算数・数学科の問題解決における方略指導の授業設計について

算数・数学科の問題解決における方略指導の授業設計について

三　塚　正　臣*

1、はじめに

算数・数学の授業を分析すると、授業の内容の指導は行われているが、問題を解決する方法の指導は行われていない。したがって、児童・生徒は問題解決においては、ストラテジーを用いることはないので、問題も解決できない。また、問題解決の能力を育てることは困難である。児童・生徒に基本的にストラテジーを獲得させ、活用できるように、教師は、授業において、意図的にストラテジーの指導を行う必要がある。

問題解決は、real worldから数理化の過程を経て、数学的な問題を設定し、種々の手段や手法を用いて解決していくという、方略の指導を志向する複合的総合的な数学的活動である。

問題解決は、「学校を卒業した後、社会において取り組む諸問題を解決する為に必要な基礎的な能力を身につけておくこと」をねらいとしている。

即ち、問題解決は、既知の知識や固定化された行動パターンやアルゴリズムによっては、解決できない問題事態に対して、問題意識をもち、主体的に、問題解決の手法や手段、あるいは、ストラテジーによって、条件の内容を解釈したり、手法を適用して、新しい内容に再構成し、数学的アイデアや数学的能力によって解決をはかることである。

ここでは、問題解決におけるストラテジーの解明とともに、問題解決におけるストラテジーの授業の設計を追究する。

2、問題を解決する構造について

問題解決においては、多様な思考活動が働く。問題解決の指導をくみたてるもとになるものとして、問題がどのように解決されるかどのような内容の相互関係があるか等、それらの内容の相互関係をとらえておかなければならない。これまでは、問題を解決する構造を解明しないまま、指導する傾向があり、指導のゆきづまりを生じ、主体的に数学的活動をさせることが阻害されてきた。

問題を解決しようとするときには、操作活動や既習の内容と結びつけ、条件を深めたり、条件を解釈する、また、条件と条件とを関連づけて考えることにより、内容の相互の関係がとらえられる。また、問題の内容の本質的なことをとらえ、図にかいたり、その図をもとにして、既知の内容と結びつけ、関係を考える。また、観点を変えて見なおしたり、類似の問題を思い出して、その解決の方法をもとにして考える。また、データを解釈したり、条件と条件とを関連づけて、数学的な考え方によって新しい内容を再構成することによって、内容の相互関係がとらえられ、解決の構造が明らかになる。

*　三　塚　正　臣　金沢大学教育学部

3、問題解決の指導構造とストラテジー指導との関係

解決の構造に即して指導の構造が考えられる。つまり、解決の過程において示された問題の内容の相互関係にもとづいて、それらの内容や解決過程において、用いられる数学的な考え方を身につけさせる。

指導の方法、とくに問題解決におけるストラテジーがどのように用いられるかを検討することによって、指導の構造がとらえられる。

問題解決においては、これまでの学習において、獲得した方法や原理や知識によって、条件を分析したり、さらに、条件と条件とを結びつけたり、関連づけながら解決する。さらに、掘り下げられた内容に再構成し解決していく。この解決過程において、これまでの原理や方法をどのように関連させていくか、この学習過程において、児童・生徒がおこなう認知パターンがストラテジーと考えられる。

Schoenfeldは、「児童・生徒が主体的に追究していくなかで、問題に出あったとき、前に試みた方法を意識的に使おうとするとき、その方法は方略とよぶ」と述べている。その方法が意識化されたとき、その方法が方略である。算数・数学の数学的方法が児童・生徒の主体的な解決活動の中で認知行動のパターンとなったとき、方略となる。

算数・数学の問題を解決していくときに必要なストラテジーは、総合的方略(Global strategy)、一般的方略（General　strategy)、数学的方略（Mathematical strategy)、補助的方略(Helping strategy）である。総合的方略は、問題解決の手順を示す方略であり、Polyaは「問題を理解する－解決の計画を立てる－計画を実行する－結果を検討する」段階を示した。このような段階が総合的方略である。Leblancは、問題を解くために立てられた主体的計画を総合的方略と述べている。このような視点から主体的な学習活動がなされる学習過程の段階を追究した。

(1) 総合的方略としての問題解決の学習過程

問題解決においては、児童・生徒が主体的な解決の活動がなされるように、学習過程を構成しなければならない。このように考えてみると、これらの問題解決の学習過程として、問題意識をもつ段階－問題の内容を把握する段階－問題の追究、問題の条件の構造を分析する段階－解決の予想の段階－問題の見直し、発展的に扱う段階、がGlobal strategyとして考えられる。

