

## 科学研究費助成事業（科学研究費補助金）研究成果報告書

平成24年4月10日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2009～2011

課題番号：21540169

研究課題名（和文） 正則自己同型群による複素多様体の特徴付けに関する諸問題の研究

研究課題名（英文） A study on characterization problems of complex manifolds  
by means of holomorphic automorphism groups

研究代表者

児玉 秋雄 (KODAMA AKIO)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：20111320

研究成果の概要（和文）：本研究の主要な目的は、複素多様体構造をその正則自己同型群の位相群構造から決定することであったが、この問題自体は非常に難しく、現時点で完全には解決されていない。しかし、多変数関数論の研究において重要ないくつかのモデル空間に関して興味深い結果が得られた。特に、複素ユークリッド空間内の有界対称領域はその正則自己同型群の構造から完全に特徴付けられることが証明され、論文として印刷公表された。

研究成果の概要（英文）： The main purpose of this research is to determine the complex manifold structure by means of the topological group structure of its holomorphic automorphism group. This is very difficult and this cannot be achieved in full generality at this moment. However, we could obtain interesting results on some important model spaces appearing in the study of several complex variables. Especially we could prove that bounded symmetric domains in the complex Euclidean space are completely characterized by their holomorphic automorphism groups.

交付決定額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2009年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2010年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2011年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	1,050,000	4,550,000

研究分野：複素幾何学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：複素ユークリッド空間，正則自己同型群，双正則同値，位相群

## 1. 研究開始当初の背景

研究開始当初，正則自己同型群から複素多様体構造を決定する問題に関する論文としては，2002年に公表された A. V. Isaev と

N. G. Kruzhilin によるユニタリ群  $U(n)$  が正則自己同型群として効果的に作用するような複素多様体を分類，およびその応用としての「 $n$ 次元複素ユークリッド空間の正則自己同型群からの特徴付け」を与えたものや，

研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏による「ユニタリ群の直積が正則自己同型群として作用する、複素ユークリッド空間からいくつかの座標空間を取り除いた空間の特徴付け」に関するものなどわずかしか存在しなかった。このようなことから、本研究において複素多様体構造をその正則自己同型群の構造から決定する問題に真正面から挑戦するに至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は「複素多様体構造をその正則自己同型群の位相群構造から決定すること」であったが、この問題を全く一般的な複素多様体の場合に解決することは非常に難解なものであることがわかった。このような事実に鑑み、まずは問題の複素多様体  $M$  が以下のような条件を満たす場合に研究することにした。すなわち、複素  $k$  次元ユークリッド空間  $\mathbf{C}^k$  内の単位球を  $B(k)$  とし、 $\mathbf{C}^*$  を複素平面から原点を取り去ったものとするとき、モデル空間  $N$  として、多変数関数論の研究において重要である、直積空間  $B(k_1) \times \cdots \times B(k_s)$ ,  $B(k) \times (\mathbf{C}^*)^m$ , および有界対称領域、のいずれかを考える。このとき、「複素多様体  $M$  の正則自己同型群  $\text{Aut}(M)$  がモデル空間  $N$  の正則自己同型群  $\text{Aut}(N)$  と位相群として同型であるならば、 $M$  は  $N$  に双正則同値であるか？」の解決を本研究の主要な目的に定めた。

## 3. 研究の方法

モデル空間  $N$  が直積空間  $B(k_1) \times \cdots \times B(k_s)$  および  $B(k) \times (\mathbf{C}^*)^m$  の場合には、研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏によって既に得られている結果 (の特別な場合) 「 $D$  を  $\mathbf{C}^n$  内の領域とし、 $K$  をコンパクトな連結リー群で、その階数は  $n$  であるとする。このとき、 $K$  が  $D$  に正則自己同型群として連続かつ効果的に作用するならば、 $D$  は  $\mathbf{C}^n$  の

