概念の理解と学習方略

——抽象化と具象化の関係について——

山 岡 哲 雄, 橋 本 圭 子*

Understanding of Conception and Learning- Strategy

——Relations between Abstracting and Concreting——

Tetsuo YAMAOKA, Keiko HASHIMOTO

本論は，これまでの概念学習，特に論理的思考を要する教科の学習において，学習者の多くが途中で躓き，理解不能になり，興味を失っていくことが多い理由を解明しようとして計画されたものである。この種の教科は，一般的に具体的な事象の理解から始め，そこから法則性や一般性を見出だす，という抽象的一般化へ進める傾向がある。そしてこのような学習方法こそが，この種の教科の理解を促進する最も効果的な方法であると信じられてきた。本論では，以下において，この方法が果たして，思考と学習の心理学的視点から見て，効果的且つ妥当なものであるかどうかの検討を行う。

1
理解における抽象と具象の問題

これまで普通一般に，理解は具象的なものの方が抽象的なものよりも理解しやすいと考えられてきた。それはある意味では妥当な考えであるといえよう。人は目で見たり，耳で聞いたり，手で触ったりする，所謂五感を通して環境を認知している。そしてこの感覚に映じたものが我々の具象的心像であるから，この心像を理解や思考を構築する際の素材とすることによって，思考や理解が容易となる，ということは十分考え得ることである。現今の教育一般において，初等段階では，身の回りの具象的事実から始めて，中等，高等教育段階へ進むに連れて，そこから徐々に抽象的で，一層「高度な」思考へ教材を進めるという教育方針は，このような根拠によるものと考えられる。この方法の利点は，日常つぶさに経験している具象的な感覚所与を思考と理解の素材とすることができる点にあり，人が一般に，未知のものを理解しようとするときに，それを既知の知識に置き換えて理解する傾向があることと無関係ではない。しかしこの操作は，非常に便利なものではあるが，一方で，人の思考や理解において極めて危険な操作である。この未知のものを理解するためにそれを既知の知識に置き換える操作は，丁度，我々が一旦，一つの言語を母国語として習得してしまった後で，もう一つの言語を習得する場合に，逐語的に置き換えて理解するのと同じであり，これは一種の翻訳過程であるといえる。心理言語学の用語でいえば，これは丁度 Bilingual における従属型もしくは複合型に相当するが，言語学習においては，この2つのタイプを形成する学習方法が最善のものでないことは，既に周知の事実となっている。その理由は，上述の翻訳過程の弊害にあると考えられており，この翻訳過程に依存する場合には，第2言語を学習する際に，第1言語における語の定義乃至意味に置き換えるための時間と意味のロスを生ずるばかりでなく，第2言語における微妙な意味の違い，つまり新しい概念の理解が妨げられる点にある。特に第2言語に相当する概念

平成4年4月15日受理
＊神奈川県小田原児童相談所

の定義が厳密である場合にはその弊害が著しくなるものと考えられる。この問題については，後に章を改めて検討したい。

具象から抽象への操作は，必然的に特殊から一般化への操作を伴う。一般にこの「特殊から一般化へ」の操作は，「一般化から特殊化へ」の操作よりも簡単で且つ容易であると考えられる傾向があり，そのため後者の操作は，十分に発達した成人の思考活動においては可能であるが，思考活動が未発達で未熟な学童期の学習操作には適していないと考えられている。従って学習は常に具象的な特殊対象を提供し，この特殊な対象の中から抽象的一般的な性質を発見させる方向に進められてきた。しかし筆者らの見解では，この2つの操作の難易の関係は，むしろ世間一般で考えられ，更に心理学の領域で専門的にもその様に見なされてきたものとは，反対の関係にあるのではないかというものである。

つまり人の概念操作は，むしろ本質的には，抽象から具象へ，一般から特殊へと進むのが最も自然な在り方なのではないかというものである。雑多な性質の混合乃至はその統一体である具象物から，ある一般的性質を抽出することの方が我々には一層難しい。そのような発見を精神的に未熟な学童の初期学習段階で行わせることは，彼等に過酷な負担を負わせている恐れがあるにもかかわらず，あたかもそれが成功しているように見えるのは，教える側の錯覚に過ぎないのではないかというのが，我々がこれから主張しようとする議論である。この問題は，概念形成における命名作用と密接に関係していると思われるので，この問題から検討を始めることにする。

2

概念形成及び命名作用との関連において

我々が外界の何かを認知するということは，現に在るものをただ忠実に意識に写し出すということではない。それは一種の創造過程であり，初めは我々にとって区分のない全体としての対象を分節化し，構造化していく過程において，特定の対象が全体から分離して我々に認知されるようになるのである。この過程はその分節化された対象が，我々の命名作用よって何等かの記号に置き換えられ，更にこれが保存されることによって完成する。普通大多数の認知対象は，個人がこの創造過程を初めから再現する代わりに，その「記号- 意味」関係を習得することで代用されている。この記号化が一般化され抽象化されたときに，概念が形成され，完成したといえる。しかし人は，普段，認知が本来上述した過程の結果生じて来たものであるという認識をもたない。この過程は，特殊な場合として，我々が馴染みのない対象を熟知していくような特殊な状況において再現され，体験されるのみである。

上述した過程において，最も，創造的能力を必要とする困難な過程は，全体の中から特殊な成分を分節化し構造化する過程，言い換えると，特殊な意味を，未分化な全体の中から発見または創造して，抽出してくる過程であると考えられる。これに対して，一旦，分節化され構造化された後，命名され記号化されて知識の中にパックされているものを，その全体的対象の中から検索し，見付け出す過程は難しくない。それはいわば，すでに分かっており，他のものから区別する術のあるものを選択的に選び出す過程である。我々はすでに赤いものを知っていて，赤いものがあったら拾い出して下さいと依頼されれば，それは非常にたやすい課題であると思うに違いない。これに対して，前者においては，我々にとって全体として融合的であり，未だその特性が特定されていないもの，のっぺらぼうとでもいうべきもの，従ってその当事者にとってその対象とすべきものに名称さえない段階で，その中から対象とすべき何ものかを任意に切り取って，これに命名しなければならないのである。このような精神過程は，十分に高度な知的訓練を受けた研究者にとっても容易にできるものではないであろう。まして本論で議論しようとする，算数や数学の初等段階の学習者にとってはこのようなことは極めて困難な課題となるものと考えられる。

