

博士論文

テンソルくりこみ群による $CP(N-1)$ モデルの解析

金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻

学籍番号 1524012002
氏名 河内 比花留
主任指導教員名 青木 健一
提出年月 平成30年1月

目次

第 1 章 序論	1
第 2 章 Haldane 現象	3
2.1 Marshall-Lieb-Mattis の定理	4
2.2 Lieb-Shultz-Mattis の定理	7
2.3 2次元 O(3) 非線形シグマモデル	11
第 3 章 テンソルネットワークのくりこみ手法	12
3.1 テンソルくりこみ群	12
3.2 ループ最適化によるテンソルネットワークくりこみ	16
第 4 章 2次元格子 CP(N-1) モデルの解析	27
4.1 2次元 CP(N-1) モデルのテンソルネットワーク表示	27
4.2 CP(1) モデルの数値解析 ($\theta = 0$ の場合)	38
4.3 CP(1) モデルの数値解析 ($\theta \neq 0$ の場合)	42
第 5 章 まとめと展望	59
付録 A 1次元反強磁性 Heisenberg モデルの有効理論	61
A.1 コヒーレント表示と経路積分	61
A.2 2次元 O(3) 非線形シグマモデル	64
付録 B Character-like 展開の各項の導出	69
B.1 $(l; m) = (l; 0)$ の場合	70
B.2 $(l; m) = (l; 1)$ の場合	72
B.3 $(l; m) = (l; 2)$ の場合	75
B.4 $(l; m) = (l; 3)$ の場合	80
付録 C f から F, \tilde{F} への分解	101
付録 D 高次テンソルくりこみ群	106
付録 E メトロポリス法による 2次元 CP(1) モデルの解析	113

参考文献

120

謝辭

124

第1章 序論

1983年、F. D. M. Haldane は1次元反強磁性 Heisenberg モデルにおける基底状態と励起状態のエネルギーギャップについて考察し、スピン S が半奇数 ($S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$) の場合はエネルギーギャップが存在せず、相関関数はべき的に減衰するが、整数 ($S = 1, 2, 3, \dots$) の場合にはエネルギーギャップが存在し、相関関数が指数関数的に減衰すると主張した [1, 2, 3, 4]。当初、 $S = 1/2$ の場合については、Bethe 仮説による方法 [5] からエネルギーギャップが存在しないことが知られていたため、 $S > 1/2$ の場合についても同様の振る舞いをすると考えられていた。また、Haldane の理論は当時の物性物理学分野では見慣れなかった場の理論のトポロジカル項に基づいたものであった。こうした理由から Haldane の主張は驚きをもって迎えられ、“Haldane 予想”と呼ばれた。しかし、この“Haldane 予想”は今日までに多くの実験的 [6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]・解析的 [15, 16]・数值的 [17, 18, 19, 20] な証拠が見つかり、2016年のノーベル物理学賞受賞に至っている [21]。

Haldane の主張の鍵となるアイデアは、スピン S が大きいと仮定することで1次元反強磁性 Heisenberg モデルを2次元の $O(3)$ 非線形シグマモデルに書き換えることにある。この書き換えにより作用にトポロジカル θ 項が現れ、スピン S とパラメータ θ の間に $\theta = 2\pi S$ の関係があることが分かる。よって、スピン S が半奇数 ($S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$) の場合が $\theta = \pi$ に対応し、整数 ($S = 1, 2, 3, \dots$) の場合が $\theta = 0$ に対応することになる。 $\theta = 0$ の場合はトポロジカル項の無い2次元 $O(3)$ 非線形シグマモデルとなり、この場合にはエネルギーギャップが存在することが知られている [22]。

$\theta = \pi$ の場合では、ギャップレスであることを示すために、これまでモンテカルロシミュレーションを用いた多くの格子上の場の理論に基づく計算が行われてきた [23, 24, 25, 26, 27, 28]。格子上の場の理論の計算では、連続的な時空間を離散的な格子として、時空の体積を有限とすることで、非摂動的に数値計算を行う。一般的に、 θ 項が存在する系にモンテカルロ法を適用する場合、ボルツマン因子が実数にならず複素数となるため、そのままでは確率とみなすことができず、モンテカルロ法の適用が困難となる。この「複素作用問題」に対し、上述の先行研究ではクラスターアルゴリズムや虚数 θ から解析接続する方法などが用いられた。結果として、 $\theta = \pi$ において2次相転移が見つかり、その臨界指数が $k = 1$ の Wess-Zumino-Novikov-Witten (WZNW) モデル [29, 30, 31] のユニバーサルクラス [32, 33] に属することが分かった。一方、Azcoiti らは2次元 $CP(N-1)$ モデルの $N = 2$ の場合 ($CP(1)$ モデル) が連続極限で $O(3)$ モデルと等価であることに着目し、モンテカルロシミュレーションを用いて θ 項を含む2次元格子 $CP(1)$ モデルの解析を行なった [34]。しかし、そのユニバーサルクラスは WZNW モデルのものとは異なり、臨界指数が結合定数に対して連続的に変化する結果となった。Azcoiti らは複素作用問題を回避するために θ を一旦虚数とみなして計算をし、後で実 θ の領域に解析接続する方法をとった。しかし、得られた結果は数値的問題が原因で $O(3)$ モデルと異なる結果となっている可能性が彼ら自身によって指摘された [27]。また、彼らとは別に Lajkó らによって同様の解析が行われたが、2次相転移となる

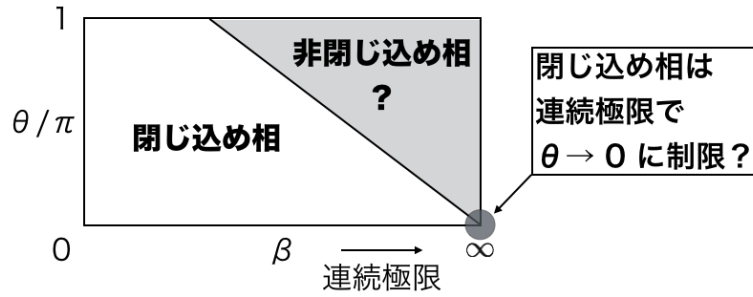


図 1.1: Schierholz が予想した $\beta - \theta$ 平面における $CP(N - 1)$ モデルの相構造。

β の領域にずれが見られた [35]。

また、Schierholz は $CP(N - 1)$ モデルが量子色力学 (Quantum chromodynamics, 以下 QCD) のトイモデルであることに着目し、もし $CP(N - 1)$ モデルから θ が自然に 0 となる機構を見つけることができれば、QCD でも同様の機構により「強い CP 問題」が解決される可能性があるとして主張した [38]。強い CP 問題とは、「QCD を記述するラグランジアンに含まれる任意パラメータ θ が実験的に高い精度で 0 に制限されているのはなぜか」[36, 37] という問題であり、素粒子理論における重要な未解決問題の一つである。Schierholz は $CP(N - 1)$ モデルにおける θ が 0 となる機構として次のようなシナリオを考えた [39]。図 1.1 のような、 $CP(N - 1)$ モデルに含まれる結合定数の逆数 β とパラメータ θ で張られる空間で、 θ の値によって閉じ込め相と非閉じ込め相に分けられたとする。もしこのような相図が描けたとすれば、連続極限 ($\beta \rightarrow \infty$) を取りつつ、現実の QCD と同じ閉じ込め相であるためには θ の値が 0 の場合に制限される可能性があると考えた。Schierholz はモンテカルロ法に基づく方法を用いて $CP(3)$ モデルにおける非閉じ込め相を発見し、図 1.1 のような相図を描くことでこのモデルにおいて強い CP 問題が解決される可能性を示した。しかし一方で、Plefka と Samuel[40]、Imachi ら [41] は Schierholz と同様の数値解析を行なったが、非閉じ込め相に対して否定的な結果を得ている。

