On the estimate of the arithmetic genus for normal two-dimensional singularities with multiplicity two

氏　　　　名	高　村　昌　和
生　年　月　日	昭和 47 年 2 月 4 日
本　　　　籍	富山県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第 606 号
学位授与の日付	平成 15 年 9 月 30 日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第 4 条第 1 項）
学位授与の題目	On the Estimate of the Arithmetic Genus for Normal Two-Dimensional Singularities with Multiplicity Two （重複度 2 の正規 2 次元特異点に対する算術種数の評価について）
論文審査委員(主査)	児玉　秋雄（理学部・教授）
論文審査委員(副査)	加須榮　篤（自然科学研究科・教授）伊藤　達郎（理学部・教授） 藤解　和也（工学部・助教授）泊　昌孝（日本大学・教授）

学位論文要旨

In this paper, we deal with normal two-dimensional singularities with multiplicity two. We call such a singularity double point. The purpose of this paper is to give an estimate of the arithmetic genus for double points in terms of Horikawa's canonical resolution and a p_a-formula for some class of double points. It is known that, by using the data obtained from the canonical resolution, the geometric genus for double points is formulated, and rational double points and elliptic double points are characterized. We give a characterization of double points with the arithmetic genus two.

(S,p) を 2 次元正規特異点の芽とし, $\pi : (\tilde{S}, A) \to (S,p)$ をある特異点解消とする. ここで A は π の例外集合である. 算術種数は $p_a(S,p) = \sup\{p_a(Z) \mid Z > 0, \mathrm{supp}(Z) \subset A\}$ によって定義され (Wagreich [5]), 特異点解消の選び方に依存しない不変量である. ここで, $p_a(Z)$ は因子 Z の仮想種数である.

この論文では, (S,p) が重複度 2 をもつ 2 次元正規特異点をあつかう. 以下, それを 2 重点と呼ぶ. 2 重点は 2 重被覆上の特異点とみなすことができ, Horikawa

による標準的特異点解消 (Horikawa [2]) を適用することができる．その特異点解消にあらわれる不変量をもちいて算術種数の上からの評価を与えた．また，この評価は，2重被覆の分岐集合の重複度による線形な評価としては最良である事を示した．さらに，2重点のあるクラスについて，算術種数の公式を与え，算術種数2をもつ2重点の特徴付けを与えた．

(S_1, p_1) を2重点とする．(S_1, p_1) が，有理特異点である場合には，算術種数は0であり，有理特異点の特異点解消過程に観点をおいた特徴付けは得られている．そこで，以下，(S_1, p_1) は非有理特異点とする．$\tilde{\pi} : S_{r+1} \to S_1$ を標準的特異点解消とする．このとき，次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccccccc}
S_1 & \xleftarrow{\tilde{\pi}_1} & S_2 & \xleftarrow{\tilde{\pi}_2} & \cdots & \xleftarrow{\tilde{\pi}_r} & S_{r+1} \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} & & & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{r+1}} \\
U_1 & \xleftarrow{\pi_1} & U_2 & \xleftarrow{\pi_2} & \cdots & \xleftarrow{\pi_r} & U_{r+1} \\
\cup & & \cup & & & & \cup \\
B_1 & & B_2 & & & & B_{r+1}
\end{array}$$

π_i は B_i のある特異点 p_i を中心とするブローアップである．また，S_i は B_i を分岐集合とする U_i 上の2重被覆となっている．m_i と γ_i を $m_i = \mathrm{mult}_{p_i}(B_i)$, $\gamma_i = \left[\frac{m_i}{2}\right] - 1$ と定義する．2重点の特異点解消は，1:点を中心とするブローアップと2:有限回の非特異曲線を中心とするブローアップによる正規化という操作1と操作2を交互に有限回施すことによって得られる．この方法で特異点解消をするとき，操作1と2が標準的特異点解消の過程の1ステップに対応している．このとき，γ_i はちょうど操作2でのブローアップの回数に等しくなる．このようなことから，$\{\gamma_i\}$ により2重点の不変量を特徴付けることは，2重点を特異点解消の過程に観点を置いた特徴付けをあたえることを意味している．$\tilde{\pi}$ の例外集合は，π の例外集合の2重被覆となっている．そのことから，次の定理を得た．

定理1．σ を位数2の S_{r+1} の被覆変換とする．写像 $\alpha : \mathrm{Div}(U_{r+1}) \to \mathrm{Div}(U_{r+1})$ を，$\alpha(D) = \sum_{1 \le j \le r} \left\lceil \frac{DY_j^{(r+1)} + \gamma_j}{2} \right\rceil Y_j^{(r+1)}$ によって定義する．そのとき，次の式を得る．

(1) $p_a(S,p) = max\left\{ p_a(D) \,\middle|\, \sigma^*(D) = D,\ D \text{ is a cycle on } S_{r+1},\ D \ge 0 \right\}$.