ここでもう一度，具象，抽象の問題に戻って考えてみたい。一般に，概念形成が最初になされたときには，具体的な対象から特定の性質，つまりその対象の１属性が抽出され，これに名称がつけられることによって，その概念形成が完成されると考えられる傾向がある。この方法は，一般に帰納的方法と呼ばれているものであり，具象から抽象へ，つまり特殊命題から一般命題を抽出するものである。そしてこれが発見的思考であって，このようにして発見され，固定されて来た概念が，人類の長い歴史の中で知識として蓄積され，世代間で伝達されて現代の知識体系を作り出しているのだというのである。筆者らは，概念の発見や形成が全くこのようにして行われなかったというつもりはない。しかしこのような帰納的な知識の形成は，一見いかにも容易であるかに見えるが，実際には殆ど不可能に近いほど困難な知的作業であるということを，ここで改めて強調したいと思う。更にこの方向の過程を吟味してみると，果たしてこのような具象から抽象へという過程が本当になされていたのかということさえ疑わしくなってくる。

例えば，ある対象からある特定の属性を発見し抽出してくる過程で，どのようなことが生ずるかについて考えてみたい。この過程は極めて誤解を招き易いものであり，実際，誤解されているとしか考えられない。具体的対象からある性質（属性）を抽出するという，この課題の遂行のためには，人は先ずその特定の対象を既に知っていなくてはならないだろう。少なくとも，その具体的対象を認知できなくてはならない。このとき，それを他のものから区別するという行為はどの様にして，また何故可能となるのかを考えてみると，それに先立って，全体の中から，それが具体的な輪郭を持ったものとして，区分されていることが必要であることが分かる。そしてその要請を満たすためには，その該当する対象領域外のものとは，それが異なっているということを示す抽象的性質（属性）の存在をアプリオリに持っていることが必須条件となる。つまりある対象を認知するということは，その属性を既に知っているのだということになるのである。従って次にその認知された対象の中にある特定の性質（属性）を抽出し発見する過程についても，全く同じことがいえるであろう。具体的対象の中から「円の概念を発見し抽出する」と考えられている過程を吟味してみよう。人はこの「発見，抽出過程」の正当性を主張するために，「リンゴを側面から見ると丸い」，「茶碗を真上から見ると丸い」とか，「竹や木の切り株を上から見ると丸い」といった具体例を

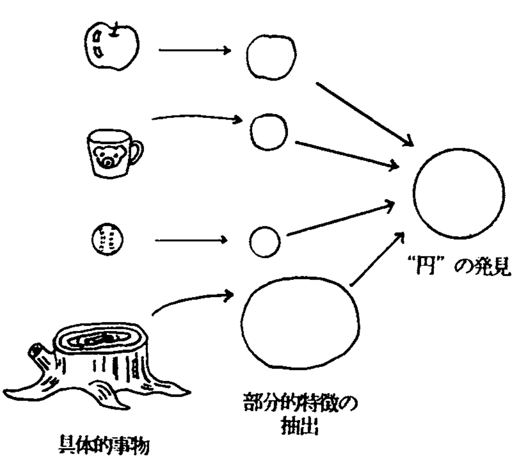

図１－a．円の概念の抽出と発見.

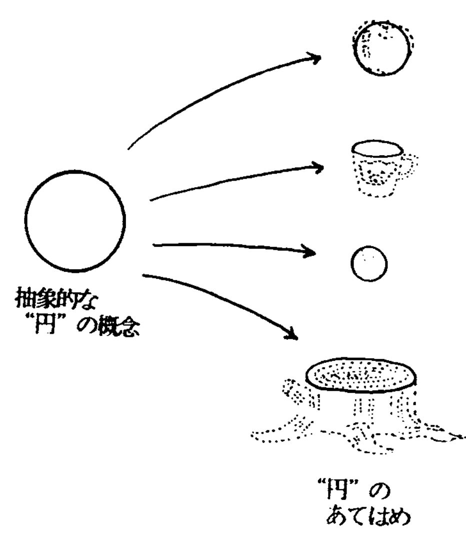

図１－b．円の概念の当てはめ.

挙げ，このような個々の具体例に共通した，性質を一般化して「丸さ」の概念が抽出され「円」の概念が発見されるのだというだろう。確かにそうした例証は「丸さ」や「円」を示しているだろう。しかし，初めてそのような対象に遭遇した人が，その場の視野の中から，その「丸さ」または「円」を識別できるかどうかということがここでは問題なのである。視野は，完全にナイーヴな人にとっては，どのように分節化され，構造化されることも可能である。言い換えれば，何等かの概念化された意味的マッピングがなされていない限り，それはただの視野にすぎない。人がそこに「丸い」或いは「円」としての切り株を認知するということは，既に「丸さ」または「円」という概念を持っていなくてはできないことである。このように考えると，具象から抽象化するという作業を行ったように見えても，実はそれは一種の錯覚にすぎなかったともいえるのではないか。実際には常に何等かの抽象的概念が先にあり，この概念に合致するものを視野の中から捜し出そうとしている。発見的思考というのは，実は具体的対象の中から発見し，一般化してきたものなのではなく，既に頭の中に持っている抽象的概念もしくは「偏見」を対象の中に発見しようとし，或いは当てはめようとする過程であり，「発見」はそのような意味での成功例であるとしか考えられないのではないか。科学史においては，研究者の情念が幾多の失敗を乗り越えて偉大な発見に至る例が挙げられているが，それは彼等が極めて独自な先入観を以て研究に従事したことを示すものであり，決して具体的観察を積み上げげて，そこから全く新しい性質を発見したのではない。このように考えてくると科学の王道は帰納的方法であるという信念は疑わしいものといわざるを得なくなる。人は対象の観察から新しい事実を発見し，多くの事例に共通してその事実を認めることにより，一般化するのであると考えているが，それはむしろ一種の錯覚であって，実際にしていることは，抽象から具体化への過程なのだとしか考えられない。