ラインハルト領域として実現され、かつ  $K$  はいくつかのユニタリ群の直積群と一致する」をフルに用いることにより我々の目的が達成された。また、モデル空間  $N$  が有界対称領域の場合には、まず  $\text{Aut}(M)$  と  $\text{Aut}(N)$  が位相群として同型であるような  $M$  は必然的に  $N$  と微分同型になることを示し、その後  $N$  の正則自己同型群である半単純リー群の構造を詳細に調べることにより、 $M$  と  $N$  が実際に双正則同値であることを証明することに成功した。

## 4. 研究成果

研究代表者児玉秋雄と研究分担者清水悟氏は正則自己同型群からの複素多様体の特徴付け問題を研究し、多変数関数論の研究において重要な多くの具体的領域を特徴付けた。特に、いくつかの複素単位球の直積空間、単位球といくつかの穴あき複素平面の直積、および有界対称領域をそれらの正則自己同型群の構造から完全に特徴付けることに成功した。これらは正則自己同型群から複素多様体構造を決定するという本研究課題に関する重要な結果であり、国際的な数学雑誌に印刷公表された。また、これらの結果を導く過程において得られた多くの手法は今後の研究においてますます重要になるものと確信している。また、連携研究者達は以下に示すように、それぞれ固有の専門分野に於いて活発な研究活動をするとともに、それらの研究活動を通して得られた様々なアイデアを本研究に提供した。連携研究者野口潤次郎氏は値分布理論、その算術的アナロジー、小林双曲性について内外の共同研究者の協力のもと次の様な成果をあげた。「代数体上定義された小林双曲的多様体の有理点は有限個であろう」という S. Lang 予想に関連して、射影的超曲面でそのような性質を満たすものを構成した。値分布理論について、準アーベル多様体  $A$  への整正則曲線  $f$  に対して得られた第二基本定理の応用を中心に研究した。P. Corvaja と共同で  $A$  の超曲面  $D$  を一般の位置に与えると、偏極準アーベル多様体  $(A, D)$  の同型類は基本的に複素平面の離散点分布  $f^{-1}(D)$  が無限遠点で作る集合の芽で決まることを示した。また値域空間での交点  $f(\mathbf{C}) \cap D$  は、 $D$  内でザリスキー稠密であることを証明した。同時に同様な

結果を代数体上の線形トーラス群内の算術回帰列について証明した. 正則曲線の基本予想について可微分接続を用いる手法を引き続き研究した. 対数的極をもつ可微分接続を用いて一般のコンパクト代数多様体への整曲線に対する第2主要定理を証明した. これは1933年のH. カルタンによる第2主要定理の幾何学的証明を初めて与えた. また, J. Winkelmann との共同研究で, コンパクト複素多様体への有理型写像の値分布を考える時, ケーラーか非ケーラーかで差がある現象を初めて捉えた. 連携研究者加須栄篤氏は無限連結ネットワークのポテンシャル論的性質を解明し, 擬単葉写像を通して指数  $p$  のディリクレ和有限関数の空間を研究した. 主要結果として, 「無限連結次数有界なグラフが  $n$  次元双曲空間へ擬単葉写像を許容し,  $n-1$  より大きい指数  $p$  に対して,  $p$ -非放物的であるならば, そのグラフは  $p$ -ディリクレ和有限  $p$ -調和関数を豊富に許容する」ことを示した. また, コンパクトリーマン多様体の収束理論の展開として, 熱核が一様に上から抑えられるコンパクトリーマン多様体上の計量と整合する接続の与えられたエルミートベクトル束の族を考察し, そのモスコウ収束極限についての解析を行なった. 連携研究者甲斐千舟氏は, 上半平面を単位円板に写す Cayley 変換の一般化が, 等質 Siegel 領域と呼ばれる上半平面型の多次元の領域に対しても定義できるが, 伊師英之氏との共同研究で, その Cayley 変換の像が, S. Bergman の導入した代表領域と一致することを証明した. これによって, 甲斐氏自身が過去に証明した「Cayley 変換の像の凸性による対称 Siegel 領域の特徴付け定理」を, Siegel 領域を用いない形で, より簡潔に定式化することに成功した.

