# 非摂動くりこみ群による量子散逸系の解析

| | |
|---|---|
| 氏　　　名 | 堀　越　篤　史 |
| 生 年 月 日 | |
| 本　　　籍 | 栃木県 |
| 学位の種類 | 博士（理学） |
| 学位記番号 | 博甲第518号 |
| 学位授与の日付 | 2002年3月31日 |
| 学位授与の要件 | 課程博士（学位規則第4条第1項） |
| 学位授与の題目 | 非摂動くりこみ群による量子散逸系の解析 |
| 論文審査委員(主査) | 青木　健一（理学部・教授） |
| 論文審査委員(副査) | 鈴木　恒雄（理学部・教授）久保　治輔（自然科学研究科・教授）<br>末松大二郎（理学部・助教授）寺尾　治彦（理学部・教授） |

# 学 位 論 文 要 旨

We apply the non-perturbative renormalization group (NPRG) method to analysis of quantum mechanics of various systems, particularly, many degrees of freedom systems. The NPRG is a tool for handling quantum corrections systematically and is expected to be powerful especially in analysis of the non-perturbative dynamics. We first analyze quantum anharmonic oscillators by solving the local potential approximated Wegner-Houghton equation (LPA W-H eqn.). We find that our NPRG results are very good for almost all cases. However, in extreme situation where semi classical approximations work very well, our method fails to give right results. As non-trivial applications, we also analyze the supersymmetric quantum mechanics and two particle systems and found that the NPRG method works well.

Next we apply our NPRG method to the Caldeira-Leggett model, which is a typical model of quantum dissipative systems. The NPRG method enables us to interpret various types of dissipation as effective IR cutoff or effective UV cutoff of the environmental quantum degrees of freedom, so we can understand the dissipation effect physically and intuitively. Analyzing the dissipative quantum tunnelling by NPRG method, we investigate how the dissipation enhance or suppress the quantum tunnelling processes. Our results are qualitatively consistent with previous results obtained by semi-classical method with crude approximation. We discuss the essential issues of the quantum dissipating system, breaking of the time reversal symmetry, the effective potential and the spontaneous symmetry breaking, the energy gap and the tunnelling rate.

本論文では、非摂動的くりこみ群の方法を用いて様々な量子力学系、とくに量子散逸系のような多自由度系の量子力学系を解析する。

今回我々が重点的に解析する量子散逸系とは、環境との相互作用により散逸が生じる系である。近年の実験技術の進歩により、巨視的スケールまで量子性が保たれるような系を作ることができるようになると、問題となるのは系の量子性が「環境へのエネルギー散逸」により壊れてしまうことである。これは例えば量子コンピュータを実現する際の qbit をいかに実現できるかという課題に直結したりするため、広範な分野の研究者の関心を呼んでいる問題である。こうした問題に取り組む上では、量子散逸系そのものの性質をきちんと押さえておく必要がある。

量子散逸系の代表的モデルとして、Caldeira - Leggett モデルがある。これは自由度 $q$ が無限自由

度の環境系 $\{x_\alpha\}$ と結合しているため、環境の自由度を消去すると残された自由度 $q$ の運動が散逸的になるという、非常に面白いモデルである。その作用は

$$S[\,q,\{x_\alpha\}] = \int dt\ \left\{\frac{1}{2}M\dot{q}^2 - V_0(q) + \sum_\alpha \left[\frac{1}{2}m_\alpha \dot{x}_\alpha^2 - \frac{1}{2}m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2\right] - q\sum_\alpha C_\alpha x_\alpha\right\}, \tag{1}$$

と書ける。$m_\alpha$, $\omega_\alpha$, $C_\alpha$ を適当に選んでおけば、この系から環境 $\{x_\alpha\}$ の自由度を消去した後の $q$ の古典的運動方程式に正しく散逸項が現れるのである。この系の量子化は、ユークリッド経路積分を用いて行なう。この経路積分において、$x_\alpha$ の自由度を積分すると、

$$Z \;=\; \int \mathcal{D}q \prod_\alpha \int \mathcal{D}x_\alpha\ e^{-S_{\rm B}} = \int \mathcal{D}q\ e^{-\int d\tau\ \left[\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + V_0(q)\right]\ -\Delta S[q]}, \tag{2}$$

