次にこの弱解を考えるが、式 (6.4.5) は保存則ではないので弱解の定義式 (6.2.3) では定義できず、等面積則が適用できるかどうかはわからない。よってここで変数変換を

[4] $p(\beta_{\rm cr}) = \pm\infty$ となる臨界逆温度 $\beta_{\rm cr}$ とその近傍の逆温度では、常微分方程式が数値的に解けないため、それ以外の領域を計算した。

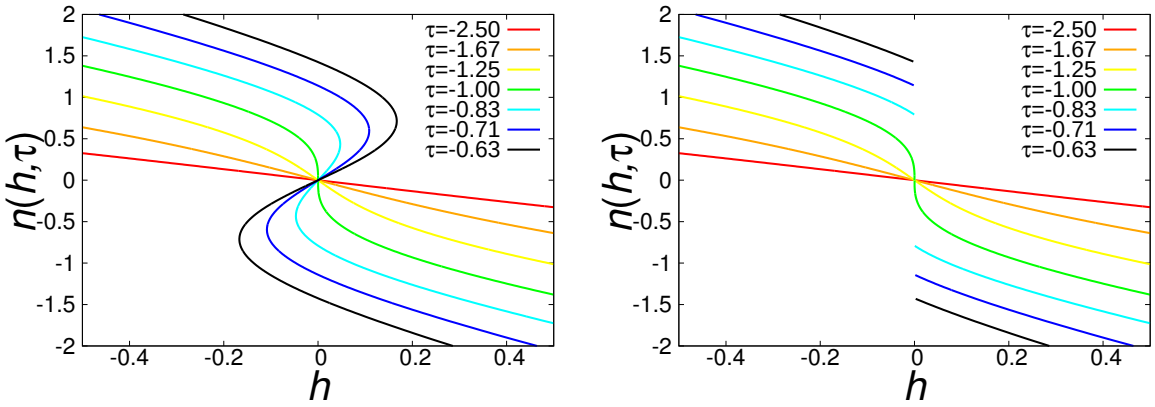
して、式 (6.4.5) を保存則に帰着させる。変数変換は以下のように行う。

$$\begin{cases} \tau \equiv -\dfrac{1}{\beta}, \\ \tau^2 \dfrac{\partial}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \beta}, \\ n(h,\tau) \equiv -\beta \left(m(h,\beta) + \dfrac{h}{zJ} \right). \end{cases} \tag{6.4.10}$$

よってこの変数変換より、

$$\frac{\partial n(h,\tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{zJ}{2} n(h,\tau)^2 \right) = 0 \tag{6.4.11}$$

という保存則を得る。この保存則はバーガース方程式と呼ばれる。このバーガース方程式の特性曲線方程式を解いた結果と、等面積則により得られた弱解は図 6.9 となる。



(a)　　(b)

図 6.9: $n(h,\tau)$ の τ 発展. (a) 特性曲線方程式の結果. (b) 弱解.

この弱解 $n(h,\tau)$ に対応する $m(h,\beta)$ は図 6.10(a) となる。またこの弱解から得られた自発磁化の β 発展は、図 6.10(b) となり、この結果はよく知られた 2 次相転移を示している。

Helmholtz の自由エネルギーは [5]、

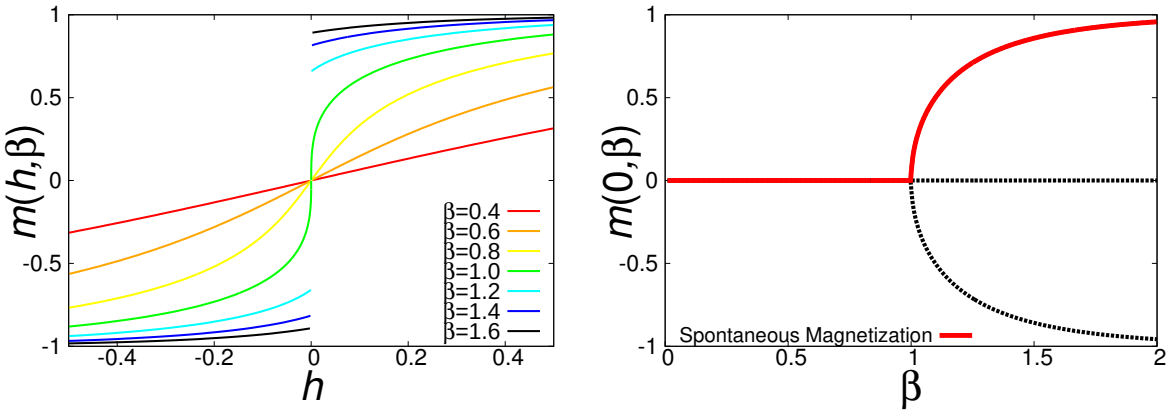
$$U(h,\beta) = \int_0^h \mathrm{d}h'\ m(h',\beta), \tag{6.4.12}$$

