関数領域における「教授一学習軌道」の一考察：オランダの中等教育下部構造の教科書教材の分析

関数領域における「教授－学習軌道」の一考察：オランダの中等教育下部構造の教科書教材の分析

大谷 実

Teaching-Learning Trajectory (TAL) in Case of Function: A Textbook Analysis of Lower Secondary Level in the Netherlands

Minoru OHTANI

1．研究の目的・方法

本稿は，関数領域に関してオランダの中等教育下部構造の数学科教科書の教材配列の特徴を明らかにし，それを鏡として日本の関数領域カリキュラムを改善する視点を提案することを目的とする．

日本の学習指導要領では，関数は中学校数学科の一つの領域をなしており，その学習の困難性がつとに指摘されている．全国学力・学習状況調査では，関数領域の学習状況は大変厳しい現状にあり，改善を要する課題とされている．例えば，平成28年度中学校数学の問題A$\boxed{9}$で，比例の式について増加量を求めることができた生徒は40.3%であり，具体的な事象から反比例の関係を見出せた生徒は42.9%である（文部科学省・国立教育政策研究所，2016）．この背景の一つには，日本の関数領域のカリキュラムの構成自体に根本的な問題があることを示唆する．

研究の方法として，オランダのユトレヒト大学フロイデンタール研究所（Freudenthal Institute）で開発されているカリキュラム構成を検討する概念である「教授－学習軌道」に着目する．そして，その影響を受けていると思われる数学科教科書の関数分野の内容構成の特徴を分析し，それを鏡として日本の関数領域カリキュラムを改善する視点を提案する．

次の表1は，日本とオランダの中学校段階の関数領域の主要な内容を整理したものである．

日本では，第1学年で関数を数学的に定義し，学年ごとに基本的な関数のタイプを主題としながら，それらを式で定義をし，数表・グラフでそれらの数学的性質を見出していく．これに対し，オランダでは，関数の素地となる概念やその多様な表現方法の機能を主題としながら，その中で基本的な関数を同時に扱い，それらの数学的なレベルが次第に高まるようスパイラルな構成をし，第3学年で関数をプラグマティックな仕方で定義する．このことから，両国の関数領域カリキュラムの編成の基本思想が異なっていることが示唆される．

	日 本	オランダ
1年	関数 比例・反比例 (座標)	比の表，百分率，倍率，比例配分，グラフ，座標，言葉の式，規則の言葉・式・グラフ表示，一次式，グラフから式をつくる
2年	一次関数 (変域，変化の割合，グラフの傾き，切片)	一次式，グラフ，傾きと切片，直線の式，一次式をつくる，関係，変数，正比例，比の表，2点を通る直線，二次式，グラフ，頂点
3年	関数$y=ax^2$ いろいろな関数（指数関数，階段関数等）	関数，パラメータ，正比例と反比例，分数関数，二次関数，放物線

表1 日本とオランダの関数領域の比較

以下では，先ず「教授－学習軌道」の概念ならびにその基礎となるオランダの数学教育論を

平成29年10月30日受理

取り上げる．次に，オランダの数学教育論を最も反映している教科書を取り上げ，具体的な教材を示しながら，関数領域の「教授－学習軌道」の特徴を述べる．最後に，日本の関数領域カリキュラムの改善の視点を示す．

2．「教授－学習軌道」(TAL)

「教授－学習軌道」は，「中間目標を見据えた教授－学習軌道」（Tussendoelen Annex Leerlijnen）の英訳 Teaching-Learning Trajectory に基づいており，TAL と略称される．これは，1997 年よりオランダ教育省の援助によりユトレヒト大学フロイデンタール研究所で開発されている教育課程に関わる研究で，現在も進行中のものである．