①　問題意識をもつ段階

児童・生徒が主体的に取り組むには、問題を課題としてとらえ、取り組もうとする意識をもつ段階が必要である。これまでの思考経験によって、いくつかの課題になりそうな問題を考えるとき、思考との間の矛盾や疑問をもち、課題として、解決してみようとする意識をもつ段階である。

②　課題の明確化、課題の設定の段階

いくつかの課題になりうる内容を検討しているうちに、課題として、ある程度の困難性をもち、漠然とした解決の予想がたつと、課題の所在が焦点化され、明確になる。この結果として、課題が設定される。

③　課題の内容の把握の段階

課題が設定されたならば、課題の内容をとらえることが必要である。この段階においては、課題の内容の非本質的なことを捨象し、本質的なことをとらえ、情景図や半具体図、テープ図、線分図などによって、問題の内容をよくとらえる。

④　課題の条件の構造分析の段階

課題の内容を分析し、問題を構成している既知要素と未知要素との間の関係を発見することが解決の第一段階である。受けとめた条件を相互に関連づけたり、既知の学習内容と結びつけて考えたり、条件と条件とを結びつけ、新しい内容を再構成することによって解決の糸口が見出される。この過程において、ストラテジーや

数学的能力や数学的な考え方が有機的に働く。

この段階においては、条件を既習内容と結びつけたり、条件を他の条件に結びつけたり、関連的にみたりして、新しい内容に再構成する。また、質的に観点を変えて考えたり、多様な解決の方法をも追究する。さらに、一般的ストラテジーであるパターンをさがしたり、類似の問題の解決の方法を想起し、その方法をもとにして解決の方法を考える。また、条件を変えて単純化した問題にかえ、その解決の方法をもとにして、本問題を考えることが必要である。

また、一般的ストラテジーである類推的に考えたり、帰納的に考えたり、演繹的に考えたり、データを解釈する等のストラテジーをもとにして指導の構造をさぐる。

⑤ 課題の見直しと発展的な扱いの段階

ポリアは振り返って考えることを述べている。このことは、解決の方法を振りかえり、より簡単な方法はないか、あるいは、より一般的な方法はないか、と解決の方法を振り返り考えることを意味している。

問題の条件の構成要素を変えたり、条件の一部を変えて、類似の問題やより一般的のものを考える。これらの問題は、原問題の解決の方法がよりどころとなり、原問題とこれらの発展問題との解決のしくみの異同を弁別し、相互関係をとらえる。

(2) 問題解決における一般的ストラテジーと補助的ストラテジー

一般的方略は、総合的方略の各段階を考察するときに必要な方略であり、また、全般に用いられる方略である。パターンをさがす、類似の問題を思い出し、その解決の方法をもとにして解決をはかる。複雑な問題は単純な問題の系列に分解して、それぞれの問題の解決の方法をもとにして、複雑な問題を解決する。[1] 一般化をはかる、類推的に考える、帰納的に考える、振り返って考える、サブゴールをつくる[2]等の方略が一般的方略である。

数学的方略は、数学的な問題解決において用いられる数学的手法で、例えば、数量化の考え、集合の考え、対応の考え、関数の考え等をさす。

問題解決の過程においては、数学的内容とともに、数学的な考え方や、問題解決における補助的ストラテジーや一般的ストラテジー、数学的ストラテジーが用いられ、解決の糸口をつかむことになる。

補助的ストラテジーを述べる。問題の内容を把握する段階においては、問題の内容をわからせるのであるから、情景図や半具体図、テープ図や線分図をかくこと、問題の内容の本質的なことをとらえること、問題を解決するために必要な鍵となる言葉や句をさがすこと、また、かかれた図によって、問題内容を述べることができれば、問題の内容をとらえたことになるので、図によって、問題内容を述べることは補助的ストラテジーとなる。