もし完全に帰納的方法によって，今までになかった新しい概念を抽出し発見したとすれば，そこには，よほどの偶然か，よほどの天才的能力が働いたとしか言いようがない。再び科学史を例にとると，所謂偶然による発見は，科学者の予見が誤っていたために，対象にその予見された概念に相当するものを見出だすことができず，たまたま，考えてもいないことを実行してしまったときに，思ってもいなかった事実が見出だされたものである。天才的能力については，ここでは思い及ばないものとしておく以外にない。つまり凡人には起こり得ないことが起こったのであり，むしろ偶然の発見の範疇に入れるべきであろう。

確かに，このような偶然の発見が帰納的に得られる可能性はあり，それが蓄積されて，大きな知識体系ができたということも考えられないこともない。しかしそのような困難な思考方法は異常なものであり，滅多に起こるものではない。そのような非能率的な思考方法を，我々人間が常態的に行ってきたとはとうてい考えられないし，そして何よりも，このような方法は教育の対象にはなり得ない。発見的学習といわれているものも，そのような視点から，根本的に見直す必要がある。恐らく学童が発見的に学習したとされているものは，発見ではなく，一種のカンニングにすぎないのであり，彼等が実際にしていることは，概念として既に成立している知識の現実への当てはめなのである。

人はもっと効率的で合理的な方法，人間の脳機能に適った方法を採っていたはずであり，これが，恐らく，筆者らがこれから主張しようとする抽象から具象へ，一般から特殊化への方向を持った思考過程である。しかしこの方法は，既に述べたように，一般的には，現在では，「帰納的に特殊例から発見されて一般化され，概念として定着された知識」の活用手段に限定されるものという誤解を受けてきた。

3
数学学習に対する提案

一般的概念から具体的特殊化へ向かう発見について：ここで問題としたいことは次のことである。先にも述べた通り人は，一般に，具象的対象の中から一般的性質を抽出する，と考える傾向があった。しかし実際問題としてそのようなことは不可能であり，そのような一般的抽象的概念を持たずに，対象からそのような性質を抽出することができるとは考えられない。むしろある特定の概念が先ず観念として，或いは観念の中に発見されて（或いはむしろ発明されて，といった方が良いかもしれない），次にその概念の近似を具体的事象の中に「発見する」ということの方が一層ありそうなことであるように思われる。もちろんその最初の概念の発見乃至発明がどのように成されたかについては説明し難い。独創的に或いは空想として作り出されることはあり得る。しかし恐らく「円」の概念や「四角」の概念のような極めて純粋に幾何学的な概念がそう簡単に想像されるということはあり得なかったであろう。具象からの発見を主張する人の根拠はそこにある。しかし本来，概念化されていない限り原始の世界は渾然一体となった全体であり，その中から特定の形象を抽出することは不可能であるし，いわんやその形象の輪郭を抽象化して特定の形として概念化することはできないであろう。

いずれにしても現在の人間にとっては，特定の概念が人類において最初に発明または発見されたときのことについては想像する以外にない。これに対して，現在の人間にとって，新たに想像して観念の中で新しい概念を作り出すことはかなり難しいにしても，できないことではない。そして一旦できた概念を，概念として学習し，次にこれの類似物を現実の世界の中に発見することは極めて容易なことである。

このように考えてくると，初等教育において子供に先ず概念を知識として教え，その知識を一層確かにするために，現実世界の中に，その概念の類似物を発見させること，或いは当てはめさせることは容易であり，妥当な教育法といえるが，そのような知識を与えずに，いきなり現実の世界を観察させて，そこに共通した特定の形象を発見させて概念化することは，妥当な教育法でないことが納得されるのではないかと思われる。この後者の方法の欠点は，この方法を先へ進めていくときに一層顕在化して来る。数学教育において，3次元空間を学習対象としている段階までは，この方法は，一見したところ利点であるかのように見える。それは3次元空間は，我々の現実の感覚世界として観察し表象することができるので，その表象の助けを借りて理解することができるかのようにみえるからである。しかしその表象が実は何によって可能となったものであるかを理解する必要があろう。このことについては，後に稿を改めて検討する。ここで問題にしようとしたことは，3次元以上の問題になると，現実的表象は全く無力となり，その結果，その先にはもはや思考が進まなくなり，行き詰まってしまうということである。

これまでは主として視覚的図形を中心に考えてきたが，数学の一層基礎的で，本質的な数の概念についても同じことが言えるのではないか

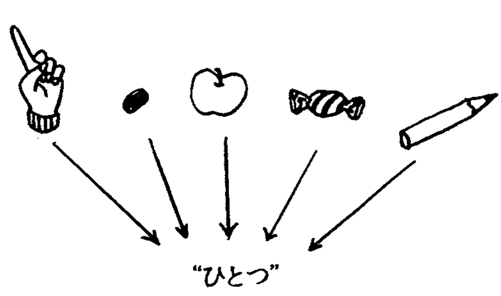

図2-a．1つの概念の抽出と発見.

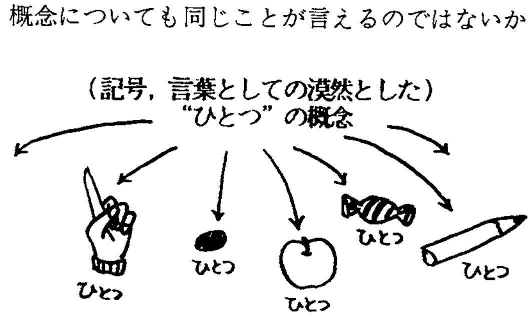

図2-b．1つの概念の当てはめ.

