ツイストdeRhamコホモロジーの基底の決定について

氏　　　名	森田健二
生年月日	
本　　　籍	富山県
学位の種類	博士（理学）
学位記番号	博甲第274号
学位授与の日付	平成10年9月30日
学位授与の要件	課程博士（学位規則第4条第1項）
学位授与の題目	ツイストdeRhamコホモロジーの基底の決定について
論文審査委員	（主査）泊　昌孝
	（副査）北原　晴夫，藤解　和也，藤本　坦孝，伊藤　達郎

学位論文要旨

ABSTRACT. For the theory of generalized hypergeometric functions, it is important to study twisted rational de Rham cohomology. We combine some results to give a basis of logarithmic forms. The study of logarithmic forms is useful to compute the cohomology group. We show the gap, which is essential to our situation, between the space of Saito's logarithmic forms and the space of ordinary logarithmic forms of type $\frac{dP}{P}$. By using this result, we can construct a basis for the top-dimensional cohomology group. The basis is determined by "Milnor basis" at the intersection of hyperplanes, and is of monomial logarithmic forms.

多変数超幾何関数の近年の発展において、ツイスト有理 de Rham コホモロジー群の研究が重要である。近年研究されている超幾何関数の Euler 型積分表示において、何個かの多項式のベキの積の積分が現れるが、この積分に対するツイスト版の Stokes の定理の定式化にツイスト de Rham 理論が有効に適用される。ツイスト de Rham コホモロジー群の計算には、対数微分形式の諸性質を探究することが本質的である。対数微分形式の表現定理及び、超平面配置の理論を組み合わせて適用することによりツイスト有理 de Rham コホモロジーの基底を選ぶことが出来る。

$H_j \subset \mathbb{C}^n$, $1 \leq j \leq m-1$ を 1 次式 $P_j(u) \in S := \mathbb{C}[u_1, \ldots, u_n]$ で定義される超平面とし、$P_m \in S$ を $q+1\,(>0)$ 次多項式とする。D を $P := P_1 \cdots P_m$ で定義される因子とする。$M = \mathbb{C}^n \setminus D$ 上の共変微分を

$$\nabla_\omega = d + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \frac{dP_j}{P_j} \wedge$$

で定義する。微分方程式　$\nabla_\omega h = 0$ の局所解全体は階数 1 の複素局所系 $\mathcal{L}_\omega$ を定める。喜多-野海の理論によるとツイスト de Rham コホモロジーとツイストサイクルの相対性を用いて特殊関数の積分表示に関する美しい解釈があることが知られている。$P_j\,(1 \leq j \leq m)$, が無限遠超平面も込めて一般の位置にある超平面を与えるとき青本、喜多は n 次元ツイスト de Rham コホモロジーの標準的な基底を対数微分形式で記述した。私の論文で示した結果は、P_m が 2 次以上の多項式で $P_j\,(1 \leq j \leq m)$,

が無限遠超平面も込めて一般の位置にある場合の n 次元ツイスト de Rham コホモロジーの基底を具体的に与えることである。

多項式係数の p 次正則微分形式のなす空間を $\Omega^p(\mathbb{C}^n)$ とし、$\Omega^p(*D)$ を高々 D 上に極を持つ p 次有理形式の空間とする。$\Omega^p(\log D)$ を高々 D 上に極を持つ（斎藤の意味での）p 次対数微分形式のなす空間、則ち $\Omega^p(*D)$ の元 φ であって $P_1\cdots P_m\varphi$, $P_1\cdots P_m\, d\varphi \in \Omega^{\cdot}(\mathbb{C}^n)$ を満たすもの全体とする。$\Omega^p\langle\mathbf{D}\rangle = \bigwedge^p < \frac{dP_1}{P_1}, \dots, \frac{dP_m}{P_m}, du_1, \dots, du_n >$ とする。Grothendiek-Deligne の比較定理は標準的な同型

$$H^p(M, \mathcal{L}_\omega) \simeq H^p(\Omega^{\cdot}(*D), \nabla_\omega),\ \ p \geq 0$$

を主張する。喜多によれば自然な写像 $(\Omega^{\cdot}(\log D), \nabla_\omega) \longrightarrow (\Omega^{\cdot}(*D), \nabla_\omega)$ はコホモロジーの同型を誘導し、従って対数微分形式の複体の構造が重要となる。