条件の構造を分析し、解決の方法を追究し、解決の予想をたてる段階では、補助的ストラテジーとして、問題場面をよくとらえたり、問題を読み返す。また、鍵となる言葉や句等本質となるものをとらえ、図にかき、これらをもとにして、関係をとらえたり、本質となる部分を図にぬき出してかいて解決の糸口を追究する。一般的ストラテジーであるパターンをさがす。また、条件に関連する既知の内容を思い出し、解決に結びつける。あとにもどって考える (Working back-ward)。また、単純化した簡単な問題、あるいは、類似の問題を思い出し、その解決の方法をもとにして、当面している問題の解決をはかる。また、複雑な問題においては、単純化した問題の系列に分解し、それらの問題の解決の方法をもとにして、異同弁別しながら類推的に考えることによって解決をはかる。さらに、補助的ストラテジーとして、表やリストをつくる。データを解釈する。観点を変えて考える。条件と条件とを結びつけ、新しい内容を再構成する。焦点づける。可逆的に考える。

(3) 算数・数学科の学年に応じた問題解決におけるストラテジーの指導

算数・数学の学習指導においては、自主的に探究させ、問題を解決する能力を育てようとしている。授業においては、算数・数学の「内容」の指導が中心となって、「方法」の指導、つまり、ストラテジーの指導が意識的になされていない。

「問題場面で児童はストラテジーを用いているか」の調査における結果によれば、「子どもは、ひろくストラテジーを獲得していない。また、解決の方法の糸口がとらえにくい。問題解決において、ストラテジーをつかえない子どもが多い。あるいは、問題に応じて、適切なストラテジーを選択できない。さらに、一つのストラテジーから他のストラテジーへの適応の転換ができない。」

これらのことは、子どもたちに、意図的に基本的ストラテジーを獲得させ、活用できるまでに意図的に授業において、ストラテジーの指導が重要であることを指摘している。

問題解決において、ストラテジーを指導するねらいは、子どもに問題解決の能力を身につけさせるとともに、解決の方法を意識させることにあって、解き方をおぼえさせることではない。

問題解決のストラテジーの指導にあたっては、各学年の段階に応じて考えなければならない。同じ問題を出題しても、学年の段階によって、その問題に対してとる方法も異なるし、手段も異なる。解決行動は、これまでの学習経験と発達段階特有の思考に支えられている。つまり、児童の発達段階に即した問題解決のストラテジーを選択し、指導すべきことを示唆している。

問題解決は、児童が自分で問題を把握し、自分で解決の手順を模索し、解決する。この点から学年間のねらいを検討してみると、低学年においては、

よい問題を与えること、インフォーマルな解決をさせること、柔軟な思考力をもつこと、振り返ってみる習慣をつけること、等。

高学年においては、

数学的に意味のある問題を与えること、問題解決の手順を指導すること、観点を変えてよりよい解決へまとめる。問題に積極的に取り組む態度を育成すること、問題解決のストラテジーを具体的に用いること、等。

をねらいとしている。

低学年においては、問題解決の素地を固め、高学年においては、問題解決の手順や方略を習得させ、問題解決能力を身につけることをはかろうと考えた。

A.Tobinは、フィラデルフィアにおける問題解決のカリキュラムのなかで、問題解決のためのストラテジーを述べている。

ストラテジーの主なるものは、

問題を解くときにパターンを探す。図をかく。パターンを相互に関連づける。組織だった表をつくれるようにする。図のより広いつかい方を開発する。流れ図と関連図をつくる。より簡単な問題をつくる。いままで学習したことを問題解決に適用する。

文章題に関する技法として、

簡単な文章題をとおして、何を問うているのかを理解させる。問題を解くのに、具体物や絵を用いて関係を表わす。問題を振り返ってみる。問題から適切なデータを選択する、等。

これらのストラテジーは、さきに述べた一般的ストラテジーや補助的ストラテジーと同様である。

これらのストラテジーや技法がくり返し指導され、定着するよう指導されなければならない。

問題解決におけるストラテジーの指導は、基本的なストラテジーを獲得させる指導と獲得したストラテジーを用いる指導とがある。それは、前者は、個々のストラテジーを教えて実際につかえるようにする指導が中心である。後者は、問題解決の場面で、学習した種々のストラテジーを応用させる指導である。これまでの指導においては、問題解決において、一つ一つのストラ

テジーを教えて、応用できるようにする指導は少なかった。絵や図やかくというストラテジーは、習得を指導のねらいにすることはなく、文章題の学習の中で自然に身につくと考えていた。図をかくことは、問題の内容をとらえなおすことになる。また、種々の観点を立てて、考えることによって、図の中の部分と部分との関係がとらえられる。また、図と図とを関連づけることによって、その相互の関係をとらえることができる。このような指導がなければ、何の手がかりも与えず､問題に取り組ませることになる。