TAL の意義を理解するために，オランダの教育制度について要点を述べる．オランダは憲法 23 条で教育の自由を保障し，これに基づき，教育文化科学省は学校段階ごとに必履修教科とその「中核目標」(Core Goals) を大綱的に示している (OC&W, 2004)．そのため，各学校は何をどう教えるかに関してかなりの自由裁量がある．そのような中で，数学のカリキュラム編成や教科書の開発に一定のガイドラインとなるものが TAL である (van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005)．「教授－学習軌道」は，中核目標に到達するまでに子どもが通過する中間の目標を示唆するもので，子どもの数学的理解の発達に関して長期的な概観を与え，教育がその発達の過程をどのように支援し，評価するかについての「心的な地図」(ibid, 2005) を与えるものであり，市販の教科書の構成にも影響を与えている．現在，初等学校の 4 つの内容領域 (整数，測定，図形，割合) で TAL の研究成果が公刊されている (例えば，Gravemeijer et.al, 2016; van Galen et.al, 2008)．このように，フロイデンタール研究所は「中核目標」のもとで，オランダの初等学校の数学科カリキュラムや教科書に対して，大きな役割を果たしている．他方で，中学校における関数領域における TAL の研究はいまだ未開拓であり，それ自体が新しい研究対象である．そのため，本稿では中学校の関数領域を TAL の視点で検討するために，TAL の基礎をなすフロイデンタール研究所の数学教育の基礎理論と，それに影響を受けている教科書の内容分析を行うという方法をとる．

3．TAL の基礎にある RME

TAL の基礎には，オランダ固有の数学教育論がある．それは，フロイデンタール研究所で開発され，世界的に展開されている Realistic Mathematics Education (略称 RME), Realistisch Reken/Wiskundeonderwijs である．日本で Realistic Mathematics Education は「現実的数学教育」とも訳されるが，定訳はないようである．"realistic"とは，「現実感のある」という意味であり，RME は「現実感のある算数・数学教育」と訳せるが，本稿では RME の略称を用いる．1980 年以降，RME はオランダの数学教育全体に強い影響を与え，教育目標の設定，教育課程の開発，教科書の編集などに反映されている (Treffers, 1986)．

RME は，ハンス・フロイデンタール (Hans Freudenthal: 1905-1990) が著した数学論や教授論を基にしている．「現実感から出発し，現実感にとどまる数学」(Freudenthal, 1987)，「数学科化すること」(mathematizing) や「追発明」(re-ivention) (Freudenthal, 1973) を重視する．フロイデンタール自身の数学論・教授論については，伊藤がその形成過程を踏まえて体系的に再構成し，その特質を解明している (伊藤，2007 など)．以下では，TAL 理論が RME 理論の教授観と学習観に深く根差していることを述べる．

RME は，「有意味な人間の活動」，「水平的数学化」(horizontal mathematization) と「鉛直的数学化」(vertical mathematization) を主な特徴としている．水平的数学化と鉛直的数学化は，トレファース (Adri Treffers) とホフリー (Fred Goffree) が創案したもので，他の数学教育のタイプ (経験的，構造的，機械的) と区別しつつ，

RME が目指すべきタイプを特徴づけたものである（Treffers, 1986）．水平的数学化は，「経験的方法・観察・実験・帰納的推論を通して，問題を密なる数学的な手段によってアプローチできる様に変形すること」，鉛直的数学化は「水平的数学化に続き，数学的処理，問題の解決，解決の一般化，更なる形式化に関連する活動」（ibid,71）である．

RME が有意味な人間の活動や数学化を実現する一般的方法に関して，6つの原理が提示されている（van den Heuvel-Panhuizen, 2001: 35）．

・**現実感の原理**（Reality Principle）：実生活など現実感のある文脈を伴う状況を問題場面とすること．
・**関連付けの原理**（Inter-twinment Principle）：教師が数学の内容を様々な内容領域の内外で関連付けを図ること．
・**導きの原理**（Guidance Principle）：子どもがみずから考えを作り出すことを通して数学を追発明するよう教師が適切な手立てを講じること．
・**活動の原理**（Activity Principle）：子どもが数学の学びに活動的に参加すること．
・**水準の原理**（Level Principle）：子どもの学びが一般性のある水準へ徐々に高まること．
・**相互作用の原理**（Interaction Principle）：子どもが個で思考し，社会的にかかわること．