$\bar{D}$ を斉次多項式 $\bar{P}_1\cdots\bar{P}_m$ で定義された因子とし、$\Omega^p(*\bar{D})$, $\Omega^p(\log \bar{D})$, $\Omega^p\langle\bar{\mathbf{D}}\rangle$ を同様に定める。我々の状況では $\Omega^p(\log D) = \Omega^p\langle\mathbf{D}\rangle$, $0 \leq p \leq n$, 及び $\Omega^p(\log \bar{D}) = \Omega^p\langle\bar{\mathbf{D}}\rangle$, $0 \leq p \leq n-2$, が成り立つことが知られている（喜多-野海）。$\Omega^{n-1}(\log \bar{D})$ と $\Omega^{n-1}\langle\bar{\mathbf{D}}\rangle$ の gap がコホモロジーの構造に対する重要な情報を与える。微分形式の次数 μ に注目して、喜多の手法を拡張することにより $\Omega^{n-1}(\log \bar{D})_\mu = \Omega^{n-1}\langle\bar{\mathbf{D}}\rangle_\mu$, $\mu \geq (n-1)q$ が成り立つことを示すのに成功した。この事実により n 次元コホモロジーの基底が $(n-1)q$ 次未満のもので取れる（従って有限次元である）ことが対数微分形式の次数によるフィルター付けの概念から自然に示される。

$H^n(\Omega^{\cdot}(\log D), \nabla_\omega)$ の基底を以下のように構成する。$\mathcal{G} = \{H_1, \dots, H_{m-1}\}$ を一般の位置にある超平面配置とし、$H_j = \{P_j = 0\}$, $1 \leq j \leq m-1$ とする。$\bar{\mathcal{G}}$ を $\mathcal{G}$ の中心化 (centralization)、即ち $\mathcal{G}$ の各々の超平面を原点を通るように平行移動させて得られる超平面配置とする。L^+ を $\mathcal{G}$ の元の空でない交わりで、正の次元を持つ元の集合とする。$X \in L^+$ に対し、X を原点を通るように平行移動させて得られるものを $\bar{X}$ とする。$X = H_{j_1} \cap \cdots \cap H_{j_p} \in L^+$ に対し $Q_X = P_{j_1} \cdots P_{j_p}$ とおく。$\bar{P}_m$ の Jacobi イデアル $\Delta(\bar{P}_m) = (\frac{\partial \bar{P}_m}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \bar{P}_m}{\partial u_n})$ に対し $S/\Delta(\bar{P}_m)$ を $\bar{P}_m$ に付随した Milnor 代数と呼ぶ。$I_{\bar{X}} \subset S$ を、$\bar{X}$ 上消える多項式達で生成されるイデアルとし、$S_{\bar{X}}$ を $\bar{X}$ の座標環とする。$\bar{P}_m$ の $\bar{X}$ への制限 $\bar{P}_m|_{\bar{X}}$ の Milnor 代数 $S_{\bar{X}}/\Delta(\bar{P}_m|_{\bar{X}})$ に対し、自然な全射 $\phi_X : S \longrightarrow S_{\bar{X}}/\Delta(\bar{P}_m|_{\bar{X}})$ が存在する。$MB_X \subset S$ をその上で ϕ_X が単射となり、$\phi_X(MB_X)$ が $S_{\bar{X}}/\Delta(\bar{P}_m|_{\bar{X}})$ の基底となるような斉次多項式の集合とする。MB_X を X 上の Milnor 基底と呼ぶ。

$$X \in L^+ \text{ に対し } \widetilde{\mathcal{P}}_X{}' = \left\{ \frac{b\,du_1 \wedge \cdots \wedge du_n}{Q_X P_m} \;\middle|\; b \in MB_X \right\} \text{ とし、} \widetilde{\mathcal{P}}' = \cup_{X \in L^+} \widetilde{\mathcal{P}}_X{}'$$

とおく。$\widetilde{\mathcal{NP}}' = \left\{ \dfrac{du_1 \wedge \cdots \wedge du_n}{P_{j_1} \cdots P_{j_{n-1}} P_k \cdots P_{m-1} P_m} \;\middle|\; \begin{matrix} n \leq k \leq m-1 \\ 1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-1} \leq k-1 \end{matrix} \right\}$ とおき、$\widetilde{\mathcal{B}}' = \widetilde{\mathcal{P}}' \cup \widetilde{\mathcal{NP}}'$ とおく。このとき次の主定理を得る。