と思われる。普通，数の理解も，現実の具体的な事象の観察から，１つ，２つ，…といった数の性質を抽象化してくるのだと，そしてまた１つの事象にもう１つの事象が加わったときに，２つの事象があることによって，１プラス１は２であることの理解へ進むのであると考えられる傾向があった。従って初等段階での数の教育は，具体的に，実物のリンゴや描かれたリンゴを１つ，次にまたそのようなリンゴをもう１つその隣に並べることによって，１つということの性質を理解させ，或いは１つにもう１つが加わると２つになるということを理解させる方法がとられる。しかし現実の或いは描かれたリンゴには，本来１つという性質はないばかりでなく，そのリンゴには赤い色がついており，歪んだ球形であり，良い香りがしており，食べられるものであり，更に商品としての価格がある。そのような雑多な次元の集合体であるリンゴから１つという性質を抽象してくるということは，実は極めて難しいことなのではないか。それにも関わらず，幼児期の子供が，比較的容易にそのような教育法によって，１つという概念を，或いは１つに１つを加えると２つになるという関係を理解するのだとすれば，それはこの具体的なリンゴの例から数の概念が抽象されたのではなくて，既に何等かの方法によって数の概念をもっていたと考える方が自然である。

ではその数の概念はどのようにして獲得されるのだろうか。筆者らは，例えば「１つ」という数の性質が具体的事物に存在するのではなく，ある事物を１つと見なすことによって，その事物は初めて１つとなるのではないかということである。つまり数の性質は人間によって創造された概念であり，そのとき例えば，１つという性質が生まれるのではないかということである。従って，それは初めは抽象的な記号的概念であり，数の関係は現実の関係ではなくて，記号同士の約束による関係である。１つという抽象的記号的概念があり，それを繰り返すことによって２つ３つという性質が生まれ，相互の関係が規定される。具体的事例は，ここでもその関係を投影し，当てはめるためのスクリーンに過ぎない。

子供が数を数える様子を思い出して見よう。「指を折りながら，１つ，２つ，３つ」，或いは「小石を指差しながら，１つ，２つ，３つ」，このとき，子供は，その対象の性質から，順に１つになり，２つになり，３つになることを理解しているのではない。１つ，２つ，３つ，という彼が知っている数を，指を折ることや対象を指差すことによって確認しているのである。このことは子供に，「お歳は幾つ？」と聞いてみた場合にはもっとはっきりすることだろう。例え

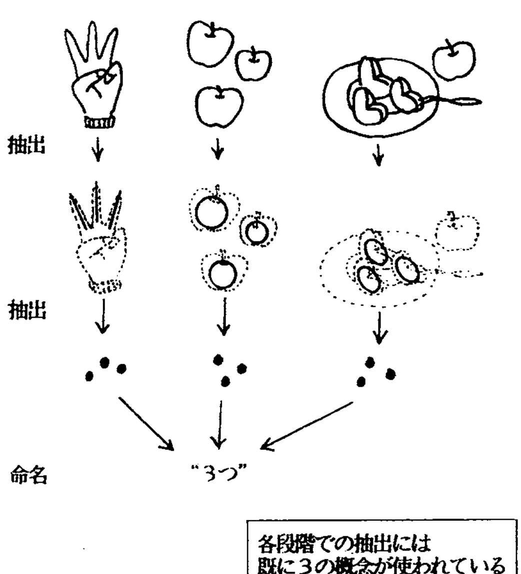

図３-ａ．３つの概念の抽出.

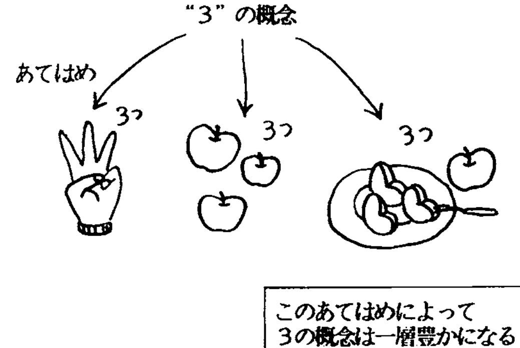

図３-ｂ．３つの概念の当てはめ.

ば，３本の指を差し出して，「３つ」とか「３歳」とかいう答えが返ってくる。このとき，子供の歳の数の理解は，どの様な具体的な対象から抽出されたといえるのだろう。子供はこのとき，単に自分は「３つだ」ということをいっているにすぎないのであり，自分の知っている数を自分の成長の程度に対して漠然と当てはめたのである。

このことについての筆者らの結論を言おう。数は先ず記号として，いわば，言葉の一種として，何かの名前として，そうした知識として覚えるものである。従ってそれが何であるかの定義に関しては初めはかなり曖昧であるが，抽象的に或いは直観的に，１つという記号の持つ性質として理解されるものと考えなければならない。それを具体的事例としての「単体」に当てはめたときに，１つという概念の定義が具体的印象として肉付けされることはあり得るだろう。しかしここで強調したいことは，前述したように，仮に漠然としたものであったにしても，１つという「単体として仕切られたもの」という概念が既にできていて初めて，それを「単体」として認知し得るということであり，これは１つという概念を対象に当てはめ，投影したことに他ならない。従って１つという概念が具体的印象として肉付けされるということは，そのことによって概念化がなされたということでは決してないということである。初歩的であっても概念が先ずなければ，対象の中にその具体例を見出だすことはできない。

