陥りやすい過ちから理解を深める教材例

数学科　川谷内　哲二

問題と解答例を示し，その答案を評価することで，これまで犯していた自分の過ちに気付かせ，理解を深めることをねらい，その教材の開発を行った。その取り組みを通して，理解が不十分である生徒が多いことがわかったが，これらの生徒に対して，どの程度理解が深まったかについての調査はまだである。陥りやすい過ちの具体例を通して，理解を深める教材とその取り組みについての報告である。

キーワード：答案の評価　必要十分

1．はじめに

解答を見ても自分が犯している過ちに気づかなかったり，自分の解答のどこが間違っているのがわからなかったりすることがある。必要十分の関係が満たされていない場合に多く見られる。陥りやすい過ちの様々な例を通して，理解を深めることがそのような過ちを減らす1つの方法である。

数学の学習を通して，身に着く態度には2種類ある。全体の流れを把握しようとする態度と，細部において厳密に取り扱おうとする態度である。北陸四県数学教育研究大会の部会講演会で聴いた話である。不定積分 $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ の求め方について，私はそのような解法を初めて知った。その解法は，以下の通りである。

(解) $y=\sqrt{x^2+1}$ とおく。両辺を2乗して x について微分すると，

$y^2=x^2+1$ より，$2y\frac{dy}{dx}=2x$　$\therefore$　$\frac{dy}{x}=\frac{dx}{y}$

加比の理より，$\frac{dx}{y}=\frac{dy+dx}{x+y}$ が成立する。

$$\text{よって，}\int\frac{dx}{y}=\int\frac{d(x+y)}{x+y}$$
$$=\log(x+y)+C$$
$$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$$

この解法では，細部に補足が必要であるが，全体の流れとして，たいへん綺麗である。

それに対して，複素数の相等において，次の設問と証明をどう捉えるとよいか。

「a, bを実数とする。$a+bi=0$ ならば $a=b=0$ を示しなさい。」という設問に，以下の証明を付けた。

(解) $b\neq0$ とすると，$bi=-a$ より，$i=-\frac{a}{b}$
　左辺は虚数，右辺は実数だから矛盾する。
　ゆえに，$b=0$。このとき $a=0$ である。

上の証明は，$a+bi$ を $a+b\times i$ という複素数の計算結果と見て証明している。複素数 $a+bi$ が複素数 $0+0i$ を表すときと捉えれば，「$a+bi=0 \Rightarrow a=b=0$」は証明すべきことではなく，複素数の相等の定義と考えるべきである。このような誤解をなくすために，順序対による複素数の導入があり，厳密に扱うことの重要性を改めて知ることになるのである。

全体の流れ，すなわちストーリーを考えること，細部に注意して厳密に扱うこと，この2点を意識させて問題に取り組ませることによって，数学を考えるときの態度と数学の技能を育てたい。その1つの方法として，陥りやすい過ちの具体的な問題に取り組むことを考えた。それらの具体例とその取り組みについて報告する。

2．陥りやすい過ちの具体例

授業は，自作プリントで行っている。その授業用プリントは，主に定義や定理，公式などの導入・解説，例題，演習問題，コラムなどで構成されている。例題や解説の中に，陥りやすい過ちについて，誤答例をつけて載せている。

以下の設問がその例である。

> 設問　問題「$x=\dfrac{2-2t^2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{4t}{1+t^2}$（t は媒介変数）で表される曲線の方程式を求めなさい。」において，次のような答案を作った。
>
> 〔答案〕$x=\dfrac{2-2t^2}{1+t^2}$, $y=\dfrac{4t}{1+t^2}$ をそれぞれ２乗して加えると，
>
> $$x^2+y^2=\left(\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{4t}{1+t^2}\right)^2$$
> $$=\frac{4-8t^2+4t^4}{(1+t^2)^2}+\frac{16t^2}{(1+t^2)^2}$$
> $$=\frac{4+8t^2+4t^4}{(1+t^2)^2}=4$$
>
> よって，円 $x^2+y^2=4$ である。
>
> この答案についての問題点を指摘しなさい。

