Divisorial contractions to cDV points
(混合デュバル特異点の因子収縮について)

金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻

山本　悠貴

Abstract

In the dissertation, we study 3-dimensional divisorial contractions to cDV points, in particular, with discrepancy greater than 1 which are of exceptional type. By using Kawakita's method in "Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices", and by detailed calculation, we classify all 3-dimensional divisorial contractions to cDV points with discrepancy greater than 1 which are of exceptional type. Therefore we finish the classification of 3-dimensional divisorial contractions to cDV points. Classification of all divisorial contractions tells us that they are obtained as weighted blow-ups of the cDV points embedded into hypersurfaces in $\mathbb{C}^4$ or complete intersections in $\mathbb{C}^5$.

Kawakita classified all divisorial contractions to a point into two types, one is ordinary type, and the other is exceptional type. He also compute data of such contractions of exceptional type. His method is to study the structure of the graded ring which depends on the contraction and its exceptional divisor by using sigular Riemann-Roch formula. However it is not enough to verify that such contractions are obtained as certain weighted blow-ups by the method. So we compute weighted blow-ups and cDV points in detail, and in several cases whose data are computed by Kawakita, there is no divisorial contraction.

代数幾何学において極小モデル理論の完成は重要な位置を占めている．特に係数体が $\mathbb{C}$ で 3 次元以下の場合, それは既に完成されており, 現在はそれに現れる収縮射の分類とその具体的記述が課題となっている．本学位論文ではその内まだ分類されていなかった, cDV 特異点に収縮する discrepancy が 1 より大きい exceptional type の divisorial contraction について, 川北真之氏の論文 "Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices" [2] での方法を用いて具体的に計算し, 具体的な式と収縮射の形を全て決定した.

定理 1. cDV 特異点に収縮する 3 次元 divisorial contraction はその特異点を持つ代数多様体を 4 次元上の超曲面または 5 次元上の complete intersection で表した時, weighted blow-up で表せる.

この結果により点に収縮する 3 次元 divisorial contraction の分類が完成したことになる.

以下, 学位論文の内容について簡単に説明していく.

定義 2. $P \in X$ を正規多様体の germ とするとき, $P \in X$ が**端末特異点**であるとは

(i) ある正の整数 m が存在して mK_X が Cartier divisor になり,
(ii) ある特異点解消 $g\colon Z \to X$ が存在して

$$K_Z = g^*K_X + \sum_E a(E, X)E$$

と表すとき全ての E に対して $a(E, X) > 0$ が成り立つ

事を言う. ただし和は g の全ての例外因子を動き, $a(E, X) \in \mathbb{Q}$ である.

ここで, (i) が成り立つ最小の正の整数 m を $P \in X$ の**指数**といい, (ii) に現れる負でない有理数 $a(E, X)$ のことを E の X 上の **discrepancy(食い違い係数)** という.

端末特異点は極小モデル理論を行うために必要な最小のクラスであり, それに現れる収縮射のいずれについても重要な位置を占めている. 収縮射には大きく分けて 3 種類あり, それぞれ Fano 収縮, flipping contraction, divisorial contraction という. 2 次元以下の代数多様体の極小モデル理論においては flipping contraction は存在せず, 極小モデルは非特異多様体になり, その分類については古くから知られている結果であった.

3 次元端末特異点は全て 4 次元の quotient singularity 上の超曲面に埋め込むことができ, 局所的に見れば方程式の形も決定している. さらに孤立特異点であることもわかっている. 特に 4 次元の超曲面上にある, 即ち指数が 1 である端末特異点を **cDV 特異点**という. この場合 discrepancy は整数値をとる.

定理 3. $o \in (\varphi = 0) \subset \mathbb{C}^4_{x_1x_2x_3x_4}$ を cDV 特異点とすると, φ は次のいずれか.

(i) cA 型: $\varphi = x_1x_2 + g(x_3, x_4)$, $g \in \mathfrak{m}^2$.
(ii) cD 型: $\varphi = x_1^2 + x_2^2x_4 + \lambda x_2x_3^\ell + g(x_3, x_4)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \geq 2$, $g \in \mathfrak{m}^3$.
(iii) cE 型: $\varphi = x_1^2 + x_2^3 + x_2g(x_3, x_4) + h(x_3, x_4)$, $g \in \mathfrak{m}^3$, $h \in \mathfrak{m}^4$.