そこで、本研究では複素作用問題の影響を一切受けない手法であるテンソルくりこみ群 [42] を用いることで $CP(N - 1)$ モデルの相構造を再解析することを考えた。テンソルくりこみ群とは 2 次元の古典スピンの解析手法として、Levin と Nave によって開発された手法である。

本論文は次のように構成される。まず、次章では、Haldane 現象について解説する。3 章では、テンソルくりこみ群について説明し、さらにそれを発展させた手法であるループ最適化を用いたテンソルネットワークくりこみ [43] についても説明する。4 章では、 $CP(N - 1)$ モデルの分配関数のテンソルネットワーク表示を求めた後、 $CP(1)$ モデルにテンソルネットワークのくりこみ手法を適用した結果を示す。5 章では、まとめと今後の展望についてを述べる。

第2章 Haldane現象

本章で扱う1次元 Heisenberg モデルのハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{\langle ij \rangle} J \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j \quad (2.1)$$

と書かれる。ここで、 $\langle ij \rangle$ は最近接相互作用をしているスピンの対を表す。スピン $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}^x, \hat{S}^y, \hat{S}^z)$ は

$$[\hat{S}^a, \hat{S}^b] = i\epsilon^{abc} \hat{S}^c, \quad \hat{\mathbf{S}}^2 = S(S+1) \quad (2.2)$$

を満たし、 ϵ^{abc} は Levi-Civita の完全反対称テンソルで $\epsilon^{xyz} = 1$ である。ここで S はスピンの大きさである。

仮にもし $\hat{\mathbf{S}}_i$ が古典スピンだとすると、 \hat{H} の基底状態は、強磁性 ($J < 0$) の場合は全てのスピンの平行に、反強磁性 ($J > 0$) の場合は全ての隣り合ったスピンの反平行の状態になる。この古典反強磁性の時の基底状態は Néel 状態と呼ばれる。ここで昇降演算子

$$\hat{S}^\pm = \hat{S}^x \pm i\hat{S}^y \quad (2.3)$$

を用いると、ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + \hat{S}_j^- \hat{S}_{j+1}^+) + \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right\} \quad (2.4)$$

と書ける。この形を量子系の場合に用いて考えると、強磁性の場合は上と同じ状態が基底状態となることが分かる。一方で、反強磁性の場合は、 \hat{H} が作用した時に隣り合うスピンの上げ下げをしてしまうため、Néel 状態が基底状態とならないことが分かる。 $S = 1/2$ 反強磁性の場合は Bethe 仮説を用いた方法 [5] によって調べられた。それにより、基底状態は唯一つであり、基底エネルギーの上にエネルギーギャップが存在せず、その相関関数がべき的に減衰することが分かった。この $S = 1/2$ の場合の結果から、 $S > 1/2$ の場合についても同様の振る舞いをすると考えるのが自然である。

しかし、第1章でも述べたように、Haldane は1次元反強磁性 Heisenberg モデルにおける基底状態の性質について以下のことを主張した [1, 2, 3, 4]。

- スピン S が半奇数 ($S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$) の場合はエネルギーギャップが存在せず、相関関数はべき的に減衰する。

- スピン S が整数 ($S = 1, 2, 3, \dots$) の場合にはエネルギーギャップが存在し、相関関数が指数関数的に減衰する。

Haldane の主張ではスピン S が大きいということを仮定し、1 次元反強磁性 Heisenberg モデルを 2 次元の $O(3)$ 非線形シグマモデルで表すことで上の性質を説明した。その一方で、 S が大きいという仮定を用いない証明は未だ行われていないが、以下に示すように、拡張された Lieb-Shultz-Mattis の定理 [49, 50, 51] を用いることで、1 次元反強磁性 Heisenberg モデルにおいて唯一の基底状態の上に有限のエネルギーギャップが存在する必要条件は「 $S = \text{整数}$ 」であることが示される。以下では、まず、この定理の証明に必要な Marshall-Lieb-Mattis の定理 [65, 66] を説明する。¹

2.1 Marshall-Lieb-Mattis の定理

この節では、Marshall-Lieb-Mattis の定理について説明する。²

Marshall-Lieb-Mattis (MLM) の定理 [65, 66] —————

2 つの副格子 A, B からなる有限格子上の Heisenberg モデル

$$\hat{H} = \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{S}_i \cdot \hat{S}_j \quad (2.5)$$

に関して以下の条件を満たすとする。

- 2 つのスピンの同じ (異なる) 副格子にある時、スピン間に強磁性 (反強磁性) 相互作用が働く。
- 格子全体が相互作用によって連結している。(任意の 2 点 i, j に対して、 $J_{il_1} J_{l_1 l_2} \cdots J_{l_n j} \neq 0$ となるように格子上の適当な経路 $i, l_1, l_2, \dots, l_n, j$ を選ぶことができる。)

この時、以下が成り立つことが証明できる。

1. 基底状態のスピンの大きさは $S_0 \equiv |(S_A)_{\max} - (S_B)_{\max}|$ となる。ただし、 $(S_A)_{\max}$ と $(S_B)_{\max}$ は副格子 A と副格子 B 上にあるスピンの大きさの総和である。
2. 基底状態の全スピンの大きさに伴う $2S_0 + 1$ 重の縮退以外に縮退がない。

以下に MLM の定理の証明を示す。

Proof. 条件より、式 (2.5) の J_{ij} は

$$J_{ij} \geq 0 \quad (\text{異なる副格子間}) \quad (2.6)$$

$$J_{ij} \leq 0 \quad (\text{同じ副格子間}) \quad (2.7)$$

¹これらの定理の説明は教科書 [44, 45] を参考にした。

²ここに示すのは MLM の定理から導かれる帰結の一部分である。

である。ここで副格子 A 上にある全てのスピンを z 軸の周りに角度 π だけ回転させることを考える。つまり、

$$\hat{S}_i^x \rightarrow -\hat{S}_i^x, \hat{S}_i^y \rightarrow -\hat{S}_i^y, \hat{S}_i^z \rightarrow \hat{S}_i^z. \quad (2.8)$$

これにより、スピンの x と y 成分に関して、

$$J_{ij} \geq 0 \rightarrow -J_{ij} = -|J_{ij}| \quad (\text{異なる副格子間}) \quad (2.9)$$

$$J_{ij} \leq 0 \rightarrow J_{ij} = -|J_{ij}| \quad (\text{同じ副格子間}) \quad (2.10)$$

