Fermionic Determinant and Chiral Anomaly

メタデータ	言語: eng 出版者: 公開日: 2017-10-05 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 川村, 嘉春 メールアドレス: 所属:
URL	http://hdl.handle.net/2297/33149

氏　　　名	川　村　嘉　春
学 位 の 種 類	学術博士
学 位 記 番 号	学博甲第15号
学位授与の日付	平成2年3月25日
学位授与の要件	博士課程修了（学位規則第5条第1項）
学位授与の題目	Fermionic Determinant and Chiral Anomaly （フォルミオン行列式とカイラル異常項）
論文審査委員	（主査）　山　田　英　二
	（副査）　山　崎　正　利
	（副査）　岩　尾　秀　嶺
	（副査）　久　保　治　輔
	（副査）　鈴　木　恒　雄

学位論文要旨

We derive chiral anomalies ($2n$-dimensional axial U (1) anomaly and 2-and 4-dimensional non-abelian anomalies) as changes of our regularized determinants $D_M(D_1; D_0)$ defined on Euclidean space-time $\mathbf{R}^{2m}$ under infinitesimal chiral trans-formations in a mathematically rigorous manner. We show that the space $\tilde{D}$ of invertible Dirac operators is not simply connected in spite of the fact that the space-time has trivial topology by using the chiral gauge transformation and the homotopy invariant quantity $D_M(D_0; D_0)=1$. The above relation defined on the space $\tilde{D}$ is related to the topological relation which represents the winding number on the extended space-time $\mathbf{R}^{2n}\times I$ added to parameter space in our example. We apply our regularized fermionic determinant to other physically interesting models. The extended version $\tilde{D}_M(X_1; X_0)$ of our regularized determinant is proposed. This determinant can make chiral Schwinger model unitary. We obtain the induced effective action in 3-dimensional quantum electrodynamics by using our regularized determiantt $D_M(D_1 : D_0)$ and show that it contains Chern-Simons term which violates "parity" invariance.

1 導　入

古典的な作用の持つ対称性が量子化の手続きにより一部壊されることがある。このような現象は「量子力学的異常項（アノマリー）」と呼ばれていて，素粒子の基礎理論の探究や場の量子論の本質の解明などに対して重要な役割を演じている。これから議論するのはカイラル対称性が量子効果により異常に破れる現象（カイラル異常項）の物理的意味と数学的構造についてである。

カイラル異常項は，軸性ベクトルカレントと２つのベクトルカレントからなるフェルミオンの三角ダイアグラムの摂動計算において見つかった。ベクトルチャンネルにカレントの保存則とボーズ統計性を課すと，軸性カレントの保存則の破れ（軸性 U (1)異常項）が生ずる。

このような摂動計算から，カイラル異常項の原因は場の量子論に特有の発散を正則化する際に古典的な対称性をすべて保つような方法が見つからないためであると考えられている。異常項の本質は，果してこのような計算上の副産物に過ぎないのだろうか？
もっと深い物理的意味合いや数学的構造を有するのではないだろうか？

実際にいろいろな角度から，異常項の本質に迫る試みがなされている。たとえば，経路積分法では，カイラル変換の下でのフェルミオン測度の変化量が異常項に相当し，軸性 U (1)異常項とディラック演算子に対する指数定理との関係も明白になる。有効作用の立場からは，カイラル変換の下での正則化されたフェルミオン行列式の変化量とみなすことができる。一般の 2n 次元の非可換ゲージ異常項（カイラルゲージ理論における非可換ゲージ対称性の破れ）の満たすべき条件式及びその解の系統的構成法が求められている。また，2n＋２次元の軸性異常項に関する指数定理と 2n 次元の非可換ゲージ異常項との関係も指摘されている。

しかし，上の議論は主に S^d のようなコンパクトな時空上の理論についてなされている。

ユークリッド時空 R^d のような非コンパクトな空間について似たような議論は行えないだろうか？　もし，それがある程度可能ならば，異常項の存在は時空の位相幾可学的性質とゲージ軌道空間の位相の非自明性との関係によるのか？　それとも，時空の性質とは切り離して考えることができるものなのか？　という疑問に答えることができるであろう。これが本論文の動機づけである。

非コンパクト時空上の理論が，いままで深く考慮されなかった理由は主に次の２つであろう。

(1) R^d 上のディラック演算子は連続固有値を持ち，従来の正則化法（ ζ 関数正則化や Proper time 法）では，フェルミオン行列式を矛盾なく定義することができない。