となり、変数 $x_\alpha$ を消去した効果として、$\Delta S[q]$ という作用が現れる。

我々はこのモデルの解析に非摂動的くりこみ群を用いる。それは量子散逸系の非摂動的な振舞いを解析したいからである。量子散逸系として例えば変数 $q$ が環境 $\{x_\alpha\}$ と相互作用しながらトンネリングする場合を考えてみよう。$q$ のトンネリングは、環境との相互作用によってどのような影響を受けるだろうか？中でも興味深いのは、散逸の効果が非常に大きい場合である。そんな時に、相互作用が小さい場合しか扱えない、摂動的な取扱いしかできないという解析法では困る。実際 Caldeira と Leggett は $\Delta S$ が変数 $q$ の量子力学的な運動に対してどのような影響を与えるのかを調べるという先駆的な仕事をしたわけだが、その方法は散逸の効果が非常に小さい場合にしか適用できないものであった。相互作用の大小にかかわらず解析ができる、系の特異性にあまり左右されない強力な解析法が望まれるわけである。さて非摂動くりこみ群の方法は、1970 年代の相転移・臨界現象の解析の過程で登場し、その後場の量子論をはじめとした物理学の様々な分野で応用され、今や非摂動的な解析手法の一つの柱として確立している。こうした背景から、我々は非摂動くりこみ群による Caldeira - Leggett モデルの解析を試みた。

そのためにはまず、非摂動くりこみ群による量子力学系の取扱い方を確立しておく必要がある。非摂動的くりこみ群方程式として 局所ポテンシャル近似された Wegner-Houghton 方程式（LPA W-H 方程式）を用いて、調和振動子をはじめとして、いろいろな非調和振動子を解析した。これは、LPA W-H 方程式が正しく量子力学系を解析できて、かつ系の非摂動的な振舞いを正しく捉えられるかどうかのチェックである。その結果、非常に希にトンネリングが起こるような、特異な系以外では、非摂動くりこみ群の方法が非常に良く機能することが分かった。超対称量子力学系や、二粒子系など、他の文脈において重要な系の解析も行ない、非摂動くりこみ群の方法の有用性を確認した。

ここまで準備をしたうえで、Caldeira - Leggett モデルの解析に進んだ。まずはじめに分かったことは、非摂動くりこみ群の方法を用いると、くりこみ群ならではのスケールを用いた強力な議論ができるということである。くりこみ群の視点で見ると、環境 $\{x_\alpha\}$ の効果はあるスケールにおけるカットオフとして理解できる。すなわち、散逸の性質を表す関数を $J(\omega) = \eta\omega^s$ $(s = 1, 3, 5..)$ とすると、変数 $q$ の伝播関数に

$$f(E) = \frac{E^2}{E^2 + (-1)^{\frac{s-1}{2}}\eta|E|^s} \tag{3}$$

という形の関数が掛かり、$s$ の値に応じて $f(E)$ の振舞いはがらりと変わる（図1、図2)。$\eta = 0$ ならば $f(E) = 1$ なのだから、これは環境の効果で $q$ の伝播関数が大きく変形されることを意味している。伝播関数が変われば $q$ の受ける量子補正が変わるわけだから、我々はこの $f(E)$ を眺めるだけで $q$ の量子補正について多くの情報を得ることができる。$s = 1$ を Ohmic な散逸、$s = 3, 5, ..$ を Super Ohmic な散逸と呼ぶ。図1は $s = 1 + 4n$ の場合を示したものだが、$s = 1$ の Ohmic な散逸

の場合、$E\to 0$ 領域での粒子の伝播が抑制されることから、散逸項は**有効赤外カットオフ**として機能することが分かる。また $s=5,7..$ の Super Ohmic な散逸の場合は、逆に $E\to$大 の領域での粒子の伝播が抑制され、散逸項は**有効紫外カットオフ**として機能する。これらのカットオフは特徴的スケール（$f(E)=\frac{1}{2}$となるスケール）$E_c=\eta^{-\frac{1}{s-2}}$ を持っている。次に $s=3+4n$ の場合を図2に示す。この場合は、$f(E)$ がスケール $E_c=\eta^{-\frac{1}{s-2}}$で発散してしまうという特異な振舞いが見られる。これは理論が $E_c$というハードな**紫外カットオフ**を持ち、そのスケール以下の有効理論では $f(E)>1$ となり粒子の伝播が増幅されることを意味している。このように散逸項は様々な形のカットオフとして機能し、量子補正を抑制したり増幅したりと多彩な効果をもたらすのである。

