算数・数学教育に於ける学年を跨いだ教材に関する指導方法

米田　力生

Rikio YONEDA

概要

現在、学校教育において行われている算数・数学教育には多くの課題がある。その中でも、この論文では学年を跨いだ教材に関する指導方法に焦点を当て、具体的な例をもとに問題点を考察する。特に算数・数学は他の教科よりも全学年を通しての積み重ねが大切な教科であるため、学問全体の繋がりには充分な配慮が必要になる。この点を念頭に置き、この紙では現行の算数・数学教育指導方法を改善する手がかりとなるものを提示することを目的とする。

1　0の世界

先ずは０の世界を中心に現行の算数・数学教育が抱えている課題を考察し、その指導方法を探っていくことにする。０は自然数に入れられていないわけであるが、起源は１４００年以上前にインドで発明され、無の０として１の前の存在として考え始められました。そして０の開発により数学は飛躍的に発展してきたと言われています。０は大きく分けて４つの意味に大別されると考えられる。

1. 無の０
2. 空位の０
3. 基準の０
4. つり合いの０ (バランスの０)

これらの違いは教科書等で学校教育の現場では特にとり扱われていない。そして教える側の教員はこのことをあまり意識して０を取り扱っていないため、教わる側の児童・生徒は混乱するという構図になっていると考えられる。少し、話題を変えて、この０の問題を考察していくことにする。「角と角度とでは、どこがどう違うのかわからない。」という問題。このような子供は多いし、この問いを一般の社会人に同様の質問をしても的確に答えられる人は少ないようである。それほど、二つの概念には曖昧性があるのであろう。小学校４年生の教科書では「角を作っている辺の開き具合を、角の大きさ（角度）という」「角の大きさは、辺の長さに関係なく、辺の開き具合で決まる」とある。この説明が子供たちにはどうにも分かり辛いということのようである。小学校２年生で三角形・四角形を学習する際に、「角」は「カド」という言葉で教えられ、「カドの点を頂点、そのまわりの直線を辺という」と定義されているが、小学校３年生になると、これらの事項は、「角」及び「三角形」を学ぶ際に「１つの点から出ている２つの直線が作る形を角とよび、角を作っている辺の開き具合を角の大きさとよぶ」と定義されている。そして「角の大きさとは、辺の長さに無関係で、辺の開き具合のみで決まる」と書かれている。子ども達の理解に関する分析としては、「辺の開き具合＝角度」という理解で処理されていると考えられるとも述べられている。この理解の困難さに関しての対策として、２本の直線を頂点として回転するという、回

平成 29 年 10 月 30 日受理

転角を使用しての指導が有効であるという実践例が述べられている。具体的には回転ゲームを取り入れた学習（円の中心に子供が立って5秒間回転し、その回数と一回転未満の回転した大きさを競うというもの）で、回転した数を数える子供を二人決めて、スタートの線の先に座らせ、他の子どもを円の周囲に等間隔に座らせストップの合図で、回っている子供の正面にいるこどもが手を挙げ、ストップした方向に目印を置く。このゲームで回転角を指導することによる教育効果としては、子ども達は回転すること、スタート・ストップの向きで角を考えるので、0° の線はスタートの際の向いていた方向、もう一つの線はストップした時の向いていた方向であり、その線の長短に無関係に角の大きさが決まることが自然に理解できると分析されている。

ここで考えられる問題点として、「回転角」という用語及びその言葉そのものが持つ意味にあると考える。一般に「回転」という言葉には「ぐるぐる回る」というイメージが内包されている。そしてこの段階（角・角度を習う段階）において教科書で取り扱いが無い回転という要素が新たに角・角度に付加されたことにあると考える。先に述べられた通り、辺の長さという要素すら困惑していた子供に更に別の回転という要素が加わったということには、更なる混乱が生じるという面も充分配慮する必要があると考える。