(2) 指数定理のような有効な定理が見つかっていない。

本論文では，ユークリッド空間上でも定義されるある種の正則化法を採用して，カイラル異常項に関する話題について議論する。

本論文の内容は次の通りである。２章で，我々の採用する R^d 上でも矛盾なく定義される正則化行列式を提示し，その数学的性質について述べる。３章では，それらを使っ

てカイラル異常項を導出する。4章では，正則化行列式のカイラル変換性とホモトピー不変量を使って，ディラック演算子の空間の位相幾何学的性質について調べる。5章で，他の物理的に興味のある系への応用を試みる。具体的には，カイラル・シュインガー模型と3次元の量子電磁力学に正則化行列式を適用し有効作用を求める。6章でまとめを述べる。

2　正則化行列式の定義

まず，次のようなフェルミオン関数に関するユークリッド経路積分について考えよう。

$$Z_f \equiv \int \mathfrak{D}\Psi\mathfrak{D}\bar{\psi} exp(-\int \bar{\psi}(x)(\partial\!\!\!/ - iA\!\!\!/(x)+m)\mu(x)d^4x) \tag{2.1}$$

ここで $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ はフェルミオン場，$A_\mu(x)$ はゲージ場で外場として取り扱う。フェルミオンに関する積分を形式的に実行すると

$$Z_f = det(\partial\!\!\!/ - iA\!\!\!/(x)+m) = \pi_n\lambda_n \tag{2.2}$$

ここで λ_n はディラック演算子 $(\partial\!\!\!/ - iA\!\!\!/(x)+m)$ の固有値で，一般に上限が存在しないため(2.2)式は定義されていない。何らかの正則化が必要である。しばしば使われる方法は ζ 関数正則化法と Proper time 法であるが，どちらもコンパクトな時空上でのみ矛盾なく定義されている。

ここでは別の方法をとる。(2.2) 式のかわりに2つのディラック演算子 D_0 $D_1 = \partial\!\!\!/ - iA\!\!\!/ + m$ の比に関する行列式を考える。

$$detD, \longrightarrow \frac{detD_1}{detD_0} = det(D_1D_0^{-1}) = exp(T_r\int_0^1 \frac{dD(s)}{ds}D(s)^{-1}ds) \tag{2.3}$$

ここで $D(s)$ は，D_0 と D_1 を結ぶ経路 I =〔0, 1〕上で定義された演算子に値をもつ写像である。もし演算子 $\frac{dD(s)}{ds}D(s)^{-1}$ がトレースクラスに属さないならば (2.3) 式は発散しており，さらに正則化する必要がある。我々の採用する正則化行列式は

$$det(D_1D_0^{-1})_{reg} \equiv exp(T_r\int_0^1 \frac{dD(s)}{ds}D(s)^{-1}exp\left(\frac{D(s)^2}{M^2}\right)ds) \tag{2.4}$$

上式は，非コンパクトな空間上でも矛盾なく定義されている．ここで M は任意の正の定数。以後(2.4)式を，$D_M(D_1 ; D_0)$，可逆なディラック演算子の作る空間を $\tilde{\mathfrak{D}}$ と記す。$D(s)$ は空間 $\tilde{D}$ 内の経路である。

正則化行列式 (2.4) に関する主な性質を羅列する。

(i)　もし D_0, D_1, $D_2 \in \tilde{\mathfrak{D}}$ ならば

$$D_M(D_2 ; D_1)D_M(D_1 ; D_0) = D_M(D_2 ; D_0) \tag{2.5}$$

特に

$$D_M(D_0 ; D_0) = 1 \tag{2.6}$$

(ii)　$\tilde{\mathfrak{D}}$ 内の任意の無限小の経路 $D(t) = \partial\!\!\!/ + A(t) + m$ について次の関係式が成立する。

$$\frac{d}{dt}D_M(D(f) ; D_0)\Big|_{t=0} = T_r\left(\frac{dA(t)}{dt}\Big|_{t=0}(\partial\!\!\!/ + A(0)+m)^{-1}\right.$$

$$\times exp\left(\frac{(\partial\!\!\!/+A(0)+m)^2}{M^2}\right)\Big)\cdot D_M(\partial\!\!\!/+A(0)+m\,;D_0) \tag{2.7}$$

3　カイラル異常項の導入

まず最初に，ディラックフェルミオンが非可換ゲージ場と相互作用する 2n 次元の SU(N) ゲージ理論を例にとって，対称性と保存則の関係について復習する。

古典的な作用は

$$S=\int d^{2n}x(\bar{\psi}(x)(\partial\!\!\!/-iA\!\!\!/+m)\psi(x)-\frac{1}{2g^2}trF_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{3.1}$$