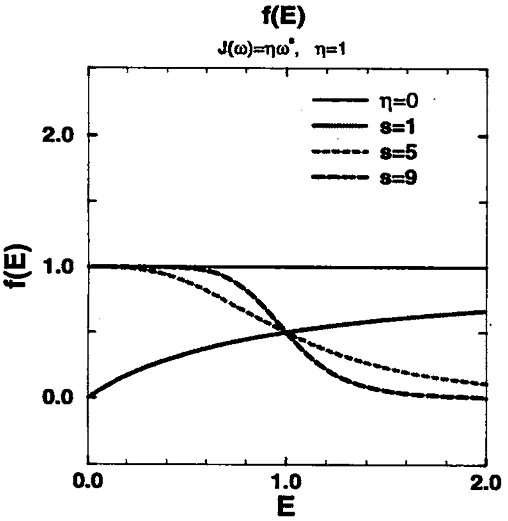

図 1: $s=1+4n$ の場合

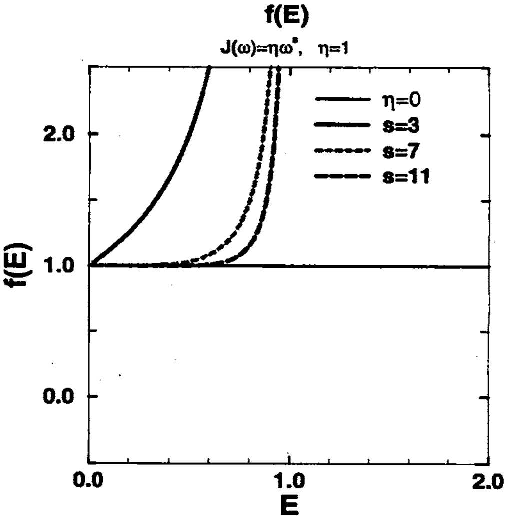

図 2: $s=3+4n$ の場合

散逸効果それ自体はこれで理解できる。しかし話はこれで終らない。その散逸効果が $q$ の運動に実際どのような影響を与えるのかは、$q$ 自身が持つ特徴的スケール $E_s$ と比較しないと分からない。$q$ 自身がもともとあまり伝播していないエネルギー領域をいくら散逸効果が抑制しようが、その効果はほとんど影響を与えない。散逸効果の強弱は、$E_s$ と $E_c$ を比較してはじめて議論可能なのである。そして、その $q$ 自身の特徴的スケール $E_s$ を決めるのに、非摂動くりこみ群の方法が役立つわけである。非摂動くりこみ群は、系をエネルギースケールについて細かく分割し、上から順番に量子補正を積分していくという手法であり、その手順を表現したものがくりこみ群方程式であった。このため、何らかのパラメタによる展開等とは全く異なる解析ができ、それが非摂動的な解析ができることの根拠であった。一方この方法は、スケールについて分けて見ていくというその性質のために、この量子散逸系のような環境の効果がカットオフとして働くような系を理解・解析するのに非常に適していると言える。まず $\eta=0$ の場合でくりこみ群方程式を解くと、どのスケールで量子効果が最も効いているかが分かる。すなわち $E_s$ が分かる。この系に対する散逸の影響は $E_s$ と $E_c$ の比較で分かる。もちろん、その後まじめに $\eta\neq 0$ としたくりこみ群方程式を解けば、非常に精度の良い結果が得られる。非摂動くりこみ群の方法は精度の良い、非摂動的な解析法であるばかりでなく、散逸効果と量子性についての非常に直観的な描像を与えてくれるのである。これはくりこみ群の方法の大きな有効性、特に今のように性質の異なる2種類の自由度が結合している系における有効性を端的に示すものだと言える。