となり、Gibbs の自由エネルギーは

$$V(m,\beta) \equiv \max_h [mh - U(h,\beta)] \tag{6.4.13}$$

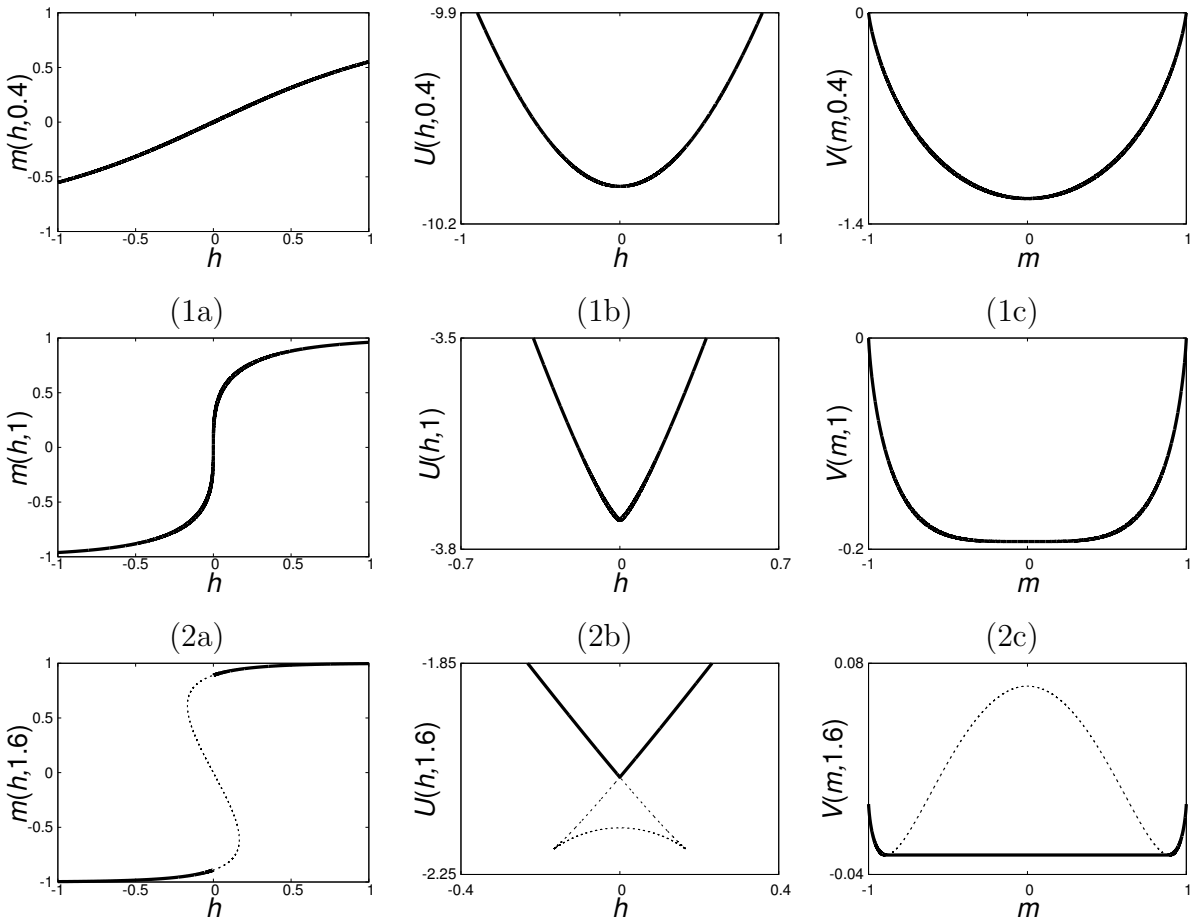
となるので、弱解 $m(h,\beta)$ からこの二つの物理量を計算すると図 6.11 となる。NJL 模型の時と同様に、等面積則により Gibbs の自由エネルギーは、特性曲線の結果を凸化したものになっている。これらの結果より Ising 模型のギャップ方程式（平均場近似）に対応する偏微分方程式の弱解は、物理的に正しい解であると言える。