4、問題解決における基本的なストラテジーを獲得させる指導

児童・生徒の解決過程を検討してみると、いくつかの障害がある。一つは問題解決の方法、つまり、基本的なストラテジーを理解していない。また、問題の内容を理解していない。一つは、条件の構造をさぐる方法がわからない。さらに、既習経験を想起し、条件と結びつけ、関連づけ、類似の問題の解決の方法を見直し、それをもとにして当面している問題を考えようとしないこと等がある。

条件の構造をさぐる過程においては､数学的な考え方や数学的能力が働いて解決の糸口を見出すと考えられるが､これらの数学的な考え方を誘発したり、数学的能力を高めたりするのに、ストラテジーの働きが大きくかかわっていると考える。問題解決においては､数学的な考え方や数学的能力、ストラテジーの三者が有機的に結ばれ、作用しあうと考える。

問題解決の場面においては、ストラテジーを意識的に用いようとする児童・生徒は少ない。また、適切なストラテジーが選択できない。したがって、適切な問題を用いて、個々の問題解決におけるストラテジーを指導しなければならない。

問題解決におけるストラテジーの指導は、基本的なストラテジーを獲得させる指導と獲得したストラテジーを用いる指導とがあるが、それには、自分でストラテジーを選択して用いる学習の場をどのように設定するかを検討しなければならない。また、どのようにストラテジーを意識させるか、各々のストラテジーのよさをわからせる必要がある。ストラテジーの指導は、児童・生徒に解決の糸口を見出させ、主体的に学習し、解決の方法を意識させることにある。

基本的なストラテジーの指導にあたっては、個々のストラテジーの指導に適した問題を開発し、その指導の方法を考え、その授業の設計をはかることである。また、問題提示の工夫を考えなければならない[3]。例えば、「パターンを探す」というストラテジーの指導においては、パターンを探す問題を設定し、ストラテジーの指導をおこなう。また､「サブゴールをつくる」問題､「振り返って考える」ストラテジーをわからせる問題を提示し、その問題の解決過程において、ストラテジーをわからせる指導をはかることである[4]。

いま､例を用いて､「問題解決における基本的なストラテジー」を獲得する授業の設計について述べる。

例､一辺の長さが10cmの正方形の紙を何段か積んで、階段の形にします。段の数が８段の時、まわりの長さは何cmになるでしょうか。

問題の提示は､個々の子どもによって異なる。おくれている子どもは、特定のストラテジーを示唆するような形で､問題を与えるようにする。例えば､「階段の数が１段のとき、２段のとき、３段のとき、まわりはどうか調べてみよう」という指示を添えて提起するならば､「パターンを探す」ストラテジーに気づくことができる。

この教材は４年の変わり方調べの問題であるが､子どもたちが「できそうだ」「おもしろそうだ」という意欲をひきおこすことである。また、同時に、問題解決のための種々のストラテジーの指導がある。絵をかいたり、図をかいたり、表をつくって考えるように、毎日、毎時間指導することが大切である。この問題は、問題解決における一般的ストラテジーとして､「パターン

を探す」「一般化する」ことであるが、このストラテジーのよさをわからせることが、授業において大切である。「パターンをさがす」ことによって、その段の時の、まわりの長さを求めることができる。また、階段の数が多くなったときには、「パターンをさがす」だけではなく、労力と時間を考えれば、「一般化する」ことの必要さを感ずるであろう。このように、学習するストラテジーのよさをわからせ、また必要感をもたらすことである。

「表をつくる」という補助的ストラテジーにおいても、子ども自らが表をつくるようにさせることが必要である。

授業において、自分の考えと他の考えとを比較して、自分で見つけたストラテジーが、より秀れたストラテジーであることを知ることができる。

階段の数が14段の場合は困難なので、一般的ストラテジーである変数を変えて簡単な場合を考える。

いくつかの考えがあるが、まず、表をつくってパターンを探す指導を考える。

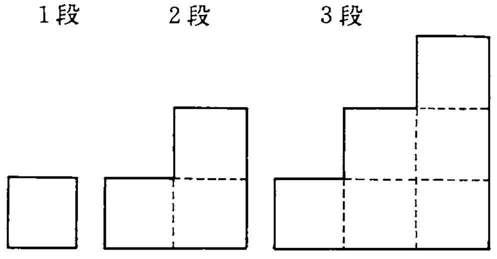


図1　図2　図3

1段の時は40cm、2段の時は80cm，3段の時は120cmになるので、4段、5段では何cmになるだろうかと表をつくる必要感を感じ、次のような表をつくり、

表1

段の数	1	2	3	4	…
まわりの長さ	40	80	120	160	

1段ふえるごとに、まわりの長さは40cmふえる。2段の時は、1段の場合のまわりの長さに40cmが加わる、というように表をつくっていくうちに、表においてみられる「パターン」に気づく。このことから、3段のときは、2段のときの周りの長さに40cmが加わるのだから