次に、具体的な計算として、変数 $q$ が環境と相互作用しながらトンネリングをするような場合を解析した。散逸の強さを表すパラメタを $\eta$ として、いろいろなタイプの散逸について計算を行なった（図3、図4)。

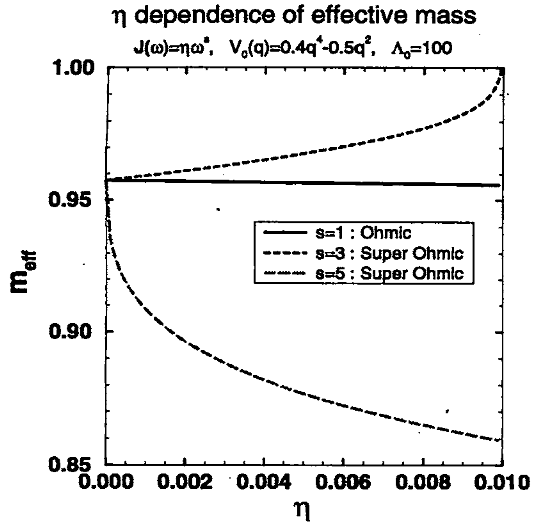


図 3: $\eta$の小さい領域

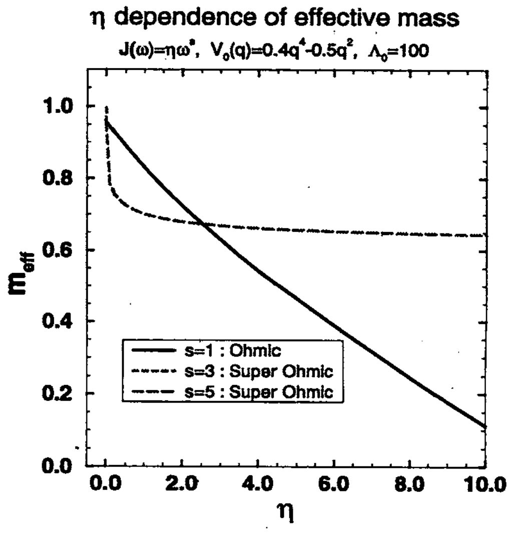


図 4: $\eta$の大きい領域

計算した量は、$q$ の有効質量 $m_{\rm eff}$ である。これは $\eta=0$ 系においては トンネル確率に対応するものであり、$\eta\neq 0$ 系においてもトンネリングについての情報を持っていると期待される量である。結果は、定性的には従来の他の方法で得られていた結果とコンシステントであり、また従来の他の方法が適用できない $\eta$ の領域においても安定した計算ができた。こうした具体的な解析の結果は、上述のスケールを用いた議論から容易に解釈可能である。非摂動くりこみ群の方法は、単に計算手法として精度がいいというだけではなく、量子散逸系の特徴を直観的に把握するうえでも非常に有用なのである。

## 学位論文審査結果の要旨

本論文は，非摂動繰り込み群によって散逸のある系の量子論を考察している。日常世界では摩擦などの散逸がある方が普通であるが，これをミクロに扱うことは簡単ではない。散逸のある系では，エネルギーが保存せず時間の向きについての対称性がない。古典的に摩擦のある運動方程式を書くことはできても，それに対応する作用を作る事は簡単にはできない。そこで多数の環境自由度を用意し，環境の運動を平均してみると，目的系の作用に時間的に非局所な有効作用が加わる。

この有効作用を 2 重井戸型のポテンシャル中の量子力学的粒子に適用しトンネル効果を見る。このような非摂動的効果を扱うために，非摂動くりこみ群の方法を準備し，その方法の有効性をインスタントンなどの既存の方法と比べながら広く一般的に検証している。数値解析を経て，散逸効果を増やしていくと，トンネル効果が抑制され，遂には粒子が右か左の谷に局在してしまうことを明らかにする。量子力学においても，時間的に非局所な相互作用が十分に入ると，対称性の自発的破れが引き起こされ，あたかも古典力学的粒子のように，トンネル効果を起こせなくなり局在化してしまうことを示している。

本論文は共同研究に基づいてはいるが，申請者本人による理論展開，数値計算が十分に行われており，学位論文として認定する。