かくして，RME の一般論では，子どもが，現実感のもてる問題場面からスタートし，問題場面を自らの考えや表現を用いて表し，教師の導きや子どもとの関わりの中で，次第に考え方をより一般的なものへと洗練させながら，最終的に公的な数学的知識や形式化した方法を追発明する活動を大切にする．この特徴は，「漸進的図式化」（progressive schematization）とも呼ばれる，この漸進的図式化に関して，フラヴメイヤー（Gravemeijer, 1999）は，導きによる特定の数学的知識の追発明やそれを奨励する相互作用の原理を明確に意識しながら，「状況」，「参照」「一般」「形式」からなる4つの水準からなる「創発的モデル化」（emergent modelling）論を構築している．これは，RME が目的とする水平的数学化と鉛直的数学化の複雑な関係をモデルの機能という分析の単位により首尾一貫して扱い，方法にかかわる6つの原理も組み入れつつ，最終的に数学の追発明をも保証するものである．TAL は，こうした RME の理論的な達成を基礎として，具体的な内容領域において考案され，教師の授業における実践を支援している（Gravemeijer, 2004）．

4．中等教育下部構造の教科書の分析

以下では，日本の中学校にあたるオランダの中等教育下部構造の教科書を取り合げ，関数領域における内容構成の特徴を検討する．尚，オランダの中等教育では 3 つのコース（VMBO, HAVO, VWO）があり，下位構造は「基礎形成教育」（Basis Vorming）段階としてコース間で共通性の高いカリキュラムが編成されている．

本稿では，オランダの中等教育下部構造の VWO 用教科書『現代数学』(Modern Mathematics, VWO，Noordhoff Uitgevers 社）を取り上げる．ここでは，第1，2学年は第11版，第3学年は第9版をそれぞれ用いる．本教科書はオランダで2番目のシェアがあり，最も RME の考えに近いとされる（de Lange, 1987）．なお，VWO は「大学準備教育」で，卒業後に総合大学に進学する約2割の生徒が履修するコースである．

以下，『現代数学』の関数領域に関する内容構成を具体的に述べる．

1年

・「比の表」（ratio table）で比例の関係にある数量を求める．基本として，4 つの手順を学ぶ：①場面（例えば，1000gr のニシンが 30€のとき，230gr ではいくらか.）から比の表をつくる．②上の欄に 1 を，その右に対応する数量を書く．③矢印を使って未知の数量を求める．④求める

値を書く（図1）.

Herring costs €30 per 1000 grams.
How much do you pay for 230 grams of herring?

❶

number of grams	1000	...	...
number of cents	3000	...	...

÷1000　×230

❷

number of grams	1000	1	230
number of cents	3000	...	...

÷1000　×230

❸

number of grams	1000	1	230
number of cents	3000	3	690

❹ So 230 grams of herring cost €6.90.

図1．比の表とその扱い方

・内比の考えで計算するとともに，一方の数量の和が他方の数量の和に対応することや，外比の考え方でも未知の数量を求め，比の表を柔軟に扱えるようにする．

・比の種類としてパーセント，絵や地図などのスケール，比例配分（例えば，144 リットルを 5:8:11 の比に分ける）などで比の表を使って問題解決を行う．

・グラフ：身の周りの様々な場面（例えば，ロウソクの燃焼，体重，冷蔵庫内の温度，インフルエンザの蔓延，子どもの成長など）の伴って変わる２つの数量の変動の様子をグラフで表したり，グラフを読んだりする．また，座標についても学び，スケールの取り方，軸の値を省く表現も学ぶ（図２，３，４）．

・グラフをよみ，プロットする：合致するグラフの選択．グラフの変数，単位，増減を具体的場面でよみ取ったり，表からグラフをかいたりする．さらに，グラフの特徴に基づき変化の様子を説明する．グラフの種類としては，身近な場面で様々なものを取り上げる．

