

対称一定和 n 人ゲームについて

木 戸 隆 彦*

On Symmetric Constant-Sum n -person Games

Mutsuhiko KIDO

(Received October 15, 1968)

Using the concept of minimax coalitions, B. R. Gelbaum⁽¹⁾ has obtained solutions of some classes of symmetric zero-sum n -person games. In a similar way, we should like to show the existence of a solution to a class of games.

We shall deal with the case

$$r = p-2, \quad v_r = 0, \quad a \leq v_{r+1} \leq 2a$$

in Gelbaum's notations. But here v_q denotes the characteristic function of a symmetric constant-sum n -person game in 0-1 normalized form for convenience' sake.

Symmetric constant-sum n -person game Γ の characteristic function v の値は coalition の人数だけで決るから, q 人 ($0 \leq q \leq n$) の coalition に対する v の値を v_q とかくことにする. Γ が 0-1 normalize されているとすれば v_q は次のような関数である.

- (a) $v_0=v_1=0, \quad v_{n-1}=v_n=1$
- (b) $s+t \leq n$ ならば $v_s+v_t \leq v_{s+t}$
- (c) $v_s+v_{n-s}=1$

q 人の coalition に対する v_q を q 人に等分すれば v_q/q であるが, この値が最大となるような coalition の中で人数の最小のものは最もできやすい coalition と考えられる. この考えに基づいて B.R.Gelbaum⁽¹⁾ は幾つかの solution を与えている. ここでは同様な考えにより solution の与えられる 1 つの場合を示す.

記号は Gelbaum に従い

$$\begin{aligned} a &= \max \{v_q/q \mid q = 1, 2, \dots, n\} \\ p &= \min \{q \mid v_q/q = a\} \\ n &= mp + r, \quad 0 < r < p \end{aligned}$$

とする.

Lemma 1. $r=p-2, \quad v_r=0$ ならば $v_{r+1} \geq a$ である.

証明. (b) により $mv_p \leq v_{mp}$

* 数学教室 Department of Mathematics

α の仮定により

$$\alpha = \frac{v_p}{p} = \frac{mv_p}{mp} \leq \frac{v_{mp}}{mp} \leq \alpha$$

$$\therefore v_{mp} = mp\alpha$$

一方において (c) および $v_r = 0$ より

$$\begin{aligned} v_{mp} &= 1 - v_{n-mp} = 1 - v_r = 1 \\ \therefore mp\alpha &= 1 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} v_{mp-1} &\leq (mp-1)\alpha = 1 - \alpha \\ \therefore v_{r+1} &= 1 - v_{n-(r+1)} = 1 - v_{mp-1} \geq 1 - (1 - \alpha) = \alpha \quad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

以下つねに

$$r=p-2, v_r=0, \alpha \leq v_{r+1} = \alpha + \epsilon \leq 2\alpha$$

の場合を扱うので特にことわらないことにする。

先づ 2 つの type の imputation を考える。

Type 1. $(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{mp \text{ 個}}, \underbrace{0, \dots, 0}_r)$

Type 2. $(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{(mp-1) \text{ 個}}, x_1, \dots, x_{r+1})$

(Imputation であることから $0 \leq x_i, \sum_{i=1}^{r+1} x_i = \alpha$ となる)

ただし、 $x_p > \alpha - \epsilon$ なる x_p が存在すれば x_i の中には x_p と同じ値のものが偶数個 (x_p も含めて) あるものとする。

これらに対し、次のような imputation の集合を考える。

U : Type 1 のものの component をならべかえてできる imputation 全体の集合。

V : Type 2 のものの component をならべかえてできる imputation 全体の集合。

Lemma 2. U に属さない imputation

$(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{(mp-1) \text{ 個}}, y_1, \dots, y_{r+1})$

または、その component をならべかえてできる imputation を β とするとき、 $\beta \in \text{dom } V$ であるための必要十分条件は、 $1 \leq k \leq r+1$ なる 1 つの k に対して

$$\begin{aligned} (1) \quad y_i &< x_i \quad (i \neq k) \\ (2) \quad x_k &\geq \alpha - \epsilon \end{aligned}$$

が成立つことである。

証明. $\beta \notin U$ であるからすべての y_i について $y_i < x_i$ が成立し、従って

$$(3) \quad y_k < a$$

である。また、(2)を用いて

$$\sum_{i \neq k} x_i + a = (a - x_k) + a = 2a - x_k \leq 2a - (a - \varepsilon) = a + \varepsilon = v_{r+1}$$

即ち

$$(4) \quad \sum_{i \neq k} x_i + a \leq v_{r+1}$$

が成立つ。V は symmetric であるから (1), (3), (4) が成立てば β を dominate する imputation が V 内にある。