ここで「0」について考察する。今は角度を取り扱っているので、0° に関して考察する。0° は2つの辺の開き具合という定義から考えると、開いていない重なった状態であると考えることが出来る。そしてその状態は角も角度も文字通り無い「無」の状態である。これは、0 の解釈での「無のゼロ」に相当すると考えるのが最も有力であるが、回転の時に述べた通り、スタート・ストップを用いた考察の際には、「基準のゼロ」という意味を含有することに気が付く。この根拠としては、角度には反時計回りと正の方向、逆回りを負の方向とする規則があり、数直線は右方向を正の向き、左方向を負の向きという規則とリンクしている。このように比較して考えると、この場合は両方ともに「基準のゼロ」に位置付けられると考えられる。つまり、この一つの教材を扱う際には少なくとも2つの意味（解釈）が内在しているという難しさがあり、これが理解を困難にしていることに注意する必要がある。高等学校では更に「動径」という用語を用いて角・角度を関連付けることもある。この際にも「動径」という言葉の持つ意味、グルグル動くというイメージをもつ生徒も存在することからも扱う数学的用語には十分な配慮が必要になることも注意しておきたい。

次に話題を変えて、「四捨五入」に関して簡単に紹介し、0 に関して考察していくことにする。四捨五入はある位の数が 5 未満（5 は入らない）場合、そのままにし、5以上の場合、上の位に 1 上げる（上の位に 1 プラスする）という演算であるが、この際にも 0 は注意する必要がある対象となる。

$$3.4, 3.3, 3.2, \cdots 2.7, 2.6, 2.5$$

は四捨五入すると 3 となり、

$$2.4, 2.3, 2.2, \cdots 1.7, 1.6, 1.5$$

は四捨五入すると 2 となり、

$$1.4, 1.3, 1.2, \cdots 0.7, 0.6, 0.5$$

は四捨五入すると 1 と なる。

$$0.4, 0.3, 0.2, \cdots -0.1, -0.2, -0.3, -0.4$$

は四捨五入すると 0、

$$-0.5, -0.6, -0.7, \cdots\cdots$$

$$-1.1, -1.2, -1.3, -1.4$$

は四捨五入すると -1、以下同様に繰り返されるわけであるが、四捨五入して0になるもののも9個しかないということになっている。実際には小学校ではマイナスの四捨五入は学習対象として取り扱われていない。実際に計算することは小学校・中学校・高等学校で要求されることはないのが現状であるが、実際0の場合 (四捨五入して 0 になる場合) のみ、他の場合と様相が違う。この場合の 0 は数直線を使って解釈されることから、基準の 0 というケースに相当すると考えられる。数字が無いという意味も全くないわけではないことから、無の0の意味も含有されるであろう。この場合も0の扱いが実は難しいとこがわかるであろう（実際に四捨五入して0なることを取り扱う際は帳尻合わせをして計算されているようである)。

最後に、指数に関して 0 を考察していく。公比 a の等比数列

$$\cdots a^{-5}, a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^{0},$$

$$a^{1}, a^{2}, a^{3}, a^{4}, a^{5} \cdots$$

を考える。このとき、a^0 は a を一つも掛けていないという意味から、この場合の0は「無のゼロ」に相当すると考えられる。一方で、上の様に一列に並べると、「基準のゼロ」という意味も同時に併せ持つ。この様に、一つの記号（概念）0には複数の意味が含まれて取り扱われているケースが多く、そのため生じてしまう理解の困難さを十分配慮する必要があるが、複数の解釈があることが有用になるケースも併せ持つという数学の楽しさも子供達に伝えていくことも大切であると考える。

2　平均

平均という言葉にも、多くの種類があり、それぞれの用途に応じて使い分けられている。特に、代表的なものとしては、相加平均、相乗平均、そして調和平均があげられる。

相加平均は、一般人に最も馴染深いものであり、総和して個数で割るという演算で $\mu = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ と定義される。平均得点、平均体重等でよく用いられる。次に高校数学、特に受験問題によく出題されるものとして相乗平均がある。

会社の成長率が２０１４年は 30 パーセント、２０１５年の成長率が 40 パーセント、２０１６年の成長率が -10 パーセントの場合、この平均成長率は、相乗平均が最も有効で $\mu = \sqrt[3]{1.3 \times 1.4 \times 0.9}$ で計算される。そして、行きの時速８０キロ、帰りの時速が時速７０キロのとき、平均速度は調和平均が有効で、$\mu = \dfrac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{70}}$ で求められるものである。それぞれの平均は利用される例ごとに使い分けられている。

