

# テンソルくりこみ群によるCP(N-1)モデルの解析

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2018-07-02 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 河内, 比花留, Kawauchi, Hikaru メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/00051419">http://hdl.handle.net/2297/00051419</a>

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



学位論文要旨

# テンソルくりこみ群による $CP(N - 1)$ モデルの解析

Tensor renormalization group analysis of  $CP(N - 1)$  model

金沢大学大学院自然科学研究科 数物科学専攻

河内比花留

## Abstract

In this thesis, the tensor renormalization group (TRG) methods are applied to the two dimensional lattice  $\text{CP}(N - 1)$  model in the presence of the  $\theta$  term. In order to apply the TRG methods, a tensor network representation of the partition function is derived. Using this tensor, we especially analyze the  $\text{CP}(1)$  model. In the case of  $\theta = 0$ , we confirm that the numerical results of the  $\text{CP}(1)$  model are consistent with that of the  $\text{O}(3)$  model which is analyzed by the same method in the weak coupling region  $\beta \gg 0$  and that obtained by the Monte Carlo simulation in a wide range of  $\beta$ . In the case of  $\theta \neq 0$ , the phase structure of the  $\text{CP}(1)$  model is analyzed and we confirm that the result of the TRG is consistent with that of the strong coupling analysis studied by a previous research when  $\beta$  is small. We also investigate the larger  $\beta$  region and find the tendency that the order of the phase transition at  $\theta = \pi$  is the first order for  $\beta \leq 0.3$  and the second order for  $0.4 \leq \beta$ . For more precise analysis, we implement the loop optimization for tensor network renormalization and confirm the effectiveness for the analysis of the  $\text{CP}(1)$  model in the case of  $\theta = 0$ .

## 背景

1983年、F. D. M. Haldane は1次元反強磁性 Heisenberg モデルにおける基底状態と励起状態のエネルギーギャップについて考察し、スピン  $S$  が半奇数 ( $S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ) の場合はエネルギーギャップが存在せず、相関関数はべき的に減衰するが、整数 ( $S = 1, 2, 3, \dots$ ) の場合にはエネルギーギャップが存在し、相関関数が指数関数的に減衰すると主張した。当初、 $S = 1/2$  の場合については、Bethe 仮説による方法からエネルギーギャップが存在しないことが知られていたため、 $S > 1/2$  の場合についても同様の振る舞いをすると考えられていた。また、Haldane の理論は当時の物性物理学分野では見慣れない場の理論のトポロジカル項に基づいたものであった。こうした理由から Haldane の主張は驚きをもって迎えられ、“Haldane 予想”と呼ばれた。しかし、この“Haldane 予想”は今日までに多くの実験的・解析的・数値的な証拠が見つかっており、2016年のノーベル物理学賞受賞に至っている。

Haldane の主張の鍵となるアイデアは、スピン  $S$  が大きいと仮定することで1次元反強磁性 Heisenberg モデルを2次元の  $O(3)$  非線形シグマモデルに書き換えることにある。その作用  $S_{O(3)}$  はユークリッド化された座標  $x = (x_1, x_2)$  を用いて、

$$S_{O(3)} = S_0 - i\theta Q = \int d^2x \left[ \frac{1}{2g} \partial_\mu \phi \cdot \partial_\mu \phi - \frac{i\theta}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu} \phi \cdot (\partial_\mu \phi \times \partial_\nu \phi) \right] \quad (1)$$

と書ける。ここで、 $\phi$  は3成分の単位ベクトルであり、 $g$  と  $\theta$  はスピン  $S$  を用いて、 $g = 2/S, \theta = 2\pi S$  と表される。よって、 $\theta$  項は経路積分に対し  $e^{i2\pi S Q}$  の形で寄与する。つまり、

- スピン  $S$  が整数 ( $S = 1, 2, 3, \dots$ )                       $\theta = 0$               ギャップあり
- スピン  $S$  が半奇数 ( $S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ )               $\theta = \pi$               ギャップなし

の対応があることが分かる。 $\theta = 0$  の場合はトポロジカル項の無い2次元  $O(3)$  非線形シグマモデルとなり、この場合にはエネルギーギャップが存在することが当時既に知られていた。

$\theta = \pi$  の場合がギャップレスであることを示すために、これまで多くのモンテカルル法を用いた格子上の場の理論の数値計算が行われてきた。格子上の場の理論の数値計算では、連続的な時空間を離散的な格子として、時空の体積を有限とすることで、非摂動的に数値計算を行う。一般的に、 $\theta$  項が存在する系にモンテカルル法を適用する場合、ボルツマン因子が実数にならず複素数となるため、そのままでは確率とみなすことができず、モンテカルル法の適用が困難となる。これを「複素作用問題」と呼ぶ。先行研究では、この問題を回避するために、クラスターアルゴリズムや虚数  $\theta$  から解析接続する方法などが用いられた。結果として、 $\theta = \pi$  において2次相転移が見つかり、その臨界指数が  $k = 1$  の Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) モデルのユニバーサルクラスに属することが分かった。