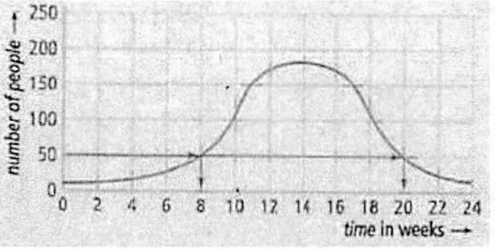

図2 インフルエンザの患者数

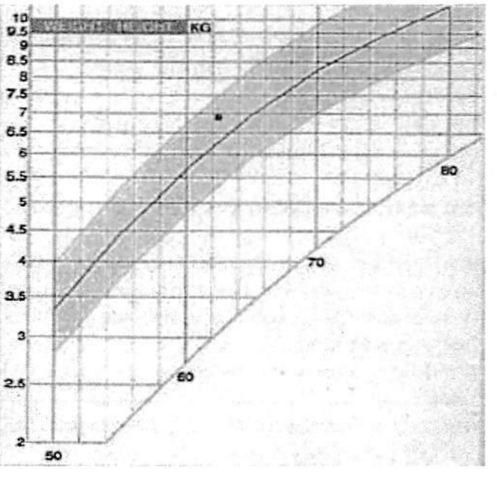

図3 幼児の身長と体重の関係

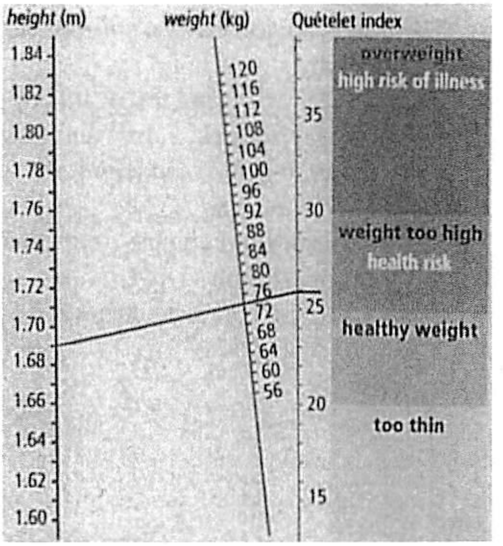

図4．身長・体重と健康の関係

・**言葉の式**：身近な事象における数量の関係を，言葉の式で表現する．例えば，若年層の睡眠時間を（16－年齢の半分）という計算で見積もるという研究を紹介し，それが経験的に受け入れられるかどうか検討する．また，30 歳以上ではどうかについて検討することで，範囲の素地を扱う．

・**ルールを言葉で，そして式やグラフへ**：身近な場面（例えば，テーブルの数と椅子の数の関係）で，数量の関係にもとづく計算の手順を「言葉」で表す．そして，言葉で表されたルールを演算記号で簡略化する．その結果を「式」（formula）として定義する（図５）．さらに，式（この場合，従属変数は等号の右辺にある）から，一旦表をつくり，それから点をとり，グラフをかく．こうしたルールを言葉で表した後に式で表すという段階を踏んだ扱いは「漸進的図式化」の典型的な例である．

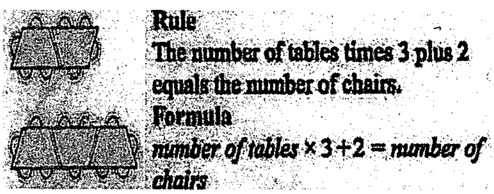

図５．ルールから言葉の式へ

・**線形式**：具体的場面で表とグラフが与えられ，式を作る．その式のグラフが直線になるので「線形（linear）グラフ」と呼ぶ．それに併せて「初期値」と「一当たり数」という２つの数量を導入する．場面から式をつくったり，式をよんだり，グラフから式をつくる．その際，先ず表を作り，初期値と一当たりの増減を求め，それを踏まえて線形式を作る．

2年

・**線形式**：１年からのスパイラルで，具体的な場面の式から文字の式へと移行し，文字の世界で，「線形グラフと式」を導入する．併せて二次式 $q=p^2-9$ や負の範囲の事象も扱う．

・**増加度と y 切片**：口座に１月ごとに一定額を預金する場面で，「線形の関係」，「増加度（gradient）」と「y 切片」の用語を導入し，表，式，グラフでこれらの値を見出す．これらは，「初期値」と「一当たり数」の数学化にあたり，RME の特徴を示している．