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 13 件)

- ① Noguchi, J. and Winkelmann, J.; Order of meromorphic maps and rationality of the image space, J. Math. Soc. Japan, 掲載確定, 査読有.
- ② Corvaja, P. and Noguchi, J.; A new unicity theorem and Erdős' problem for polarized semi-abelian varieties, Math. Ann., 掲載確定, 査読有.
- ③ Hattori, T., and Kasue, A.; Functions with finite Dirichlet sums of order  $p$  and quasimorphisms of infinite graphs, Nagoya Math. J. 207 (2012), 掲載確定, 査読有.
- ④ Kasue, A.; Spectral convergence of Riemannian vector bundles, The Science Reports of Kanazawa University, 2012, 掲載確定, 査読有.
- ⑤ Kodama, A.; Characterizations of complex manifolds from the viewpoint of holomorphic automorphism groups, "Algebraic structures in partial differential equations related to complex and Clifford analysis" edited by L. H. Son and W. Tutschke, Ho Chi Minh City Univ. of Education Press (2011), 131-148, 査読有.
- ⑥ Noguchi, J.; Connections and the second main theorem for holomorphic curves, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 18 (2011), 155-180, 査読有.
- ⑦ Byun, J., Kodama, A. and Shimizu, S.; A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes, Tohoku Math. J. 62 (2010), 485-507, 査読有.
- ⑧ Kodama, A. and Shimizu, S.; Addendum to our characterization of the unit polydisc, Kodai Math. J. 33 (2010), 182-191, 査読有.
- ⑨ Ishi, H. and Kai, C.; The representative domain of a homogeneous bounded domain, Kyushu Journal of Math. 64 (2010), 35-47, 査読有.
- ⑩ Hattori, T. and Kasue, A.; Functions of finite Dirichlet sums and compactifications of infinite graphs, Advanced Studies in Pure Math. 57 (2010), Probabilistic Approach to Geometry, 144-153, 査読有.
- ⑪ Kasue, A.; Convergence of metric

graphs and energy forms, *Revista Matematica Iberoamericana* 26 (2010), 367-448, 査読有.

- ⑫ Kodama, A. and Shimizu, S.; An intrinsic characterization of the direct product of balls, *J. Math. Kyoto Univ.* 49 (2009), 619-630, 査読有.
- ⑬ Noguchi, J.; Value distribution and distribution of rational points, *Spectral Analysis in Geometry and Number Theory*, Ed. M. Kotani et ál, *Contemp. Math.* 484, 165-176, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 2009, 査読有.

[学会発表] (計 43 件)

- ① 甲斐千舟; 正則凸錐の順序同型写像の線型性, 名城大学幾何学研究集会「極小曲面と幾何構造」, 2012年3月5日, 名城大学 (愛知県)
- ② 加須栄篤; 双曲空間へのグラフの埋込みについて, 「リーマン面・不連続群論」研究集会, 2012年1月8日, 名古屋大学 (愛知県)
- ③ Kai, C.; The linearity of order isomorphisms on regular convex cones, 2nd Tunisian-Japanese Conference “Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications”, 2011.12.15, El Mouradi Palace Hotel (チュニジア)
- ④ Noguchi, J.; Value distribution and distribution of rational points, Tokyo-Seoul Conference, 2011.12.2, Grad. School of Math. Scie., Univ. Tokyo (東京都)
- ⑤ Noguchi, J.; Two topics: Kaehler condition in value distribution theory and a new direct proof of Oka’s theorem (IX, Levi problem), 19th Symposium on Complex Geometry, Sugadaira, 2011.11.9 (長野県)
- ⑥ Noguchi, J.; On Oka’s extra-zero problem and related topics, *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, 2011.10.18, CIRM (Luminy) (フランス)
- ⑦ 甲斐千舟; 正則凸錐の順序同型写像の線型性, 日本数学会 2011年度秋季総合分科会 幾何学分科会, 2011年9月30日, 信州大学理学部 (長野県)
- ⑧ Noguchi, J.; Second main theorems, degeneracy of entire curves and applications, Israel Science Foundation Workshop on Normal Families, Meromorphic Functions, and Value Distribution Theory, and the Fifth International Conference on Complex Analysis and Dynamical Systems, 2011.5.24, Akko (イスラエル)
- ⑨ Noguchi, J.; Order of meromorphic maps and the rationality of the target space, 2011.3.17, Rhur University (ドイツ).
- ⑩ Noguchi, J.; A new fundamental theorem for entire curves into semi-abelian varieties and applications, Seminar in Complex Analysis, 2010.11.2, Univ. Paris 6 (フランス)
- ⑪ Noguchi, J.; Value distribution theory and unit equations, RIMS Workshop “Analytic Number Theory at Kyoto”, 2010.10.7, RIMS Kyoto University (京都府)
- ⑫ 児玉秋雄; A group-theoretic characterization of the direct product of a ball and punctured planes, 日本数学会, 2010年9月23日, 名古屋大学 (愛知県)
- ⑬ Noguchi, J.; Problems in value distribution theory, Hanoi University of Education, 2010.9.20 (ベトナム)
- ⑭ Kodama, A.; A group-theoretic characterization of the direct