[5] 通常の符号の取り方とは逆に取っている。



(a)　(b)

図 6.10: (a) Weak solution of magnetization. (b) Spontaneous magnetization.



(1a)　(1b)　(1c)

(2a)　(2b)　(2c)

(3a)　(3b)　(3c)

図 6.11: 弱解とそれに対応する物理量の β 発展 ($zJ = 1$, $\beta = 0.4$, 1.0, 1.6). (a) 磁化. (b) Helmholtz の自由エネルギー. (c) Gibbs の自由エネルギー.

第7章　まとめと課題

私たちは、カイラル対称性の自発的破れを定量的に直接計算する方法として、逐次変換法を提案した。この方法は、0密度NJL模型において、よく機能することがわかった。そこでは、無限個のダイアグラムの和を計算する必要があるが、各ダイアグラムに対して節長という指標を定義することで、ダイアグラムを分類し、困難な計算を逐次変換式に落とし込むことができた。これにより、自発的対称性の破れに伴った質量生成の仕組みを、何の特異性もなしに明快に示すことができた。

また、この逐次変換法は一次相転移が起こる有限密度NJL模型においては、物理的に正しい解を選ぶことができないことが示された。その他の方法として、外場の方法、赤外スケールカットオフを導入する方法、常微分方程式を用いる方法により、さらに解析を進めた。外場の方法では、自己無撞着方程式のみから正しい物理的質量を選び出すことはできず、Legendre有効ポテンシャルの高さ情報が必要であった。次に行った、非摂動くりこみ群で用いられるような手法、すなわち、スケールパラメータの変化させることにより、それに伴った物理量の変化を見るという方法では、物理的質量関数がスケール依存性を持つ場合においても、解が多価となり、正しい物理的質量を得ることができないことが明らかになった。さらに、質量関数 $M(m_0, t)$ を常微分方程式の解と解釈し、解析を試みたが、この手法でも、正しい物理的質量が得られない場合があることがわかった。

有限密度NJL模型でのカイラル対称性の自発的破れの解析は、弱解という数学的に拡張された概念を導入することで、物理的に正しい結果を得た。さらに、偏微分方程式の弱解を用いた相転移現象の解析法として、Ising模型へ応用した。Ising模型のギャップ方程式から得られる偏微分方程式は保存則でなかったが、変数変換することで保存則に帰着させることで、弱解が物理的に正しい解であると示された。

今後は、逐次変換法をゲージ理論に適用したい。

Appendix

Hamilton-Jacobi 方程式と特性曲線の方法

ここでは Hamilton-Jacobi 方程式の導出方法と特性曲線の方法の関係を解説する。まず、Hamilton-Jacobi 方程式の導出を考える。$x(t)$ を時刻 t の時の質点の座標とし、$\dot{x}(t)$ をその時の速度とする。Lagrangian を $L(x(t), \dot{x}(t), t)$ と書き、$\dot{x}$ に関して凸の関数とする。ここで作用 $S[x, \dot{x}]$ を

$$\begin{cases} S[x, \dot{x}] := \displaystyle\int_0^t L(x(t), \dot{x}(t), t)\mathrm{d}t \\ \text{始状態} : x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \\ \text{終端時刻} : t = T \end{cases} \tag{7.0.1}$$