このような設問は，これまで行ってきた授業での生徒の回答や，テストの誤答などを参考に作っている。その内容のレベルは様々であるが，今回取り扱った問題は，その中で比較的難しいものが多い。この機会に，生徒がどの程度理解できているか，２・３年生に対して調査を行った。調査内容は，問題に対する解答例を10点満点で採点すると，何点であるかを，❶～❺の中から選ばせて，その理由を書かせた。❶～❺は以下のようにした。

❶　10点　　❷　8～9点　　❸　6～7点

❹　4～5点　❺　3点以下

その結果は次の通りである。

（問題１） $a>0$, $b>0$のとき，$(a+2b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)$ の最小値を求めなさい。

（答案） $a>0$, $b>0$より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$a+2b\geqq 2\sqrt{2ab}\quad\cdots\cdots①,$$
$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}\quad\cdots\cdots②$$

①，②の両辺は，ともに正だから，辺々を掛け合わせて，

$$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)\geqq 2\sqrt{2ab}\cdot 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=8$$

よって，$(a+2b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}\right)$ の最小値は 8 である。

調査対象は２年生（106名）

❶	❷	❸	❹	❺	無回答
25	12	26	15	25	3
24%	11%	25%	14%	24%	3%

問題点は，①，②を同時に成り立たせるa, bが存在しないという点で，最小値は 8 ではないので，答えが間違っている。

正解は，以下のようになる。

$$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=1+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}+4$$
$$=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\text{ より，}$$

相加平均・相乗平均の関係から，

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqq 2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=2$$

この結果，

$$(a+2b)\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=5+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geqq 5+2\cdot 2=9$$

等号成立は，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$，すなわち $a=b$ のとき。

ゆえに，最小値は 9 である。

教員として採点すれば，❹程度であろう。

書かれた内容から，正解と言える生徒は50名（47%）であった。

（問題２） 2次方程式$x^2-2ax+a+6=0$がともに１より大きい２つの解を持つような定数aの値の範囲を，解と係数の関係を利用して求めなさい。

（答案）　与２次方程式の判別式をDとし，２つの解をα，βとする。

題意より，$D\geqq 0$　……①，

$\alpha>1$　……②，$\beta>1$　…③

である。

①より，$D/4=a^2-(a+6)=(a-3)(a+2)\geqq 0$

$\therefore\ a\leqq -2,\ 3\leqq a$　……④

②，③より，$\alpha+\beta>2, \alpha\beta>1$　……⑤　である。

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=2a$，$\alpha\beta=a+6$だから

⑤より，$2a>2$ かつ $a+6>1$

よって，$a>1$　……⑥

④，⑥より，$a\geqq 3$

調査対象は２年生（106名）

❶	❷	❸	❹	❺	無回答
31 29%	15 14%	30 28%	15 14%	8 8%	7 7%

問題点は，「$\alpha>1,\ \beta>1\ \Rightarrow\ \alpha+\beta>2,\ \alpha\beta>1$」は成立するが，その逆

「$\alpha+\beta>2,\ \alpha\beta>1\ \Rightarrow\ \alpha>1,\ \beta>1$」

が成立しない点である。そのため，

$\alpha+\beta>2$，$\alpha\beta>1$を利用して求めても正解は得られない。

正解は，「$\alpha+\beta>2,\ \alpha\beta>1$」を用いて解く代わりに，②，③より，$\alpha-1>0$，$\beta-1>0$として

$(\alpha-1)+(\beta-1)>0$　……⑦

$(\alpha-1)(\beta-1)>0$　……⑧

より，aの範囲を求める。解と係数の関係より，

⑦から　$a>1$　……⑦'

⑧は　$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1>0$と変形できるから，

$(a+6)-2a+1>0$ より $a<7$　……⑧'

④，⑦'，⑧'より，$3\leqq a<7$

教員として採点すれば，❸程度であろう。

書かれた内容から，正解と言える生徒は18名（17%）であった。ただ，「解と係数の関係を利用して」と問題文に書かれているので，「条件$f(1)>0$（$a<7$）が足りないから」を理由に挙げている生徒（14名）は正解としなかった。