ここで $\mathfrak{m}$ は $o \in \mathbb{C}^4$ での極大イデアルをいう.

cA 型, cD 型, cE 型というのはそれぞれの特異点を一般の超平面切断をとった時にでてくる特異点が, ADE 特異点 (有理二重点) であることからきている. 一般の超平面切断をとった時にでてくる特異点が A_n 型, D_n 型, E_n 型のとき, 元の cDV 特異点をそれぞれ cA_n 型, cD_n 型, cE_n 型といったりもする.

指数が 2 以上の端末特異点は巡回商特異点 $\frac{1}{r}(1, -1, b)$ $(\gcd(r, b) = 1)$ か, cA/r 型,

$cAx/4$ 型, $cAx/2$ 型, $cD/3$ 型, $cD/2$ 型, $cE/2$ 型 (いずれも $\big(\varphi = 0\big)/\mathbb{Z}_r$ の形をしている) のものに分けられる．本論文ではこれらに収縮する divisorial contraction は扱わないが, それらは川北, 川又, 早川によって全て分類されている．また cDV 特異点に収縮する divisorial contraction においても収縮前の多様体上に存在する.

また, weighted blow-up についてここで簡単に説明しておく.

定義 4. $X := \big(\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\big) \subset \mathbb{C}^4$ を超平面とし, $v = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}^4$ を $a_i \geq 0$ かつ $\gcd(a_1, a_2, a_3, a_4) = 1$ とする．各 i に対して

$$U_i := \Big(\varphi(x_1 x_i^{a_1}, \ldots, \overset{i}{x_i^{a_i}}, \ldots, x_4 x_i^{a_4})\, x_i^{-\operatorname{wt}\varphi} = 0\Big) \subset \mathbb{C}^4/\frac{1}{a_i}\big(a_i - a_1, \ldots, \overset{i}{1}, \ldots, a_i - a_4\big)$$

とおき, それらを貼り合わせてできる射影多様体を $Y := U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$ とおいた時, 自然に誘導される写像 $\pi\colon Y \to X$ を重さ v の **weighted blow-up** という．このとき, その例外因子 E が既約かつ被約なら次の adjunction formula

$$K_Y = \pi^* K_X + \big(\textstyle\sum_i a_i - \operatorname{wt}\varphi - 1\big)\, E$$

が成り立つ.

ここで $\mathbb{C}^4/\frac{1}{r}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ とは $\mathbb{C}^4$ の座標を (x_1, x_2, x_3, x_4) とするとき

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to (\zeta^\alpha x_1, \zeta^\beta x_2, \zeta^\gamma x_3, \zeta^\delta x_4)$$

を作用としてできる商多様体のことである．ただし $\zeta = \exp(2\pi i/r)$ である.
また $\operatorname{wt}\varphi$ とは $\varphi = \sum p_{ijkl} x_1^i x_2^j x_3^k x_4^l$ としたときの, $\operatorname{wt}\varphi = \inf\{a_1 i + a_2 j + a_3 k + a_4 l \mid p_{ijkl} \neq 0\}$ のことである.

weighted blow-up の定義は厳密には異なり, トーリック多様体の重さ v による星状細分に対応するトーリック射から自然に導入される射のことをいうが, 本論文における weighted blow-up は上の定義と一致する場合しか扱われない.

さて, 本論文における主結果の内容について述べていく.

X を $\mathbb{C}$ 上で定義される 3 次元射影代数多様体とし, $P \in X$ を端末特異点とする．特に P の近傍を考えるので, $P \in X$ は germ として考える.

定義 5. 双有理写像 $f\colon Y \to X$ は次の条件を満たす時, **divisorial contraction**（因子収縮）という.

(i) Y は高々端末特異点しか持たない.

(ii) f の例外集合 E は既約因子である.

特に $f(E) = P$ となる場合, $f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$ と表すことにする.

早川氏は cDV 特異点に収縮する divisorial contraction $f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$ で discrepancy が 1 となるもの, 即ち minimal discrepancy となるものを全て分類した. さらに川北氏の結果により cDV 特異点に収縮する divisorial contraction $f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$ で discrepancy が 1 より大きいものは以下の表 1 の場合を除けば, X を 4 次元上の超曲面か 5 次元上の complete intersection で表した時, 全て weighted blow-up で表せることがわかっていた.