・**直線の式のグラフと表の特徴**：式の増加度が正，0，負の場合のグラフの特徴を見出す．また，与えれたグラフから線形式を求める．

・**線形式をつくる**：「関係（relation）」という用語を導入し，より抽象的な場面で，関係の表，グラフ，式で変化度と y 切片を求める．また，表から変化度が一定かを判断し，y 切片を見出して直線の式をつくる．また，グラフから変化度と y 切片を求めたり，逆に，線形グラフから式を求めたりする．さらに，2 点の座標が与えられたとき，変化度と y 切片を求めて直線の式をつくったり，単なるグラフから直線の式をつくったり，他の直線に平行で１点がわかる場合の式をつくる．

・**正比例**：２変量の関係を表す数表が「比の表」のときを正比例という．比の表を用いて正比例の性質やグラフの特徴を見出す．逆に，グラフや表から比例かどうかを判断する．$y=ax$ で a の異なる値のグラフをかく．また，正比例を線形関係の特殊な場合とみなす．

・**二次式**：現実場面と数学場面に関して，一次式も交えながら，二次式について学ぶ．現実場面は，例えば，スーパーソニックカーTrust が時速 1227km を達成し，パラシュートを使用する場合としない場合の制動距離 B と時速 v の関係が $B=\frac{v^2}{200}$，$B=\frac{v^2}{1200}$ で与えられ，制動距離の差を求める．数学場面は，例えば，市松模様で２色の三角形の数が $y=\frac{1}{2}f^2+\frac{1}{2}f$，$b=\frac{1}{2}f^2-\frac{1}{2}f$ で表わされることを扱う（図６）．

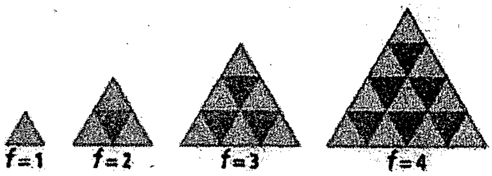

図６．市松模様のパターン

二次式を定義し，乗法の計算で「因子」を，加減の計算で「同類項」を導入したり，代入して値を求めたり，数表を完成したり，グラフをかいたりしながら，二次式の様々な側面を理解したり処理する技能を身に着ける．これらの場面は，関数に関わるが，増加の規則性だけでなく，グラフの対称性，最小値，一重，二重の括弧のある式の展開や二次方程式を扱い，二次式を多面的に考察し，RMEの関連付けの原理が反映されている．

3年

・**関数**：関数の意味は一意対応という数学的な定義でなく，次のようにプラグマティックな仕方で導入される．「式 $p-2q=6$ を$q=\frac{1}{2}p-3$と書き直すことで，p の値がわかるとき，q を直接計算できる．あなたは，q は p の**関数**と言ってよい．この関数の表記は$q(p)=\frac{1}{2}p-3$である。$p=10$ の像は 2 である。これは $q(10)=2$ と書かれる．」．また，関数を定義する前に，一次式や二次式等やその様々な表現を学んでおり，関数はその導入前に多くの意味内容を含んでいる．

関数の導入後，既習の式に「一次関数」，「二次関数」，「定数関数」などの名称を与えたり，関数固有の概念である「定義域や値域」を $f(x)=2+\sqrt{x-5}$ の式や半円のグラフ等を通して扱う．さらに，発展的な内容であるパラメータを扱い，「関数族」を考察対象とする（図７）．

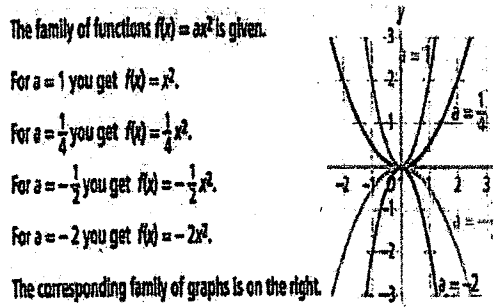

図７．関数族とグラフ

第１学年で「比の表」として導入した比例を，第３学年では関数として比例・反比例のセットで学び直す．さらに，第３学年では，例えば$f(x)=-1+\frac{2}{x+a}$などのグラフを扱いながら様々な関数を学ぶ．その際も，冷蔵庫の缶入りのコーラの温度など，具体的な場面での問題解決をする点でRMEらしさがうかがわれる．