（問題３）　円$x^2+y^2=9$と２点A(9, 0)，B(0, 6)がある。点Qがこの円周上を動くとき，△ABQの重心Gの軌跡を求めなさい。

（答案）　点Gの座標を(x, y)，点Qの座標を(s, t)とおく。点Qは円$x^2+y^2=9$上にあるから

$s^2+t^2=9$　……①

点Gは△ABQの重心であるから

$x=\dfrac{9+0+s}{3}=\dfrac{9+s}{3}$，$y=\dfrac{0+6+t}{3}=\dfrac{6+t}{3}$

よって，$s=3x-9$，$t=3y-6$　……②

②を①に代入して　$(3x-9)^2+(3y-6^2=9$

整理すると　$(x-3)^2+(y-2)^2=1$

よって，点Gの軌跡は，点(3, 2)を中心とし，半径が１の円である。

調査対象は２年生（106名），３年理系（75名）

	❶	❷	❸	❹	❺	無回答
２年	43 41%	43 41%	11 10%	4 4%	4 4%	1 1%
３年 理系	29 39%	33 44%	6 8%	4 5%	0 0%	3 5%

問題点は，軌跡を扱うとき，どこまで記述しなければいけないかという点である。

教科書等によれば，軌跡を求める場合について，以下のように記述されている。

一般に，与えられた条件を満たす点Pの軌跡が図形Fであることを示すには，次の２点について証明しなければならない。

1 与えられた条件を満たす点Pは，図形F上にある。

2 逆に，図形F上の任意の点Pは，与えられた条件を満たす。

ただし，$\boxed{2}$が明らかな場合は，省略してもよい。

今回の場合，$\boxed{2}$を省略してもよいかどうかである。

図形とは集合であるから，次の2つの集合C，Dを考える。

$$C=\{(x,\ y)\mid x=\frac{9+s}{3},\ y=\frac{6+t}{3},\ s^2+t^2=9\}$$

$$D=\{(x,\ y)\mid (x-3)^2+(y-2)^2=1\}$$

このとき，$C=D$であることは明らかといってよいであろう。

例えば，次のような問題の場合どうなるだろうか。

(問題3′) 円$x^2+y^2=9$と2点A(6, 4)，B(3, 2) がある。点Qがこの円周上を動くとき，△ABQの重心Gの軌跡を求めなさい。

この場合，答案に出てくる①，②と同じ式ができ，得られる方程式も，$(x-3)^2+(y-2)^2=1$で同じである。先ほどの集合でいえば，$C=D$ということになるが，問題3と問題3′の違いは，問題3は，点Qがどの位置にあっても△ABQが作られるが，問題3′は，3点A，B，Qが一直線上に並んで△ABQが作られない位置が2か所ある。そのため除かれる点が2個できる。このことを「明らか」で済ますことはよくないと考えられるので，問題3においては，「直線ABと円$x^2+y^2=9$は交わらないから，△ABQが常に作られるから，円$(x-3)^2+(y-2)^2=1$上のすべての点は条件を満たす」という逆が成立することの記述が必要であろう。問題集等の解答では，すべてにおいて「逆に，図形…上のすべての点は条件を満たす」と書かれており，単なる決まり文句のようになっている。本当の意味で必要かどうかを見極める力が大切なのだと思われる。

そのような理由から，私が採点するとすれば，❷が適当であると思う。

ただ，この件に関して，日本数学教育学会全国大会の分科会において，参加されている先生方にお聞きしたところ，問題3のように除かれる点がない場合は，その記述は必要ないのではないか。だから減点する必要はなく，逆の場合の$\boxed{2}$を確認させたいのであれば，問題3′のようにすればよいのではないかというご意見をいただきました。評価は，どう指導したいかということと合わせて考えるべきであって，難しい問題である。

(問題4) 方程式$19x+41y=2017$を満たす正の整数x, yの組をすべて求めなさい。

(答案) x, yに値を代入して調べてみた結果，

$(x,\ y)=(104,\ 1)$，$(63,\ 20)$，$(22,\ 39)$

であることがわかった。

よって，求める解は，

$(x,\ y)=(104,\ 1)$，$(63,\ 20)$，$(22,\ 39)$

調査対象は2年生（106名），3年文系（28名）

	❶	❷	❸	❹	❺	無回答
2年	14	20	27	22	18	5
	13%	19%	25%	21%	17%	5%
3年	3	2	9	7	7	0
理系	11%	7%	32%	25%	25%	0%