一方、場  $\phi$  に  $\phi = z^* \sigma z$  と代入することで、上の  $O(3)$  モデルの作用を2次元  $CP(N-1)$  モデルの  $N = 2$  の場合 ( $CP(1)$  モデル) の作用に書き換えることができる。ここで、 $z$  は大きさ1の2成分複素スカラー場であり、 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  はパウリ行列である。その  $CP(1)$  モデルの作用  $S_{CP(1)}$  を書くと、

$$S_{CP(1)} = S_0 - i\theta Q = \int d^2x \left[ 2\beta (D_\mu z)^* \cdot (D_\mu z) - i\theta \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} (D_\mu z)^* \cdot (D_\nu z) \right] \quad (2)$$

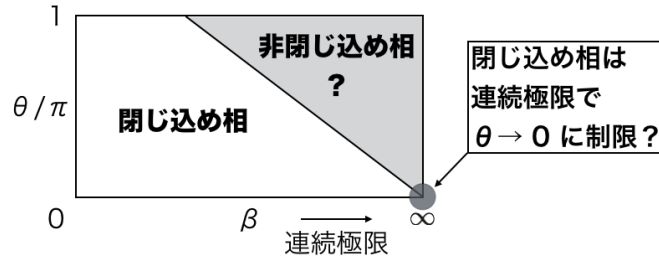


図 1: Schierholz が予想した  $\beta - \theta$  平面における  $CP(N - 1)$  モデルの相構造。

となる。ただし、 $D_\mu$  は  $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$  であり、 $A_\mu$  は補助場で  $A_\mu = iz^* \cdot \partial_\mu z$  と書かれる。また、 $\beta = 1/g$  である。Azcoiti らはこの  $O(3)$  モデルと  $CP(1)$  モデルの等価性に着目し、モンテカルロシミュレーションを用いて  $\theta$  項を含む 2 次元格子  $CP(1)$  モデルの解析を行なった。しかし、そのユニバーサルクラスは WZNW モデルのものとは異なり、臨界指数が結合定数に対して連続的に変化する結果となった。Azcoiti らは複素作用問題を回避するために  $\theta$  を一旦虚数とみなして計算をし、後で実  $\theta$  の領域に解析接続する方法をとった。しかし、得られた結果は数値的問題が原因で  $O(3)$  モデルと異なる結果となっている可能性が彼ら自身によって指摘された。

また、Schierholz は  $CP(N - 1)$  モデルが量子色力学 (Quantum chromodynamics, 以下 QCD) のトイモデルであることに着目し、もし  $CP(N - 1)$  モデルから  $\theta$  が自然に 0 となる機構を見つけることができれば、QCD でも同様の機構により「強い CP 問題」が解決される可能性があるかと主張した。強い CP 問題とは、「QCD を記述するラグランジアンに含まれる任意パラメータ  $\theta$  が実験的に高い精度で 0 に制限されているのはなぜか」という問題であり、素粒子理論における重要な未解決問題の 1 つである。Schierholz は  $CP(N - 1)$  モデルにおける  $\theta$  が 0 となる機構として次のようなシナリオを考えた。図 1 のような、 $CP(N - 1)$  モデルに含まれる結合定数の逆数  $\beta$  とパラメータ  $\theta$  で張られる空間で、 $\theta$  の値によって閉じ込め相と非閉じ込め相に分けられたとする。もしこのような相図が描けたとすれば、連続極限 ( $\beta \rightarrow \infty$ ) を取りつつ、現実の QCD と同じ閉じ込め相であるためには  $\theta$  の値が 0 の場合に制限される可能性があると考えた。Schierholz はモンテカルロ法に基づく方法を用いて  $CP(3)$  モデルにおける非閉じ込め相を発見し、図 1 のような相図を描くことでこのモデルにおいて強い CP 問題が解決される可能性を示した。しかし一方で、Plefka と Samuel や Imachi らは Schierholz と同様の数値解析を行なったが、非閉じ込め相に対して否定的な結果を得ている。

そこで、本研究では複素作用問題の影響を一切受けない手法であるテンソルくりこみ群 (Tensor renormalization group, 以下 TRG) を用いることで  $CP(N - 1)$  モデルの相構造を再解析することを考えた。TRG とは 2 次元の古典スピン系の解析手法として、Levin と Nave によって開発された手法である。以下では、本論文で解析に用いるテンソルネットワークのくりこみ手法について説明する。

## テンソルネットワークのくりこみ手法

テンソルネットワークのくりこみ手法の主な流れを図 2 に示す。手順は大きく分けて 2 つである。まず、計算したい対象のテンソルネットワーク表示を行う。以下では分配関数を計算対象として説明する。

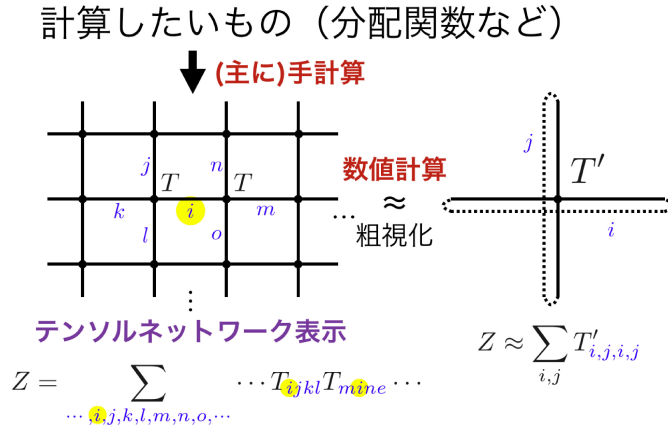


図 2: テンソルネットワークのくりこみ手法の主な流れ。まず、計算したい量 (ここでは分配関数) のテンソルネットワーク表示を行う。そして、テンソルネットワークの粗視化を行うことで分配関数を最終的に 1 つのテンソル  $T'$  で近似的に表すことができる。