取り扱っているすべての数値が正であるとき、相加平均・相乗平均・調和平均には、

$$\text{調和平均} \quad \leq \text{相乗平均} \quad \leq \text{相加平均} \quad (*)$$

という関係が成り立っている。これらの平均以外にも、その他、多くの平均がある（例：期待値、積分等も平均として扱われることもある)。

相加平均・相乗平均・調和平均は累乗平均

$$M_t = \left(\frac{a^t + b^t}{2} \right)^{\frac{1}{t}}$$

の一部であるということを簡単に述べておく。まず、t を 0 に限りなく近づける極限を考えると、

$$\lim_{t \to 0} M_t = \sqrt{ab}$$

となり、改めて

$$M_0 = \sqrt{ab}$$

と定義すると、

$$M_{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)} \leq M_0 = \sqrt{ab},$$

$$\leq M_1 = \frac{a+b}{2} \leq M_2 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

$$M_0 = \sqrt{ab} \leq M_{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}\right)^3,$$

$$\leq M_{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq M_1 = \frac{a+b}{2}$$

といった一連の不等式を証明できる（(*)を証明することも出来たわけである)。すなわち、相加平均・相乗平均・調和平均は累乗平均 M_t の t がそれぞれ、$t=1, t=0, t=-1$ のときのものであり、先に述べた通り、それぞれが適切な用途に用いられていることがわかる。実際には、この内容は高等学校（理系）かそれ以上の教育機関等でなら十分理解できる内容であるが、教える側の教員は十分理解した上で指導することが数学に興味関心を持たせることにつながるのではと考える。

3　楕円

楕円に関しても簡単に幾つかの解釈を考察しておく。先ず一つ目の解釈としては、2点からの距離の和が一定の軌跡というものである。これが一般的な高等学校で扱われている楕円の定義になっている。他方で、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考えた場合、円の一般化という解釈である。$a=b$ のとき、半径 $r=a(=b)$ の円となることから、円は楕円の特別な場合という考え方がある。このことから、円を縦方向または横方向に拡大または縮小したものと考えることができるのである。楕円という一つの同じグラフの書き方も全く別の二つの方法で描くことが出来、二つの解釈が同居しているということが数学の面白みであるのと同時に、楕円の概念を理解する際の混乱を招く要因にもなり得ることを改めて指導の際には配慮する必要があると考える。

4　三角比・三角関数

三角比・三角関数に関して簡単にそれらの定義から生じる違いと、それらの指導の際に気を付けなければならないことに関して考察する。三角比は、漢字の通り、直角三角形における角度の大きさと辺の長さの比を用いて考察されるものである。具体的には、

$$\sin\theta = \frac{\text{直角三角形の高さ}}{\text{直角三角形の斜辺}}\text{、}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{直角三角形の底辺}}{\text{直角三角形の斜辺}}\text{、}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{直角三角形の高さ}}{\text{直角三角形の底辺}}$$

$$= \text{直角三角形の斜辺の傾き。}$$

三角比は、対象の角度と辺の比の対応ということで定義されているので、遡ると、相似な図形が定義の根本にある。そのため、三角比を学習する前に、相似な図形の復習が必須となる。次に、三角関数に関してで

あるが、対象の角が鋭角（90度未満）の場合、三角比の定義がそのまま適用できることが想像以上に三角関数の理解を困難にしていることが考えられる。具体的には、三角関数では、対象の角度が鈍角（９０度以上）も取り扱うため、三角比のイメージをそのまま引きずっている生徒は混乱してしまうケースがよく見られる。鈍角の場合はすでに直角三角形では書くことも説明することも出来ず、マイナスの数も出てくることも併せて、三角関数の理解を難しくしているようである。三角関数という用語に引き続き含まれている三角というイメージ（三角比のイメージ）をそのまま持ち込むことによる混乱には充分配慮しなくてはならないと考える。この混乱をさけるためにも、三角比との違いを明確にし、一旦リセットする指導が必要になると考える。三角関数は、直交座標系における単位円を用いて次のように説明され指導されている。直交座標系における原点と単位円上の点 P を結んだ線分と x 軸の正の方向とのなす角を θ としたとき、

$$\sin\theta = P \text{ の } y \text{ 座標}$$

$$\cos\theta = P \text{ の } x \text{ 座標}$$

$$\tan\theta = \frac{P \text{ の } y \text{ 座標}}{P \text{ の } x \text{ 座標}}$$

である。そしてこれは、今までとは全く別の概念を学んでいるという意識付けを行い、鋭角の場合は、特別に三角比の考え方とリンクしているという説明をすることで、先に述べた混乱を解消することができると考える。