問題点は，答えさえ合っていれば，それでよいのかという点である。

実際に，テストに出題して，このような答案があった。果たして何点をつけようか頭を悩ませるところである。

数学的には，必要十分でなければいけないので，答えが条件を満たしているか，それ以外に答えがないかという点に尽きる。その意味で，代入すれば条件を満たすかどうかがわかるので問題ないが，その他にないということが示されていない点である。理由として，そのことを挙げていた生徒は，2年生で38名（36%），3年文系で6名（21%）であった。

(問題5) 3つの数$\log_{0.3}3$，$\log_2 3$，$\log_5 3$の大小を，不等号を用いて表しなさい。

(答案) $0.3<2<5$より，底3の対数をとると，

底 >1 だから $\log_3 0.3 < \log_3 2 < \log_3 5$

これらの逆数をとって，

$$\frac{1}{\log_3 0.3} > \frac{1}{\log_3 2} > \frac{1}{\log_3 5}$$

よって，底の変換公式より

$\log_{0.3} 3 > \log_2 3 > \log_5 3$

調査対象は３年文系（28名）

❶	❷	❸	❹	❺	無回答
8	5	6	6	3	0
29%	18%	21%	21%	11%	0%

問題点は，$\log_{0.3} 3$ が負，$\log_2 3$，$\log_5 3$ が正であることに気づくかどうかである。その点に気づいて，そのことを理由に挙げている生徒は６名（21%）と少なく，改めて log は生徒にとって，特に文系生徒にとって難しいのだなと実感した。

（問題６） ３次曲線 $y=x^3+x^2-1$ の接線で原点を通るものの方程式を求めなさい。

（答案） $f(x)=x^3+x^2-1$ とおく。求める接線は，原点を通るから，$y-0=f'(x)(x-0)$ を満たす。

$f'(x)=3x^2+2x$，$y=x^3+x^2-1$ を代入して，

$x^3+x^2-1=(3x^2+2x)x$

$2x^3+x^2+1=0$ より $(x+1)(2x^2-x+1)=0$

$2x^2-x+1=0$ は虚数解を持つから，$x=-1$

よって，接線の方程式は，$f'(-1)=1$ より，$y=x$

調査対象は３年生（103名）

	❶	❷	❸	❹	❺	無回答
３年	8	6	4	4	5	1
文系	29%	21%	14%	14%	18%	4%
３年	13	15	15	9	18	5
理系	17%	20%	20%	12%	24%	7%

問題点は，答えはあっているが，何をしているのかよくわからないという答案である。

原点における接線であれば，$y-0=f'(0)(x-0)$ となるが，$f'(0)$ のところが $f'(x)$ になっている。そもそも，このグラフは原点をとらないので，それも変である。いろいろな意味で訳が分からない。

これは，実際に生徒が作った答案であり，生徒から質問を受けた問題である。ただ，私が直接担当したわけではない。

その質問の内容は，自分の理解が間違っていたことはわかったが，このような計算で答えが出るのは，今回たまたまなのか，それともいつでもこのようにして正解が得られるのかというものであった。

今回の問題では，一般に，次のような解法をとる。

接点を $(t, f(t))$ とおくと，接線の方程式は

$$y-f(t)=f'(t)(x-t)$$

と表される。原点を通るから，$x=0$，$y=0$ を代入して， $0-f(t)=f'(t)(0-t)$ ……①

これを解いて接点の座標を得る。① は，答案の２行目の式

$$y-0=f'(x)(x-0)\ (y=f(x))$$

と同じである。すなわち，ここで得られる式によって，接点の座標が求められるということである。

見方をかえると，(x, y) を接点とすると，接点と通る点（原点）を結ぶ直線の傾きは，接線の傾きと一致する場合と考えると，関係式 $\dfrac{y-0}{x-0}=f'(x)$ を直接導くことが可能である。