ここで各テンソルは各格子点上に定義され、各格子点から伸びる線がテンソルの添え字 (足) に対応する。また、隣り合うテンソルが共有している足に関しては縮約 (和) を取る。一度テンソルネットワーク表示が得られると、全てのテンソル間の共有されている添え字の縮約を取ることができれば分配関数を厳密に計算することができる。しかし、その計算時間は、テンソルの足の自由度を  $\chi$ 、テンソルの数を  $V$  とすると、2次元では  $\chi^{2V}$  で増えてしまうためコンピュータを用いても計算することは困難となる。そこで次の手順として、テンソルネットワークの粗視化を行い、近似的にテンソルの数を少なくすることを考える。最終的にテンソルの数を 1 つまで粗視化することで、周期的境界条件の場合、図 2 のように残った足の縮約を取ることによって分配関数を近似的に計算することができる。本研究では、テンソルネットワークの粗視化手法として、TRG とループ最適化を用いたテンソルネットワークくりこみ (Loop optimization for tensor network renormalization, 以下 Loop-TNR) を用いた。

TRG は、図 3 のように、テンソルの分解と縮約という 2 つのステップからなる。テンソルの分解によりテンソルの数は 2 倍になる (図の中央)、テンソルの縮約によりテンソルの数は  $1/4$  倍になるので、合わせて  $1/2$  倍になる。ただし、ここでテンソル  $T$  を行列とみなして特異値分解した時に現れる特異値のうち、小さい特異値を捨てることで近似的に  $T'$  を表す。この取り込む特異値の数は、各くりこみステップで  $D_{\text{cut}}$  に固定することにする。また、 $D_{\text{cut}}$  はくりこまれたテンソル  $T'$  の足の自由度に対応する。 $D_{\text{cut}}$  を増やすことで計算精度を上げることができるが、それに伴い計算時間も増えることになる。くりこまれたテンソル  $T'$  を再び  $T$  とみなして同じ操作を何度も繰り返すことで、多くのテンソルからなるネットワークを最終的に 1 つのテンソルまで近似することができる。  $n$  回くりこんだテンソルを  $T^{(n)}$  とすると、周期的境界条件の場合、分配関数  $Z$  は近似的に

$$Z \simeq \sum_{i,j}^{D_{\text{cut}}} T_{ijij}^{(n)} \quad (3)$$

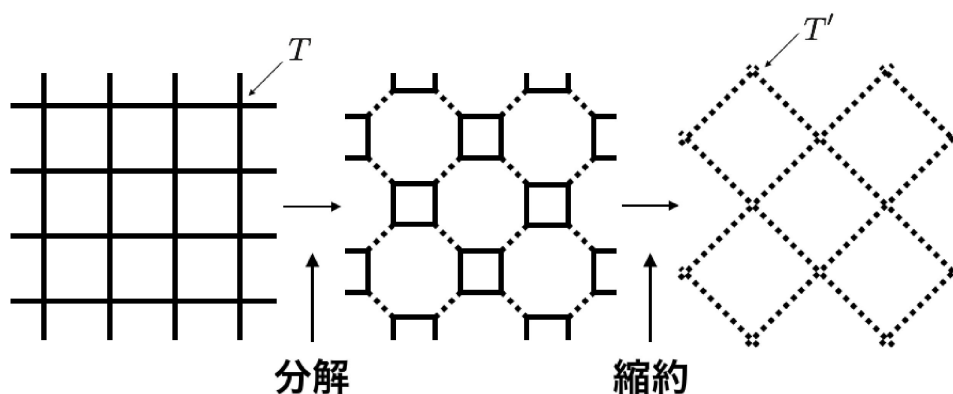


図 3: TRG を構成する 2 つのステップ。TRG は「テンソルの分解」と「テンソルの縮約」から成る。

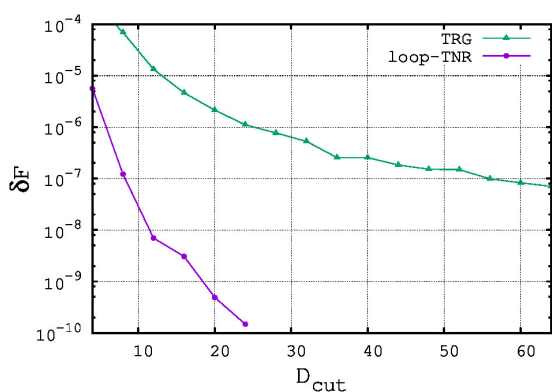


図 4: TRG と Loop-TNR による臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数の計算結果。縦軸は自由エネルギーの厳密解との相対誤差  $\delta F$ 、横軸はテンソルの足の自由度  $D_{\text{cut}}$  である。

