氏　　　　名	小早川　典　男
生　年　月　日	
本　　　　籍	愛知県
学 位 の 種 類	博士（理学）
学 位 記 番 号	博甲第261号
学位授与の日付	平成10年9月30日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第4条第1項）
学位授与の題目	On Sufficiently Connected Manifolds which are Homotopy Equivalent and the Homotopy Classification of Those　（十分な連結性をもつホモトピー同値な多様体とそれらのホモトピー分類について）
論文審査委員	（　主　査　）石本　浩康
	（　副　査　）一瀬　　孝，藤本　坦孝，児玉　秋雄，菅野　孝史

学位論文要旨

Let M be a simply connected closed smooth m-manifold satisfying the following hypotheses:

(H1) $H_i(M)=0$ except for $i=0,\ p,\ q,\ m=p+q$ $(0<p<q)$,

(H2) The tangent bundle of M is trivial on its p-skeleton.

Here the second hypothesis is satisfied if $p \equiv 3,5,6,7 \pmod 8$ or if M is a π-manifold. Such manifolds as M are called (p,q)-primary in [3]. A p-sphere bundle over the q-sphere and a connected sum of such bundles are (p,q)-primary. There also exist (p,q)-primary manifolds which are essentially different from such connected sums.

In this paper, for $(p,q)=(n-1,n+1)$ $(n\geq 4)$ and $(p,q)=(n-2,n+1)$ $(n\geq 6)$, we show that two (p,q)-primary manifolds which are (tangentially) homotopy equivalent are homeomorphic and diffeomorphic modulo homotopy spheres in almost all cases (cf.[4]). Furthermore we completely classify (p,q)-primary manifolds up to homotopy equivalence for the above two cases (cf.[5]).

単連結な m 次元多様体 M が次の 2 つの条件を満たすとき，M は (p,q)-*primary* であるという：

(H1) $H_i(M)=0$，ただし $i=0,\ p,\ q,\ m=p+q$ $(0<p<q)$ を除く．

(H2) M の接束は p-骨格上で自明である．

条件 (H2) は $p\equiv 3,5,6,7 \pmod 8$ であるとき，また M が π-多様体であるときは，常に成り立つ．M は，向き付け可能な閉曲面のように，m 次元球面 S^m にいくつかの q 次元ハンドルを着けた形で得られる (ホモトピー球面との連結和を除く)．S^q 上の S^p 束，およびその連結和は

(p,q)-primary である．また，S^q 上の S^p 束の連結和としては表すことのできない (p,q)-primary 多様体も存在する．

この論文では，$(p,q)=(n-1,n+1)$ $(n\geq 4)$，と $(p,q)=(n-2,n+1)$ $(n\geq 6)$ である場合に，ほとんどの n に対して，(接) ホモトピー同値な (p,q)-primary 多様体はホモトピー球面の違いを除いて微分同相であることを示した．そして同時に，(p,q)-primary 多様体の完全なホモトピー分類を与えた．

m 次元多様体 M, M' に対して，ホモトピー同値写像 $f: M\to M'$ が存在して，接束 τM が $f^*(\tau M')$ に安定同値である，すなわち，ある次元 k の自明束 ε^k に対して，$\tau M\oplus\varepsilon^k$ が $f^*(\tau M')\oplus\varepsilon^k$ に同値となるとき，M は M' に接ホモトピー同値であるという．m 次元ホモトピー球面の全体は連結和を演算として群をなし，その群を Θ_m と表す．そして，ホモトピー球面 Σ^m があって，M が連結和 $M'\#\Sigma$ に微分同相であるとき，M は M' に mod Θ_m で微分同相であるという．mod Θ_m で微分同相ならば同相である．

多様体 M に対して，ある次元 k の自明束 ε^k が存在して，$\tau M\oplus\varepsilon^k$ が自明束となるとき，M は π-多様体であるという．ホモトピー球面は π-多様体である．また，2 つの π-多様体がホモトピー同値ならば，接ホモトピー同値である．

$m+1$ 次元円板 D^{m+1} に q-次元ハンドル $D^q\times D^{p+1}$ を k 個貼り付けて得られる多様体をハンドル体と呼び，その全体を $\mathcal{H}(m+1,k,q)$ と表す．ハンドル体の微分同相分類は Wall [6] によって知られている．