表 1

f の種類	端末特異点 P	discrepancy	Y 上の超曲面にない端末特異点
$e1$	cA_2, cD	4	$\frac{1}{r}(1,-1,8)$; $r \equiv \pm 3 \pmod 8$
	cD	2	$\frac{1}{r}(1,-1,4)$
$e2$	cD, $cE_{6,7}$	2	cA/r or $cD/3$; $cD/3$ for $cE_{6,7}$
$e3$	cA_2, cD, cE_6	3	$cAx/4$
$e5$	cE_7	2	$\frac{1}{7}(1,6,6)$
$e9$	$cE_{7,8}$	2	$\frac{1}{3}(1,2,2)$ and $\frac{1}{5}(1,4,4)$

ここで f の種類とは川北氏によって分類された exceptional type の種類のことである. 後述するが, Y 上の fictitious singularity の basket からできるある集合によって分類してある.

本論文では, 表 1 の各場合について詳細な計算を行い次の定理を得た.

定理 6. 表 1 の条件を満たす 3 次元 divisorial contraction $f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$ は存在しないか, X を 4 次元上の超曲面または 5 次元上の complete intersection で表した時 weighted blow-up で表せる.

存在しないのは $e1$ 型で P が cA_2 型のもの, $e2$ 型で P が cD_n 型 $(n > 5)$, Y 上の特異点が $cD/3$ 型のもの, $e2$ 型で P が cE_7 型のもの, $e3$ 型で P が cD_n 型 $(n > 5)$ のもの, $e3$ 型で P が cE_6 型のものである.

この定理を川北氏の方法を用い, さらに詳細な計算をし証明した. 以下ではその方法の概略を説明する.

$P \in X$ を cDV 特異点とし, $f\colon (Y \supset E) \to (X \ni P)$ を表 1 の divisorial contraction とする. $P \in X \simeq o \in (\varphi = 0) \subset \mathbb{C}^4$ と表し, $\mathbb{C}^4$ の座標系を (x_1, x_2, x_3, x_4) とする.

f とその例外因子 E からできる次数付き環 $\bigoplus_j f_*\mathcal{O}(-jE)/f_*\mathcal{O}(-(j+1)E)$ の構造を考え, その構造に合うような P の座標系を新たに置き換え, f がある weighted blow-up で表せることを示していく. 具体的には次の weighted blow-up であることを示す補題と特異点付きの Riemann-Roch の定理が重要となる.

補題 7. m_i を E に沿っての x_i の 重複度, 即ち $x_i \in f_*\mathcal{O}_Y(-m_iE)$ となる最大の整数, d を重さ $\mathrm{wt}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ による φ の 重み付き次数, $c := m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - d - 1$ とする. $\gcd(m_1, m_2, m_3, m_4) = 1$ と仮定する.
$\bar{g}\colon (\bar{Z} \supset \bar{F}) \to (\bar{X} \in P)$ を重さ (m_1, m_2, m_3, m_4) の weighted blow-up, Z を X の $\bar{Z}$ への双有理変換, $g\colon Z \to X$ を g から導入された射としたとき, 次の条件

(i) $\bar{F} \cap Z$ は Z 上の既約で被約な因子 F を定め,
(ii) Z は F の生成点で非特異で,
(iii) $\dim(\mathrm{Sing}\,\bar{Z} \cap Z) \leq 1$ が成り立ち,
(iv) $c = a$

を満たすならば, $f \simeq g$ over X が成り立つ.

定理 8 (特異点付き Riemann-Roch)**.** D を 各点 $Q \in Y$ に対して $D \sim e_Q K_Y$ となる $e_Q \in \mathbb{Z}$ が存在する Y 上の因子とするとき, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{O}_Y(D)) = \chi(\mathcal{O}_Y) + \frac{1}{12}D(D-K_Y)(2D-K_Y)\\ +\frac{1}{12}D\cdot c_2(Y) + \sum_Q c_Q(D),\end{aligned}$$

ここで $c_2(Y)$ は第 2 Chern 類である. また和は X 上の特異点全てをとり, $c_Q(D) \in \mathbb{Q}$ は特異点 Q により決まる値で, Q と $\mathcal{O}_Y(D)$ の local analytic type にしかよらない.

端末特異点 Q は small deformation を施すことによりいくつかの巡回商特異点になることが知られている. この商特異点を Q の **fictitious singularity** といい, Y 上の全ての端末特異点の fictitious singularity の集合を Y 上の fictitious singularity の **basket** という. $\sum_Q c_Q(D)$ は Y 上の fictitious singularity の basket から計算される.