次に $\beta \in \text{dom } V$ となるための必要条件を考える。 β の component と V の 1 つの imputation の component の間に起り得る不等式関係は高々 $(r+1)$ 個であり、 $v_r = 0$ であるから、domination が起るためには丁度 $(r+1)$ 個の不等式が必要であるが、

$$\sum_{i=1}^{r+1} x_i = \sum_{i=1}^{r+1} y_i = a$$

であるから、(1) のような不等式は高々 r 個である。また、 $v_{r+1} \leq 2a$ であるから、domination が起るためには(3)のような不等式を 1 個より多く用いることはできない。従って(1)の不等式は r 個必要である。また、このとき、

$$\sum_{i \neq k} x_i + a \leq v_{r+1}$$

でなければならないが、これより(2)は容易に導かれる。

(証明終)

Lemma 3. V の imputation の間に domination は起らない。

証明. V の 2 つの element を

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (a, \dots, a, x_1^{(1)}, \dots, x_{r+1}^{(1)}) \\ \alpha_2 &= (a, \dots, a, x_1^{(2)}, \dots, x_{r+1}^{(2)}) \end{aligned}$$

とし、この間に r 個の不等式

$$(5) \quad x_i^{(1)} < x_i^{(2)} \quad (i \neq k)$$

が成立つとする。このとき、常に

$$(6) \quad x_k^{(2)} < a - \varepsilon$$

となることが証明できれば lemma 2 により domination の起らないことがわかる。

(5) が成立すれば $\sum_{i=1}^{r+1} x_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{r+1} x_i^{(2)} = a$ の関係から必然的に

$$(7) \quad x_k^{(1)} > x_k^{(2)}$$

となるから、もし $x_k^{(1)} \leq a - \epsilon$ なら (6) は成立つ。従って、 $x_k^{(1)} > a - \epsilon$ ならば、(5) の $x_i^{(1)}$ の 1 つで $x_i^{(1)} \leq a - \epsilon$ であるようなものと $x_k^{(1)}$ とを交換しても (5), (7) の不等式関係が保たれることを証明すれば十分である。いま、

$$x_k^{(1)} > a - \epsilon$$

とし

$$A_1 = \{x_i^{(1)} \mid x_i^{(1)} \geq x_k^{(1)}, i \neq k\}$$

とすれば、 A_1 の element はすべて $a - \epsilon$ より大であるが a_1 が type 2 であることから、 A_1 に含まれる element の個数は奇数個でなければならない。 A_1 の element と (5) の関係で結ばれている $x_i^{(2)}$ の集合を A_2 とすれば、 A_2 の element も奇数個で、すべて $a - \epsilon$ より大である。従って a_2 も type 2 であることから、 A_2 に含まれない $x_l^{(2)}$ で A_2 の element の 1 つと等しいものがある筈である。それを $x_l^{(2)}$ とすれば

$$x_l^{(2)} = x_p^{(2)}, x_p^{(2)} \in A_2$$

なる $x_p^{(2)}$ がある。(5)の不等式と A_1 の定義および(7)により

$$x_l^{(2)} = x_p^{(2)} > x_p^{(1)} \geq x_k^{(1)} > x_k^{(2)}$$

となるから、 $l \neq k$ である。従って

$$x_l^{(1)} < x_l^{(2)}$$

なる(5)の不等式があり、この $x_l^{(1)}$ と $x_k^{(1)}$ を交換しても(5), (7)の関係は保たれる。更に $x_l^{(1)} \notin A_1$ であるから $x_l^{(1)} < x_k^{(1)}$ である。即ち、この交換により(7)の左辺は $x_k^{(1)}$ より小さいものにおきかえられている。もし $x_l^{(1)} > a - \epsilon$ なら、同様なおきかえにより $x_l^{(1)}$ より更に小さいものにすることができる。これをくり返せば有限回の後(7)の左辺は $a - \epsilon$ 以下の値となるから

$$x_k^{(2)} < a - \epsilon$$

でなければならない。

(証明終)

定理. $r=p-2, v_r=0, a \leq v_{r+1}=a+\epsilon \leq 2a$ なら $U \cup V$ は Γ の solution である。

証明。 U の 2 つの element の間および U の element と V の element の間に domination が起らないことは容易にわかる。 V の 2 つの element の間に起らないことは lemma 3 で証明した。従って

$$(U \cup V) \cap \text{dom}(U \cup V) = \emptyset$$

である。

次に β が $U \cup V$ に含まれない imputation のとき、 β の component の中で a より小さい値のものの個数が

- (A) p 個以上ある
- (B) p 個より少い

の 2 つの場合に分けられる。 (A) の場合は $\beta \in \text{dom } U$ であることが容易にわかる。 (B) の場合、その個数は $p - 1 = r + 1$ 個のとき以外には起らない。いま a より小さい component を

$$y_1, \dots, y_{r+1}$$

とすれば

$$(i) \quad \sum_{i=1}^{r+1} y_i = a$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{r+1} y_i < a$$

の 2 つの場合がある。

(i) の場合 y_i 以外の component はすべて a となる。便宜上

$$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{r+1}$$

と仮定する。もし、 $y_1 \leq a - \epsilon$ なら $\beta \in V$ となるから $y_1 > a - \epsilon$ である。ここで、 $a - \epsilon$ より大きな y_i の数が偶数個のときと奇数個のときに分けて考える。