(p,q)-primay 多様体 M に対して，ハンドル体 $W\in\mathcal{H}(p+q+1,k,q)$ とホモトピー球面 Σ が存在して，$M=\partial W\#\Sigma$ と書けることが知られている．このことから M のホモトピー球面を法としての微分同相類とハンドル体の微分同相類とが密接に関係することが分かる．そして，Ishimoto[3] によって M のホモトピー分類定理が得られている．これらの結果を用いて，M の mod Θ_m での微分同相類とホモトピー類との関係を明らかにすることにより，次の定理を得た (Kobayakawa [4])．

定理 1. $(p,q)=(n-1,n+1)$ $(n\geq 5)$ のとき，M, M' を仮定 (H1), (H2) を満たす単連結 $2n$ 次元多様体とする．このとき，次が成り立つ．

(i) $n\equiv 3,7 \pmod 8$ のとき，M, M' が接ホモトピー同値ならば，M, M' は mod Θ_{2n} で微分同相である．

(ii) $n=8$ または $n\equiv 2,4,5,6 \pmod 8$ のとき，M, M' がホモトピー同値ならば，M, M' は mod Θ_{2n} で微分同相である．

(iii) $n \equiv 0, 1 \pmod 8$ のとき, M, M' が π-多様体でホモトピー同値ならば M, M' は mod Θ_{2n} で微分同相である.

定理 2. $(p, q) = (n-2, n+1)$ $(n \geq 6)$ のとき, M, M' を仮定 (H1), (H2) を満たす単連結 $(2n-1)$ 次元多様体とする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $n \equiv 3, 7 \pmod 8$ のとき, M, M' が接ホモトピー同値ならば, M, M' は mod Θ_{2n-1} で微分同相である.

(ii) $n \equiv 0, 2, 4, 5, 6 \pmod 8$ のとき, M, M' がホモトピー同値ならば, M, M' は mod Θ_{2n-1} で微分同相である.

(iii) $n \equiv 1 \pmod 8$ のとき, M, M' が π-多様体でホモトピー同値ならば M, M' は mod Θ_{2n-1} で微分同相である.

特に, Ishimoto[1] の分解定理を用いると次を得る.

定理 3. $n \geq 5$ とする. M, M' を $(n-2)$-連結 $2n$ 次元多様体とし, $(n-1)$-次元ホモロジー群がねじれ部分を持たないものとする. さらに M, M' の接束が $(n-1)$-骨格上で自明であるとする. このとき, 次が成り立つ.

(i) $n = 8$ または $n \equiv 3, 4, 7 \pmod 8$ のとき, M, M' が接ホモトピー同値ならば, M, M' は mod Θ_{2n} で微分同相である.

(ii) $n \equiv 2, 5, 6 \pmod 8$ のとき, M, M' がホモトピー同値ならば, M, M' は mod Θ_{2n} で微分同相である.

(iii) $n \equiv 0, 1 \pmod 8$ のとき, M, M' が π-多様体でホモトピー同値ならば, M, M' は mod Θ_{2n} で微分同相である.

また上の定理から, 次はほとんど明らかである.

系 4. M, M' を 定理 1, または定理 2, または定理 3 の多様体とする. 各定理の (i), (ii), (iii) における n に対して, 次の 3 条件は同値である. ここで m は M, M' の次元, M, M' は (iii) のときは π-多様体であるとする.

(a) M, M' はホモトピー同値, (i) のときは接ホモトピー同値.

(b) M, M' は同相である.

(c) M, M' は mod Θ_m で微分同相である.

注意. $n \equiv 3,7 \pmod 8$ のとき, 多様体 M, M' が接ホモトピー同値であるための必要十分条件は, ホモトピー同値写像 $f : M \longrightarrow M'$ が存在し, t 次 Pontrjagin 類に対して, $p_t(M) = f^* p_t(M')$ $(4t = n+1, t > 1)$ を満たすことである. そして, このとき M, M' は同相であり, mod Θ_m で微分同相でもある.