訳のわからない解法で，却って生徒を惑わすことになったのかもしれないが，意図としてはその逆で，自分の理解を再確認してもらうことを狙っている。

理由として，「答えは正しいがよくわからない」といった記述が目立ったので，ある程度目標は達成できたと言える。

（問題７） 関数 $y=\sqrt[3]{x}$ を微分しなさい。

（答案） $y'=(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'$

$$=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

よって，$y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

3年理系を調査対象として行ったが，問題にミスがあって意図した内容とは異なるので，結果については省略する。

上の問題で，改めて挙手で確認したところ，多くの生徒はこれで正しいと思っていた。

これと共通する内容で，次の設問についても聞いてみた。

設問1　次の計算から，$i=1$ を得た。i は虚数単位。

$$2i=\sqrt{-4}=(-4)^{\frac{1}{2}}=(-4)^{\frac{2}{4}}=\{(-4)^2\}^{\frac{1}{4}}$$
$$=16^{\frac{1}{4}}=2$$

よって，$i=1$

この計算について，どう思いますか。自分の考えを述べなさい。

生徒のコメントとしては，「おかしいと思うが，どこがおかしいかわからない」という回答が多かった。ここでの問題点は，有理数の指数の定義にある。「m を整数，n を正の整数とするとき，

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

と定義する」と記憶している生徒が多いが，このとき，$a>0$ であるという仮定が抜けてしまっている。すなわち，$(-4)^{\frac{1}{2}}$，$(-4)^{\frac{2}{4}}$ は定義されていないということである。また，定義されていない対象に指数法則 $(a^m)^n=a^{mn}$ を利用していて，これも意味がない。これが $i=1$ という矛盾を引き起こす原因になっている。

このことは，$y=\sqrt[3]{x}$ の微分について，$\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ としてよいのは，$x>0$ のときであって，$x<0$ のときは $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ と表してはいけない。

したがって，$x<0$ のとき，

$$\sqrt[3]{x}=-\sqrt[3]{-x}=-(-x)^{\frac{1}{3}} \text{ より}$$

$$(\sqrt[3]{x})'=\{-(-x)^{\frac{1}{3}}\}'$$
$$=-\frac{1}{3}(-x)^{-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x)^2}}(-x)'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

以上から，$x\neq0$ のとき $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ となる。

微分の計算において，ここまで拘らなくてもよいのかもしれないが，数学は厳密であるという立場に立って，ここまで拘ることも必要であると思う。厳密に拘って，生徒にもそこまで求めたい。

2・3年生ともに，調査問題の最後に，次のような設問を付けた。厳密であるということと同様に，論理的であるということが数学において重要である。生徒が論理的にどの程度思考できるかを調査する目的で行ってみた。

設問2　一方の面には数字が，他方の面にはアルファベットが書いてあるカードが何枚かある。この中から4枚のカードを選んで，片面だけが見えるように並べた。さて，図の4枚のカードについて，

$\boxed{E}$　$\boxed{K}$　$\boxed{4}$　$\boxed{7}$

「もしあるカードの片面に母音が書いてあれば，そのカードのもう一方の面には偶数が書いてある」

という規則が成り立っているかどうかを確かめたい。そのために，裏面に何が書かれているかを必ず見なければいけないカードだけを選びなさい。

（答）　裏面を見なければいけないカード

（　　　　　　　　　　　　）

「認知心理学4　思考」より
（市川 伸一 編　東京大学出版会　全5巻）

この結果は，次の通りである。

	2年		3年		計
	文系	理系	文系	理系	
E	6	20	3	17	46
K		3		1	4
E,K	1			1	2
4	4	5		1	10
E,4	7	16		9	32
K,4	1			2	3
E,K,4					0
7	1	5	6	5	17
E,7	8	22	14	33	77
K,7				1	1
E,K,7		1			1
4,7					0
E,4,7	1		2	1	4
K,4,7				1	1
E,K,4,7				1	1
無回答	1	4	3	2	11
計	30	76	28	75	210

正解は，$\boxed{E}$と$\boxed{7}$で，対偶命題を考えると容易に読み取れるのであるが，それが使えていないので間違える。正答率は37%（77/210）である。現状では，日常の思考の中で，数学が十分に活かせているとは言えない。

3　授業における扱い

授業において，問題と解答例を示し，その答案について生徒に評価させる。まず，10点満点で点数をつけるとすれば何点か，ということで，今回の調査のように，5つの選択肢

❶ 10点　❷ 8〜9点　❸ 6〜7点
❹ 4〜5点　❺ 3点以下

から選んで回答する。そのあとで，どこに問題があるのか，正解はどうなるのか，の順に考えさせ，回答させる。どこに問題があるのか，ほとんどの生徒がわからない場合もあり，グループで考えさせたりしながら進めている。多くの生徒は，このような視点を持っていないので，単に解答を考えたり解答を理解したりするのとは違う視点で取り組めている。答案を評価させることで，答案の書き方の指導ができるので，効果的である。