と定義する。質点は Euler-Lagrange 方程式を満たす最適経路 $x^*(t)$ を通る。

作用の変分を取るために、初期状態は同じで、最適経路から微小量ずれた経路 $(x(t) + \eta(t), \dot{x}(t) + \xi(t))$ を考える。$\eta(t), \xi(t)$ は任意の関数で、初期時刻に

$$\begin{cases} \eta(0) = 0 \\ \xi(0) = 0 \end{cases} \tag{7.0.2}$$

を満たす。よって作用の変分は

$$\begin{aligned} \delta S &:= S[x^* + \eta, \dot{x}^* + \xi] - S[x^*, \dot{x}^*] = \int_0^T [L(x^* + \eta, \dot{x}^* + \xi, t) - L(x^*, \dot{x}^*, t)]\mathrm{d}t \\ &\simeq \int_0^T \left[\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x^*}\eta + \frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^*}\xi\right]\mathrm{d}t = \int_0^T \left[\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x^*}\eta + \frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^*}\frac{\mathrm{d}\eta(t)}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x^*} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^*}\right)\right]\eta(t)\mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^*}\eta(t)\right]_{t=0}^{t=T} \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial x^*} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L(x^*, \dot{x}^*, t)}{\partial \dot{x}^*}\right)\right]\eta(t)\mathrm{d}t + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^*}\right|_{t=T}\eta(T) \\ &= \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^*}\right|_{t=T}\eta(T) \end{aligned} \tag{7.0.3}$$

となる。

ここで、最適経路を取った作用を 2 変数関数として以下のように書き直す。

$$\begin{cases} S(x,T) = \displaystyle\int_0^T L(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\mathrm{d}t \\ x \equiv x^*(T) \\ \dot{x} \equiv \dot{x}^*(T) \end{cases} \tag{7.0.4}$$

そして、式 (7.0.3) より

$$\lim_{\eta(T)\to 0}\frac{\delta S(x,t)}{\eta(T)} = \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial L(x,\dot{x},T)}{\partial \dot{x}} \tag{7.0.5}$$

を得る。

次に、Hamiltonian を

$$H(x,p,T) \equiv \max_{\dot{x}}[\dot{x}p - L(x,\dot{x},T)] \tag{7.0.6}$$

と定義する。$L(x,\dot{x},T)$ が $\dot{x}$ で微分可能な時は、Hamiltonian の定義は

$$\begin{cases} H(x,p,T) \equiv \dot{x}p - L(x,\dot{x},T) \\ p = \dfrac{\partial L(x,\dot{x},T)}{\partial \dot{x}} \end{cases} \tag{7.0.7}$$

となる。

最後に、作用を終端時刻 T で全微分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}S(x,T) = \frac{\partial S(x,T)}{\partial x}\frac{dx}{dT} + \frac{\partial S(x,T)}{\partial T} \tag{7.0.8}$$

となる。また、作用の定義より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}S(x,T) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\int_0^T L(x^*(t),\dot{x}^*(t),t)\mathrm{d}t = L(x,\dot{x},T) \tag{7.0.9}$$

となるので、これら 2 式から

$$\frac{\partial S(x,T)}{\partial x}\dot{x} - L(x,\dot{x},T) + \frac{\partial S(x,T)}{\partial T} = 0 \tag{7.0.10}$$

を得る。

式 (7.0.5) と式 (7.0.7) より、式 (7.0.10) は

$$p\dot{x} - L(x,\dot{x},T) + \frac{\partial S(x,T)}{\partial T} = H(x,p,T) + \frac{\partial S(x,T)}{\partial T} = 0 \tag{7.0.11}$$

となる。よってまとめると

$$\frac{\partial S(x,T)}{\partial T} + H(x,p,T) = 0 \quad \left(p = \frac{\partial S}{\partial x}\right) \tag{7.0.12}$$

となり、Euler-Lagrange 方程式（2 階の常微分方程式）と等価な Hamilton-Jacobi 方程式（1 階の偏微分方程式）を導出できた。さらにこの Hamilton-Jacobi 方程式の両辺を x で微分すると

$$\frac{\partial p(x,T)}{\partial t} + \frac{\partial H(x,p,T)}{\partial x} = 0 \tag{7.0.13}$$

となり、運動量 $p(x,T)$ を解とする保存則が得られる。これは Hamilton-Jacobi 方程式と等価な 1 階の偏微分方程式である。

Euler-Lagrange 方程式は、Hamilton の正準方程式（1 階の連立常微分方程式）と等価なので、逆に Hamiloton-Jacobi 方程式と保存則に対応する正準方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = \left.\dfrac{\partial H(x,p,t)}{\partial p}\right|_{\substack{x=x_{\mathrm{c}}(t)\\ p=p_{\mathrm{c}}(t)}} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\left.\dfrac{\partial H(x,p,t)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{\mathrm{c}}(t)\\ p=p_{\mathrm{c}}(t)}} \\ (p_{\mathrm{c}}(t) \equiv p(x_{\mathrm{c}}(t),t)) \end{cases} \tag{7.0.14}$$