となるので、式 (2.5) は

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j \\ &= \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \{ \hat{S}_i^x \hat{S}_j^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_j^y + \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \} \\ &\rightarrow \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ -|J_{ij}| \hat{S}_i^x \hat{S}_j^x - |J_{ij}| \hat{S}_i^y \hat{S}_j^y + J_{ij} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right\} \\ &= \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ -|J_{ij}| \frac{\hat{S}_i^+ + \hat{S}_i^-}{2} \frac{\hat{S}_j^+ + \hat{S}_j^-}{2} - |J_{ij}| \frac{\hat{S}_i^+ - \hat{S}_i^-}{2i} \frac{\hat{S}_j^+ - \hat{S}_j^-}{2i} + J_{ij} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right\} \\ &= \sum_{\langle ij \rangle} \left\{ -\frac{1}{2} |J_{ij}| (\hat{S}_i^+ \hat{S}_j^- + \hat{S}_i^- \hat{S}_j^+) + J_{ij} \hat{S}_i^z \hat{S}_j^z \right\} = \hat{H}_A \end{aligned} \quad (2.11)$$

となる。よって、 $\hat{S}_i^+ \hat{S}_j^- + \hat{S}_i^- \hat{S}_j^+$ の係数は全て 0 以下にできる。全スピンの z 成分 $\hat{S}_T^z = \sum_i \hat{S}_i^z$ は上の変換で不変でかつ保存量となる。ここで、固有値 $\hat{S}_T^z = M$ となる部分空間 V_M だけを考える。 m_i を 0 以上の整数として、 V_M の基底を

$$|\phi_\alpha\rangle = N_\alpha \prod_i (\hat{S}_i^+)^{m_i} |\Phi_0\rangle \quad (2.12)$$

とする。ただし、 $N_\alpha (> 0)$ は規格化の定数である。また、 $\alpha \equiv \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ であり、

$$\hat{S}_i^z |\Phi_0\rangle = -S_i |\Phi_0\rangle \quad \text{for all } i, \quad (2.13)$$

$$M = \sum_i m_i - \sum_i S_i \quad (2.14)$$

を満たす。この基底を用いることで、部分空間 V_M 内で $-\hat{H}_A$ を行列表示 $\langle \phi_\alpha | -\hat{H}_A | \phi_\beta \rangle$ すると、行列の非対角要素は全て $\hat{S}_i^+ \hat{S}_j^- + \hat{S}_i^- \hat{S}_j^+$ の項から生じるので、

$$\langle \phi_\alpha | -\hat{H}_A | \phi_\beta \rangle \geq 0 \quad \text{for } \alpha \neq \beta \quad (2.15)$$

が成り立つ。また、 $|\phi_\alpha\rangle$ は格子点 i に粒子が m_i 個存在する状態とみなすとする、 $\hat{S}_i^+ \hat{S}_j^-$ を作用させることで粒子は j から i に移る。 J_{ij} の格子全体が相互作用によって連結しているという条件から、 $-\hat{H}_A$ を

作用させることで任意の粒子配置を任意の粒子配置に移すことができる。この時、行列 $\langle \phi_\alpha | -\hat{H}^A | \phi_\beta \rangle$ が連結性 (既約性) を満たすという。ここで、行列 $\langle \phi_\alpha | -\hat{H}^A | \phi_\beta \rangle$ に対して以下の Perron-Frobenius の定理³を用いることができる。

Perron-Frobenius(PF) の定理

行列 M が以下を満たすとする。

- $D \times D$ の実対称行列
- 全ての非対角成分が非負 (任意の $i \neq j$ に対して $(M)_{i,j} \geq 0$)
- 連結性 (既約性)

この時、以下が成り立つことが証明できる。

1. 最大固有値 λ_{\max} は縮退していない。
2. λ_{\max} に対応する固有ベクトルは、全ての成分が正になるようにとることができる。

行列 $\langle \phi_\alpha | -\hat{H}^A | \phi_\beta \rangle$ は PF の定理の条件を満たす。よって、部分空間 V_M において基底状態はただ 1 つであり、基底 $|\phi_\alpha\rangle$ を用いて、

$$|\text{基底状態}\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} |\phi_{\alpha}\rangle \quad \text{for } c_{\alpha} > 0 \quad (2.16)$$

と書くことができる。

次に、基底状態の全スピンの大きさ $\hat{\mathbf{S}}_T = \sum_i \hat{\mathbf{S}}_i$ を求めることを考える。ハミルトニアン \hat{H} と同じ大きさのスピンを各格子点に持つ、

$$\hat{H}_{\text{ref}} = \hat{\mathbf{S}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}_B \quad (2.17)$$

のようなハミルトニアンを考える。ただしここで、

$$\hat{\mathbf{S}}_A \equiv \sum_{i \in A} \hat{\mathbf{S}}_i, \quad (2.18)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_B \equiv \sum_{j \in B} \hat{\mathbf{S}}_j, \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathbf{S}}_T \equiv \hat{\mathbf{S}}_A + \hat{\mathbf{S}}_B \quad (2.20)$$

³教科書 [67] に詳しい。

と定義する。式 (2.17) を書き換えると、

$$\begin{aligned}\hat{H}_{\text{ref}} &= \hat{\mathbf{S}}_A \cdot \hat{\mathbf{S}}_B \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \hat{\mathbf{S}}_A + \hat{\mathbf{S}}_B \right\}^2 - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_A^2 - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_B^2 \\ &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_T^2 - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_A^2 - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{S}}_B^2.\end{aligned}\quad (2.21)$$

と書ける。スピン $\hat{\mathbf{S}}_A, \hat{\mathbf{S}}_B, \hat{\mathbf{S}}_T$ の大きさをそれぞれ、 S_A, S_B, S_T とすると、 \hat{H}_{ref} の固有値は

$$\frac{1}{2} [S_T(S_T + 1) - S_A(S_A + 1) - S_B(S_B + 1)] \quad (2.22)$$

となる。 $S_A \geq 0, S_B \geq 0$ なので S_T が最小の時に式 (2.22) は最小固有値をとる。これは $S_T = |S_A - S_B|$ の時に実現し、これを式 (2.22) に代入すると、

$$- [S_A S_B + \min(S_A, S_B)] \quad (2.23)$$

となる。これが最小となるには S_A, S_B が共に最大となれば良い。つまり、

$$S_A = (S_A)_{\max} \equiv \sum_{i \in A} S_i, \quad (2.24)$$

$$S_B = (S_B)_{\max} \equiv \sum_{i \in B} S_i \quad (2.25)$$

となる場合である。よって \hat{H}_{ref} の基底状態の全スピンの大きさは

$$S_T = |(S_A)_{\max} - (S_B)_{\max}| \equiv S_0 \quad (2.26)$$

となる。 \hat{H} と \hat{H}_{ref} は $\hat{S}_T^- = \sum_i \hat{S}_i^-$ と可換なので、 S_T が整数の場合は全てのエネルギー固有値に対応する固有状態が V_0 に含まれる。よって、この場合は V_0 における基底状態だけを考えれば良い。また、 \hat{H}_{ref} も MLM の定理の条件を満たし、部分空間における基底状態は唯一つとなり、式 (2.16) のように書ける。よって、 V_0 における \hat{H} と \hat{H}_{ref} の基底状態は共に定符号なので直交しないため、 \hat{H} と \hat{H}_{ref} の基底状態は等しい。以上から、 \hat{H} の基底状態の全スピンの大きさも S_0 となる。 S_T が半奇数の場合は、 $V_{1/2}$ について同様に考えれば良い。

