

Information Processing

線形計画法をめぐる最近の動向

前田 隆

ここ数年、線形計画法に多くの研究者の関心が向けられている。線形計画法といえば、単体法という状況が長い間続いていたが、近年その状況が変わりつつある。

単体法とは、1947年 G. B. Dantzig によって示された線形計画問題の解法であり、ピボット演算を用いることによって、実行可能な端点のなかから最適解を求めようとするものである。調べるべき端点の数は有限個であるが、退化した問題に対しては、単体法の収束性は保証されない。これを保証するためには、辞書式順序を導入し退化を処理することが必要であった。ところが、1977年 R. G. Bland は、有向マトロイドの研究を通じて、ピボット選択のための最小添字規則を提案し、この問題を解決した。さらに最近、T. Terlaky は、線形計画問題を組合せ論の立場から考察することによって、十文字法 (Criss-Cross Method) を提案した。これは最も簡単なピボット選択規則をもつものである。その後、単体法は計算機の発達とともに様々な改良が加えられ、実用上大変効率のよい解法となっていた。

ところで実用的には大変効率のよい単体法が計算複雑度の理論からすると、多項式時間の解法ではないことが、1972年 V. Klee and G. J. Minty によって明らかにされた。さらに、1979年 L. G. Khachiyan は、多項式時間の解法である楕円体法を提案し、線形計画問題が多項式時間でとける問題であることを明らかにした。しかしながら、この方法は実用の面においては単体法を上回ることができなかった。その後1984年 N. Karmarkar は、多項式時間の新しい解法を提案し、それが実用の面においても単体法に優越するものである

と主張した。この解法は Karmarkar 法とよばれ、単体法とは全く異なる原理に基づいている。Karmarkar 法では、実行可能領域の内部を出発点とし、最適解に収束するような点列が求められる (このような方法は内点法とよばれる)。Karmarkar 法ではこのような点列を求めるために、ポテンシャル関数の最小化と射影変換の技法が用いられている。この方法の基本的アイデアは線形計画問題を非線形計画問題に変形し、これを反復解法で解くことである。このため、Karmarkar 法の原形は、特殊な線形計画問題に対し、最小値が既知という仮定のもとで与えられていた。その後の研究によって、これらの制約は取り除かれていった。

この Karmarkar 法を契機として、現在内点法に基づいた多くの解法が提案されている。

P. E. Gill, W. Murray, M. Saunders, J. Tomlin and M. H. Wright らは、内点罰金/ニュートン射影法を線形計画問題に適用して、Karmarkar 法が内点罰金法の特殊ケースであることを示した。また、I. Adler, N. Karmarkar, M. Resende and G. Veiga は、射影変換にかえて、アフィン変換を用いた解法を提案している。M. Iri and H. Imai は乗法的罰金法を提案している。これは線形計画問題に対し乗法的罰金関数を定義し、これをニュートン法によって最小化しようとする方法である。

これらの方法はいずれも線形計画問題をある適当な非線形計画問題に変形し、これを内点法によって解こうとするものである。今後線形計画法はどのような進展をとげていくのであろうか。単体法と内点法のどちらが主流となるのであろうか。これは大変興味深いことである。

(金沢大学経済学部助教授)