質量 m がゼロのとき，非可換ゲージ変換と軸性 $U(1)$変換に対して不変である。軸性 U (1)変換 $\mu(x)\ \rightarrow\ e^{i\alpha r_{2n+1}}\psi(x), \mu(x)\ \rightarrow\ \psi(x)\ \rightarrow\ \psi(x)e^{i\alpha r_{2n+1}}, (r_{2n+1}\equiv i\underset{\mu+1}{\overset{2n}{\pi}}r_\mu)$ に対するカレントの保存則は

$$\partial_\mu J^\mu_{2n+1}(x)=2mJ_{2n+1}(x)$$
$$J^\mu_{2n+1}(x)=\bar{\psi}(x)\gamma^\mu r_{2n+1}\psi(x),\ \ J_{2n+1}(x)\equiv\bar{\psi}(x)r_{2n+1}\psi(x) \tag{3.2}$$

場の量子論ではカレントの保存則は，場の演算子間の関係式とみなされる。それらの真空期待値を計算することにより，古典的な対称性がそのまま成り立たない場合が生ずる。実際，(3.2) 式は，量子レベルで破れる。

有効作用の立場から軸性異常項を求めよう。具体的には次の関係式

$$\int d\chi\varphi(\chi)(\text{軸性}\ U\ (1)\text{異常項})=Z_f^{-1}\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\psi\int d^{2n}x\varphi(x)(\partial_\mu J^\mu_{2n+1}-2mJ_{2n+1})\cdot e^{-S_t}$$
$$=-iZ_t^{-1}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi exp\Big|-\int d^{2n}\chi\bar{\psi}(\chi)e^{i\varepsilon\varphi(\chi)\gamma_{2n+1}}(\partial\!\!\!/-iA\!\!\!/+m)$$
$$\times e^{i\varepsilon\varphi(\chi)\gamma_{2n+1}}\psi(\chi))$$
$$=-iZ_f^{-1}\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}det(e^{h\varepsilon\varphi(\chi)\gamma_{2n+1}}(\partial\!\!\!/-iA\!\!\!/+m)e^{i\varepsilon(\chi)\gamma_{2n+1}}) \tag{3.3}$$

より，フェルミオン行列式の局所軸性 U (1)変換に対する変換量を計算すればよい。正則化行列式(2.4)及びその性質(2.7)を使うと上式は R^d 上で計算され，従来のものと一致する。

$$(3.3)\text{式の正則化版}=\int d^{2n}\chi\varphi(x)\left(-\frac{2i^n}{(42)^n n}t_r\varepsilon_{\mu_1\mu_2}\times F^{\mu_1\nu_1}\cdots F^{\mu_n\nu_n}\right) \tag{3.4}$$

カイラルフェルミオンが井可換ゲージ場と相互作用した理論において，量子レベルで非可換ゲージ対称性が破れる非可換ゲージ異常項についても同様にして求めることができる。実際に 2 次元と 4 次元の理論について従来の方法で求めたものと，代数的に自明な項を除いて一致することが確かめられる。

4　ディラック演算子の空間の位相幾何学

ホモトピー不変性を示す（2.6）式は次の意味の量子化条件を導く。

$$T_r\int\frac{dD(s)}{ds}D(s)^{-1}exp\left(\frac{D(s)^2}{M^2}\right)ds=2\pi i\ell\ \ \ell\epsilon Z \tag{4.1}$$

上式の左辺の被積分関数はマラー・カルタン形式 $dD(s)D(s)^{-1}$ の正則化版のトレース

をとったものとみなせて，空間 $\tilde{\mathcal{D}}$ の１次の(コ)ホモロジーをしめすもので，ℓ は巻き付き数に相当する。有限次元の古典群 G の場合，マラー・カルタン 形式 $dg\cdot g^{-1}(g\epsilon G)$ のトレースは任意のループ C に対して，次の関係式を満足する整数 ℓ が存在する。

$$\int_{\ell} trdg\cdot g^{-1}=2\pi i\ell \tag{4.2}$$

ここで ℓ はループ C の巻き付き数である。

無限次元の空間 $\mathcal{D}$ に対しても，同様の事（$\ell\neq 0$ の状況）が起こりうること（空間 $\mathcal{D}$ が単連結ではないこと）を，２次元のカイラル SU (2)ゲージ理論を例にとって示そう。ディラック演算子の形は

$$\not{D}\equiv -i\not{A}\frac{1-r_s}{2}+m \tag{4.3}$$

演算子に値をもつ写像 $D(s)$ として

$$\begin{aligned}
&D(s)=\bar{U}(x,\ s)\not{D}U(x,\ s)\\
&\quad U(x,\ s)\equiv exp\left(t\frac{1-r_s}{2}\psi(x,s)\right)=\frac{1+r^2}{2}+\frac{1-r_s}{2}e^{i\psi(x,s)}\\
&\quad \bar{U}(x,\ s)\equiv exp\left(-i\frac{1+r_s}{2}\psi(x,s)\right)=\frac{1-r_s}{2}+\frac{1+r_s}{2}e^{-i\psi(x+s)}\\
&\quad g(x,\ 0)=g(x,\ 1)=1,\ \ g(x,\ s)\equiv e^{i\varphi(x.s)}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

