

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 4 月 27 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2012～2014

課題番号：24540166

研究課題名(和文) 正則自己同型群による複素多様体の特徴付け

研究課題名(英文) Characterizations of complex manifolds by means of holomorphic automorphism groups

研究代表者

児玉 秋雄 (Kodama, Akio)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：20111320

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主要な目的は、複素多様体構造をその正則自己同型群の位相群構造から決定することであったが、この問題自体は非常に難しく、現時点で完全には解決されていない。しかし、多変数関数論の研究において重要な複素ユークリッド空間内の一般複素楕円型領域、及び一般型ハルトークスの三角形の正則自己同型群の構造が完全に解明された。また、非有界ラインハルト領域に関する重要な基本的な結果が得られた。

研究成果の概要(英文)：The main purpose of this research is to determine the complex manifold structure by means of the topological group structure of its holomorphic automorphism group. This is very difficult and this cannot be achieved in full generality at this moment. However, we could determine completely the structure of holomorphic automorphism groups of generalized complex ellipsoids and generalized Hartogs triangles. Also, we obtained some important fundamental results on unbounded Reinhardt domains.

研究分野：複素幾何学

キーワード：正則自己同型群 一般複素楕円型領域 一般型ハルトークスの三角形 ラインハルト領域 リュービル葉層構造

1. 研究開始当初の背景

研究開始当初，正則自己同型群から複素多様体構造を決定する問題に関する論文としては，2002年に公表された A. V. Isaev と N.G. Kruzhilin による n 次元ユニタリ群 $U(n)$ が正則自己同型群として効果的に作用するような複素多様体の分類，およびその応用としての「 n 次元複素ユークリッド空間 C^n の正則自己同型群からの特徴付け」を与えたものや，研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏による，多変数関数論の研究においてしばしば現れる重要な「複素ユークリッド空間 C^n 内のいくつかのモデル空間をそれらの正則自己同型群の構造から特徴付ける」結果が存在するのみであった。特に，研究代表者及び研究分担者により，モデル空間 N が有界対称領域である場合，「複素多様体 N の正則自己同型群 $Aut(M)$ が有界対称領域 N の正則自己同型群 $Aut(N)$ と位相群として同型であるならば， M は N に双正則同値である」という基本的に重要な結果が得られたことから，本研究における「複素多様体構造をその正則自己同型群の位相群構造から決定する問題」は益々重要性が認識されることになった。

2. 研究の目的

本研究の目的は「複素多様体 M の複素構造をその正則自己同型群 $Aut(M)$ の位相群構造から決定すること」であったが，この問題を全く一般的な複素多様体の場合に解決することは非常に難解なものであることがわかった。このような事実に鑑み，本研究期間においてまずは解決すべき問題として，以下の4つに絞ることとした：

(1) n 次元複素ユークリッド空間 C^n 内の，有界対称領域とは限らない，有界等質領域をその正則自己同型群で特徴づけよ。

(2) n 次元複素ユークリッド空間 C^n 内の擬凸な等質ラインハルト領域 D の構造を決定せよ。

(3) G をコンパクト連結リー群でその階数は n より小さいものとする。このとき， G が正則自己同型群として連続的かつ効果的に作用するような n 次元複素ユークリッド空間 C^n 内の領域の構造を決定せよ。

(4) n 次元複素ユークリッド空間 C^n の正則

自己同型群の連結位相部分群で，リー群構造を持つものを決定せよ。

3. 研究の方法

上記2で解決すべき問題としてあげた4つの問題はいずれも難解であり，完全に解決することは出来なかった。しかし，以下の研究成果の欄で述べるように，これらの問題の研究において開発された種々のアイデアや手法により，未解決であったいくつかの問題に完全な解答を与えることが出来た。まず，問題(1)については，研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏によって既に得られている結果：「 n 次元複素多様体 M の正則自己同型群 $Aut(M)$ が n 次元複素ユークリッド空間 C^n 内の有界対称領域 N の正則自己同型群 $Aut(N)$ と位相群として同型であるならば， M は N に双正則同値である」の証明を詳細に吟味することにより， N が有界等質領域の場合にも， M と N は実解析的に同型であることが証明出来る。このことと，1991年に発表された I.D. Miatello による正規 J -代数に関する論文の結果を用いれば，もしも C^n 内の有界等質領域 N が R^n に関する C^n での複素共役写像で不変であるような領域として実現されることが証明出来れば，問題1は解決されることが分かるのだが，この最後のことが未解決である。次に問題(2)については，研究分担者清水悟氏と木村光一氏により，擬凸な等質ラインハルト領域 D がある条件を満たす場合には肯定的に解決されたが，一般の場合には未解決である。また，問題(3)，(4)については，研究代表者と分担者により既に証明されている事実：「 D を C^n 内の領域とし， K をコンパクトな連結リー群で，その階数は n であるとする。このとき， K が D に正則自己同型群として連続的かつ効果的に作用するならば， D は C^n のラインハルト領域として実現され，かつ K はいくつかのユニタリ群の直積群と一致する」をフルに用いることにより解決出来ると確信して研究を進めたが，残念