□

2.2 Lieb-Shultz-Mattis の定理

次に、拡張された Lieb-Shultz-Mattis の定理を以下に示す。

拡張された Lieb-Shultz-Mattis(LSM) の定理 [49, 50, 51]

周期境界条件に従う N 個のスピン S の 1 次元量子スピン系が

- 並進対称性
- 全スピンの z 成分が保存量 (ハミルトニアンと可換)
- 空間反転対称性
- 有限系の基底状態は唯 1 つ

を満たすとする。この時、もし

$$S - \frac{M}{N} \neq \text{整数} \quad (2.27)$$

ならば以下のいずれかが成り立つ。ただし、 M は基底状態での全スピンの z 成分の値である。

- $N \rightarrow \infty$ の極限で励起エネルギーが 0 に近づく励起状態が存在する。
- $N \rightarrow \infty$ の極限で基底状態に縮退が存在する。

1 次元反強磁性 Heisenberg モデルは LSM の定理の最初の 3 つの前提条件 (並進対称性、全スピンの z 成分が保存量、空間反転対称性) を満たすことは自明である。また、4 つ目の条件 (有限系の基底状態は唯 1 つ) を満たすことは MLM の定理において、 $(S_A)_{\max} = (S_B)_{\max}$ となることから示される。この定理より、「 $S = \text{半奇数}$ 」の場合には、唯 1 つの基底状態の上に有限のエネルギーギャップは存在し得ない。よって、

「唯 1 つの基底状態の上に有限のエネルギーギャップが存在」 \rightarrow 「 $S = \text{整数}$ 」
が成り立つ。

以下に LSM の定理の証明を示す。

Proof. 1 次元反強磁性 Heisenberg モデルのハミルトニアン

$$\hat{H} = \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \hat{\mathbf{S}}_i \cdot \hat{\mathbf{S}}_j \quad (2.28)$$

について考える。以下では $J_{ij} = 1$ とし、最近接相互作用のみとする。式 (2.28) は

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2} (\hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + \hat{S}_j^- \hat{S}_{j+1}^+) + \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right\} \quad (2.29)$$

と書き換えることができる。ここで、基底状態 $|\psi\rangle$ をユニタリー演算子

$$\hat{U} = \exp\left(i \sum_{j=1}^N \frac{2\pi}{N} j \hat{S}_j^z\right) \quad (2.30)$$

で緩やかに「ねじる」ことを考える。

$$|\phi\rangle = \hat{U} |\psi\rangle. \quad (2.31)$$

これが $N \rightarrow \infty$ の極限で無限小の励起エネルギーを持つ励起状態になるのかを調べる。

まず、エネルギーの期待値の差を計算する。

$$\delta E = \langle \phi | \hat{H} | \phi \rangle - \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} - \hat{H} | \psi \rangle. \quad (2.32)$$

ここで、

$$\hat{U}^\dagger \hat{S}_j^+ \hat{U} = \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}j\right) \hat{S}_j^+ \quad (2.33)$$

$$\hat{U}^\dagger \hat{S}_j^- \hat{U} = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}j\right) \hat{S}_j^- \quad (2.34)$$

$$\hat{U}^\dagger \hat{S}_j^z \hat{U} = \hat{S}_j^z \quad (2.35)$$

を用いると、

$$\hat{U}^\dagger \hat{H} \hat{U} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{1}{2} \left\{ \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\right) \hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right) \hat{S}_j^- \hat{S}_{j+1}^+ \right\} + \hat{S}_j^z \hat{S}_{j+1}^z \right] \quad (2.36)$$

となる。また、並進対称性と反転対称性から、

$$\langle \psi | \hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- + \hat{S}_j^- \hat{S}_{j+1}^+ | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+ | \psi \rangle, \quad (2.37)$$

$$\langle \psi | \hat{S}_j^+ \hat{S}_{j+1}^- - \hat{S}_j^- \hat{S}_{j+1}^+ | \psi \rangle = 0 \quad (2.38)$$

となるので、

$$\delta E = \frac{1}{2} N \left(\cos \frac{2\pi}{N} - 1 \right) \langle \psi | \hat{S}_1^+ \hat{S}_2^- + \hat{S}_1^- \hat{S}_2^+ | \psi \rangle \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right). \quad (2.39)$$

よって、 $N \rightarrow \infty$ の極限で $\delta E \rightarrow 0$ となる。

次に、 $|\phi\rangle$ が励起状態である条件を調べるために、 $|\phi\rangle$ が $|\psi\rangle$ と直交する条件を調べる。 $|\psi\rangle$ が唯一つの基底状態であるので、1 格子分ずらすユニタリ演算子を \hat{T} とすると、並進対称性から $\hat{T} |\psi\rangle$ も基底状態になる。適当な位相 θ をつけて、

$$\hat{T} |\psi\rangle = e^{i\theta} |\psi\rangle \quad (2.40)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \phi \rangle &= \langle \psi | \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{T}^\dagger \hat{U} \hat{T} | \psi \rangle = \langle \psi | \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \sum_{j=1}^N j \hat{S}_{j+1}^z\right) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} \sum_{j=1}^N \hat{S}_j^z\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} N \hat{S}_{N+1}^z\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \sum_{j=1}^N j \hat{S}_j^z\right) | \psi \rangle \\
&= \langle \psi | \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} M\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} N \hat{S}_1^z\right) U | \psi \rangle \\
&= \exp\left(-\frac{i2\pi M}{N}\right) \langle \psi | \exp(i2\pi \hat{S}_1^z) | \phi \rangle.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

よって、

1) $S =$ 半奇数の場合

$$\{1 + \exp(i2\pi M/N)\} \langle \psi | \phi \rangle = 0 \tag{2.42}$$

となるので、 M/N が半奇数でなければ $\langle \psi | \phi \rangle = 0$.

2) $S =$ 整数の場合

$$\{1 - \exp(i2\pi M/N)\} \langle \psi | \phi \rangle = 0 \tag{2.43}$$

となるので、 M/N が整数でなければ $\langle \psi | \phi \rangle = 0$.