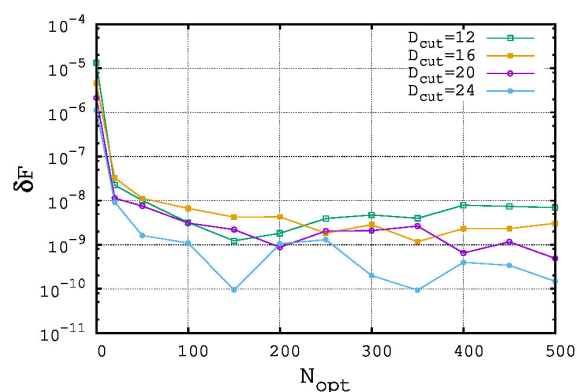


図 5: ループ最適化を用いて計算した臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数の計算結果。縦軸は自由エネルギーの厳密解との相対誤差  $\delta F$ 、横軸は線型方程式を解いた回数  $N_{\text{opt}}$  である。

と計算することができる。

ここで図 4 に、臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数について、TRG を用いて計算した結果の厳密解に対する相対誤差を示す。ただしここで、スピンの数は  $2^{39}$  として計算を行った。この体積では、倍精度で分配関数の体積依存性は見られなかった。TRG における近似の誤差は  $D_{\text{cut}}$  を増やすことで小さくなるため、分配関数と厳密解の差も  $D_{\text{cut}}$  を増やすことで小さくなっている。しかし、図 4 から分かるように  $D_{\text{cut}}$  を増やすにつれて誤差の減少が緩やかになっている。実際、TRG のアルゴリズムでは臨界領域における計算精度がそれ以外の領域と比べて悪くなってしまいうことが知られている。

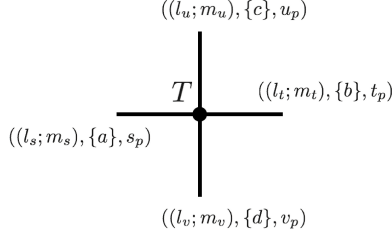


図 6: CP( $N - 1$ ) モデルのテンソルネットワーク表示。

TRG が臨界点近傍で誤差が大きくなってしまいう理由として、Gu と Wen は Corner Double-Line テンソルと呼ばれるテンソルで表されるネットワークの近距離相関を TRG では適切にくりこむことができないことが原因であると主張した。この問題を解決するために、Evenbly と Vidal は臨界点近傍でも近距離相関を適切にくりこむことができる手法として新たにテンソルネットワークくりこみ (Tensor network renormalization, 以下 TNR) を開発した。また、Yang らはループ最適化という処理を施すことで TNR と同等の性能を示す手法である Loop-TNR を開発した。ループ最適化では、くりこみの誤差の大きさを表す指標として損失関数  $\delta_{\text{Loop-TNR}}$  を定義し、テンソルネットワークから作られる線型方程式を繰り返し解くことで  $\delta_{\text{Loop-TNR}}$  を小さくする。この線型方程式を解いた回数を  $N_{\text{opt}}$  とする。Loop-TNR では、TRG と同様に  $D_{\text{cut}}$  を増やすことで近似の精度が上がるが、さらに、 $N_{\text{opt}}$  を増やしループ最適化の処理を行うことで、より近似の精度を上げることができる。

ここで図 5 に、臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数について、Loop-TNR を用いて計算した結果の厳密解に対する相対誤差を示す。スピンの数は  $2^{39}$  とした。  $N_{\text{opt}}$  を増やすことで近似の精度が上がっているのが分かる。十分収束していると考えられる  $N_{\text{opt}} = 500$  で固定して、Loop-TNR で分配関数を計算した結果を図 4 に示す。Loop-TNR を用いることで、  $D_{\text{cut}}$  を増やすにつれて相対誤差の減少が緩やかになるという TRG の欠点を解消できたことが分かる。

## 2 次元格子 CP( $N - 1$ ) モデルのテンソルネットワーク表示

テンソルネットワークのくりこみ手法を用いて 2 次元 CP( $N - 1$ ) モデルを解析するために、このモデルの分配関数  $Z$  を格子化し、そのテンソルネットワーク表示を求めた。ここで我々は、character 展開と character-like 展開を用いることでボルツマン因子を新しい整数で展開し、場の自由度に関する積分をすることで解析的にテンソルネットワーク表示を得た。このテンソル  $T$  は図 6 のように描ける。ここで、テンソルの足  $((l_t; m_t), \{b\}, t_p)$  に注目すると、  $l_t, m_t, \{b\}, t_p$  という 4 種類の添え字がある。最初の添え字  $l_t$  と  $m_t$  は非負の整数である。また、  $\{b\}$  は  $\{b_1, b_2, \dots, b_{l_t+m_t}\}$  であり、全て  $b_n = 1, \dots, N$  という値を取る。最後の  $t_p$  は整数である。テンソルは、これらの添え字を含む部分を抜き出して書くと、

$$\begin{aligned}
 T_{stuv} &\equiv T_{((l_s; m_s), \{a\}, s_p)((l_t; m_t), \{b\}, t_p)((l_u; m_u), \{c\}, u_p)((l_v; m_v), \{d\}, v_p)} \\
 &\propto \sqrt{I_{N-1+l_t+m_t}(2N\beta)} \times \frac{2\sin \frac{\theta+2\pi t_p}{2}}{\theta + 2\pi t_p}.
 \end{aligned} \tag{4}$$