$I_0 := \{Q, \text{of type}(1/r_Q)(1, -1, b_Q)\}$ を Y 上の fictitious singularity の basket とし, 各 $Q \in I_0$ に対し, Q の近傍で $E \sim e_Q K_Y$ となる最小の正の整数 e_Q をとる. これは

常に存在する．必要なら b_Q を $r_Q - b_Q$ に置き換えることにより $v_Q := \overline{e_Q b_Q} \le r_Q/2$ とする．ここで, $^-$は r_Q で割った余りのことである．$I := \{Q \in I_0 \mid v_Q \neq 0\}$ とし, $J := \{(r_Q, v_Q)\}_{Q \in I}$ とおく．川北氏の結果によって J は分類されており次のようになる．

表 2

f の種類	J	f の種類	J
$e1$	$(r,2)$	$e5$	$(7,3)$
$e2$	$(r,1)$, $(r,1)$	$e9$	$(5,2)$, $(3,1)$
$e3$	$(2,1)$, $(4,1)$		

この結果を使い, 次のように f が weighted blow-up で表されることを示している．

Step 1. 特異点付き Riemann-Roch の定理と川又-Viehweg の消滅定理を使い, 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathbb{C}$ 線形空間

$$V_j := f_* \mathcal{O}_Y(-jE)/f_* \mathcal{O}_Y(-(j+1)E)$$

の次元を計算する．この線形空間は E の周りで j 回消える X 上の関数の空間と見れる．

Step 2. Step 1 の結果を用い, 同型 $P \in X \simeq o \in (\varphi = 0) \subset \mathbb{C}^4$ から V_j の基底を求め, weighted blow-up の重さの候補を求める．

Step 3.

(i) 重さを定めて φ を書き換え,

(ii) その重さを持つ weighted blow-up $f' \colon Z \to X$ の例外因子が既約かつ被約になる必要十分条件を求め,

(iii) Z 上の特異点全てが端末特異点である必要十分条件を求めて,

補題 7 により, f が f' と同型であることがわかる．

この手順を各種類全てに対して行い, 分類を完成させた．ここでは, f が $e2$ 型, discrepancy が 2, P が cD 型の場合を例に挙げ, 概略を紹介することにする．

f が $e2$ 型, discrepancy が 2 の場合, $J = \{(r,1),(r,1)\}$ であり, $E^3 = 1/r$ である．これより $\dim V_j$ を計算すると,

$$\dim V_j = \#\left\{(l_1, l_2, l_3, l_4) \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0} \mid rl_1 + rl_2 + 2l_3 + l_4 = j,\ l_1 l_2 = 0\right\}$$

であることが分かる．このようにして $\dim V_j$ が分かると, 正確には $\bigoplus V_j$ を見て証明しなければならないが, 重さ $(r, r, 2, 1)$ をもつ weighted blow-up が候補となり, $\mathrm{wt}\,\varphi = 2r$ であることが分かる．ただし, この重さは座標系の順番通りではない．従って $\mathrm{wt}\,\varphi = 2r$ を満たすように cD 型の方程式から正確な重さを決めてあげなければならない．

cD 型の方程式は次のようであった.

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2x_4 + \lambda x_2 x_3^\ell + g(x_3, x_4), \quad \text{ただし } \lambda \in \mathbb{C},\ \ell \geq 2,\ g \in \mathfrak{m}^3.$$

この方程式から weighted blow-up の重さも候補を計算すると $(\mathrm{wt}\, x_1, \mathrm{wt}\, x_2, \mathrm{wt}\, x_3, \mathrm{wt}\, x_4) = (r, r, 2, 1)$ または $(r, r, 1, 2)$ となる. P が指数 2 以上の端末特異点の場合はもう少し条件があり, そのおかげで重さがほぼ決定していたが, cDV 特異点ではそうはいかない事が多かった. この点が川北氏の論文との大きな違いである.

さて, 重さの候補が決まったのでそれぞれの候補に対して条件を与えていくのだが, それは式を変形した後, 実際に weighted blow-up を行い諸条件を確認していくことをする. 詳細な計算が必要となるのでここでは割愛せざるを得ないが, 特に重要なのは, weighted blow-up を施した多様体の各チャートの原点が端末特異点かどうか調べることと, 表 6 で分類されている超曲面上にない端末特異点が一致しているかどうかを確かめることである. この詳細な計算を行うことで次の定理が得られる.