1段の時のまわりの長さ＋ふえた40cm×2という関係をとらえることができる。

したがって、8段のときも、1段の時のまわりの長さ＋ふえた40cm×（8－1）と考え、次第に「一般化する」ストラテジーのよさをとらえることができる。

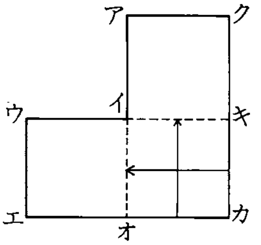
さらに、このようなストラテジーは、「図」をもとに解決する場合と表をつくってパターンをさがして解決する場合との相互関係をとらえることによって、問題解決の構造をさぐるとともに、ストラテジーのよさを知らしめることができる。

表をつくってパターンをさぐることによって、
1段の時は、階段のまわりの長さは40cm、
2段の時は、階段のまわりの長さは80cm、
3段の時は、階段のまわりの長さは120cm、
2段の時は1段の時のまわりの長さ40cmの2倍、3段の時は、1段の時のまわりの長さ40cmの3倍、というように、1段のときのまわりの長さ40cmをもとにして、パターンをさがすことができる。このことを図と結びつけて相互関係をさぐってみる。

1段のときのまわりの長さ40cmは一辺の長さの4倍である。このことをもとにして図と結びつけてみよう。2段の時のまわりの長さは、一辺の長さが10cmのまわりの長さ、つまり、図1のまわりの長さが2つあることを意味する。

いま、図4のまわりの長さを考えるのに観点を変えて考える。

図4



平行移動の考えによって、辺キカは、辺イオに移動し、辺オカは、辺イキに移動するので図5のように、まわりアイウエオイキクアの長さになることがわかる。

3段の場合も同様である。

図6

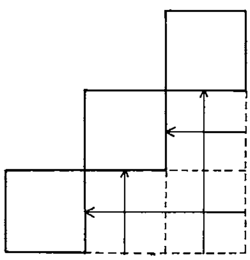
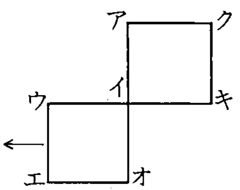
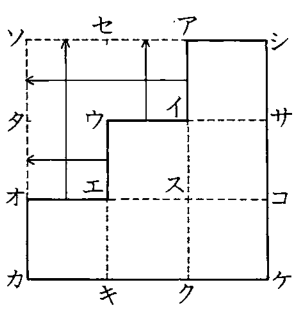


図5



表では、1段の時の周りは40cm、2段の時の周りは80cm、3段の時の周りは120cmであった。このことを図と結びつけて考えてみる。

図7



いま、階段が3段の場合について考える。図7において、階段の部分アイ、イウ、ウエ、エオを考える。図6において平行移動したが、観点を変えて、アイ、ウエを左側に平行移動する。また、イウ、エオを上方に平行移動する。

アイはソタに、ウエはタオに平行移動され、イウはアセに、エオはセソに平行移動されて、階段の周りは、正方形ソカケシの周りの長さになる。したがって、3段の時は、正方形ソカケシの一辺は、30cmであるから、30cm×4となる。これは階段の数によってきまり、同様に、階段の数が4段のときは、40cm×4となる。つまり、(10cm×階段の数)×4と一般化することができる。

この解決は、表をつくって、パターンを探した方法と図における解決の方法との相互関係をとらえた結果であって、パターンを探すよさ、図と結びつけて相互関係をさぐるよさをわからせることができる。

「パターンをさがす」という一般的ストラテジーは、表の上できまりをみつけることだけでなく、図を分析して、構造的にとらえ、表の上のきまりとの関係をとらえ、質的に解決の方法をとらえなおすことを意味する。

「パターンをさがす」ことを表の上だけでなく、図においてもパターンがあることを示した。つまり、図を分析して、構造的にとらえていくならば、図においてもパターンをさぐることができ、解決の方法を見出すことができる。