これらをまとめると、 $S - M/N \neq$ 整数の時に $|\phi\rangle$ は基底状態と直交し、有限系の励起状態となる。よって $N \rightarrow \infty$ の極限で対称性が破れる可能性も考慮すると LSM の定理が証明される。 \square

2.3 2次元 $O(3)$ 非線形シグマモデル

スピン S が大きいと仮定することで、1次元反強磁性 Heisenberg モデルを有効理論である 2次元の $O(3)$ 非線形シグマモデルで表すことができる (付録 A)[2, 52]。その作用 $S_{O(3)}$ はユークリッド化された座標 $x = (x_1, x_2)$ を用いて、

$$S_{O(3)} = S_0 - i\theta Q = \int d^2x \left[\frac{1}{2g} \partial_\mu \phi \cdot \partial_\mu \phi - \frac{i\theta}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu} \phi \cdot (\partial_\mu \phi \times \partial_\nu \phi) \right] \quad (2.44)$$

と書ける。ここで、 ϕ は 3 成分の単位ベクトルであり、 g と θ はスピン S を用いて、 $g = 2/S, \theta = 2\pi S$ と表される。よって、 θ 項は経路積分に対し $e^{i2\pi S Q}$ の形で寄与する。つまり、

- スピン S が整数 ($S = 1, 2, 3, \dots$) $\theta = 0$ ギャップあり
- スピン S が半奇数 ($S = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$) $\theta = \pi$ ギャップなし

の対応がある。前章で述べたように、先行研究 [23, 24, 25, 26, 27, 28] では $\theta = \pi$ 近傍における解析がモンテカルロシミュレーションを用いて行われた。これらの解析では複素作用問題を回避するために、[23, 24, 25] ではクラスターアルゴリズム、[26, 27, 28] では虚数 θ の方法が用いられた。その結果として、Haldane の予想通り、2次相転移点が見つかり、その臨界指数が $k = 1$ の WZNW モデル [29, 30, 31] のユニバーサルクラス [32, 33] に属することが分かっている。

一方、場 ϕ に $\phi = z^* \sigma z$ と代入することで、上の $O(3)$ モデルの作用を $CP(1)$ モデルの作用に書き換えることができる。ここで、 z は大きさ 1 の 2 成分複素スカラー場である。その $CP(1)$ モデルの作用 $S_{CP(1)}$ を書くと、

$$S_{CP(1)} = S_0 - i\theta Q = \int d^2x \left[2\beta (D_\mu z)^* \cdot (D_\mu z) - i\theta \frac{1}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu} (D_\mu z)^* \cdot (D_\nu z) \right] \quad (2.45)$$

となる。ただし、 D_μ は $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ であり、 A_μ は補助場で $A_\mu = iz^* \cdot \partial_\mu z$ と書かれる。また、 $\beta = 1/g$ である。このモデルに対しても、モンテカルロシミュレーションを用いた同様の解析が $\theta = \pi$ 近傍で行われた [34]。その結果として、 $\theta = \pi$ 上で 2 次相転移が見つかったが、そのユニバーサルクラスは WZNW モデルのものとは異なり、臨界指数が結合定数 β に対して連続的に変化する結果となった。本研究では、複素作用問題の影響を一切受けない手法であるテンソルくりこみ群を用いてこの結果を再検証することを目指す。

第3章 テンソルネットワークのくりこみ手法

この章では、本論文で解析に用いるテンソルネットワークのくりこみ手法について説明する。この手法の主な流れを図 3.1 に示す。手順は大きく分けて 2 つである。まず、計算したい対象のテンソルネットワーク表示を行う。以下では分配関数を計算対象として説明する。ここで各テンソルは各格子点上に定義され、各格子点から伸びる線がテンソルの添え字 (足) に対応する。テンソルの絵と数式の間を関係を図 3.2 に示す。また図 3.3 に示すように、隣り合うテンソルが共有している足に関しては縮約 (和) をとる。一度テンソルネットワーク表示が得られると、全てのテンソル間の共有されている添え字の縮約をとることができれば分配関数を厳密に計算することができる。しかし、その計算時間は、テンソルの足の自由度を χ 、テンソルの数を V とすると、2次元では χ^{2V} で増えてしまうためコンピュータを用いても計算することは困難となる。そこで次の手順として、テンソルネットワークの粗視化を行い、近似的にテンソルの数を少なくすることを考える。最終的にテンソルの数を 1 つまで粗視化することで、周期的境界条件の場合、図 3.1 のように残った足の縮約をとることで分配関数を近似的に計算することができる。以降ではテンソルネットワークの粗視化手法として、3.1 節ではテンソルくりこみ群について、3.2 節ではループ最適化を用いたくりこみ手法について説明する。

3.1 テンソルくりこみ群

テンソルくりこみ群 (Tensor Renormalization Group, 以下 TRG) は 2次元の古典スピン系の解析手法として、Levin と Nave によって開発された [42]。TRG は図 3.4 のように、テンソルの分解と縮約という 2 つのステップからなる。

テンソルの分解には行列の特異値分解

$$M_{a,b} = \sum_m u_{a,m} \sigma_m (v^\dagger)_{m,b} \quad (3.1)$$

を用いる。ここで u 、 v はユニタリ行列、 σ は特異値である。ここで M を $m \times n$ 行列とすると特異値の数は最大で $\min(m, n)$ 個あり、さらに

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0 \quad (3.2)$$

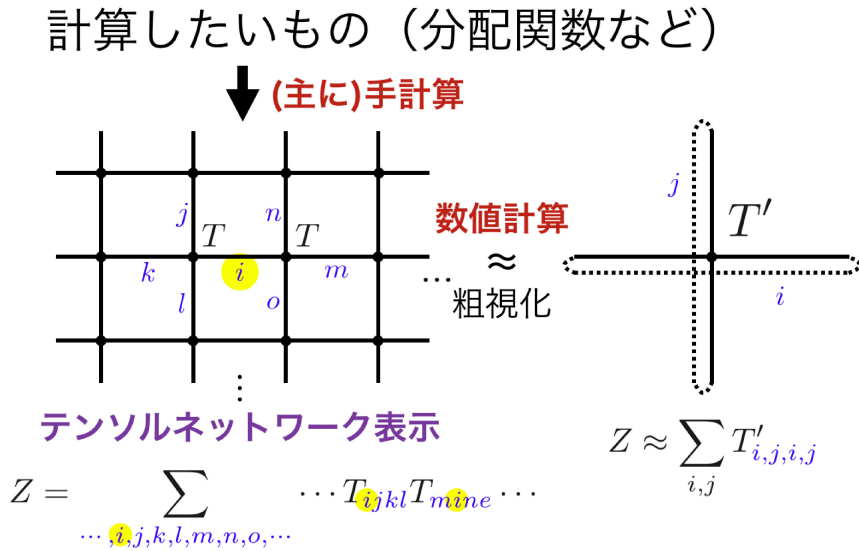


図 3.1: テンソルネットワークのくりこみ手法の主な流れ。まず、計算したい量(ここでは分配関数)のテンソルネットワーク表示を行う。これにより、各格子点上にテンソルが置かれ、全てのテンソルの足の縮約をとることで、分配関数を計算することができる。テンソルの足の縮約を全て厳密に扱うことができないため、次にテンソルネットワークの粗視化を行うことで分配関数を最終的に1つのテンソル T' で近似的に表すことができる。