$(p,q) = (n-1, n+1)$ $(n \geq 4)$, または $(p,q) = (n-2, n+1)$ $(n \geq 6)$ に対して, m 次元 (p,q)-primary 多様体 M を考える. この M に対して, *type* と呼ばれるホモトピー不変量を定義することができる. この type は５つあり, したがって M は, まず次の５つに大きく分類される.

Type 0, Type I, Type (0+I), Type II, Type (0+II).

最初の３つの type の多様体は q-球面上の p-球面束の連結和として表され, そのホモトピー分類はすでに知られている (Ishimoto[2, III], Yoshida-Ishimoto[7]. そして, type II と type (0+II) の場合には, 多様体は球面上の球面束の連結和として表すことができない. この場合について考察し, すでに知られた結果と合わせて, 次の結果を得た (Kobayakawa-Ishimoto[5]).

定理 5. $(p,q) = (n-1, n+1)$ $(n > 8)$ に対して, 仮定 (H1), (H2) を満たす単連結 $2n$ 次元多様体のホモトピー分類は, 形の上で次元に関して周期 8 を持つ. そして $n \geq 4$ に対して多様体のホモトピー分類をすべて書き上げることができる.

定理 6. $(p,q) = (n-2, n+1)$ $(n > 9)$ に対して, 仮定 (H1), (H2) を満たす単連結 $(2n-1)$ 次元多様体のホモトピー分類は形の上で次元に関して周期 8 を持つ. そして $n \geq 6$ に対して多様体のホモトピー分類をすべて書き上げることができる.

References

[1] H. Ishimoto, On the classification of $(n-2)$–connected $2n$–manifolds with torsion free homology groups, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **9** (1973), 211-260.

[2] ———, Homotopy classification of connected sums of sphere bundles over spheres I,II,III, Nagoya Math. J., **83** (1981), 15-36, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **18** (1982), 307-324, ibid., **19** (1983), 773-811.

[3] ———, On a globalization of the James-Whitehead theorem about sphere bundles over spheres, Quart. J. Math. Oxford, **46** (1995), 453-469.

[4] N. Kobayakawa, On sufficiently connected manifolds which are homotopy equivalent, J. Math. Kyoto Univ., **38**(1998), 749-768.

[5] N. Kobayakawa and H. Ishimoto, Homotopy classification of sufficiently connected manifolds, Sci. Rep. Kanazawa Univ., **43**(1998), 1-30.

[6] C. T. C. Wall, Classification problems in differential topology-I, Classification of handlebodies, Topology, **2** (1963), 253-261.

[7] J. Yoshida and H. Ishimoto, Classification of certain manifolds with sufficient connectedness, Sci. Rep. Kanazawa Univ., **24** (1979), 61-71.

学位論文審査結果の要旨

本学位論文に対して，各審査委員が論文と関連資料を検討すると共に，面接による審査会を経て，平成10年8月10日，口頭発表後の審査委員会において，以下の通り判定した。

本論文の第一の目標は，ホモトピーn－球面(n≠3)に対して成立するポアンカレ予想を，もう少し一般の多様体で考察することである。向きづけ可能な閉曲面の様に，m次元球面にいくつかのq－ハンドルを付けて得られるm次元多様体を(p, q)－初等多様体(p＋q＝m)という。本論文では，(p, q)が(n－1, n＋1)(n≧5)と(n－2, n＋1)(n≧6)の場合の初等多様体に対して，ポアンカレ予想の一般化に相当するものが成立することを示している(定理1，定理2)。そして，その結果(定理1)をさらに，(n－2)－連結2n次元多様体に関する定理へと拡張している(定理3)。

本論文は，第二の目標として，上記二つの場合の(p, q)－初等多様体の完全なホモトピー分類を与えている(定理5，定理6)。これは同時に，ホモトピー球面を法とする微分同相や同相による分類をもほぼ与えることになる(系4)。

この種の研究は困難が多く，なかなか結果が得られないきらいがあるが，本研究では初等多様体という基本的な多様体を研究対象とし，それがハンドル体の境界として得られることから，ハンドル体を決定する代数的システムを用いて，極めて効果的に結果を出している。従って本論文は独創的な着想をもち，また得られた諸結果も貴重なものである。

以上から，本審査委員会は本論文が博士論文に十分値するものと判定した。