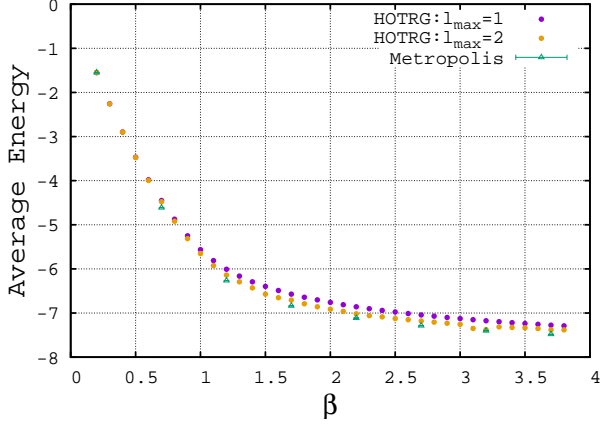


図 7: HOTRG とメトロポリス法によって計算した  $4 \times 4$  格子での CP(1) モデルの平均エネルギー。横軸は結合定数の逆数  $\beta$  である。 $l_{\max}$  が増えるにつれて HOTRG の結果がメトロポリス法による結果に近づいているのが分かる。

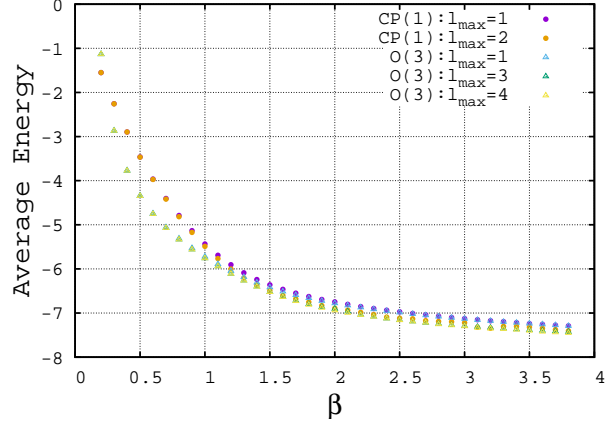


図 8: HOTRG によって計算した CP(1) モデルと O(3) モデルの  $2^{20} \times 2^{20}$  格子での平均エネルギー。横軸は結合定数の逆数  $\beta$  である。連続極限 ( $\beta \rightarrow \infty$ ) に近づくにつれて 2 つの方法による結果も近づいているのが分かる。

のようになる。テンソルの各足は整数の値を取り、無限の自由度を持つので、このテンソルを数値計算に用いるためには有限の自由度で打ち切る必要がある。式 (4) 中の  $\beta$  に依存する関数  $I_{N-1+l_s+m_s}(2N\beta)$  は第 1 種変形ベッセル関数であり、添え字  $l_s, m_s$  が大きくなるほど小さくなる関数である。また、式 (4) 中の  $\theta$  に依存する項も  $|s_p|$  が大きくなるほど小さくなる。テンソルの他の足の添え字についても同様である。よって、実際の数値計算では、テンソル  $T$  を

$$T = T'(\beta) \otimes T''(\theta) \quad (5)$$

と分けた時、テンソル  $T'(\beta)$  の足の自由度を  $D_\beta$ 、テンソル  $T''(\theta)$  の足の自由度を  $D_\theta$  で打ち切ることとする。この時、初期テンソル  $T$  の足の自由度は  $D_{\text{cut}} = D_\beta \times D_\theta$  となる。また、各くりこみステップにおけるくりこまれたテンソルの足の自由度も初期テンソルと同じ  $D_{\text{cut}}$  で固定することとした。このテンソルネットワーク表示を用いた解析結果を以下に示す。

### $\theta = 0$ の時の 2 次元格子 CP(1) モデルの数値解析

まず、 $N = 2, \theta = 0$  の場合について、テンソルネットワークのくりこみ手法により CP(1) モデルの分配関数を計算した結果を示す。 $\theta = 0$  の場合、 $\theta$  に依存するテンソル  $T''(\theta)$  は 1 となり、また、添え字  $l$  と  $m$  は等しくなる。ある  $l = m = l_{\max}$  で打ち切る時、テンソルの足の自由度は  $D_{\text{cut}} = (4^{l_{\max}+1} - 1)/3$  となる。このテンソルに対し、高次特異値分解を用いたくりこみ手法である高次テンソルくりこみ群 (Higher

