Some properties of invertible substitutions of rank d, and their extension

氏　　　名	江　居　宏　美
生年月日	
本　　　籍	広島県
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博乙第271号
学位授与の日付	平成15年9月30日
学位授与の要件	論文博士（学位規則第4条第2項）
学位授与の題目	Some Properties of Invertible Substitutions of Rank d, and Their Extension（位数dの可逆記号変換の諸性質とその高次元化）
論文審査委員(主査)	伊藤　俊次（工学部・教授）
論文審査委員(副査)	加須榮　篤（自然科学研究科，教授）伊藤　秀一（理学部・教授） 土谷　正明（自然科学研究科，教授）白井　朋之（理学部・助教授）

学位論文要旨

It is known by Nielsen that any automorphism on the free group of rank d is decomposed by three automorphisms. And also ZX Wen and ZY Wen (cf. [7]) found three generators of invertible substitutions of rank 2 in combinatorial way, which is called decomposition theorem of invertible substitution of rank 2.

In the paper [2] we consider invertible substitutions of rank 2; and the theme of the paper is to characterise invertible substitutions of rank 2 by dealing substitutions which are combinatorial objects as geometrical ones, and by analysing topological property of the atomic surface of a substitution. We have:

1. a proof of decomposition theorem of invertible substitution of rank 2,
2. a necessary and sufficient condition that a substitution of rank 2 is invertible in geometrical way,
3. a substitution is invertible if and only if the atomic surface of the substitution is an interval.

The aim of this paper is to inherit the theme from [2], and to extend above results for endomorphisms on the free group of rank d. To deal endomorphisms as geometrical objects, we introduce the **higher dimensional substitution** (extension) and we get a result related to 2.

By using the **dual map** (dual extension) of the higher dimensional substitution, we obtain the fact that the boundary of the atomic surface of a substitution is given by the inverse of the substitution if it is invertible.

Key Words: Substitution, Invertible substitution, Higher dimensional substitution, Dual map

論文の Key word は "Substitution, Invertible substitution, Higher dimensional substitution, Dual map" である．**rank** d **の Substitution** とは，d 個の文字からなる Free group F_d 上の準同型写像を "Free monoid 上 に制限" したものである．以下の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は，Free group F_d 上の自己準同型写像である．

$$\alpha_1 : \begin{cases} 1 \to 12 \\ 2 \to 1 \end{cases} \quad \alpha_2 : \begin{cases} 1 \to 2 \\ 2 \to 2^{-1}1 \end{cases} \quad \alpha_3 : \begin{cases} 1 \to 122 \\ 2 \to 21 \end{cases}$$

α_1 は Substitution だが, $\alpha_2(1) = \underline{2^{-1}}1$ は Free monoid の要素ではないので, Substitution ではない. α_1 は Inverse α_2 を持つので Invertible だが, α_3 は Invertible ではない. "Substitution σ が Invertible かどうか, 実際に Inverse を求めることなく判定する方法はあるか?" その疑問に対し, 後に述べる定理 I (2) を得る.

Substitution による Atomic Surface とは, Fixed point (例えば, $\omega = \lim_{n\to\infty} \alpha_1{}^n(1) = 12112121121\cdots$) からできる, 階段状の折れ線上の格子点を, ある直線 (平面) P に射影した点の集合の closure をとったものである. (cf. 図 1.) この Atomic surface 上で, Substitution σ によって特徴づけられる力学系を考えることができる. "Substitution σ による Atomic surface は, σ が Invertible なときは, どういう topological な性質を持つのだろうか?"

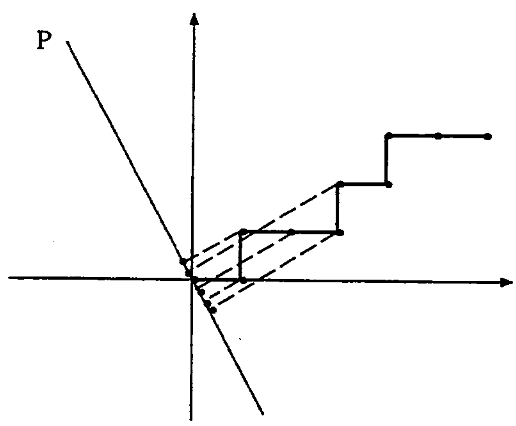


図 1: Atomic surface by $\omega = \lim_{n\to\infty} \alpha_1{}^n(1) = 121121211\cdots$

以上の 2 つの疑問から始まった研究において, 論文 [2] で, rank 2 の場合に, 幾何学的手法を用いて, F_2 上の Substitution σ が Invertible であることの必要十分条件に関する以下の定理を得た.