- product of a ball and punctured planes (with J. Byun and S. Shimizu), 18<sup>th</sup> Intern. Conference of Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2010. 8. 14, Univ. of Macau (中国)
- ⑮ 野口潤次郎; On a problem of S. Lang on theta functions (with P. Corvaja), 日本数学会, 2010年3月25日, 慶応大学 (神奈川県)
- ⑯ 野口潤次郎; A new unicity theorem and Erdos' problem for polarized semi-abelian varieties (with P. Corvaja), 日本数学会, 2010年3月25日, 慶応大学 (神奈川県)
- ⑰ Noguchi, J.; Holomorphic curves into semi-abelian varieties and a conjecture of Lang, Komplex Analysis 2010 Albi, 2010. 1. 30, Grand Hotel d'Orleans (フランス)
- ⑱ 清水悟; 正則自己同型群に関連する諸問題, 複素解析研究集会, 2010年1月10日, 山形市生涯学習センター 遊学館 (山形県)
- ⑲ 清水悟; 標準的トーラスを含む複素ユークリッド空間の正則自己同型群の部分群, 第52回函数論シンポジウム, 2009年11月22日, 大阪府立大学 (大阪府)
- ⑳ Noguchi, J.; SMT for semi-abelian varieties and applications, The 15th Intern. Sympo. on Complex Geometry, 2009. 11. 1, 菅平・プティホテルズンタック (長野県).
- ㉑ Noguchi, J.; Theory of holomorphic curves and related topics, 代数幾何学城崎シンポジウム, 2009. 10. 28, 城崎市民会館 (兵庫県).
- ㉒ Noguchi, J.; A new unicity theorem and Erdos problem for polarized semi-abelian varieties, Analytic Number Theory 2009, 2009. 10. 14, 京都大学 (京都府)
- ㉓ Noguchi, J.; Nevanlinna theory in higher dimensions and related Diophantine problems, The XXIst Rolf Nevanlinna Colloquium, 2009. 9. 7, 京都大学 (京都府)
- ㉔ Kodama, A.; Addendum to our characterization of the unit polydisc (with S. Shimizu), 17<sup>th</sup> Intern. Conference of Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, 2009. 8. 6, Hochiminh City Univ. of Pedagogy (ベトナム)
- ㉕ Noguchi, J.; A new unicity theorem and Erdos problem for polarized semi-abelian varieties, Workshop in Complex Geometry, 2009. 4. 30, Dusseldorff 大学 (ドイツ)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

児玉 秋雄 (KODAMA AKIO)  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号: 20111320

### (2) 研究分担者

清水 悟 (SHIMIZU SATORU)  
東北大学・大学院理学研究科・准教授  
研究者番号: 90178971

### (3) 研究連携者

野口 潤次郎 (NOGUCHI JUNJIRO)  
東京大学・大学院数理科学研究科・教授  
研究者番号: 20033920

加須栄 篤 (KASUE ATSUSHI)  
金沢大学・数物科学系・教授  
研究者番号: 40152657

甲斐 千舟 (KAI CHIFUNE)  
金沢大学・数物科学系・助教  
研究者番号: 70506815