このようなことをもとにして、問題解決におけるストラテジーの指導の授業設計をはからなければならない。

5、問題解決におけるストラテジー指導の授業の設計

いま、さきにあげた「一辺の長さが10cmの正方形の紙を何段か積んで階段の形にします。8段の時の階段の周りは何cmか」という階段の周りの長さを求める問題を例として、「パターンをさがす」ストラテジー指導をする授業の設計を追究する。

この問題を問題解決の問題と考えると、総合的方略としての学習過程の段階として、さきに考察した、問題意識をもつ段階ー問題の内容を把握する段階ー問題の条件を分析し、解決の予

想を立てる段階ー振り返って考える段階、にしたがって考察する。

問題解決の学習指導においては、問題解決の各段階において、教師が指導のねらいとしているいくつかの下位目標を設定しなければならない。下位目標は、この教材の内容からみた教師のねらいとともに、この教材内容の奥にひそんでいる数学的能力や数学的な考え方や問題解決におけるストラテジーを身につけさせることを目標と考えて、設定しなければならない。これらの下位目標が達成されたかどうか、児童の反応や考え方によって評価しなければならない。

この授業の目標は、表をかいたり、図をかいたりして、パターンをさぐり、表と図においてその相互の関係をとらえることによって、伴って変わる二つの数量について、変化のきまりをとらえることである。

この解決過程の各段階における下位目標を考察することによって、授業の設計を追究する。各段階における下位目標は、番号をもって示した。

(1)問題意識をもつ段階

自分の問題として取り組むには、これまでの思考経験によって、問題の本質的なこと、つまり、段階状の周りに目をむけて、補助的ストラテジーである「図にあらわす」ことによって、問題に取り組む意識をもつ。

(2)問題の内容を把握する段階

① 問題を図にあらわすことによって、図をもとにして問題の内容を述べる。

② 下位目標として、図によって正方形の一辺の長さが10cmであることや、階段の側面に着目して、その周りの長さを測ることに気づく。

③ 下位目標として、図によって、段の数が変わると、階段の側面の周りの長さも変わることをとらえさせる。

(3)問題の条件の構造を分析し、解決の予想をたてる段階

この段階においては、問題を構成している既知の要素と未知の要素である周りの長さとの間の関係を発見するのであるが、一般的ストラテジーである「既知のことを思い出させ、その方法をもとにして考え」、解決する。

この場合、同様に一般的ストラテジーである「問題場面と類似した学習経験を想起し」その解決の方法をもとにして異同弁別し、当面している問題の解決の糸口を見出すことができる。

また、一般的ストラテジーである「問題の条件を単純化する」ならば、どのような問題になるかを考えさせることによって、そのよさをとらえ、解決の予想をたてることができる。

授業の設計にあたっては、さきに追究した解決の構造をもとにして考え、子ども相互の考えを発表しあい、比較するならば、自分のストラテジーが確かめられ、また、有用なストラテジーとして受け入れることができる。

問題を解くのに、有効と思われるストラテジーをもとに、思考を進めていくならば、ストラテジーの有用さやそのストラテジーのよさが理解される。

① 階段の数が8段のときは、問題の解決が困難なので、一般的ストラテジーである条件を簡単にした問題をつくり、その解決の方法をもとにして考える。下位目標として「1段の時は、2段の時は、3段の時は階段の周りは何cmになるか」と考える。

② このことをもとにして、下位目標として、「8段の時の階段の周りを考えるには表をつくる」と考え、ストラテジーである表をつくる必要感をもたせる。

③ 次のような表をつくり、補助的ストラテジーである「表をよく見る」ことによって、下位目標として「1段ふえるごとに周りの長さは、40cmずつ増す」とパターンをさぐることができる。このことは、表の中の要素と要素とを結びつけ

ることによってわかる。

表２

段の数	1	2	3	4	5	6
周りの長さ	40	80	120	160	…	

１段40cm
２段40＋40
３段80＋40

④　補助的ストラテジーである「観点をかえて」表をよくみさせることによって、下位目標として「段の数が１段、２段、３段、４段…の時は、その周りの長さは、はじめの１段の場合の周りの長さ40cmの２倍、３倍、４倍…になる。と気づく。」

表３

段の数	1	2	3	4	…
周りの長さ	40	80	120	160	…

2倍　3倍

⑤　④のパターンによって下位目標として「８段の時は40cm×８と考える。」

他の段のときにも④のパターンをさぐることによって、その周りの長さもわかり、ストラテジーとしての「帰納的に考える」ことによってわかり、さらに、一般化する必要感をもつことになる。