5　極限とイコール

無限数列 $\{a_n\}_n$ において、n が限りなく大きくなると $\{a_n\}_n$ が一定値 α に限りなく近づくとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

と書く。また、関数 $f(x)$ に関しても同様に、x が限りなく a に a とは異なる値をとりながら近づくとき、関数 $f(x)$ も限りなく一定値 α に近づくとき、

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

と書く。そして両方ともに、α を極限値と呼び、lim の後に"＝"（イコール）を書く。しかし、実際にはこの"＝"（イコール）は本当に全く等しいという意味でこれまで使用されてきた"イコール"とは精確には違う意味を有するのである(どちらかというと近似(≒)という意味に近い)。具体的には「$9.9999\cdots = 10$」を例に、考察してみる。一般人を含め、中学生以下の生徒に対して、この問題を理解させようとする際、下記の様な計算方法で説明すると一定の理解を得られると考えられる。

$x = 9.999$ とおくとき、両辺１０倍して引くと

$$\begin{array}{rr} & 10x = 99.999\cdots \\ - & x = 9.999\cdots \\ \hline & 9x = 90 \end{array}$$

よって、$x = 10$ となり、$9.9999\cdots = 10$ はある程度納得できるように思うが、見た目が全く違うものが同じ(イコール)ということは何か誤魔化されたように感じるのではないだろうか。この全く同じ問題を、今度は高校生（理系）に対して説明する際に

は、9.99⋯ を一旦、第 n 部分和

$$S_n = 9.99\cdots 9 = 9\sum_{k=1}^{n}(0.1)^{k-1}$$
$$= 9\frac{1-(0.1)^n}{1-0.1}$$

の様に公比 0.1 の等比級数の公式により計算し、その極限 S を計算して

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{1-0.1} = 10$$

となる。実際には、$\lim_{n\to\infty} S_n = 10(= S)$ では $\lim_{n\to\infty} S_n$ は $S = 10$ に等しいと言っているのではなく、近づくということを表現しているのである。つまり同じイコール (=) という表記であっても別の意味で同記号を使っているのである。そのため、大学では、この lim の代わりに $\epsilon - \delta$ を用いられる。極限で使われるイコールの意味する、近づくということをより精確に表現する必要が実際にあるということなのである。ここで 0 の扱いについて触れておく。実関数の極限 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ の問題を考えるとき、$\lim_{x\to 0}$ の $x \to 0$ は x が基準のゼロに近づくことを意味すると考えるのが相当であろう。実関数の極限を考えているこの場合は、定義域である変数は x 軸であり、極限を求める際は、実際には右極限、左極限を考え、共に存在しかつ、それが一致した場合に極限が存在し、この場合、0 に収束すると結論付けるわけであるが、定義域である変数のみを抜出して考察すると、それは x 軸上でのみ完結しているため、それ (x 軸) は数直線と考えることが出来るわけであるが、結果として、これは基準のゼロに近づけると考えるのが相当であろう。他方で、極限値である右辺の 0 に着目すると、これは、直交座標系を考えていることから、基準の 0 であると考えられる。ただ、考察中の対象関数が定積分関数であった場合（例えば、$S(x) = \int_0^x f(t)dt$、ここで $f(x) \geq 0$）の場合、囲まれる面積の問題という意味から、無の 0 という意味ととらえることができるであろう。考える対象・設定によって幾つかの解釈が両立するということが数学の良さであるが、一方で理解の困難さも併せ持っていることを十分注意して指導に臨まなくてはならないであろう。

以上、幾つかの例を提示して、算数・数学教育に於ける学年を跨いだ教材に関する指導方法に関して考察してきたわけであるが、算数・数学の難しさ・繋がり・学ぶ楽しさ・学ぶ意義を子供たちに伝えるために、教える側の教員は伝えるべきこと・指導の際の心構えを明確にして臨まなくてはと改めて考えさせられるであろう。

参考文献

1 小寺平治, 大学入試数学のルーツ、現代数学社, 2001 年.
2 何森仁・大谷公人・小沢健一・加藤健治・近藤年示・時永晃, いま学びたい中高数学、東京図書, 2013 年.