偶数個のとき

$$y_{2m} > a - \epsilon, \quad y_{2m+1} \leq a - \epsilon$$

とする。(ただし、 $2m = r + 1$ ならば第 2 の不等式はない)

$$\begin{aligned} z_{2t-1} &= z_{2t} = \frac{y_{2t-1} + y_{2t}}{2} \quad (1 \leq t \leq m) \\ z_i &= y_i \quad (2m + 1 \leq i \leq r + 1) \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} z_i &> a - \epsilon \quad (1 \leq i \leq 2m) \\ z_i &\leq a - \epsilon \quad (2m + 1 \leq i \leq r + 1) \\ \sum_{i=1}^{r+1} z_i &= a \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} y_i &\leq z_{i-1} \quad (2 \leq i \leq 2m) \\ y_i &= z_i \quad (2m + 1 \leq i \leq r + 1) \end{aligned}$$

が成立つ。 $\beta \notin V$ であるから $1 \leq s \leq m$ なる 1 つの s に対して

$$y_{2s-1} > y_{2s}$$

が成立ち、従って

$$y_{2s-1} > z_{2s-1} = z_{2s} > y_{2s}$$

となるから、十分小さな正数 δ をとれば

$$z_{2s} - \delta > y_{2s}$$

が成立つ。ここで

$$x_i = z_i - \delta \quad (i = 2s - 1, 2s)$$

$$x_i = z_i + \frac{2\delta}{r-1} \quad (\text{その他の場合})$$

とおけば

$$x_{2t-1} = z_{2t} > a - \epsilon \quad (1 \leq t \leq m)$$

$$x_i \leq a - \epsilon \quad (2m+1 \leq i \leq r+1)$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} x_i = a$$

が成立つ。この x_1, x_2, \dots, x_{r+1} に $(mp-1)$ 個の a を加えてできる imputation は V の element で

$$\begin{cases} y_i < x_{i-1} & (2 \leq i \leq 2m) \\ y_i < x_i & (2m+1 \leq i \leq r+1) \\ x_{2m} > a - \epsilon \end{cases}$$

であるから lemma 2 により β を dominate する。

奇数のとき

$$y_{2m-1} > a - \epsilon, \quad y_{2m} \leq a - \epsilon$$

とする。(ただし、 $2m-1=r+1$ のときは第 2 の不等式はない) ここで

$$\frac{y_{2m-1} + y_{2m}}{2} > a - \epsilon$$

ならば、偶数のときと全く同様にして $\beta \in \text{dom } V$ であることがわかる。

$$\frac{y_{2m-1} + y_{2m}}{2} \leq a - \epsilon$$

のときは

$$z_{2t-1} = z_{2t} = \frac{y_{2t-1} + y_{2t}}{2} \quad (1 \leq t \leq m-1)$$

$$z_i = y_i \quad (2m-1 \leq i \leq r+1)$$

とおけば

$$z_i > a - \epsilon \quad (1 \leq i \leq 2m-1)$$

$$z_i \leq a - \epsilon \quad (2m \leq i \leq r+1)$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} z_i = \alpha$$

$$y_i \leq z_{i-1} \quad (2 \leq i \leq 2m - 1)$$

$$y_i = z_i \quad (2m \leq i \leq r + 1)$$

が成立つ。更に

$$z_{2m-1} - (\alpha - \epsilon) = \delta$$

とおけば $\delta > 0$ で

$$x_i = z_i + \frac{\delta}{r} \quad (i \neq 2m - 1)$$

$$x_{2m-1} = z_i - \delta$$

とおけば

$$x_{2t-1} = x_{2t} > \alpha - \epsilon \quad (1 \leq t \leq m - 1)$$

$$x_{2m-1} = \alpha - \epsilon$$

$$x_i \leq \alpha - \epsilon \quad (2m \leq i \leq r + 1)$$

$$\sum_{i=1}^{r+1} x_i = \alpha$$

となる。この x_1, x_2, \dots, x_{r+1} に $(mp - 1)$ 個の α を加えてできる imputation は V の element で

$$\begin{cases} y_i < x_{i-1} & (2 \leq i \leq 2m - 1) \\ y_i < x_i & (2m \leq i \leq r + 1) \\ x_{2m-1} = \alpha - \epsilon \end{cases}$$

であるから lemma 2 により β を dominate する。

(ii) の場合

$$\alpha - \sum_{i=1}^{r+1} y_i = \eta \quad (> 0)$$

$$y'_i = y_i + \frac{\eta}{r+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r+1)$$

とおけば $y'_1, y'_2, \dots, y'_{r+1}$ については(i)の関係が成立つから、(i)の場合の x_1, x_2, \dots, x_{r+1} を作れば

$$y_i < y'_i \quad (i = 1, 2, \dots, r+1)$$

の関係と合せて dominate されることがわかる。

(証明終)

-
- (1) GELBAUM, B. R., "Symmetric zero-sum n -person games", Annals of Mathematics Study No. 40 (Princeton, 1959), pp. 95-109.