この過程においては、ストラテジーである表をつくること、要素と要素とを結びつけること、観点を変えて考えること、表をよくみること、帰納的に考えること、パターンをさがすこと等が必要であること、ならびにそのよさをわからせることができる。

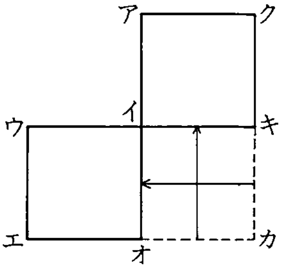
⑥　いま、下位目標として「表で考えたことを図と結びつけて考える」つまり、表でとらえたパターンが図においてどのような関係になっているかを調べることは重要で、このことをもとらえさせる。

⑦　表において、２段の時の周りの長さは、１段の時のまわりの長さ40cmの２倍で、３段の時は40cm×３…であった。下位目標として、「このことを図において考えようとしているか」と設定した。

⑧　ストラテジーである「図をよくみることによって、既習の学習内容である平行移動の考えによって」、下位目標として、「図４のように、辺キカを平行移動してイオに、辺オカを平行移動してイキに平行移動しようとするか」と設定した。

⑨　⑧によって、下位目標として「２段、３段のときの周りは、図５や図６のように一辺が10cmの正方形の２組や３組の周りととらえているか」と設定した。

図８



このような考えをもつことによって、図と表とを結びつけるストラテジーのよさを理解する。

図６においても、一辺の長さが10cmの正方形の周りの長さ40cmに、階段の数３をかけたものとして、周りが求められることを表だけでなく、図においても相互関係としてとらえることができる。

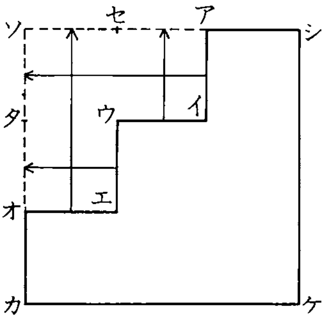
⑩　観点を変えて、⑨の場合と同様に、下位目標として、「２段、あるいは３段の場合に、図において、他の考え方はないか」と設定した。図６の場合のほかに、多様な考えをもたせるねらいからこのような下位目標を設定した。

⑪　図６の場合に平行移動したが、下位目標として「階段が３段の時、辺アイ、ウエや辺イウ、エオを他に平行移動できないか」と考え、設定した。

⑫　図６の平行移動の考えをもとにして、類推的に考え、下位目標として「辺アイ、ウエを左

側に平行移動して、ソタ、タオに移動する。辺イウ、エオを上方に平行移動して、アセ、セソに移動すると考える」と設定した。

図9



⑬　下位目標として「階段が3段のときには、その周りは、正方形ソカケシの周りの長さとなって、30cm×4、つまり、(10cm×階段の数)×4ととらえているか 」と設定される。

このことは、図6の場合の平行移動の考えをもとにして図9のように考え、パターンをさがし出すとともに、一般化をはかることができ、「パターンをさぐる」ストラテジーの意味やよさ、あるいは、解決の方法の相互関係を吟味して、各々のストラテジーのよさを知ることができる。このようにして、ストラテジーを身につけていくと考える。

(4)振り返って考える段階

問題の解決の方法を振り返り、よい方法はないか、また、多様な考えはないか、さらに、解決の方法の相互関係を検討する。この場合には、「パターンをさがす」ストラテジーのよさを知らしめたのであるが、条件を変えた新しい問題を構成し、その問題を解決することによって、有用なストラテジーであることを理解させることが重要である。

「パターンをさぐる」ということは、順序よく整理して、表をつくり、そこから変化を調べ、帰納的にきまりをさがすことであるが、次の事例を用いて、「パターンをさぐる」とはどんなことか、内面的に掘りさげて追究することも、この段階の内容と考えてよい。

> 問題　点ア、イ、ウ、エ、オ、…の10個の点を2点ずつ結ぶとき、3点は一直線上にないとして、結ばれる線は全部で何本でしょう。

試行錯誤的に結んでも解決できない。ストラテジーである条件を簡単にした問題につくりかえ、点が1点のときは結ばれる線は0、点が2点であるときには1本、3点であるときは結ばれる線は3本、4点のときには…と考え、表をつくって、増え方を調べていく。