今回の調査で扱った問題のうち，問題番号1〜4および設問2については，2年生において，すでに1回扱っているのであるが，それでもこういう結果になっているということを考えると，今回の内容はそれだけ難しいということであろう。このような具体例を増やし，授業で取り組むことによって，いろいろな数学的な見方や考え方を養ってほしいものである。

4　おわりに

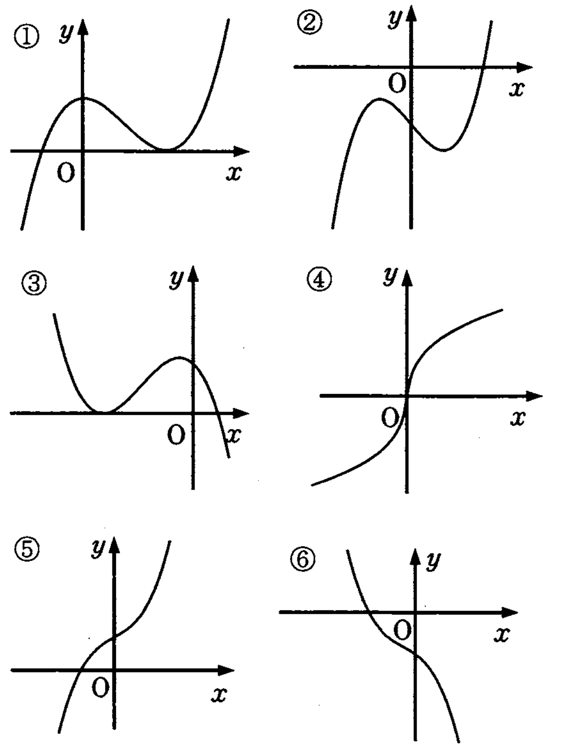
人間の思考過程を読み取ることは難しい。また，指導する側が期待しているような思考をさせることも難しい。問題を解く過程において，自ら気づくことが難しかったり，うやむやのままで済ませてしまっていたりするケースを取り上げて問題化した。それが今回取り上げた問題と解答であり，その誤答例を通して，理解を深めることをねらった。答案に対する生徒の評価では，答案に誤りがあるにもかかわらず正解としている生徒が多い。内容について，十分に理解されていなくて，答えが出ればそれでよしと考えているのではないかと思えてしまう。問題を解決していく過程で，どのようなことを考えながら取り組んでいくことが問題の解決につながるのか，また理解を深めることにつながるのか。答案を評価させる他に，発問の内容によって，新たな思考の方向性を与えたり，理解を深めることにつながったりするはずである。

例えば，「関数 $f(x)=x^3+3ax+b$ （a, b は定数）において……」という問題に対して，生徒はそのグラフをどこまでイメージして問題に取り組んでいるのであろうか。問題を解くに当たり，関数 $y=f(x)$

のグラフが，点$(0, b)$に関して対称であることを意識してほしい。ある授業で，次のような発問をした。

発問

$y=x^3+3ax+b$のグラフとして，考えられるものを次の①～⑥の中から選びなさい。



発問として，「関数$f(x)=x^3+3ax+b$のグラフには，どのような特徴があるか」と直接聞くことも１つの方法であるが，グラフのイメージが全く掴めていない生徒には，問われている意味が伝わらない。先のような発問の方が，具体的で考えやすく，意図していることが伝わりやすいのではないか。生徒に深く考えさせたり，理解を深めたりするための問題と，それに対する設問，授業での展開や発問など，まだまだ諷すべきことがたくさんあるように思われる。

今回，生徒の状況を把握するために行った調査において，そのデータが十分に分析できてない。理解を深めるための教材例と言いながら，どの程度理解が深まったかについての調査も不十分である。今後は，生徒の理解度，理解の深まりの程度を数値化する方法を検討し，今回のテーマに沿った教材の作成と発問や問いについて，さらに研究を進めていきたい。

【参考文献】

「認知心理学４　思考」
（市川 伸一 編　東京大学出版会　全５巻）