が得られる。この導出は、「特性曲線の方法」という、1 階の偏微分方程式から特性曲線方程式と呼ばれる 1 階の連立常微分方程式を得る一般的な手法を、Hamilton-Jacobi 方程式と保存則に適用した例である。つまりこの場合、正準方程式が特性曲線方程式に対応する。

さらに式 (7.0.9) より $S_{\mathrm{c}}(t) \equiv S(x_{\mathrm{c}}(t),t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} &= L(x_{\mathrm{c}}, \dot{x}_{\mathrm{c}}, t) \\ &= p_{\mathrm{c}}(t)\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} - H(x_{\mathrm{c}}(t), p_{\mathrm{c}}(t), t) \\ &= p_{\mathrm{c}}(t)\left.\frac{\partial H(x,p,t)}{\partial p}\right|_{\substack{x=x_{\mathrm{c}}(t)\\ p=p_{\mathrm{c}}(t)}} - H(x_{\mathrm{c}}(t), p_{\mathrm{c}}(t), t) \end{aligned} \tag{7.0.15}$$

が得られるので、特性曲線方程式をまとめると

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = \left.\dfrac{\partial H(x,p,t)}{\partial p}\right|_{\substack{x=x_{\mathrm{c}}(t)\\ p=p_{\mathrm{c}}(t)}} \\ \dfrac{\mathrm{d}p_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = -\left.\dfrac{\partial H(x,p,t)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{\mathrm{c}}(t)\\ p=p_{\mathrm{c}}(t)}} \\ \dfrac{\mathrm{d}S_{\mathrm{c}}(t)}{\mathrm{d}t} = p_{\mathrm{c}}(t)\left.\dfrac{\partial H(x,p,t)}{\partial p}\right|_{\substack{x=x_{\mathrm{c}}(t)\\ p=p_{\mathrm{c}}(t)}} - H(x_{\mathrm{c}}(t), p_{\mathrm{c}}(t), t) \end{cases} \tag{7.0.16}$$

となる。

そしてこの特性曲線の方法は、任意の 1 階の偏微分方程式に応用できるように拡張することができる。それを Lagrange-Charpit の方法という [10]。任意の 1 階の偏微分

方程式を

$$F(x,t,u,p,q)=0 \qquad \left(u\equiv u(x,t),\ p\equiv\frac{\partial u}{\partial x},\ q\equiv\frac{\partial u}{\partial t}\right) \tag{7.0.17}$$

のように書くと、特性曲線方程式は、パラメータを s とすると

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\partial F}{\partial p} \\ \dfrac{\mathrm{d}t(s)}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\partial F}{\partial q} \\ \dfrac{\mathrm{d}u(s)}{\mathrm{d}s}=p\dfrac{\partial F}{\partial p}+q\dfrac{\partial F}{\partial q} \\ \dfrac{\mathrm{d}p(s)}{\mathrm{d}s}=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}+p\dfrac{\partial F}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}q(s)}{\mathrm{d}s}=-\left(\dfrac{\partial F}{\partial t}+q\dfrac{\partial F}{\partial u}\right) \end{cases} \tag{7.0.18}$$

となる。

Schwinger–Dyson 方程式から導出される Hamilton-Jacobi 方程式

カイラル凝縮 $\varphi(t)\equiv\langle\bar{\psi}\psi\rangle(t)$ は自由エネルギー $W(m_0,t)$ により

$$\varphi(t)=\frac{\partial W(m_0,t)}{\partial m_0} \tag{7.0.19}$$

と定義できる。スケール依存性のある Schwinger–Dyson 方程式の質量補正項とカイラル凝縮の間には

$$\Delta(M,t)=4\pi^2 g\varphi(t) \tag{7.0.20}$$

が成立するので、Schwinger–Dyson 方程式より

$$M(m_0,t)=m_0+4\pi^2 g\varphi(t)=m_0+4\pi^2 g\frac{\partial W(m_0,t)}{\partial m_0}=\frac{\partial}{\partial m_0}\left(\frac{{m_0}^2}{2}+4\pi^2 gW(m_0,t)\right) \tag{7.0.21}$$