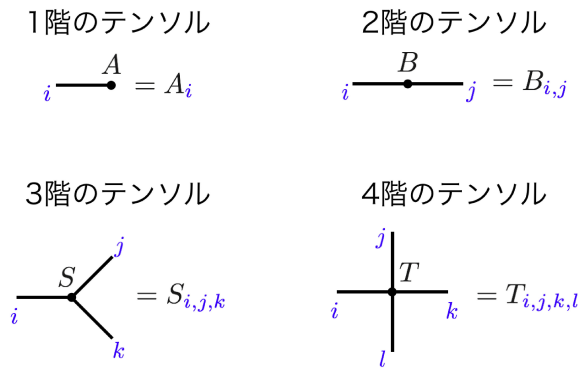


図 3.2: テンソルの例。テンソルは図のように点上に定義され、そこから伸びる線がテンソルの添え字(足)に、線の数添え字の数に対応する。

を満たす。これをテンソル T に用いると、例えば、

$$T_{ijkl} \equiv M_{(ij),(kl)} = \sum_m^{\chi^2} u_{(ij),m} \sigma_m (v^\dagger)_{m,kl} \tag{3.3}$$

$$= \sum_m^{\chi^2} u_{(ij),m} \sqrt{\sigma_m} \sqrt{\sigma_m} (v^\dagger)_{m,kl} \tag{3.4}$$

$$= \sum_m \binom{\chi^2}{13} (S_3)_{ijm} (S_1)_{klm} \tag{3.5}$$

$$\begin{array}{c} i \\ \diagdown \\ A \\ \diagup \\ j \end{array} \quad \begin{array}{c} l \\ \diagdown \\ B \\ \diagup \\ m \end{array} \quad \begin{array}{c} k \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ k \end{array} = \sum_k A_{i,j,k} B_{k,l,m} = (AB)_{i,j,l,m}$$

図 3.3: テンソルの足の縮約。共有するテンソルの足に関する和をとる (縮約をとる)。例として3階のテンソル A, B の縮約を行っている。この図では黄色の添え字 k に関する和をとっている。縮約されていない足はテンソル AB の足として残る。全てのテンソルの足が繋がれている場合、ただのスカラール量になる。

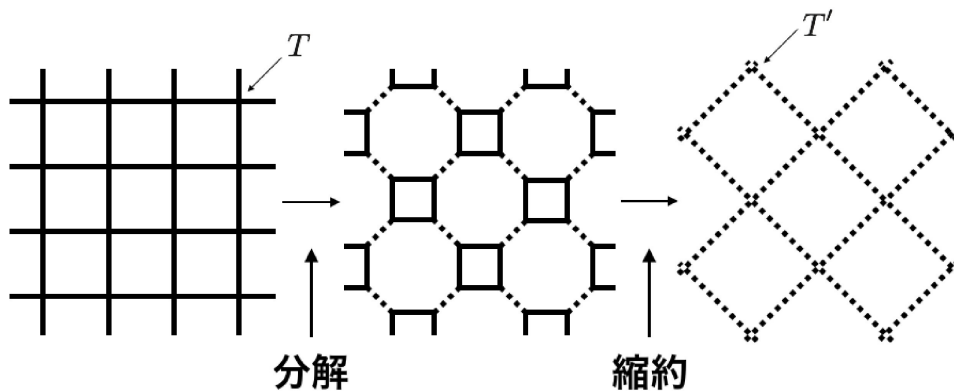


図 3.4: TRG を構成する 2 つのステップ。TRG は「テンソルの分解」と「テンソルの縮約」から成る。テンソルの分解によりテンソルの数は 2 倍になる (図の中央)、テンソルの縮約によりテンソルの数は 1/4 倍になるので、合わせて 1/2 倍になる。この 2 つのステップを何度も繰り返すことでテンソルの数を減らすことができる。

と分解できる。ここで、テンソル T の足の自由度は全て χ とし、新たにテンソル

$$(S_1)_{klm} \equiv \sqrt{\sigma_m} (v^\dagger)_{m,kl}, \tag{3.6}$$

$$(S_3)_{ijm} \equiv u_{(ij),m} \sqrt{\sigma_m} \tag{3.7}$$

を定義した。また同様に、

$$T_{ijkl} \equiv M_{(il),(jk)} = \sum_m^{\chi^2} (S_4)_{ilm} (S_2)_{jkm} \tag{3.8}$$

と分解できる。これら 2 つの分解を図示すると図 3.5 のように描ける。ここで、実線の足の自由度は χ 、点線の自由度は最大で χ^2 となる。

テンソルの縮約は図 3.6 のように

$$T'_{ijkl} = \sum_{a,b,c,d} (S_1)_{dai} (S_2)_{abl} (S_3)_{bck} (S_4)_{dcj} \tag{3.9}$$

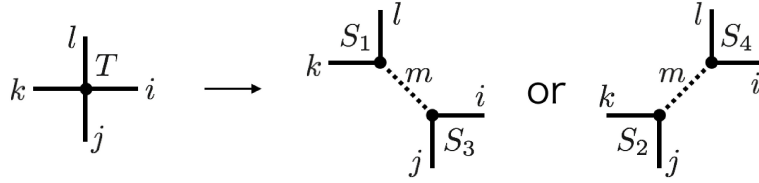


図 3.5: テンソルの分解。これにより、テンソル T は 2 つのテンソル S_1, S_3 (または S_2, S_4) に分解することができる。ここで新しい点線の足 m が現れる。実線の自由度を χ とすると点線の自由度は χ^2 になる。

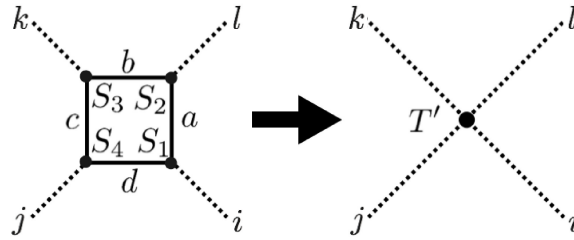


図 3.6: テンソルの縮約。実線の古い足の縮約を行うことで 4 つのテンソル S_1, S_2, S_3, S_4 は新しい 1 つのテンソル T' になる。テンソル T' の足は新しい点線の自由度から成る。

と、古い自由度に関して和をとることで行う。ここで新しいテンソルを T' とした。

テンソルの分解と縮約を 1 回ずつ行うことで、図 3.4 のように新しいテンソル T' で描かれたネットワークは古いテンソル T で描かれたネットワークと比べてテンソルの数が半分になる。ただし、点線で表された新しいテンソルの足の自由度は実線で表された元のテンソルの足の自由度 χ と比べて最大で χ^2 まで増えてしまい、くりこむ毎に計算コストも増大してしまう。この計算コスト増大を防ぐために足の自由度を $\chi^2 \rightarrow D_{\text{cut}}$ と減らすことでテンソル T' を近似的に表すことを考える。TRG のアルゴリズムでは、式 (3.2) の特異値のうち大きな特異値を D_{cut} 個残し、それ以外の小さな特異値を捨てることで近似を行う。つまり、近似の誤差は図 3.7 のように描け、これらはフロベニウスノルムとして

$$\delta_{\text{TRG}} = \left\| T - \sum_m^{D_{\text{cut}}} u_m \sigma_m (v_m)^\dagger \right\| = \sqrt{\sum_{i,j=D_{\text{cut}}+1}^{\chi^2} u_i \sigma_i (v_i)^\dagger v_j \sigma_j (u_j)^\dagger} = \sqrt{\sum_{i=D_{\text{cut}}+1}^{\chi^2} (\sigma_i)^2} \quad (3.10)$$