具象性のない概念からの出発は，自由な思考を可能にするということについて：前項では，概念は本来抽象的な記号としての名称の獲得から出発すること，そしてこれが対象へ当てはめられることによって具象化するのであるということを強調した。この具象化は抽象的概念を即物的に印象づけるので，一時的には思考を促進するかのように見えることもある。そのため，人は思考に際して一般にこのような具象的印象に頼る傾向がある。その最も典型的で頻繁な応用は，前項で数の概念に関して述べた際に例に引いた数の理解と図形の理解である。ここでは主として幾何学的概念の理解のための視空間における印象の利用について考えてみたい。点や線の概念は視野の平面上の，例えば壁板の上の染みや継ぎ目，或いは黒板に描かれた小さく塗り潰された円や細長い帯状の線によって代用される。これらが本来の点や線でないことはもちろんのことである。こうした点や線の場合にも，前述したように，その描写の前に，その概念があってこれが壁面から識別されたのであることには違いない。しかし次にそれを頭の中で，操作する場合には，この具体的印象が表象されて，これを素材として思考が進められることになる。平面図形についても，立体図形についても，同様の操作が行われる。このような表象を思考の素材とすることは，ある面では決して悪いことではない。しかしそれはあくまでも，実際の厳密な概念の表象ではなく，我々の具象的印象に過ぎないということを忘れてはならない。そして一旦この便利な代用物を用いて思考を行う習慣を付けると，このような表象化の助けを借りなくては思考が進まなくなる。そして本来抽象的な記号操作によって成り立っていたものを，現実の具象的印象に置き換えるために，その自由な操作性が疎外されることになる。更に次に問題となるのは，その概念が現実の表象に置き換えられないような，例えば４次元，５次元の空間に進んだときには，この思考習慣はもはや無力であるばかりでなく，これらの４次元，５次元の思考を不可能にするということである。学習が進んで，このように何等かの形で，経験的表象に頼り得ない事態に立ち至る毎に，人は立ち止まってしまい，何か思考素材となる経験的表象を捜し求めることになる。しかしながら，これらの経験的表象は，過去において経験した，一層初歩的な概念の具象化にすぎないので，新しい概念操作のためには役立たないどころか，むしろ思考を退行させ，その自由な発展を抑制する効果を持っている。

これに対して，抽象的な記号同士の論理的関係の追及の場合には，具象物の表象による助けを借りないので，取り付きにくいように思われ

るかもしれないが，そのような具象的制約のなさは，具象的固定観念から思考を解放し，一層自由な発想を可能にするはずである。

例えば，ある特定の３次元の立体の構造を理解しようとするときには，３次元立体の表象を記憶の中から呼び出しこれを組み立てれば良い。これは確かにその立体を理解するための具体的素材が提供されるという意味では役立つだろう。しかしもしその３次元立体が，これまでのどの様な視覚的触覚的或いは行動的次元でも経験のないものであったときには，それは却って，その立体の理解を妨げる。それが我々の日常の経験とは全く異なっているために，人を「そんなはずはない」という当惑や一種の恐慌状態に陥れる可能性がある。或いは，虚数のように，実際にその数を経験的表象にあてはめることのできないものの場合には，その理解は記号上の約束としてしか理解することは不能であるが，そのような思考し操作がとられている限り，思考はそれ以上進まなくなり，理解不能となる。もっともそれにもかかわらず虚数の理解が可能となっているのは，本来，我々が表象に頼らなくてもこれらの概念の理解が可能なのであり，幼少期から具体的表象に基づく教育を受けていながら，幸いにして，その拘束から旨く逃れ得た場合であると考えられる。

ところでこれまで，比較的漠然と用いてきたが，表象の概念を今少し詳しく吟味して，表象の性質からこの問題を考えてみることにしたい。表象は一般に大きく分けて感覚表象，言語表象の２種に分類できる。この内，今主として問題とし，攻撃の対象としている表象は，感覚表象であるが，これは更に視覚表象，聴覚表象，触覚表象，運動表象に４分される。これらの４つの感覚表象の内，視覚表象と聴覚表象は経験的事象によって脚色されやすい。特に視覚表象は殆ど経験的記憶の表象化といっても過言でない。これに対して言語表象はその運用，遂行に伴って，視覚表象，聴覚表象，運動表象と結び付きやすい。そのため一般には，言語表象と感覚表象とは，相互に切り離し得ないと考えられがちであるが，言語表象は本来感覚表象とは独立の抽象的な記号の表象であると考えるべきである。もっとも日常言語では言語表象に加わった感覚表象が言語表象に情緒的肉付けをしており，人はこの感覚表象の情緒的脈絡の中で日常生活を営んでいるという側面があり，日常言語からこの感覚表象をすっかり取り除くと，所謂記号論理学と同様の無味乾燥なものとなる。しかし人の論理的思考はむしろこの感覚表象を除去した記号操作にある。つまり感覚表象の情緒性は，過去経験の記憶に基づいており，これを素材とした場合の思考は，思考の展開を記憶にある過去経験に置き換えることにおいて構成することになる。このことは思考を既知の過去経験のレベルに留めることになり，自由な発想とその展開を妨げることになるはずなのである。

もっとも，日常的情緒的言語と，非情緒的論理的言語の使用を，相互に独立に，つまり丁度等位型のバイリンガルが２つの言語を使い分けるように，随時切り替えることができれば，問題はかなり解決する。恐らく前にも少し触れたように，人はこの２つの思考形式をかなりの程度に切り替えて使用しているものと思われる。しかし必ずしもその切り替えは，うまく運用される保証はない。むしろ両者が混同され，相互に干渉する場合の弊害に注意すべきである。ここで最も警戒すべき思考操作は，一旦，過去経験の記憶表象，それは殆ど視覚表象か聴覚表象であるが，そのような具体的な表象に置き換えて思考を組み立てる習慣が付くと，人はその習慣から容易には逃れられなくなるということである。つまり等位型ではなく，従属型の具象的感覚表象への読み替えが主要な手段となりがちである。そしてその結果として，これまで述べてきたように，過去の思考形態に拘束され，更に具体的表象の不可能なケースについては思考を進めることができなくなるのである。特に数学的な抽象的記号操作を創造していくような分野ではその弊害は無視できないものとなる。しかし現実の教育場面においては，特に初等段階ほど，理解の助けとして具象的表象に訴える教育方法がとられがちであり，結果として従属型の思考を奨励することになっている。もしこの

ような教育方法が取られず，初めから純粋に記号の論理性を追及させたならば，多くの学習者がもっと容易に数学を理解でき，落ち零れも少なくなることが期待される。この方法は一見難しく初学者に向かないように思われがちであるが，それが誤解であることを次に吟味することにしたい。