を得る[1]。これを式 (6.1.7) に代入すると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial m_0}\left(\frac{{m_0}^2}{2}+4\pi^2 gW(m_0,t)\right)+\frac{\partial H(M(m_0,t),t)}{\partial m_0}=0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial}{\partial m_0}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{{m_0}^2}{2}+4\pi^2 gW(m_0,t)\right)+\frac{\partial H(M(m_0,t),t)}{\partial m_0}=0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial}{\partial m_0}\left(4\pi^2 g\frac{\partial W(m_0,t)}{\partial t}\right)+\frac{\partial H(m_0+4\pi^2 g\varphi(t),t)}{\partial m_0}=0 \end{aligned} \tag{7.0.22}$$

[1] $W(m_0,t)$ の m_0 に依らない定数部分は無視する。

となるので、m_0 の偏微分を取り除くと（m_0 で積分すると）

$$\frac{\partial W(m_0,t)}{\partial t}+\frac{H(m_0+4\pi^2 g\varphi,t)}{4\pi^2 g}=0 \tag{7.0.23}$$

を得る。ここで

$$I(m_0,\varphi,t)\equiv\frac{H(m_0+4\pi^2 g\varphi,t)}{4\pi^2 g} \tag{7.0.24}$$

とおくと、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W(m_0,t)}{\partial t}+I(m_0,\varphi,t)=0 \\ \varphi(t)=\dfrac{\partial W(m_0,t)}{\partial m_0} \\ \text{初期関数}: W(m_0,0)=0 \end{cases} \tag{7.0.25}$$

という自由エネルギーを解とする Hamilton-Jacobi 方程式型の偏微分方程式を得る。

Schwinger–Dyson 方程式と非摂動くりこみ群方程式

非摂動くりこみ群方程式

Wilsonian 有効ポテンシャルを解とする Hamilton-Jacobi 方程式型の非摂動くりこみ群方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,t;m_0)}{\partial t}+f(m,t)=0 \\ \text{質量関数}: m(x,t;m_0)\equiv\dfrac{\partial V(x,t;m_0)}{\partial x} \\ \text{初期関数}: V(x,0;m_0)=2\pi^2 gx^2+m_0x \end{cases} \tag{7.0.26}$$

である。これは、独立変数を x,t とする 2 次元の偏微分方程式である。

そして、この偏微分方程式の両辺を x で偏微分すると、保存則型の非摂動くりこみ群方程式である

$$\begin{cases} \dfrac{\partial m(x,t;m_0)}{\partial t}+\dfrac{\partial f(m,t)}{\partial x}=0 \\ \text{初期関数}: m(x,0;m_0)=4\pi^2 gx+m_0 \end{cases} \tag{7.0.27}$$

を得る。またこの保存則型の偏微分方程式は

$$\frac{\partial m(x,t;m_0)}{\partial t}+\frac{\partial f(m,t)}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial x}=0 \tag{7.0.28}$$

と書くこともできる。

ここで、質量関数の初期関数は

$$m(x,0;m_0)=4\pi^2 gx+m_0=4\pi^2 g\left(x+\frac{m_0}{4\pi^2 g}\right)=m\left(x+\frac{m_0}{4\pi^2 g},0;0\right) \tag{7.0.29}$$

が成立するので、m_0 が有る時の質量関数の初期関数は、m_0 が無い時の質量関数の初期関数を x の方向に $-\dfrac{m_0}{4\pi^2 g}$ 平行移動させた関数になる。また $f(m,t)$ に x が含まれない（$f(x,m,t)$ ではない）ため、任意の t での質量関数に関してもこれは成立する。つまり

$$m(x,t;m_0) = m\left(x + \frac{m_0}{4\pi^2 g}, t; 0\right) \tag{7.0.30}$$

が成立する。また、物理的質量を

$$M_{\rm phys}(m_0,t) \equiv m(0,t;m_0) = m\left(\frac{m_0}{4\pi^2 g}, t; 0\right) \tag{7.0.31}$$