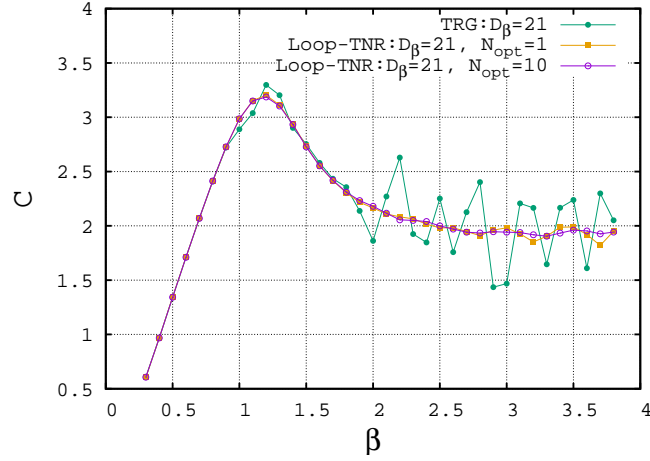


図 9: TRG と Loop-TNR を用いて計算した CP(1) モデルの  $2^{20} \times 2^{20}$  格子での比熱の計算結果。縦軸は比熱、横軸は結合定数の逆数  $\beta$  である。

order TRG, 以下 HOTRG) を適用することで CP(1) モデルの平均エネルギーを計算した。図 7 は、 $4 \times 4$  格子での CP(1) モデルの平均エネルギーを HOTRG とモンテカルロ法の 2 つの方法を用いて計算した結果である。平均エネルギー  $E$  は

$$E = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (6)$$

で定義される。ここで  $L$  は 1 辺の格子サイズである。HOTRG では分配関数を計算し、 $\beta$  に関する数値微分で  $E$  を計算した。モンテカルロ法ではメトロポリスアルゴリズムを使い、各  $\beta$  に関して熱平衡後の  $10^6$  配位を用いて解析した。統計誤差はジャックナイフ法を用いて見積もり、自己相関時間は  $\beta = 0 - 0.8$  の範囲で  $\tau_{\text{int}} = 1 - 65$  となった。図 7 より、HOTRG の結果は  $l_{\text{max}}$  を増やすとモンテカルロによる結果に近づくことが分かる。

また、図 8 に HOTRG を用いて解析した CP(1) モデルと O(3) モデルの結果を示す。格子サイズは  $2^{20} \times 2^{20}$  である。O(3) モデルのテンソルネットワーク表示は Unmuth-Yockey らの結果を用いた。CP(1) モデルと O(3) モデルは連続極限で、それぞれの平均エネルギー  $E_{\text{O}(3)}$  と  $E_{\text{CP}(1)}$  の間に

$$\frac{1}{\beta} + E_{\text{O}(3)}(\beta) = E_{\text{CP}(1)}(\beta) + 6 \quad (7)$$

の関係がある。この関係を用いて O(3) モデルの結果  $E_{\text{O}(3)}$  を CP(1) モデルの結果  $E_{\text{CP}(1)}(\beta)$  に重ねて表示している。連続極限 ( $\beta \rightarrow \infty$ ) に近づくにつれて 2 つの結果も近づいているのが分かる。

次に、TRG と Loop-TNR を用いて比熱を計算した結果を示す。ここで比熱は

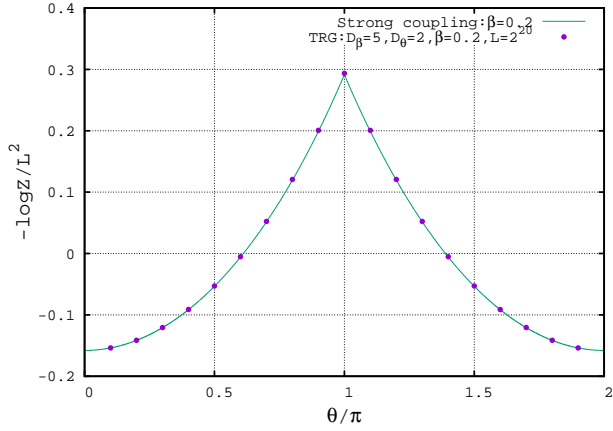


図 10:  $\beta = 0.2$  での  $\theta$  項を含む CP(1) モデルの分配関数を TRG と強結合展開を用いて計算した結果。横軸は  $\theta/\pi$  である。

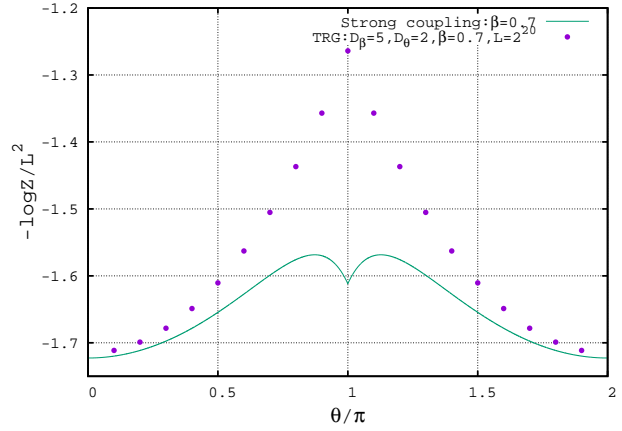


図 11:  $\beta = 0.7$  での  $\theta$  項を含む CP(1) モデルの分配関数を TRG と強結合展開を用いて計算した結果。横軸は  $\theta/\pi$  である。

$$C = \frac{\beta^2}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z \quad (8)$$