具象的事実から一般的抽象的性質を発見させようとする教育方法は，人間の思考の本質に反する：筆者らの理解では，数学学習は少なくとも次の4つの過程からなりたっており，この順に進行する。つまり，①数の概念の理解，②数の演算の理解，③数の記号化の過程，④記号間の論理的関係の推理と理解の4つである。この4つのプロセスはいずれも決して具象から引き出されるものではない。それにもかかわらず具象から抽象化する形で理解させようとすることは，数理･論理の本質とは逆行するものであり，思考過程を混乱させることになることが考えられる。つまり学習過程の進行に伴って，その矛盾が思考の発展的進行を妨げることになる。

先ず，初めに数とその演算の学習から考えることにする。この問題は前項において述べたことと一部重複するが，数の学習は具体的事象によって理解するのではなく，記号として理屈抜きに，先ずその名称を覚えることから始まるのだということを強調したい。子供の数の学習過程は，子供が言葉を覚えるプロセスと同様である。言葉を覚え始めた幼児は，その語の意味を具体的に事象から引き出して理解し，その後で，この意味に語を覚えているのではない。度々強調してきたように，そのような抽象化は極めて無理な思考過程であり，幼少期の子供にそのような操作が可能であるとは考えられないことである。彼等は先ずその意味を殆ど理解しないまま，記号としての発語を習得する。このときぼんやりとした概念の意味が同時に頭に入ってくる。数は子供にとって初めはただの記号にすぎない。その抽象的記号が特定の順序で並んでおり，それを暗記することによって，数同志の関係が少しずつ理解されて行くのである。恐らく初めは，数は具体的な個数に対応したようなものではなくて，単なる順序をもった配列記号であり，漠然とした大きさの順位に相当するものなのであろう。数に対する最初の関係は，従って，記号としてのこの数の相対的位置関係であり，そしてこの抽象的記号としての数が，具体的対象に当てはめられることによって理解が深まっていくのであると考えられる。

次に演算過程について2，3の例を挙げて考えてみよう。初期の学習過程において，学習者が躓くのは，分数，小数，負数などの概念が学習課題に入ってきたときであることは良く知られている事実である。これらの概念に共通した特徴は，何等かの操作をしない限り，そのままでは具体的対象への当てはめが困難なことである。従って，対象を加工して，例えば，分数の場合であれば，リンゴを2つに分割することによって，1/2という概念を具体的対象から引き出させようとする。しかしこれまで繰り返し述べてきたように，この場合，例えそれが漠然としたものであっても1/2という概念が先になければ，リンゴを2つに分割するという行為は不可能なことなのではないだろうか。むしろ1つが2つになった，という不可解な現象にとらわれて，分数の理解どころでない学習者が出てくることと思うが，ともかくこうして，運良く初等の学習者が，1つのリンゴが2つに分割された片割れから1/2の概念を引き出して理解したとしよう。そして更にこれを2分割することによって，1/4の概念が理解されることになる。1/4のリンゴを2つくっつけると，[元のリンゴの]1/2になるので，分数の加算が具体的対象から理解されるという。このようなごく初期的現象であれば，具体的対象を基にしてでも理解は可能であろう。しかし一層複雑な演算，例えば，3/5に2/3を加えたり，減じたりする場合には，分割したリンゴでは，もはや却って混乱せるだけである。分数の乗算，除算の場合には，それは殆ど不可能に近くなる。そして具体的対象から出発した場合には，常に新しい課題を，かつて理解した具体的対象の事例に立ち戻って，これに置き換えて理解する思考習慣をつけがちであるから，課題状況が異なると，理解が極めて

困難となりがちである。異なる性質を持つ液体の溶液を分割して調合するような場合には，リンゴの具体例は無力であるばかりでなく，思考の進展の妨げにさえなるはずである。小数と負数の概念を具体的対象によって理解させることは，もっと厄介であろう。しかし小数の概念は分数の概念が理解されなくては不可能であるから，その具体例をここで特別に論ずる必要はない。これはもう完全に分数表記を小数表記に変換する記号操作の問題である。負数については，具体的対象としては恐らく借金の金額などを例にとることになるだろうけれども，これは負数とは，自分のものでないこと，或いは足りないこととしてしか理解させないことになる。そしてこのような具体例による理解の誘導は，任意の中点からの負の概念を理解しにくくするだろう。それに，初等演算で，引き算を縦横にこなしていたはずの学習者が，「負数」の概念が現れた途端に躓くのはどうしてなのだろう。筆者らはこの原因は，数とその演算を，初めから抽象的記号操作として処理するという自然な思考過程を取らせず，敢えて不自然な具体的対象からの抽象化という方略を与えたためであると考えている。従って後述するように，学習者の躓きは，このような場合の切り替えの難しさにあるのであって，要は切り替えの必要を無くすことによって解決する。

学習過程が進んで，具体的な数値の代わりに一般記号を用いるようになり，記号間の関係が純粋に論理的関係の構成とその推論へ進んでいくと，学習者の躓きは一層増える。この辺りで，大半が落ち零れてしまう。この段階では，学習は，一転して具体性が排除され，概念は具体的事象とは関係なく，抽象的概念として論理的に定義される。従って学習者はそれまで思考習慣として専ら取っていた具象的イメージの援用の許されない概念を理解しなければならなくなる。例えば先にも触れたように，3次元空間のように視覚的イメージを描くことのできない4次元空間，2.8次元空間が定義されると，これをあくまで体験上の視空間に置き換えようとするが，それが不可能であるため，そこで思考は停止してしまう。

これまでの学習プログラムは，上述したように，初めに，初等的概念を具体的対象によって説明し，そこから学習者が，一般的抽象的概念を発見し，引き出してくることが可能であるという前提で，立てられているように見受けられる。そしてこのようにして基本的概念が理解されるにつれて，徐々にその具体性を除去し，抽象的記号操作による理解に移って行くことが可能になると考えている。