定理 I F_2 上 Substitution σ が Invertible であることの必要十分条件は,

(1) σ が

$$\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_n, \ \sigma_i \in \{\alpha, \beta, \delta\} \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

と分解できること. α, β, δ は Invertible Substitution:

$$\alpha : \begin{cases} 1 \to 2 \\ 2 \to 1 \end{cases} \quad \beta : \begin{cases} 1 \to 12 \\ 2 \to 1 \end{cases} \quad \delta : \begin{cases} 1 \to 21 \\ 2 \to 1 \end{cases}$$

(論文 [7] の別証明)

(2) Atomic surface が連結な区間であること.

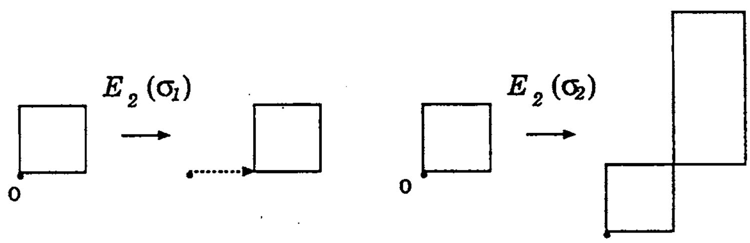
(3) ある $\boldsymbol{x} \in Z^2, \epsilon \in \{-1, 1\}$ があり,

$$E_2(\sigma)(\boldsymbol{o}, 1 \wedge 2) = \epsilon(\boldsymbol{x}, 1 \wedge 2) \tag{A}$$

を満たすこと.

$(\boldsymbol{x}, 1 \wedge 2)$ は $\boldsymbol{R}^2$ の格子点 $\boldsymbol{x}$ 上の一辺の長さ1の正方形であり, $\mathcal{G}_2$ を, 格子上の有限個の正方形を要素とする集合とすると, Substitution σ によって定義される $E_2(\sigma)$ (後に Higher dimensional substitution と呼ばれる) は, $\mathcal{G}_2$ 上での準同型写像である. (cf. [2])

ここで, 定理 I (3) の式 (A) は, ひとつの正方形が $E_2(\sigma)$ によって, またひとつの正方形に写されることを意味しており, この定理より, ある Substitution が Invertible かどうかすぐ判定できる.(cf. 図 2.)



σ_1 は invertible　　σ_2 は not invertible

図 2: $E_2(\sigma)(\boldsymbol{o}, 1 \wedge 2)$

本論文では, 以上の定理 I (2) 及び, 特に (3) を拡張するため, 任意の rank d に対し

(i) 定理 I (2) を拡張した, F_d 上の準同型写像 σ が Invertible である, つまり同型写像であることの必要条件をもとめる

(ii) 高次元 Atomic Surface の topological な性質をとらえる

ことを試みた.

$\mathcal{G}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, d)$ を, $\boldsymbol{R}^d$ の格子上の有限個の k 次元立方体 (一辺の長さ 1) を要素とする集合とする. (i) のために, 論文 [9] で, σ を任意の rank の Substitution として定義した, $\mathcal{G}_k$ 上準同型写像である **Higher dimensional substitution** (Extension of dimension k of σ) $E_k(\sigma)$ を, σ が F_d 上準同型写像まで拡張する.

$\mathcal{G}_k^*$ $(k = 1, 2, \cdots, d)$ を, $\boldsymbol{R}^d$ の格子上の有限個の $(d-k)$ 次元立方体 (一辺の長さ 1) を要素とする集合とする. (ii) のために, Atomic surface は $E_k(\sigma)$ に対する, $\mathcal{G}_k^*$ 上の **Dual map** (Dual Extension of dimension k of σ) $E_k^*(\sigma)$ を用いて構成されることを示す.

以上により, 定理 II を得る.