ながら完全な解決には至っていない。

4. 研究成果

研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏は平成24年度から平成26年度の研究期間において「正則自己同型群からの複素多様体の特徴付け問題」を研究し、以下の様な研究成果を得た。研究代表者と研究分担者の共同研究として、 n 次元複素ユークリッド空間内の第一種等質ジゲル領域の正則自己同型群の構造を詳細に調べ、それを正則同値問題に応用し興味ある結果を得ることが出来論文として印刷公表した。また、本研究課題における基本問題を研究する過程で得られたアイデアや手法を用いることにより、研究代表者児玉と分担者清水氏は独自に以下のような結果を得、論文として発表した。まず、児玉は n 次元複素ユークリッド内の、境界が滑らかであるとは限らない一般複素楕円型領域 E と一般型ハルトークスの三角形 H の正則自己同型群 $\text{Aut}(E)$ 及び $\text{Aut}(H)$ の構造を完全に決定することに成功した。これらは M. Jarniki と P. Pflug により出された公開問題に肯定的な解答を与えるものである。また、研究分担者清水氏はチューブ領域上の完備ベクトル場の決定に関する延長定理と呼ばれる結果、並びにそのチューブ領域に関する正則同値問題への応用に関する重要な結果を得た。また、非有界ラインハルト領域の正則同値問題、正則自己同型の研究の一環として、一般の複素多様体 M のリュール葉層構造と呼ばれるものを研究し、 M 上のリュール葉層構造を決定するための基本的な原理を明らかにし、興味ある結果を論文とし公表した。一方、連携研究者加須栄篤氏は非再帰的ネットワークとその倉持境界を考察し、ランダムウォークの倉持境界への収束とディクレエエネルギー有限な写像のランダムウォークに沿う収束を明らかにした。また、有限連結グラフの拡大定数の評価については、Allon と Milman による基本的な不等式をはじめ、多くの研究が知られているが、加須栄氏は双曲空間に埋め込まれているグラフを考察し、拡大定数の幾何的な評価式を与えた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

Kodama, A.; On the holomorphic automorphism group of a generalized Hartogs triangle, Tohoku Math. J., 掲載確定, 査読有.

Shimizu, S.; Holomorphic equivalence problem for Reinhardt domains and the conjugacy of torus actions, Tohoku Math. J., 掲載確定, 査読有.

Hattori, T. and Kasue, A.; Expansion constants and hyperbolic embeddings of finite graphs, Mathematika 61 (2015), 1-13, 査読有.

Kodama, A.; On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid, Complex Var. Elliptic Equ. 59 (2014), 1342-1349, 査読有.

Shimizu, S. and Kimura, K.; Homogeneous Reinhardt domains containing no coordinate hyperplanes, Kodai Math. J. 37 (2014), 235-245, 査読有.

Kodama, A. and Shimizu, S.; Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications, Kodai Math. J. 36 (2013), 299-312, 査読有.

Shimizu, S.; Prolongation of holomorphic vector fields on a tube domain, Tohoku Math. J. 65 (2013), 495-514, 査読有.

Kasue, A.; Random walks and Kuramochi boundaries of infinite networks, Osaka J. Math. 50 (2013), 31-51, 査読有.

Kodama, A. and Shimizu, S.; Some results on Siegel domains of the first kind with isomorphic automorphism groups, Interactions between real and complex analysis, 71-83, Sci. Technics Publ. House, Hanoi, 2012, 査読有.

Hattori, T. and Kasue, A.; Functions with finite Dirichlet sums of order p and quasi-monomorphisms of infinite graphs, Nagoya Math. J. 207 (2012), 95-138, 査読有.

[学会発表](計13件)

児玉秋雄 , On the holomorphic automorphism group of a generalized Hartogs triangle and a related question, 日本数学会年会, 2015年3月24日, 明治大学(東京都)

加須栄篤; Kuramochi boundaries of transient networks, Topics in Differential Geometry and its discretizations, WPI-AIMR, 2015年1月10日, 東北大学(宮城県)

清水悟; 原点を含むある種の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題, 多変数関数論冬セミナー, 2014年12月21日, 金沢大学サテライト・プラザ(石川県)

児玉秋雄; On the holomorphic automorphism groups of generalized complex ellipsoids and generalized Hartogs triangles, 函数論シンポジウム, 2014年11月8日, 東北大学(宮城県)

清水悟; 原点を含むある種の非有界ラインハルト領域に関する正則同値問題, 日本数学会秋季総合分科会, 2014年9月25日, 広島大学(広島県)

清水悟; 多変数複素解析における特殊領域, 日本数学会年会(企画特別講演), 2014年3月15日, 学習院大学(東京都)

児玉秋雄; On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid, 東北複素解析セミナー, 2013年12月4日, 東北大学(宮城県)

児玉秋雄; On the holomorphic automorphism group of a generalized complex ellipsoid, 日本数学会秋季総合分科会, 2013年9月27日, 愛媛大学(愛媛県)

児玉秋雄, Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications (with S. Shimizu), 多変数関数論冬セミナー, 2012年12月22日, 東北大学(宮城県)

加須栄篤; 無限ネットワーク上のランダムウォークと倉持境界, 函数論シンポジウム, 2012年11月24日, 金沢大学サテライト・プラザ(石川県)

加須栄篤; グラフの埋め込みとレイリーの単調性法則, 日本数学会秋季総合分科会(幾何学分科会特別講演), 2012年9月20日, 九州大学(福岡県)

児玉秋雄, Diffeomorphisms between Siegel domains of the first kind preserving the holomorphic automorphism groups and applications (with S. Shimizu), 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月19日, 九州大学(福岡県)

Kodama, A.; Some results on Siegel domains of the first kind with isomorphic automorphism groups (with S. Shimizu), The 20th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2012年7月29日~2012年8月3日, Hanoi University of Science and Technology (ベトナム)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

児玉 秋雄 (KODAMA, Akio)
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号: 20111320

(2) 研究分担者

清水 悟 (SHIMIZU, Satoru)
東北大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 90178971

(3) 研究連携者

加須 栄 篤 (KASUE, Atsushi)
金沢大学・数物科学系・教授
研究者番号: 40152657