しかし，これは所謂「見立て」乃至「見なし」の操作の誤解によるものといえよう。普通，この見立てや見なし行為は，あたかも，具象的なものから抽象的な性質を引き出すものの如く考えられる傾向がある。しかし実際には，それは抽象的な概念を既に持っていて，これを具体的対象に当てはめる行為である。例えば黒板に，先生が紙テープを貼って，線とはどのようなものかを理解させようとする例を考えてみたい。実際その様な教材の使い方がなされているはずである。普通初級の学習者は，その具体的なテープを見て，そこから「線」という抽象的な概念を抽出する，と考えられている。テープを線に見立てることによって線の概念を理解することができたのだという。しかし果たしてそう言えるのだろうか。これはむしろその初学習者がその時既に線の概念を何等かの形で持っており，真っ直ぐなテープの状態を線に見立てたにすぎないのではないだろうか。線の概念がない場合には，テープを線に見立てることはできないはずである。

ここで数学における直線の定義と関連させてこの問題を，簡単に考察してみたい。Borel, É.(1988)は以下に示すような2つの方向から，数学における定義の問題を論じている。彼の論述は，いまここで問題としている学習法，教授法と関わっていると思われるので，以下に簡単に引用して検討しておく。

「直線という言葉の意味は，ユークリッド幾何学，リーマン幾何学，ロバチェフスキ幾何学のそれぞれの間で同一ではない．しかし直線なるものが，ひとたび特定の幾何学の公理

に合わせて定義されると，われわれはそこに述べられていることを正確に知り，また特定の定理－たとえば三角形の内角の和が常に二直角に等しいとか，常にそれより大きいとか，または，常にそれより小さいとか－の，どれが真であるかも確信できる．今挙げた定理などは，一見，互いに矛盾するようにみえるけれども，おのおのはどれか一つの幾何学の中で，したがって直線というものの然るべき定義の下で，真なのである．」（村田訳，p. 16）

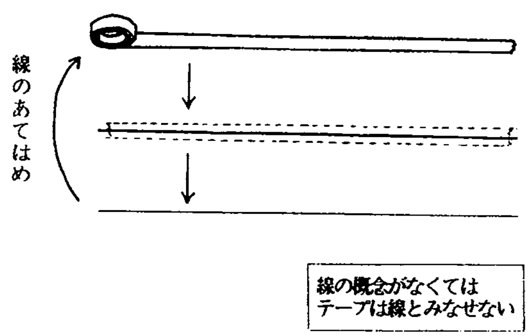

図４．線の見立てと線の概念．

直線の定義がこのようなものであれば，直線の理解は，定義から出発しなくては理解できないものであることは明らかであろう。

しかし，Borel は，この後，直ぐ次のようにも述べており，この後者の考えが，いま筆者らが批判している学習法，教授法の根拠となっているものと思われる。

「今日，数学は次第に，任意の仕方で定義された或る抽象的対象の間の諸関係を，ただしそれらの定義が矛盾を含まないことを唯一の条件として研究する学問，と思われるようになりつつある．しかし数学を，論理や，将棋のような遊びと混同する危険を避けるためには*1)，それらの任意の定義が，実在する対象との類似性によって示唆されたものであることを，まず第一に注意すべきであろう．その反面，複素数，超限数その他，数学的対象の中には，人間精神の純粋な創造*2) であるものも多い．しかしそれらが容認されて来た根拠は，数学者や物理学者の直面した問題が，それによって，より容易に解決でき，そこにあった難点が解明できたという事実による．」（村田訳，p. 16-17）

*1) ラッセルの論理主義や，ヒルベルトの形式主義への反対意見．［訳注］

*2) デデキントの有名な言葉［訳注］

この後の引用部分は，数学の特定の概念は，我々が現実に知覚し，認知する諸対象を手本として，それを純化してできたものが多いと，主張しており，更に，純粋に人間が創造した数学的概念であっても，その概念が受け入れられるためには，その概念が現実を説明するのに有効であった時に限られる，と主張している。現代の数学教育は，この Borel の考え方と同じ基盤に立って行われている。この考え方は，訳者の注にも見られるように，Russel, B. の論理主義や Hilbert, D. の形式主義に対する反論として述べられているのであろう。Borel の見解を受け入れるか，Russel や Hilbert の見解を受け入れるかによって，数学的概念の位置付けが全く正反対となる。確かに，Borel が主張するように，数学的概念が現実の対象との類似性から思いつかれ，定義されることはあり得る。しかし，対象を我々がそのようなものとして，認知し得るということ背景には，つまりそれが地から図へ転化するためには，一層基本的次元において，アプリオリに概念が存在することが前提である。Borel から初めに引用した直線の定義に見られるように，どう定義されるかによって直線の性質が異なるのであるから，我々が対象をどの様に認知するかは，この基本的概念に負っているともいえるのである。従って，我々が，実在する対象との類似性によって任意の数学的概念が示唆されたと考えるのは，心理的錯覚に過ぎないといえよう。

実際問題として，個人がその生活歴の中で，初期の基本概念をどの様な形で獲得したかについては，確認できない。筆者らの判断では，または仮定ではというべきであろうが，それは彼等が具体的世界から発見して抽象した一般的概念としてではなく，彼等が習得した，言葉の意味として，かなりあいまいではあるが直観的に獲得，または了解されたものではないかと思わ