Main Theorem. $\mathcal{G} = \{H_1, \dots, H_{m-1}\}$ を一般の位置にある超平面配置とし、$H_j = \{P_j = 0\}\, 1 \leq j \leq m-1$ とする。P_m を $(q+1)$ 次多項式で、因子 $\{P_m = 0\}$ が無限遠超平面を込めて $\mathcal{G}$ と交差的に交わるとする。条件 $\sum_{j=1}^m (\deg P_j)\alpha_j \neq m + q, m+q-1, \dots,$ を仮定するとき

(1) 集合 $\widetilde{\mathcal{B}}'$ は $H^n(\Omega^{\cdot}(\log D), \nabla_\omega)$ の基底を与える。

(2) $\dim H^n(\Omega^{\cdot}(\log D), \nabla_\omega) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m-1}{n-i} q^i$ である。

P_m が 2 次多項式、即ち $q = 1$ のときはコホモロジーの基底が更に明示的に記述される。

Corollary. $\mathcal{G} = \{H_1, \ldots, H_{m-1}\}$ を一般の位置にある超平面配置とし、$H_j = \{P_j = 0\}\ 1 \le j \le m-1$ とする。P_m を 2 次多項式で、因子 $\{P_m = 0\}$ が無限遠超平面を込めて $\mathcal{G}$ と交差的に交わるとする。条件 $\sum_{j=1}^{m} (\deg P_j)\alpha_j \neq m+1, m, \ldots,$ を仮定するとき

$$\left\{ \frac{du_1 \wedge \cdots \wedge du_n}{P_{j_1} \cdots P_{j_r} P_m} \;\middle|\; \begin{array}{l} 1 \le j_1 < \cdots < j_r \le m-1 \\ 0 \le r \le n \end{array} \right\}$$

を $H^n(\Omega^{\cdot}(\log D), \nabla_\omega)$ の基底として取ることができる。従って $\dim H^n(\Omega^{\cdot}(\log D), \nabla_\omega) = \sum_{i=0}^{n} \binom{m-1}{n-i}$ である

REFERENCES

[A] K. Aomoto, *On the structure of integrals of power products of linear functions*, Sci. Papers, Coll. Gen. Educ. Univ.Tokyo **27** (1977), 49–61.

[AKOT] K. Aomoto, M. Kita, P. Orlik, H. Terao, *Twisted de Rham cohomology groups of logarithmic forms*, Advances in Math. **128** (1997), 119–152.

[K] M. Kita, *On vanishing of the twisted rational de Rham cohomology associated with hypergeometric functions*, Nagoya. Math. J. **135** (1994), 55–85.

[KN] M. Kita and M. Noumi, *On the structure of cohomology groups attached to the integral of certain many-valued analytic functions*, Japan. J. Math **9** (1983), 113–157.

[M] K. Morita, *On the basis of twisted de Rham cohomology*, Hokkaido. Math. J. (to appear).

[RT] L. Rose and H. Terao, *A free resolution of the module of logarithmic forms of a generic arrangement*, J. Algebra **136** (1991), 376–400.

[S] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo, Sec. IA, **27** (1980), 265–291.

学位論文審査結果の要旨

当該学位論文に関し，平成10年8月3日の口頭発表での質疑応答を経て，その後開催された学位論文審査会において慎重な審議を行い，その通り判定した。

超幾何関数を始めとする特殊関数の多変数化は，複素解析における中心問題の一つである。一変数の場合の級数展開または対応する微分方程式などを，それぞれ多変数化することによりAppel，Picardらをはじめ，様々な試みがなされてきた。これらを積分表示という観点から，ねじれ付サイクルと対数的deRhamコホモロジーのペアリングによって，現代的に捉えたものとして，青本・喜多らによる研究がある。そこでは，ある種の線形配置空間に対応するサイクルと微分形式の基底の具体的表示が鍵になる。しかしながら，配置空間の次数をあげた場合の一般論はなく，また精密な議論のない観察も散見する。

森田氏は本論文で，設定をかならずしも線形とはかぎらない場合に，対数的微分形式によるdeRhamコホモロジー理論に取り組んだ。氏は，一つの超曲面の次数を高くした場合に，配置空間束の要素それぞれに対するヤコビ環のミルナー基底を用いた非常に具体的な基底を見い出し，喜多の線形配置の場合の結果を見事に拡張した。対数微分形式については，いわゆるdlog型とSaito log formがあるが，それらのgapを計算することに議論が集約される。他には見られぬアイデアを含み，しかも，中で使う喜多・野海らの表現定理も自分なりに精密化しており，結果は第一級なものと判断できる。

以上の内容から，本論文は，十分に博士論文に値するものであると考える。