と書ける。この式から分かるように、テンソル T を特異値 D_{cut} 個のテンソル T' で近似することは $T - T'$ のフロベニウスノルムを最小化するという意味で最も良い近似になっている。

くりこまれたテンソル T' を T とみなして同じ操作を何度も繰り返すことで、多くのテンソルからなるネットワークを最終的に 1 つのテンソルまで近似することができる。 n 回くりこんだテンソルを $T^{(n)}$

$$\delta_{\text{TRG}} = \left\| \begin{array}{c} | \\ \text{---} T \text{---} \\ | \end{array} - \begin{array}{c} | \\ \text{---} S_3 \\ \swarrow \\ S_1 \\ \nearrow \\ D_{\text{cut}} \end{array} \right\| \quad \& \quad \left\| \begin{array}{c} | \\ \text{---} T \text{---} \\ | \end{array} - \begin{array}{c} | \\ \text{---} S_2 \\ \swarrow \\ S_4 \\ \nearrow \\ D_{\text{cut}} \end{array} \right\|$$

図 3.7: テンソルくりこみ群の損失関数。式 (3.10) のように、テンソルの分解前後の誤差は分解前のテンソル T と分解後のテンソル $S_1 S_3$ (または $S_2 S_4$) の差のフロベニウスノルムとして定義される。

とすると、周期的境界条件の場合、分配関数 Z は近似的に

$$Z \simeq \sum_{i,j}^{D_{\text{cut}}} T_{ij}^{(n)} \quad (3.11)$$

と計算することができる。

ここで図 3.8 に、臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数について、TRG を用いて計算した結果の厳密解に対する相対誤差を示す。式 (3.10) から分かるように、テンソルの分解における近似の誤差は D_{cut} を増やすことで小さくなるため、分配関数と厳密解の差も D_{cut} を増やすことで小さくなっているのが分かる。しかし、図 3.8 から分かるように D_{cut} を増やすにつれて相対誤差の減少が緩やかになっている。実は、TRG のアルゴリズムでは臨界領域における計算精度がそれ以外の領域と比べて悪くなってしまふということが分かっている [53]。

3.2 ループ最適化によるテンソルネットワークくりこみ

TRG が臨界点近傍で誤差が大きくなってしまふ理由として、Gu と Wen は Corner Double-Line テンソル (CDL テンソル) で表されるネットワークの近距離相関を TRG では完全にはくりこむことができないからだと考えた [54]。CDL テンソルとは

$$T_{ijkl}^{\text{CDL}} = T_{(i_1, i_2)(j_1, j_2)(k_1, k_2)(l_1, l_2)} = \Lambda_{i_2, j_1} \Lambda_{j_2, k_1} \Lambda_{k_2, l_1} \Lambda_{l_2, i_1} \quad (3.12)$$

で表されるテンソルである。ここで、テンソル Λ は

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_D) \quad (3.13)$$

のように対角成分のみからなるテンソルである。 λ_n は正の実数で、

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_D \quad (3.14)$$

を満たし、図 3.9 のように Λ を白丸と実線で表して、白丸部分に値 λ_n があるとする。

CDL テンソルで描かれるネットワークを TRG でくりこんだ場合のネットワークの変化を図 3.10 に示す。1 番左の図を見ると分かるように、CDL テンソルからなるネットワークはプラケットで描かれる近

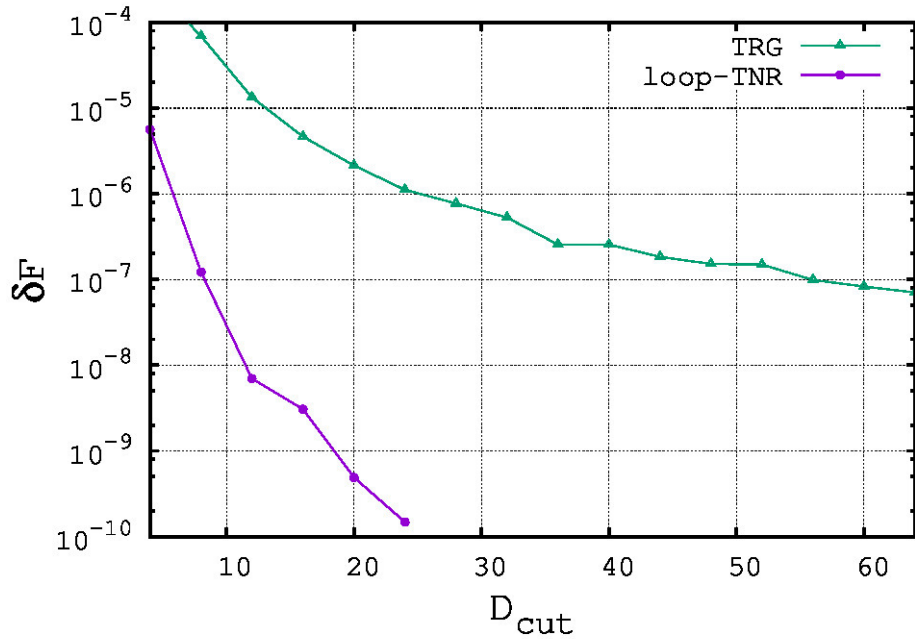


図 3.8: TRG と Loop-TNR による臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数の計算結果。ただしここで、スピンの数は 2^{39} として計算を行った。この体積では、倍精度で分配関数の体積依存性は見られなかった。縦軸は自由エネルギーの厳密解との相対誤差 δF 、横軸はテンソルの足の自由度 D_{cut} である。TRG の結果は D_{cut} を増やしても近似の誤差が減りにくく傾きが緩やかなのに対して、Loop-TNR の結果は D_{cut} の増加に対して近似の誤差が鋭く減少している。

$$T^{\text{CDL}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & l_1 & l_2 \\ & | & | \\ k_2 & \text{---} & i_1 \\ | & & | \\ k_1 & \text{---} & i_2 \\ & | & | \\ & j_2 & j_1 \end{array} \\ \text{CDL tensor} \end{array} \quad \Lambda = \begin{array}{c} D \\ \text{---} \\ D \end{array} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_D \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_D$

図 3.9: CDL テンソル。図のように、CDL テンソルは 4 つのテンソル Λ から構成される。2 階のテンソル Λ は自由度 D の足と白丸から成り、行列で表すと対角成分のみを持つ。