(2) $p_a(S,p) = max\left\{ p_a\left(\psi_{r+1}^*\left(\frac{1}{2}D + \alpha(D)\right)\right) \,\middle|\, \mathrm{supp}(D) \subset B_{r+1}^{\mathrm{exc}},\ D \ge 0 \right\}$.

(3) $p_a(S,p) - p_a(Y_{S,p}) = \frac{1}{4}\Gamma^{odd}(\{1 \le j \le r\}) - \frac{1}{4}V^{min}(\{1 \le j \le r\})$.

ここで$Y_i^{(r+1)}$は(U_i, p_i)のU_{r+1}上の極大イデアル輪体である. Γ^{odd}は奇数であるγ_iの個数であり, $V^{\min}$は$\{\gamma_i\}$と$\{E_i^{(r+1)} \cdot Y_j^{(r+1)}\}$にのみ依存する不変量である, ただし, $E_i^{(r+1)}$は$\pi_i^{-1}(p_i)$のU_{r+1}への固有変換像である. $Y_{S,p}$は(S,p)の標準的特異点解消から定まるS_{r+1}上の因子で, $p_a(Y_{S,p})$はγ_iから簡単に計算できる.

$\tilde{B}_i$によってB_1のU_iへの固有変換像とする. B_iの特異点qに対して, $\mathrm{mult}_q(B_i) = \mathrm{mult}_q(\tilde{B}_i)$のとき, 特異点$q$はタイプAであるという. $V^{\min}$の加法的になる条件をしらべ, 標準的特異点解消の過程をつかって, あらたな2重点を構成し, 上の定理を使うことによって次の定理を得た.

定理2. $\tilde{\pi} : S_{r+1} \to S$を2重点$(S,p)$の標準的特異点解消とする. $r \geq 2$と仮定する. さらに, 次の条件をみたす$2 \leq n \leq r$が存在すると仮定する.

(a) p_nが上の定義の意味でタイプAの特異点である.

(b) p_nを除いてB_nには特異点が存在しない.

このとき,

(1) p_nがS_nの有理特異点であれば, 次の条件(a)〜(c)を満たす2重点(S', p')が存在する.

(a) $p_a(S,p) - p_a(Y_{S,p}) = p_a(S',p') - p_a(Y_{S',p'})$.

(b) $(S,p) \sim (S',p')$.

(c) $r(S',p') = n-1$.

(2) p_nがS_nの非有理特異点であれば, 次の条件(a)〜(c)を満たす2重点(S', p')が存在する.

(a) $p_a(S,p) - p_a(Y_{S,p}) = p_a(S',p') - p_a(Y_{S',p'}) + p_a(S_n, p_n) - p_a(Y_{S_n,p_n})$.

(b) $(S,p) \sim (S',p')$.

(c) $r(S',p') = n-1$.

ここで$r(S',p')$は(S',p')の標準的特異点解消のブローアップの回数をしめしている. $(S,p) \sim (S',p')$は, (S,p)のデータ: $\{m_j, \tilde{m}_j\}_{1 \leq j \leq n-1}$と$\{E_i^{(r+1)} Y_j^{(r+1)}\}_{1 \leq i,j \leq n-1}$が$(S',p')$のそれに等しいことを意味する, ただし, $\tilde{m}_j = \mathrm{mult}\tilde{B}_j$.

(S,p)を除いてその標準的特異点解消の過程にタイプAの特異点があらわれない場合について$p_a(S,p) - p_a(Y_{S,p})$を詳細に評価し, 上の定理を使うことによって,

次の定理を得た.