と定義する。$t=0$ の時は

$$M_{\rm phys}(m_0,0) \equiv m(0,0;m_0) = m\left(\frac{m_0}{4\pi^2 g}, 0; 0\right) = m_0 \tag{7.0.32}$$

となる。

次に、式 (7.0.28) において $x=0$ の点を考えると

$$\begin{aligned} &\left.\frac{\partial m(x,t;m_0)}{\partial t}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial f(m,t)}{\partial m}\right|_{m=M_{\rm phys}} \left.\frac{\partial m(x,t;m_0)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\partial M_{\rm phys}(m_0,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(M_{\rm phys},t)}{\partial M_{\rm phys}} \left.\frac{\partial m(x,t;m_0)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \end{aligned} \tag{7.0.33}$$

を得る。この式の最後の項は、

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial m(x,t;m_0)}{\partial x}\right|_{x=0} &= \left.\frac{\partial m\left(x+\frac{m_0}{4\pi^2 g},t;0\right)}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial m\left(x+\frac{m_0}{4\pi^2 g},t;0\right)}{\partial\left(\frac{m_0}{4\pi^2 g}\right)}\right|_{x=0} \\ &= 4\pi^2 g \frac{\partial m\left(\frac{m_0}{4\pi^2 g},t;0\right)}{\partial m_0} = 4\pi^2 g \frac{\partial M_{\rm phys}(m_0,t)}{\partial m_0} \end{aligned} \tag{7.0.34}$$

と書ける。よって保存則の $x=0$ の場合に得られる式 (7.0.33) は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_{\rm phys}(m_0,t)}{\partial t} + 4\pi^2 g \dfrac{\partial f(M_{\rm phys},t)}{\partial M_{\rm phys}} \dfrac{\partial M_{\rm phys}(m_0,t)}{\partial m_0} = 0 \\ \text{初期関数}: M_{\rm phys}(m_0,t) = m_0 \end{cases} \tag{7.0.35}$$

という、物理的質量を解とし、独立変数が m_0, t の 2 次元の偏微分方程式となる。またこの式は以下の方法で得ることもできる。

式 (7.0.27) と式 (7.0.28) の $m_0 = 0$ の時、

$$\begin{cases} m(x,t) \equiv m(x,t;0) \\ \dfrac{\partial m(x,t)}{\partial t} + \dfrac{\partial f(m(x,t),t)}{\partial x} = 0 \\ \text{初期関数}: m(x,0) = 4\pi^2 g x \end{cases} \tag{7.0.36}$$

となるので、$y \equiv 4\pi^2 gx$ とおくと

$$\begin{cases} \tilde{m}(y,t) \equiv m(x,t) = m\left(\dfrac{y}{4\pi^2 g}, t\right) \\ \dfrac{\partial \tilde{m}(y,t)}{\partial t} + 4\pi^2 g \dfrac{\partial f(\tilde{m}(y,t),t)}{\partial y} = 0 \\ \text{初期関数} : \tilde{m}(y,0) = y \end{cases} \tag{7.0.37}$$

という式 (7.0.35) と等価な偏微分方程式が得られた。

2 つの偏微分方程式の等価性

偏微分方程式 (6.1.7) と偏微分方程式 (7.0.35) を並べて書くと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M(m_0,t)}{\partial t} - \dfrac{\partial \Delta(M,t)}{\partial t}\dfrac{\partial M(m_0,t)}{\partial m_0} = 0 \\ \dfrac{\partial M_{\text{phys}}(m_0,t)}{\partial t} + 4\pi^2 g \dfrac{\partial f(M_{\text{phys}},t)}{\partial M_{\text{phys}}}\dfrac{\partial M_{\text{phys}}(m_0,t)}{\partial m_0} = 0 \end{cases} \tag{7.0.38}$$

である。初期関数は等しいので、これらの偏微分方程式等価性を示すには、

$$-\frac{\partial \Delta(p,t)}{\partial t} = 4\pi^2 g \frac{\partial f(p,t)}{\partial p} \tag{7.0.39}$$