表4

点の数	1	2	3	4	…
本数	0	1	3		…

この増え方を調べていく、つまりパターンをさぐっていくことにより、4点のときには、3点のときの本数より3本ふえると考えて、ストラテジーである「帰納的に考える」ことによって、5点、6点の場合の本数を求める。しかし、順序よく考えることによって、例えば、4点の場合ならば、どこかを基準として考えることを指示し、例えば、アを基準として考えると、ア→イ；ア→ウ；ア→エと整理でき、次にイをもとにして考えると、重複する場合を除いて、イ→ウ、イ→エ、次にウ→エと整理することができる。いま、このことを表や図にかくと次のようになる。

表5

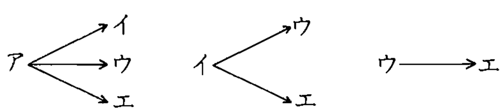
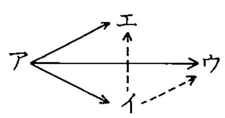


図10



図は、表をもとにして、図に示したものであるが、この図と関連づけて考えてみると、アをもとにして、ア→イ；ア→ウ；ア→エと３本の線が考えられ、イをもとにして、イ→ウ；イ→エ；ウをもとにして、ウ→エと１本の線が考えられる。したがって、総本数は（３＋２＋１）本となる。

いま、条件を変え、５点の場合も類推的に考えられ、アから４本、イから３本、ウから２本、エから１本の線が考えられる。その総本数は、(４＋３＋２＋１）本となり、パターンがあることがわかる。６点のときは、(５＋４＋３＋２＋１）本と帰納的に考えられ、パターンを見出し、一般化をはかることができる。

これらの本数を図をもとにして、その相互関係を検討すると、３点のときの本数は３本、４点のときの本数は６本で、３本ふえた。図においてこの関係を調べる。

４点のときは、ア→イ；ア→ウ；ア→エ；イ→ウ；イ→エ；ウ→エ；で、この中のア→イ、ア→ウ、イ→ウは、３点ア、イ、ウで２点ずつを結んだ場合で、残りのア→エ、イ→エ、ウ→エは、３点から４点に増えた場合の増えた本数であることがわかる。したがって、ア→エ、イ→エ、ウ→エを逆の方向にみて、エ→ア、エ→イ、エ→ウが新しく４番目の点エを考えたときの増えた部分である。つまり新しい点エを設けたとき、エの点とこれまでの３点ア、イ、ウを結んだ部分が新しく増えた分と考えられる。

このようなことは、点が５点、６点になった場合にも同様に考えられ、パターンとして、「新しく１点を増やせば、その新しい点とそれまでの点とを結んだ本数が増えた本数となる」といえる。このことから、５点、６点…の場合の本数を求めることができる。

パターンは、表だけでなく、表と図とを結びつけて考え、図と図とを比較し、構造的に相互関係をとらえることができ、解決に寄与する場合がある。

これまで、問題解決におけるストラテジー指導の授業の設計について、学習過程の段階に即して、下位目標を設定しながら考察した。これにともなう児童の反応に即して、適切な発問、発言の構成をはかることになる。

６、おわりに

問題解決におけるストラテジー指導について、授業の設計を追究した。事例として、一般的ストラテジーである「パターンをさぐる」ストラテジーの指導について、表だけでさぐるのではなく、表で得られたパターンの結果が、図においてどのようなパターンになるか、また、ストラテジーは、それらのストラテジーのよさや必要感を感じさせることによって、獲得されることを追究した。表と図との相互関係、あるいは、図と図との相互関係をさぐることによって、各々のストラテジーのよさがわかる。また、解決の方法を見出すことになる。

このようなことは、「パターンをさぐる」ストラテジーにおいてだけでなく、他の一般的ストラテジーや補助的ストラテジーにおいても同様に考えられる。

問題解決において、問題の内容とともに数学的能力や数学的な考え方、あるいは、問題解決におけるストラテジーが有効に用いられることによって、問題解決能力が身につくと考えられる。

引　用　文　献

1)H.Ballew: Identification and Analysis of Specific Problem Solving Strategies. National Council of Teachers of Mathematics P.79-80 1983

2)G.Musser: Problem-solving Strategies in School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics P.137-P.138 1980

3)F.K.Lester: Making Problem Solving come Alive in the Intermediate Grade. National Council of Teachers of Mathematics P.127-129 1980

4)P.A.House: Risking the Jounney into Problem Solving. National Council of Teachers of Mathematics P.157-158 1983