

# On the first subconstituent of a quadratic forms scheme

メタデータ	言語: English 出版者: 公開日: 2017-10-05 キーワード: 作成者: 岩元, 誠一 メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/16675">http://hdl.handle.net/2297/16675</a>

氏名	岩元 誠一
生年月日	
本籍	鹿児島県
学位の種類	博士(理学)
学位記番号	博甲第666号
学位授与の日付	平成16年3月25日
学位授与の要件	課程博士(学位規則第4条第1項)
学位授与の題目	On the first subconstituent of a quadratic forms scheme. (Quadratic forms schemeの第一近傍について)
論文審査委員(主査)	伊藤 達郎(理学部・教授)
論文審査委員(副査)	伊藤 秀一(理学部・教授) 山田美枝子(理学部・教授) 菅野 孝史(理学部・教授) 野村 明人(工学部・講師)

## 学位論文要旨

### Abstract

Let  $q$  be a power of an odd prime and let  $GF(q)$  denote the finite field of  $q$  elements. Let  $n$  be a natural number ( $n \geq 3$ ) and let  $X$  denote the set of symmetric matrices over  $GF(q)$  of size  $n$ . For an integer  $i$  ( $0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ ), let  $X_i$  denote the subset of  $X$  that consists of matrices in  $X$  of rank  $2i-1$  or  $2i$ . Let  $R_i$  ( $0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$ ) be a relation on  $X$  defined by  $(M, M') \in R_i \iff M' - M \in X_i$ , i.e.,  $\text{rank}(M' - M) = 2i - 1, 2i$ . Then we have a  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}})$ , which is called the *quadratic forms scheme*. The subset  $X_i$  is called the  *$i$ th subconstituent*. As a step to find the eigenvalues of the first subconstituent  $X_1$  of a quadratic forms scheme, we determine the orbits of  $GL_n(q)$  acting on  $X_1 \times X_1$ .

代数的組合せ論において、 $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme という概念がある。これは rank 1 の離散的対称空間ともいうべきもので、association scheme のなかでも中心的な対象であり、その分類が Terwilliger algebra の表現論を用いて進展中である。本論文は、その中の quadratic forms scheme に対してのアプローチである。

$q$  を奇素数べきとして、 $X$  を  $GF(q)$  上の  $n$  次対称行列全体とする。 $R_i$  を

$$(M, M') \in R_i \iff \text{rank}(M' - M) = 2i - 1, 2i$$

として定義される  $X$  上の関係とする。このとき配列  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq \frac{n+1}{2}})$  を *quadratic forms scheme* といい、

$$X_i := \{M \in X \mid \text{rank} M = 2i - 1, 2i\}$$

を  *$i$ th subconstituent* という。

$x \in X$  を固定し、 $A_i$  を  $i$ th associate matrix (関係  $R_i$  の隣接行列)、 $E_i^* = E_i^*(x)$  を  $(E_i^*)_{zz} = (A_i)_{zz}$  で定まる対角行列とおく。 $T = \langle A_i, E_j^* \mid 0 \leq i, j \leq \frac{n+1}{2} \rangle$  を  $\mathcal{X}$  の *Terwilliger algebra* という。

$W(W \subset C^{|\mathcal{X}|})$  を irreducible  $T$ -module とする。  $W$  の *endpoint* を  $\min\{i | E_i^* W \neq 0\}$  で定める。  $W$  が *thin* であるとは、  $\dim(E_i^* W) \leq 1$  (all  $i$ ) であるときをいい、全ての irreducible  $T$ -module が *thin* であるときに、  $\mathcal{X}$  を *thin* という。

quadratic forms scheme は non-thin なクラスに属する  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme で、その他には bilinear forms scheme、 alternating forms scheme、 Hermitian forms scheme と Doob scheme が non-thin なクラスに属することが知られている。

endpoint 1 の irreducible  $T$ -module は  $\mathcal{X}$  の first subconstituent の固有値で決まることが知られており、その決定は  $P$ - and  $Q$ -polynomial association scheme の分類において重要である。 quadratic forms scheme 以外の classical forms scheme については first subconstituent の固有値は求められており、本論文は quadratic forms scheme の場合への最初のアプローチである。

$G = GL_n(q)$  は  $\mathcal{X}$  の first subconstituent  $X_1$  上に  $M \rightarrow {}^t g M g (g \in G, M \in X_1)$  として作用し、  $X_1 \times X_1$  上にも自然に作用する。  $\{R_i^*\}$  を  $X_1 \times X_1$  上の  $G$  軌道全体とすると、  $\mathcal{X}^* = (X_1, \{R_i^*\})$  は coherent configuration になる。これは association scheme より広いクラスの組合せ論的对象であり、 association scheme  $\mathcal{X}$  は coherent configuration  $\mathcal{X}^*$  の fusion scheme として再構成される。

$\Gamma = (X_1, R_1 |_{X_1 \times X_1})$  を  $X_1$  上の graph とする。  $\mathcal{X}$  の first subconstituent の固有値とは、  $\Gamma$  の固有値のことをいう。  $\Gamma$  の固有値は  $\mathcal{X}^*$  の combinatorial parameter により計算可能であり、  $\mathcal{X}^*$  の組合せ論的構造を調べることにより  $\Gamma$  の固有値を求めることが我々の基本的方針である。本論文ではこのための最初のステップとして、  $X_1 \times X_1$  上の  $G$  軌道を求めた。

$G$  軌道は 6 個のタイプに分かれ、それぞれのタイプの  $G$  軌道は、本論文の定理 3.1 から定理 3.6 に記述した。

## 学位論文審査結果の要旨

提出された学位論文ならびに学位申請書類にもとずき、2月10日審査会を開催し、口頭発表、面接審査を行ったうえ、以下の通り判定した。

本論文は、有限体  $F_q$  ( $q$  は奇素数冪) 上定義された quadratic forms scheme の第一近傍の上で、  $GL_n(q)$  の作用 (非可遷) が定める coherent configuration の relations を決定したものである。

classical forms scheme の parameters による特徴付けは、代数的組合せ論の中で重要な位置を占めているが、表現論的アプローチにおいて (特に Terwilliger algebra の表現において) 第一近傍の固有値がまず問題になる。 classical forms scheme のうち、 quadratic forms scheme の第一近傍だけが、まだ解明されておらず、固有値もまだ分かっていない。本論文は、 quadratic forms scheme の第一近傍上の coherent configuration の relations を完全に決定しており、次のステップである

(1) intersection numbers の決定、(2) 固有値の決定 に必要不可欠なデータを提供している。

本論文は、relations を明解に表記する数学的工夫をしたうえで、根気良く計算を遂行し、以後の研究の基礎データを与えるものであり、十分学位に値すると判定した。