を示せばよい。

(1)　4D-cutoff, 0 密度

左辺は、

$$\begin{cases} \Delta(p,t) = gp\left(1 - \mathrm{e}^{-2t} - p^2 \log \dfrac{1+p^2}{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}\right) \\ -\dfrac{\partial \Delta(p,t)}{\partial t} = -\dfrac{2gp\mathrm{e}^{-4t}}{\mathrm{e}^{-2t}+p^2} \end{cases} \tag{7.0.40}$$

となり、右辺は

$$\begin{cases} f(p,t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-4t}}{4\pi^2}\log(1+p^2\mathrm{e}^{2t}) \\ 4\pi^2 g \dfrac{\partial f(p,t)}{\partial p} = -\dfrac{2gp\mathrm{e}^{-4t}}{\mathrm{e}^{-2t}+p^2} \end{cases} \tag{7.0.41}$$

となるので式 (7.0.39) が成立している。

(2)　3D-cutoff, 有限密度

左辺は、

$$\begin{cases} \Delta(p,t) = [\text{t-independent terms}] \\ \qquad\qquad +\theta\left(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}-\mu\right)2pg\left(-\mathrm{e}^{-t}\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}+p^2\log(\mathrm{e}^{-t}+\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2})\right) \\ -\dfrac{\partial\Delta(p,t)}{\partial t} = -\theta(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}-\mu)\dfrac{4gp\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}} \end{cases} \tag{7.0.42}$$

となり、右辺は

$$\begin{cases} f(p,t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-3t}}{\pi^2}\left[\theta(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}-\mu)\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}+\theta(\mu-\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2})\mu\right] \\ 4\pi^2 g\dfrac{\partial f(p,t)}{\partial p} = -\theta(\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}-\mu)\dfrac{4gp\mathrm{e}^{-3t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2t}+p^2}} \end{cases} \tag{7.0.43}$$

となるので式 (7.0.39) が成立している。

参考文献

[1] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122** 345-358 (1961).

[2] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124** 246-254 (1961).

[3] F. J. Wegner and A. Houghton, *Phys. Rev. A* **8**, 401 (1973).

[4] K-I. Aoki and K. Miyashita, *Prog. Theor. Phys.* **121**, 875 (2009).

[5] K-I. Aoki and D. Sato, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013**, 043B04 (2013).

[6] K-I. Aoki, S-I. Kumamoto and D. Sato, arXiv:1304.3289 [hep-th] (2013).

[7] K-I. Aoki, S-I. Kumamoto and D. Sato, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, **2014**, 043B05 (2014).

[8] J. M. Burgers, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam* **43**, 2 (1940).

[9] G. B. Whitham, *Linear and nonlinear waves.* (Wiley-interscience publication, 1974).

[10] F. John, *Partial Differential Equations.* (Applied Mathematical Sciences, 1991).

[11] G. De Nittis, A. Moro, *Proc. Roy. Soc. A* **468**, 701 (2012).

[12] A. Moro, *Ann. Phys.*, **343**, 49 (2014).

謝辞

本論文は、著者が金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻博士後期課程の在学中に行った研究をまとめたものです。本研究を進めるにあたり、素晴らしい研究環境を与えて頂くとともに、多大なるご指導、ご助言を賜りました青木健一先生に心から感謝申し上げます。青木先生には、長期に渡り終始温かいお言葉を頂きました。また、同じグループに在籍していた、小林玉青さん、宮下和洋さん、富田洋さん、藤井康弘さん、佐藤大輔さん、熊本真一郎くん、山田雅俊くん、藤田達大くん、堀祐輔くん、それぞれの方々と折りに触れて活発な議論をして頂きましたことは、研究の大きな糧となりました。特に、小林さんには、研究についてのことだけでなく、研究する者として振る舞い方を教えて頂きました。また、佐藤さんには、幾度となく厳しくも熱意あるご指導をして頂き、心から感謝しています。誰にもまして同じ時間を過ごすことの多かった熊本くんには、研究に対する姿勢を数え切れないくらい学びました。また、熊本くんのおかげで、とても楽しい研究生活となりました。

スタッフの久保治輔先生、末松大二郎先生、青木真由美先生、武田真滋先生、石渡弘治先生には、ゼミやセミナーを通して、多くの有益なアドバイスやコメントを頂きました。この場をお借りして、お礼申し上げます。

この博士論文を書き上げることができたのは、素粒子・宇宙・理論物理研究室の皆様のおかげです。長い間、本当にありがとうございました。