・**二次関数**：導入場面は，地球でオハジキを投げた場合を知って，月で投げたときについて考えるものである（図８）．

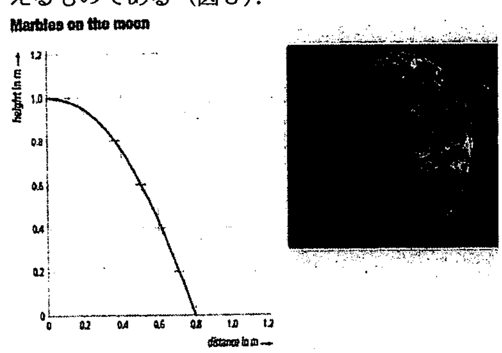

図８．二次関数の導入場面

二次式を様々な角度で学び，その後に関数を学ぶ流れにおいて，オランダでは当然のこととして，二次関数を一般的に学ぶ．

ここでは，二次式を十分学んできたので，主としてグラフの図形的性質である放物線や頂点と対称性，放物線のプロットの仕方，パラメータを用いて二次関数 $y=ax^2+bx+c$ の二次の係数 a が放物線のグラフの形を決めることを学ぶ．以上の内容だけでもオランダの二次関数の学習は

日本の関数 $y=ax^2$ と比較して深い学びが求められている．オランダの教科書では，さらに「深い学びとプロジェクト」という発展的な教材がICTを使用して扱われる．扱われる場面は，フィボナッチ数列，橋のデザイン（図９），噴水などである．

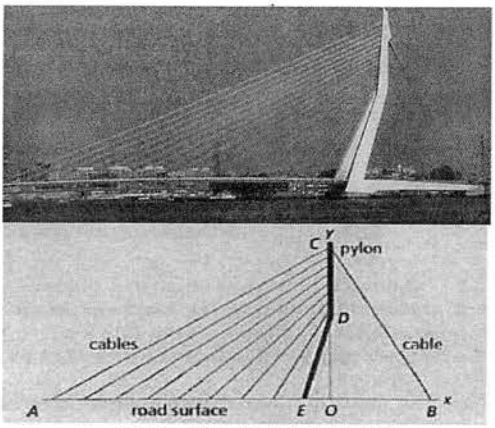

図９．橋に活用される関数

上のオランダの教科書の内容分析から，関数領域における TAL に関して以下のような特徴が見出せる．

オランダでは，現実感の原理を重視し，真実味のある場面を参照しながら，それを参照する多様なモデルを学ぶ．また，水準の原理を反映して，言葉の式から文字の式へと次第に一般化をし，関数に関連する内容について十分に馴染んだ後に，関数の用語を導入する．また，関連付けの原理に基づき，比，グラフ，一次式，二次式，方程式などを関連付けることを重視する．

５．日本の関数領域改善の視点

日本の中学校における関数領域は，現行の学習指導要領や教科書では，概ね以下のようになっている．

小学校では，第４学年で伴って変わる数量の関係を学び，第５学年より簡単な比例を学習し，第６学年では非負の数の範囲において正比例と反比例を数表・グラフ・式で表したり，その性質を見出したり，身の回りの事象を比例や反比例とみなして問題解決を行う．そのような小学校の学習の基礎の上にたって，中学校では第１学年で関数を定義し，既習の比例と反比例を関数として捉え直すとともに，数の範囲を負の数の範囲に拡張する．関数の表現としては，式を中心として数表やグラフとの関係に着目しながらそれらの性質を見出していく．第２学年では，一次次関数について，同じように学ぶが，ここでは数表を中心に「変化の割合」という関数の重要な概念を学び，それを視点として式やグラフでその特徴を分析する．さらに，第３学年では関数 $y=ax^2$ について，第２学年の学び方を踏襲する．