に選ぶ。

$\frac{1}{2\pi i}\times(4.1)$ の左辺を具体的に計算すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2ti}Tr\int\frac{dD(s)}{ds}D(s)^{-1}exp\left(\frac{D(s)^2}{M^2}\right)ds\\
&\quad\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{8\lambda^2}\int_0^1 ds\int d^2xt_r\varepsilon_{\mu\nu}(g^{-1}\epsilon^{\nu}gg^{-1}\partial gg^{-1}J_sq]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

右辺はパラメーター S を加えた拡張された時空 $R^2\times I$ における巻き付き数を表している（Π，($\tilde{\mathcal{D}}\supset\Pi_3(SU(2))=Z$)。適当な $g(x,\ s)$ を選ぶことにより)4.5)式は任意の整数値をとることができる。また高次元への拡張も可能である。(Π，($\mathcal{D}$) $\supset\Pi_{2n+1}(G)=Z$) 正則化行列式のカイラルゲージ変換性とホモトピー不変量を使って，時空が非コンパクトであるにも拘らず，可逆なディラック演算子の空間 $\tilde{\mathcal{D}}$ は，単連結ではないことを示した。我々の例では，このホモトピー不変量は，パラメターを加えた拡張された時空における巻き付き数を表わす位相関係式と関連することがわかる。

5　他の模型への応用

(1)　カイラル・シュインガー模型

カイラル・シュインガー模型は，片方のカイラリティーの固有状態のフェルミオンのみが可換ゲージ場と相互作用している２次元の模型で，ゲージ異常項を持つ理論を無矛盾に量子化する試みとしてしばしば引き合いに出される。Jackiw と Rajaraman は異常項をもつが正則化の自由度を示すパラメターをうまく調節することによってユニタリーな理論になると主張した。

我々の正則化行列式の拡張版を提案し，正則化された有効作用を実際に求めて，理論

がユニタリーになる可能性があることを確かめた。

(2)　3次元の量子電磁力学

3次元の量子電磁力学において，ディラックフェルミオンの質量 m がゼロの時，ある種の時空の反転に対する対称性（“パリティ”と呼ぶことにする）が存在する。フェルミオンの自由度を積分した後に得られる有効作用の中に“パリティ”を破る項が存在することが知られている。実際に我々の正則化行列式（2.4）及びその性質（2.7）を使って誘導された有効作用を求めることにより，“Chern-Simons”項と呼ばれる“パリティ”を破る項の存在が確かめられる。

6　まとめ

ユークリッド空間上でも矛盾なく定義されたフェルミオンの正則化行列式を使って有効作用の立場からカイラル異常項に関する話題を議論した。

正則化行列式の無限小カイラル変換の下での変化量を計算することにより，数学的に厳密にカイラル異常項を導出した。

時空が自明な位相をもっているにも拘らず，カイラルゲージ変換とホモトピー不変量を使って，可逆なディラック演算子の空間は単連結ではないことを示した。我々の例では，このホモトピー不変量は，拡張された時空 $\mathrm{R}^{2n}\times 1$ 上における巻付きを表す位相幾可学的関係式と関連している。

更に，我々の正則化行列式をいくつかの物理的に興味のある模型に適用して従来の結果が得られることを確かめた。

論文審査の結果の要旨

当該学位論文に関し，平成2年2月2日に審査方針の打ち合わせを行い，更に口頭発表の後2月14日論文内容について協議した結果以下の通り判定した。

場の理論の異常項の問題は現在種々の意味で注目をひいている。異常項を含む無矛盾な場の理論の存否は，素粒子模型の選択という現象論的問題とも関わって検討されている。また異常項と関連する Chern-Simons 項は3次元 QED の場合分数量子ホール効果や高温超伝導とも関わりがあるのではないかという議論もある。

異常項は場の量子化で生ずる発散を処理するための正則化が理論の持つ全ての対称性を保存し得ないために生ずるものであるが，特にその数学的構造については多くの検討が行われてきた。しかしこれまでの検討は殆ど S^d のようなコンパクトな時空間における理論の場合に限られてきた。それは非コンパクトな R^d においてはディラック演算子は連続スペクトルを持ち，これ迄の正則化法では well-defined なフェルミオン行列式を与え得ないからである。この論文では参考論文の共著者である田村の開発した正則化法を用いて R^d においても well-defined に正則化されたフェルミオン行列式によってカイラル異常項の問題を論じている。そして逆を持つディラック演算子の張る空間が単連結では無い事を指摘し，さらに低次元空間における模型に対して有効作用を導いている。

基礎とした正則化法は田村によるものであるが，本論文の内容を成す研究については申請者は全く同等の協力者として寄与した。

以上の理由により申請者は学術博士の学位を授与するに値するものと判定する。