で定義される。図9は数値微分を用いて比熱  $C$  を計算した結果である。テンソルの足の自由度は  $D_\beta = 21$ 、1 辺の格子サイズは  $L = 2^{20}$  である。Loop-TNR におけるループ最適化の回数は  $N_{\text{opt}} = 1$  または 10 とした。分配関数の誤差が大きい場合、 $\beta$  の数値微分により生じる揺らぎが大きくなる。図9から分かるように、 $N_{\text{opt}}$  が大きくなるにつれて揺らぎが小さくなっている。

### $\theta \neq 0$ の時の 2 次元格子 CP(1) モデルの解析結果

$\theta \neq 0$  の場合について、図 10 と図 11 に CP(1) モデルの分配関数を TRG と強結合展開を用いて計算した結果を示す。1 辺の格子サイズは  $L = 2^{20}$  である。TRG では  $D_\beta = 5, D_\theta = 2$  として計算している。強結合展開の結果は Plefka と Samuel が求めた分配関数の式を用いた。図 10 から、 $\beta = 0.2$  では 2 つの方法による解析結果が一致しているのが分かる。よって複素作用問題が生じる系に対して TRG による解析が正しく機能していることがわかる。一方で図 11 の  $\beta = 0.7$  の結果では、2 つの方法による解析結果にずれが生じているのが分かる。このずれは、強結合展開による方法が  $\beta$  が小さい領域でのみ有効な手法であることから生じていると考えられる。強結合展開を用いた先行研究では、自由エネルギーの最大値を相転移点とし、 $\beta - \theta$  平面を閉じ込め相と非閉じ込め相に分けた。図 11 は非閉じ込め相と見られる領域があり、Schierholz のモンテカルロ法を用いて解析した結果を支持している。しかし、この  $\beta$  の領域では、強結合展開による解析が有効ではない可能性があるため、非閉じ込め相の存在の有無につい

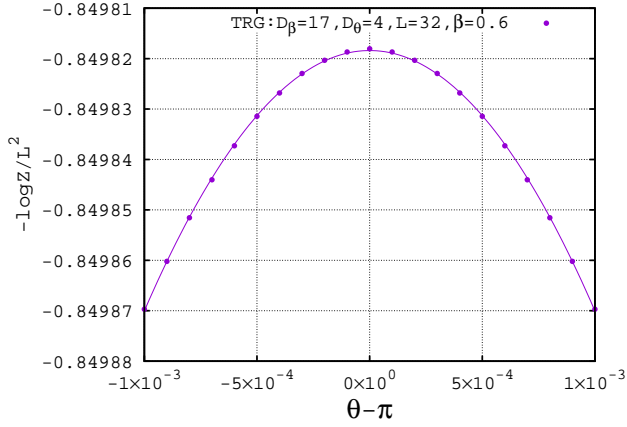


図 12:  $\beta = 0.6, L = 32$  での TRG を用いた CP(1) モデルの分配関数の計算結果。横軸は  $\theta - \pi$  とした。

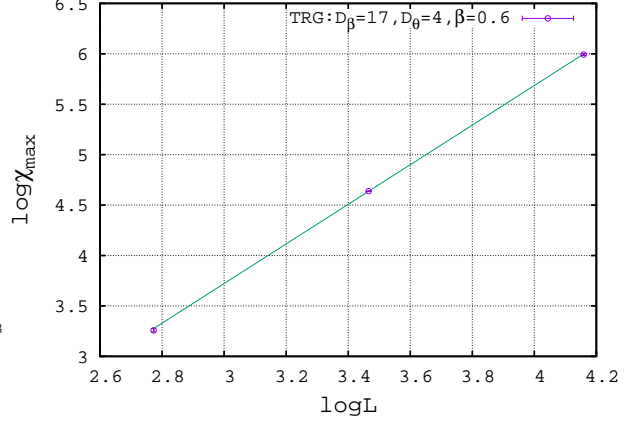


図 13:  $\beta = 0.6$  での  $\chi_{\max}$  の体積依存性。

てはさらなる調査が必要である。本研究で TRG を用いて解析した領域  $0 \leq \beta \leq 0.8$  では非閉じ込め相は見つからなかった。

次に、 $\theta = \pi$  での相転移の次数を調べるために  $\theta = \pi$  近傍の解析を行った。図 12 に  $\beta = 0.6$  の時の  $\theta = \pi$  近傍での結果を示す。1 辺の格子サイズは  $L = 32$  である。ここで、 $D_\beta = 17, D_\theta = 4$  として計算している。図の点は TRG を用いて  $-\frac{1}{L^2} \log Z$  を計算した結果であり、直線はそのフィットである。ここで相転移の次数を調べるために、トポロジカル感受率を

$$\chi(\theta) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \log Z}{\partial \theta^2}. \quad (9)$$

と定義する。 $\chi(\theta)$  の最大値  $\chi_{\max}$  は

$$\chi_{\max} = \chi(\theta = \pi) \quad (10)$$

となり、相転移の次数は、 $\chi_{\max}$  の体積依存性を

$$\chi_{\max} \propto L^b \quad (11)$$

とした時の指数  $b$  から決定できる。 $\beta = 0.6$  の時の  $\chi_{\max}$  の体積依存性を図 13 に示す。この図の直線の傾きから指数  $b$  を得ることができる。