定理 9. f は $e2$ 型で P を cD 型とする discrepancy 2 の divisorial contraction とする. このとき次のどちらかが成り立つ.

(i) $P \in X$ は

$$o \in \left(x_1^2 + x_2^2x_4 + 2x_2x_4p(x_3, x_4) + \lambda x_2 x_3^k + q(x_3, x_4) = 0\right) \subset \mathbb{C}^4_{x_1x_2x_3x_4}.$$

と同型で, f は重み $\mathrm{wt}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (r, r, 2, 1)$ の weighted blow-up となる. ただし

(1) $\lambda \in \mathbb{C}$, $k > r/2$, $\mathrm{wt}\, q \geq 2r$ であり, p は上記の重みを入れた時, 重み次数が $r - 1$ の同次多項式である.
(2) $p \neq 0$ または $q_{wt=2r} \neq 0$ で, $p = 0$ ならば. $q_{\mathrm{wt}=2r}$ は square でない.
(3) $x_3^r \in q$ が成り立つ.

この場合, Y 上の超曲面でない特異点は cA/r 型をしている.

(ii) $P \in X$ は

$$o \in \left(x_1^2 + x_2^2x_4 + 2x_2x_4p(x_3, x_4) + x_2x_3^3 + q(x_3, x_4) = 0\right) \subset \mathbb{C}^4_{x_1x_2x_3x_4}.$$

と同型で, f は重み $\mathrm{wt}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 3, 1, 2)$ の weighted blow-up である. ただし

(1) $\mathrm{wt}\, q \geq 6$ であり, p は上記の重みを入れた時, 重み次数が 2 の同次多項式である.
(2) $x_4^3 \in q$ が成り立つ.

この場合, Y 上の超曲面でない特異点は $cD/3$ 型をしており, P は cD_4 型である.

特に定理 9 の後者の weighted blow-up は例すら発見されていなかったものである.

参考文献

[1] M. Kawakita, General elephants of three-fold divisorial contractions, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 331–362.

[2] M. Kawakita, Three-fold divisorial contractions to singularities of higher indices, Duke Math. J. **130** (2005), 57–126.

[3] M. Kawakita, Erratum to “General elephants of three-fold divisorial contractions”, preprint.

平成２９年　２月１０日

学位論文審査報告書（甲）

１．学位論文題目（外国語の場合は和訳を付けること。）

Divisorial contractions to cDV points

（混合デュバル特異点の因子収縮について）

２．論文提出者　(1) 所　　属　数物科学　　　専攻

(2) 氏　　名　山本悠貴

３．審査結果の要旨（600～650字）

山本悠貴氏の学位論文について，各審査委員が個別に検討し，平成29年2月1日に口頭発表を行った．その後2月3日に審査委員会を開催し，協議の結果，以下のように判定した．

本学位論文は，3次元代数多様体の極小モデル理論に関連する双有理射を扱ったものである．極小モデル理論では，端射線の縮小によって得られる射が基本的であり，そのうちで既約な因子をつぶす双有理射が因子収縮である．3次元以上の極小モデル理論では，端末特異点をもつ代数多様体を扱う必要があるため，重要な問題であるにもかかわらず，因子収縮の記述は完全にはできておらず，指数が１の端末特異点である混合デュバル特異点につぶれるものの解析が残されていた．本論文において山本氏は，複雑な計算が必要で最後まで残されていた因子収縮のすべてについて，存在するか否かを明らかにし，存在するものについては詳細な記述を与えた．その結果として，3次元代数多様体の間の既約な因子を１点につぶす因子収縮の分類が完成し，それらはすべて，特異点を高々5次元の巡回商特異点の中に埋め込んでおいて，重み付きのブローアップを施すことによって得られることが分かった．因子収縮の分類の完成は，森ファイバー空間の間の双有理写像についての研究に応用できることが知られており，実際にすでに山本氏の結果が引用され，研究が進んでいる．

以上のような成果をもつ本学位論文は，関連する分野の更なる発展が期待されるものであり，博士（理学）の学位に十分に値するものであると考える．

４．審査結果　　(1) 判　　定（いずれかに○印）　合　格　・　不合格

(2) 授与学位　　博　士（　理学　）