定理3. 任意の2重点 (S,p) に対して, 不等式

$$p_a(S,p)-p_a(Y_{S,p})\leq\left[\frac{m_1-1}{8}\right]-\sum_{\substack{1\leq j\leq r\\ J_j>0}}\left[\frac{J_j-1}{8}\right]$$

が成り立つ. J_j は標準的特異点解消の過程で得られる0以上の不変量である. この定理からただちに次の系を得る.

系4. $p_a(S,p)-p_a(Y_{S,p})\leq\frac{1}{8}m_1$.

次は定理3の評価式において, 等号が成り立つ例である.

例. $\{g_k\}_{k\geq 1}$ を, 次のように定義された多項式からなる列とする.

$$g_k(x,y)=y\prod_{i=1}^{k}\Big\{(x^{4i}-y^2)(x^{6i}-(y+x^{2i-1})^3)(x^{6i}-(y+2x^{2i-1})^3)\Big\}.$$

$k\geq 1$ に対して, $(S^{(k)},p)=(\{z^2=g_k(x,y)\},o)$ とする. このとき, $(S^{(k)},p)$ に対して定理3の不等式の両辺は共に k に等しくなる.

この系4と Tomari [4] による算術種数の下からの評価を合わせて次の定理を得た.

定理5. (S,p) を $m_1\leq 8$ の非有理な2重点とする. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$p_a(S,p)=p_a(Y_{S,p}).$$

この定理5から次の系を得る.

系6. (S,p) を2重点とする. 算術種数が2となる必要十分条件は, $\gamma_i=2$ かつ $\gamma_j\leq 1(j\neq i)$ となる i が存在することである.
これは既に知られている $p_a=0$ となる2重点や $p_a=1$ となる2重点の $\{\gamma_i\}$ による特徴付けの類似となっている (Tomari [4]). この系6により, 算術種数2をもつ2重点の最小特異点解消の重み付き双対グラフを, 全て計算することができる (Takamura [3]).

参考文献

[1] Abhyanker, S. S., Local rings of high embedding dimension, *Amer. J. Math.*, **89** (1967), 1073-1077.

[2] Horikawa, E., On deformations of quintic surfaces, *Invent. Math.*, **31** (1975), 43-85.

[3] Takamura, M., On Horikawa's canonical resolution and isolated two-dimensional singularities of double coverings (Thesis for master degree), *Kanazawa Univ.*, 1999, *January*, 1-95.

[4] Tomari, M., A geometric characterization of normal two-dimensional singularities of multiplicity two with $p_a \leq 1$, *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, **20** (1984), 1-20.

[5] Wagreich, Ph., Elliptic singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 419-454.

学位論文審査結果の要旨

提出された学位論文等を各審査委員が個別に審査すると共に、平成15年7月31日に開催された口頭発表会、およびその後に開かれた審査会において慎重に審議した結果、以下の通り判定した。

2次元特異点の分類は19世紀以来代数幾何学において重要な研究課題である。2次元特異点に関しては代数曲線の種数にあたる不変量として幾何種数 Pg、算術種数 Pa、基本種数 Pf などが定義され、これらを特異点の幾何学的データにより決定することは重要である。Pa=0 および Pa=1 となるクラスの例外集合の分類・構造論の後、算術種数の観点から一般型にあたるクラスを解析することは重要な問題になったのだが、場合分けの多様性を始めとする多くの困難により、一般論はほとんど存在しない状況であった。

高村氏の主定理は、重複度2を仮定し、特異点 V を曲線 $\{g(x,y) = 0\}$ で分岐する2重被覆と表したとき、堀川氏の標準特異点解消理論の幾何学的データにより、その算術種数 Pa を上から評価するものである。堀川理論は、分岐曲線の特異点解消過程を影とみなすことによって、V の特異点解消を記述するものであり、これまでに、正規化に必要となる各段階の空間のねじれ度 γ_i が、Pa の下からの評価を与える事が泊氏によって示されていた。本論文ではこれまでに示されていた下からの評価と実際の Pa との隔たりを、分岐曲線の位数の関数により評価し、さらにそれが線形評価としては最良であることも示している。

高村氏の証明は、分岐の型を巧みに分けて状況を分割し、多くの困難を見事に切り抜けるものであり、結果は2重点の不変量の研究として第一級なものと判断出来る。

以上のことから、本論文が博士（理学）論文に十分値するものと判定した。