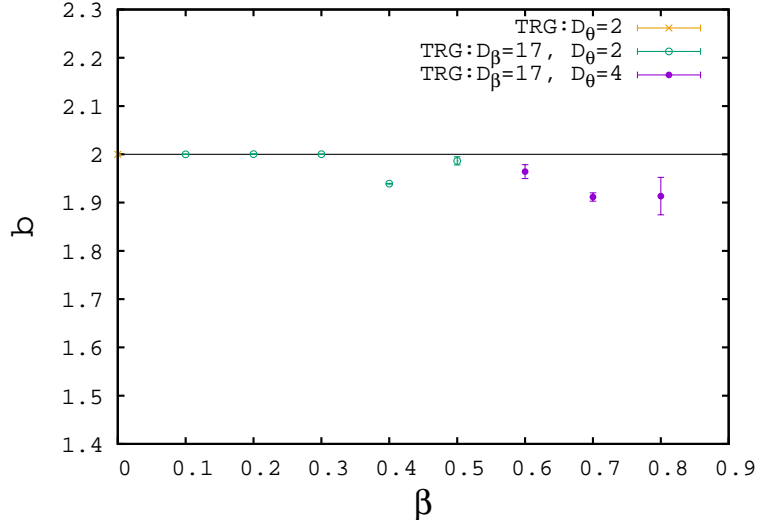


図 14: 各  $\beta$  における式 (11) の指数  $b$ 。

以上の指数  $b$  を求める手順を  $\beta = 0.0 \sim 0.8$  で 0.1 刻みで行なった。各  $\beta$  で  $b$  を計算した結果を図 14 に示す。 $0 \leq \beta \leq 0.3$  では  $b$  はほぼ 2 となり、これは 1 次相転移を意味する。一方、 $0.4 \leq \beta \leq 0.8$  では、 $b$  は 2 より小さくなり、2 次相転移を意味する。この  $\beta$  が大きくなるにつれて 2 次相転移となり、その指数が変化する振る舞いは、Azcoiti らによる解析と似た結果となっている。ただし、TRG による解析はテンソルの足の自由度の打ち切り  $D_{\text{cut}} = D_\beta \times D_\theta$  から生じる系統誤差を含んでいるため  $D_{\text{cut}}$  を増やした時の収束を調べる必要がある。

## 展望

本論文では、 $\theta$  項を含む 2 次元格子 CP( $N-1$ ) モデルのテンソルネットワーク表示を行い、テンソルネットワークのくりこみ手法を用いることで、2 次元格子 CP(1) モデルの解析をした。今後の展望としては以下のことが挙げられる。

- 1)  $D_{\text{cut}}$  を増やし、TRG の計算精度を向上させる。
- 2)  $\theta \simeq \pi$  の相転移点近傍の解析をより高精度で行うために Loop-TNR を用いた解析を行う。
- 3) より大きな  $\beta$  や  $N$  での解析を行う。

1) と 3) の大きな  $D_{\text{cut}}$  や  $N$  での解析は計算コストが非常に増えてしまうため、より低コストなくりこみ手法の開発も視野に入れる必要がある。

## 学位論文審査報告書（甲）

## 1. 学位論文題目（外国語の場合は和訳を付けること。）

テンソルくりこみ群による CP(N-1)モデルの解析

## 2. 論文提出者 (1) 所 属 数物科学 専攻

(2) 氏 名 河内 比花留

## 3. 審査結果の要旨（600～650 字）

場の理論における非摂動計算にはモンテカルロ法が広く用いられてきた。しかし、モデルのボルツマン因子が複素数になった場合その適応は非自明である。これは一般に符号問題と呼ばれ、モンテカルロ法の弱点の一つである。一方、近年提案されたテンソルくりこみ群(TRG)は符号問題とは無縁であり、低次元ではその有用性を示す結果が数多く報告されている。その手法を $\theta$ 項を含む CP(N-1)モデルに適応するというのが本論文の趣旨である。このモデルは $\theta$ 項があるため符号問題を抱えており、モンテカルロ法を用いた先行研究の結果が妥当かどうかにも疑問が残っている。

本論文では、まず上記モデルのテンソルネットワーク表示を導出し、次に、 $\theta$ 項なしの場合の TRG 数値計算を行い、モンテカルロ法の結果と比較し方法論としての検証を行っている。そして、 $\theta$ 項を含む TRG 計算を行い、強結合展開の結果との比較による検証を経て、モデルの相構造を調べた。その結果、先行研究の示唆する通りの相構造を得た。この結果はまだ最終的なものではなく、系統誤差を検証する課題はあるものの、符号問題のないアプローチによる最初の結果という重要な意味を持っている。この論文の計算はオリジナルであり独創性にはまったく問題はない。本博士論文の内容は申請者の広い学識を示し、共同研究ではあるが申請者がすべての面で主導しており、学位論文として十分であると認められるものである。

## 4. 審査結果 (1) 判定 (いずれかに○印) 合格 ・ 不合格

(2) 授与学位 博士 ( 理学 )