れる。このように考えれば，その学習の初期段階以来の，言葉の記号操作の精密度，つまり抽象度と論理性が重要な要因として注目されねばならないことになる。所謂教材による学習は，この基礎の上に初めて成り立ち得るものである。現在，一般に初等教育においてなされていることは，具象から抽象的一般化への発見的学習であり，それがあたかも妥当な方略として，児童生徒の理解を促進しているものと信じられており，この方法が一見成功しているかのように見えるのは，彼等が就学前に獲得した基本的概念があるからにすぎない，ともいえるのである。彼等は，実際には具体的対象から新しい概念を，例え誘導によって容易になっていたとしても，発見したり抽象化して獲得しているのではなく，既に持っている漠然とした直観的概念を現実に当てはめているにすぎない。それは殆ど無意識的に行われる。そしてそれが人の自然な理解と学習方法なのである。しかし現在の学校教育においては，この事実が理解されていないように思われる。数やその演算やその他の論理的理解は，一貫して具体的事実，乃至は具体的対象から発見され，抽象化されることによって理解されているものと見なされている。そして，徐々に学習課程が進むにつれて，またその理解が進むにつれて，教材から具体性を除去して行くべきであると考えているようである。そのために，教育方法，学習方略は一貫してその方向で進められる。従って本来，言葉の学習と同様に，記号操作として概念を形成し学習を進め，概念間の論理操作によってそれを発展させるべきものが，常に具体的事象に置き換えることによって理解を進める方向へ，強制的に歪められることになるのである。一旦この思考習慣がつくと，あたかも，従属型のバイリンガリストが，総ての言葉を母国語に置き換えてからでなくては，理解し得ないのと同様になる可能性が強い。しかし具体的な事象に縛り付けられた思考は，融通性を欠き，常に低い水準に引き戻され，新しい概念を受け入れにくくする。その結果としてもたらされる思考方略は，新しく遭遇した事実やその関係を，既知の知識に置き換えて理解しようとするあらがい難い傾向である。この方法は大変便利に見えるけれども，これは新しい事実関係を既知の知識に類型化し，ラベル化することであって，具体的な表象や経験に捉らわれ，抽象的，一般的思考を行いにくくする。新しく入力された情報を正しく理解することを妨げるものである。更に，既知の知識に捉らわれずに，革新的な発展的思考をとり，柔軟に問題を処理することを妨げることになる。なぜなら，入力された情報に，既知の知識にはない新しい事実関係があっても，それをその通りに理解するのではなくて，既に持っている知識の水準に引き戻してしまうからである。これは丁度言語学習における，従属型のバイリンガルの学習方法に相当する。つまり，この学習方法では，新しい言語系の語の学習に際して，その語の意味を，既知の言語系の対応した，または類似した意味を持つ語の「意味」に置き換えて理解する。この場合は，必ずしも，新しい言語系の語の意味の水準が低下するとは限らないが，既知の言語系の語の意味に留まり，新しい言語系の語が本来持っていた意味は遂に理解されないままに終わる恐れがある。これに対して，等位型のバイリンガルの学習方法では，既知の言語系に類似した意味を持つ語があってもなくても，新しい言語系の語の意味は，その学習対象となっている語の意味を最初から学習するのである。この後者の学習スタイルでは，常に，新しい知識を新しい知識として獲得し，理解する思考習慣を涵養する。実際，言語学習に限って見ても，等位型のバイリンガルの方が情報の処理時間が短いばかりでなく，学習効率も高く，その自在な運用が可能になることが分かっている。数学学習も一種の記号系の学習であることを考えると，この方法に含まれた学習方略は数学学習に極めて有効であることが想像されよう。

従来の学習方略の，更に良くない点は，教育過程において学習課程が進むにつれて，教材から具体性を除去して行くことである。それはもちろん，もはや具体的事例によっては説明できない概念操作を扱うようになることとも関係し

ている。そのため学習者は，身に付けた思考方法が徐々に役立たなくなること，教材から具体性が徐々に消え去っていくこととの2つの困難に立ち向かわなければならない。学習方法と思考方法とを，段階的に切り替えていかなくてはならないのであるが，そのような切り替えの方法については，教授されていないのである。ステップが進むごとに，切り替えができずに脱落して行く学習者が増えて行くことになる。

それにもかかわらず，かなりの学習者が理解に成功し先に進むことができているのは，恐らく，学校教育において具象から抽象への方略が取られているにもかかわらず，独自に抽象から具象へ，或いは抽象的記号操作として処理する工夫を行い，成功する学習者がいるためであろう。このような学習者は，学習課程が高度化しても脱落することはない。しかし大多数の学習者は，具象から抽象化の軛から逃れることができないために，数理と論理的思考を発展させることができなくなっていくのであると考えられる。そこで，いま必要なことは，初期の言語環境から精密コードによる言語習慣を身につけること，学習の初期から記号操作による概念の形成力を養成すること，教育及び学習方略を抽象的記号操作に組み替え，推理と創造によって新しい概念を形成し，論理と理論を展開すること，必要に応じてこれを具体的対象へ当てはめることにより一層確実で実りのある知識にしていくことであると考えられる。

文　献

Borel, É. 村田全訳　数学における定義. Lionnais, F. L. 村田全監訳　数学思想の流れ, 東京：東京図書, 16-30, 1988.

Burbaki, N. 村田全，清水達雄訳　数学史. 東京：東京書籍，1970.

Deese, J. 片山嘉雄監訳　言語心理学. 京都：ナカニシヤ出版，1984.

d'Espagnat, B. 町田茂訳　観測の理論. 東京：岩波書店，1980.

Euclid　原理. 池田美恵訳　村田松平　編　ギリシャの科学. 世界の名著９，東京：中央公論社, 1972.

Hadamard, D. 伏見康治，尾崎辰之助，大塚益比古訳　数学的発見の心理. 東京：みすず書房，1990.

Lambert, W. T. *Language, psychology and culture.* Stanford：Stanford Univ. Press,1972.

Lenneburg, H. 佐藤方哉，尾崎昭雄訳　言語の生物学的基礎. 東京：大修館書店，1974.

Mayer, R. E. 多鹿秀継訳　認知心理学のすすめ. 東京：サイエンス社，1980.

Newton, A. プリンシピアー自然哲学の数学的原理. 中野猿人訳　東京：講談社，1977.

Рцзавин, Г, И. 山崎三郎，柴岡泰光訳　数学論－数学的認識の本性－. 東京：岩波書店，1977.

Wertheimer, M. 矢田部達郎訳　生産的思考. 東京：岩波書店，1952.

Weyl, H. 菅原正夫，下村寅太郎，森繁雄訳　数学と自然科学の哲学. 東京：岩波書店，1959.

山岡哲雄，橋本圭子，池田妙子　童話の中の気の病について一子供の読書と感受性一. 金沢大学教育工学研究，**17**, 1-16, 1991.

山岡哲雄，橋本圭子　自己調整と意志に関する心理学的研究III一意志と意識に関わるモデルの構成一. 金沢大学教科教育研究，**28**，205～215，1992.