定理 II　　F_d 上 準同型写像 σ が Invertible であるとき

(1) ある $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Z}^d, \epsilon \in \{-1, 1\}$ があり,

$$E_d(\sigma)(\boldsymbol{o}, 1 \wedge 2 \wedge \cdots \wedge d) = \epsilon(\boldsymbol{x}, 1 \wedge 2 \wedge \cdots \wedge d) \text{ を満たす.}$$

ここで $(\boldsymbol{x}, 1 \wedge 2 \cdots \wedge d)$ は $\boldsymbol{R}^d$ の格子点 $\boldsymbol{x}$ 上の一辺の長さ 1 の d 次元立方体.

(2)
$$E_{d-k}^*(\sigma) \approx E_k(\overline{\sigma^{-1}}) \quad (k = 1, 2, \cdots, d)$$

を満たす.
ここで $W \in F_d$ に対し, $\overline{W} = \overline{s_1 s_2 \cdots s_n} = s_n s_{n-1} \cdots s_1$, $\overline{\sigma}(i) = \overline{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$ とする."$\approx$" とは, 平行移動により $E^*_{d-k}(\sigma)$ と $E_k(\overline{\sigma^{-1}})$ は同一視できるということである.

定理 II (2) により, Substitution σ による Atomic surface の Boundary を解析するとき有効な Boundary substitution が, 逆元 σ^{-1} によって与えられることが分かった.

参考文献

[1] Pierre ARNOUX and Shunji ITO: *Pisot substitutions and Rauzy fractals*, Bull. Belg. Math. Soc. **8** (2001), 181-207.

[2] Hiromi EI and Shunji ITO: *Decomposition theorem on invertible substitutions*, Osaka J. Math. **35** (1998), 821-834.

[3] Hiromi EI and Shunji ITO: *Tiling from some β-cubic Pisot numbers*, preprint.

[4] Marshall Hall, Jr.: The Theory of Groups, The Macmillan Company, 1959.

[5] Shunji ITO and Minako KIMURA: *On Rauzy fractal*, Japan J. of Industrial and Applied Mathematics **8** (1991), 461-486.

[6] Bo Tan, Zhi-Xiong Wen and Yiping Zhang: *Decomposition theorem for invertible substitutions on three-letter alphabet*, Comptes Rendus Mathematique **336** No.2 (2003), 111-116.

[7] Zhi-Xiong Wen and Zhi-Ying Wen, *Local isomorphisms of invertible substitutions*, C.R.Acad.Sci.Paris, t.318, Série I (1994), 299-304.

[8] Zhi-Xiong Wen and Yi-Ping Zhang, *Some remarks on invertible substitutions on three letter alphabet*, Chin.Sci.Bulletin **44** No.19 (1999), 1755-1760.

[9] Yuki SANO, Pierre ARNOUX and Shunji ITO: *Higher dimensional extensions of substitutions and their dual maps*, Journal D'analyse Mathématique **83** (2001), 183-206.

学位論文審査結果の要旨

平成15年7月29日第1回審査会、平成15年8月4日に公聴会及び審査会を行い、以下の判定を行った。

rank d の substitution とは d 文字からなる free group 上の endomorphism で free monoid 上に作用するものをいう。この substitution が invertible であるとは、substitution が free group 上の automorphism であるときをいう。rank 2 の substitution については、それが invertible である必要十分条件や、その幾何学的特徴づけについては多くの結果が知られている。しかし rank d が3以上については未知の領域である。そのような状況の中で本論文では

(1) rank d の substitution の幾何学的特性を引き出すために higher dimensional substitution という概念を導入したこと

(2) その概念をもちいて higher dimensional substitution の dual map の概念を導入し、その幾何学的解釈を与えた

これらの枠組みを与えるとともに、それをもちいて、

(I) substitution が invertible となる幾何学的必要条件を与えたこと。

(II) substitution が invertible であるとき dual map の boundary endomorphism が invertible substitution の inverse の逆読みによって与えられることを示した。

これらの一連の結果は近年さかんに研究されている Pisot 数から定まる準結晶フラクタル tiling の研究に画期的な解釈を与える点で高く評価できる。以上のことから本論文は博士（理学）に値するものと判定した。