オランダの教授－学習軌道を鏡とした日本のそれを検討するとき，次の２点が大きくことなっている．

第１点は，日本では，定義が先ずあり，その意味内容は漸次習得されていく．これに対して，オランダでは具体的な場面を参照して意味づけた様々な内容の学習を踏まえて定義がなされる．これは，教授・学習軌道としては正反対である．

第２点は，特に日本で顕著であるが，日本は学習する関数に関連する性質のみに限り内容を学んでいくのに対して，オランダでは様々な内容を混在させ，スパイラルに学んでいく．この点で，日本は数学的対象を固定し，そのまとまりで学年の内容のまとまりを定めるが，オランダは様々な内容の混稀の中で様々な数学的対象が同時に学ばれる．

第３点は，いずれの国でも云えることであるが，関数で重要になる「変化の割合」の学習が限定的である点である．日本でもオランダでも，変化の割合を学が，それが本格的に活用される場面が少ない．特に，日本は学ぶ関数が学年ごとに固定化されているが，変化の割合はグラフや関数の利用において活用されることはない．すなわち，グラフは図形的な性質が学習の対象になり変化という側面が弱くなっている．さらに，利用においては計算で答えを求める代数的

な処理が優勢であり，変化の割合は登場しない．変化の割合の生徒の理解が困難である背景には，こうした無関連な学びが大きく影響していると思われる．

「教授ー学習軌道」を考えるにあたり，日本のカリキュラムは関数を早期に提示しすぎており，オランダの展開を参考とするなど，異なるカリキュラム編成も考えられるのではないだろうか．

引用・参考文献

de Bruijn, I. et. al. (eds.), (2013). *Modern mathematics, 1A vwo*. Groningen: Noordhoff Uitegvers.

de Bruijn, I. et. al. (eds.), (2013). *Modern mathematics, 1B vwo*. Groningen: Noordhoff Uitegvers.

de Bruijn, I. et. al. (eds.), (2013). *Modern mathematics, 2A vwo*. Groningen: Noordhoff Uitegvers.

de Bruijn, I. et. al. (eds.), (2014). *Modern mathematics, 2B vwo*. Groningen: Noordhoff Uitegvers.

de Bruijn, I. et. al. (eds.), (2010). *Modern mathematics, vwo book 3B*. Groningen: Noordhoff Uitegvers.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordreht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1987). Mathematics starting and staying in reality. In Wirszup, I. (ed.), *Developments in school mathematics education around the world: Proceeding of UCSMP International Conference on Mathematics Education* (pp. 279-294). NCTM.

Gravemeijer, K. (1999). 'How emergent models may foster the constitution of formal mathematics', *Mathematical Thinking and Learning.1* (2), 155-177.

Gravemeijer, K. (2004). Learning Trajectories and Local Instruction Theories as Means of Support for Teachers in Reform Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2). 105-128.

Gravemeijer, K. et.al. (2016). *Measurement and Geometry in Upper Primary School*. Sense Publishers.

伊藤伸也（2007）．H.フロイデンタールの数学教授学における「数学化」の意味．*日本科学教育学会 研究会研究報告*21巻6号，59-64頁．

文部科学省・国立教育政策研究所 (2017). *全国学力・学習状況調査報告書（中学校数学）*．

Lange, J. de (1987). *Mathematics insight and meaning*. Utrecth: Rijkuniversiteit.

Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen (OC&W), (2004). *Voorstel Herziene Kerndoelen Basisonderwijs*. Den Haag: OcenW.

大谷 実 (2010). オランダの算数・数学教科書, *日本数学教育学会誌・算数教育*, 92(8), 24-27.

TAL (http://www.fi.uu.nl/archief/tal/tal.html, 2017.10.29 日閲覧)

Treffers, A. (1986). *Three dimensions: a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. In F. L. Lin (ed.) *Common Sense in Mathematics Education* (pp. 1-43). Taipei: Taiwan.

van den Heuvel-Panhuizen, M. & Wijers, M. (2005). *Mathematics standards and curricula in the Netherlands*. ZDM, 37 (4), pp.287-307.

van Galen, F. et.al. (2008). *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions*. Sense Publishers.