距離の相関のみを含むことが分かる。このネットワークに対し TRG のアルゴリズムを適用すると、1 番右の図のように、くりこんだ後も実線で描かれる近距離相関が残ってしまうことが分かる。つまり、くりこむ前の近距離相関のうち、図 3.11 の赤色の相関がくりこみ後に残ってしまう。相関の強い臨界点領域において、この影響が顕著に出ていると考えられる。

Evenbly と Vidal はこの近距離相関を完全にくりこむための手法として TRG を改良したテンソルネッ

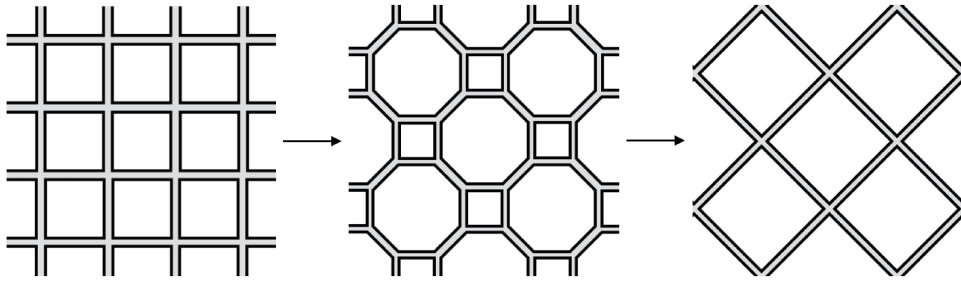


図 3.10: CDL テンソルからなるネットワークの TRG によるくりこみ。CDL テンソルからなるネットワークは左端の図のようにプラケットの形をした近距離相関から構成される。このネットワークに TRG を適用すると、右端の図のように同じくプラケット状の近距離相関から構成されるネットワークになる。

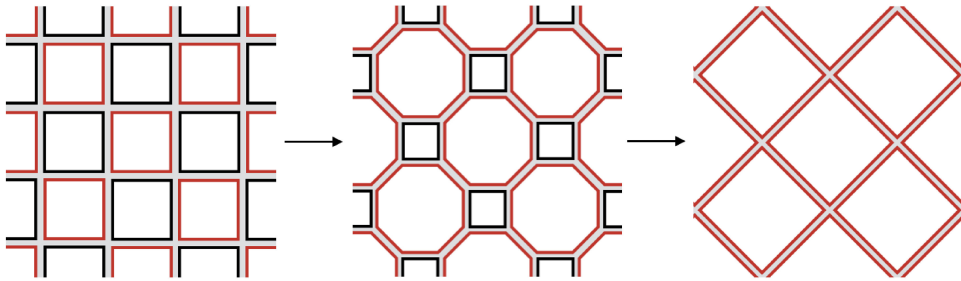


図 3.11: TRG ではくりこむことができない近距離相関。CDL テンソルからなるネットワークに対し TRG を適用した場合、くりこむ前と後で黒色の近距離相関はくりこまれるが、赤色の近距離相関はくりこまれずに残る。

トワークくりこみ (Tensor Network Renormalization, 以下 TNR) という手法を開発し、2次元イジングモデルの臨界温度においてこの手法が上手く機能することを確認した [55]。その後、Yang らによって TNR と同じ性能を持つアルゴリズムとして、ループ最適化によるテンソルネットワークくりこみ (Loop Optimization for Tensor Network Renormalization, 以下 Loop-TNR) が開発された [43]。本研究では、TRG よりも精度の高い計算手法として、Loop-TNR の実装も行った。以下でそのアルゴリズムについて説明する。

Loop-TNR では、TRG で行ったテンソルの分解と縮約に加えてさらに 2つの操作を行うことで近距離相関を適切にくりこむことを目指す。手順は以下の通りである。

- 1) Entanglement Filtering (EF) ステップ
- 2) テンソルの分解
- 3) テンソルのループ最適化
- 4) テンソルの縮約

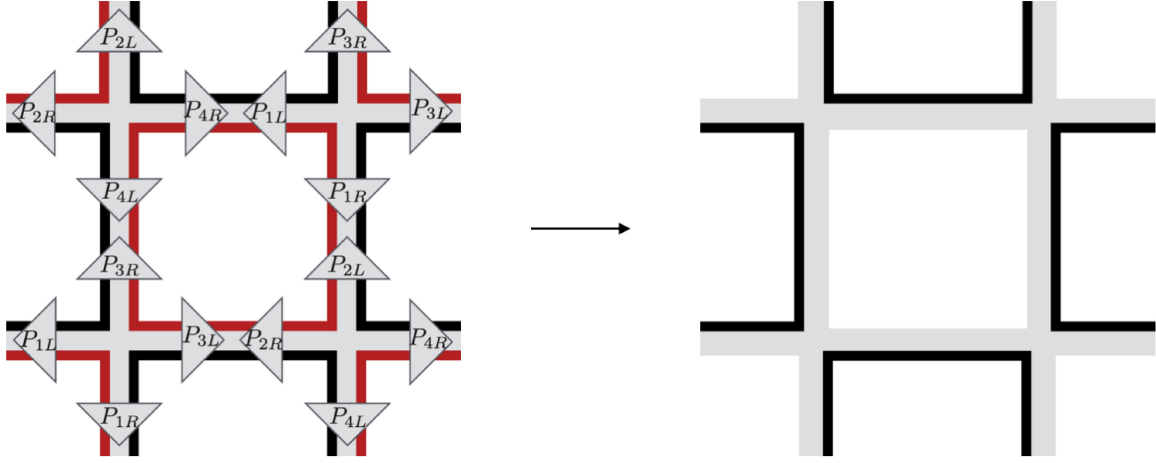


図 3.12: EF ステップ。射影テンソル積を挿入することで CDL テンソルを赤色の近距離相関が無い形に変形する。

新しく 1) EF と 3) テンソルのループ最適化が追加されている。

1) EF ステップでは、図 3.12 のように射影テンソル積 $P_{4R}P_{1L} = I$, $P_{1R}P_{2L} = I$, $P_{2R}P_{3L} = I$, $P_{3R}P_{4L} = I$ を挿入することで CDL テンソルを赤色の近距離相関が無い形に変形する。

ここで、具体的に射影テンソル P_{4R}, P_{1L} の導き方を説明する。まず、プラケットを構成する CDL テンソル $T^{[1]}, T^{[2]}, T^{[3]}, T^{[4]}$ を図 3.13 の上段左図のように並べたものを考える。この $T^{[4]}$ と $T^{[1]}$ の間に新しいテンソル $(L_1^{[1,1]})_{(a,b)(a,b)} = \delta_{a,a}\delta_{b,b}$ を挿入する。図では $L_1^{[1,1]}$ は 2 本の実線で表される。

次に、 L_1 と $T^{[1]}$ の積 (足の縮約をとったもの) を行列とみなして以下のように QR 分解する。

$$\begin{aligned} (L_1^{[1,1]})_{a,b}(T^{[1]})_{b,(cde)} &= (L_1^{[1,1]}T^{[1]})_{a,(cde)} \\ &= (L_1^{[1,1]}T^{[1]})_{(cae),d} \\ &\stackrel{\text{QR}}{=} (\tilde{T}^{[1]})_{(cae),b}(L_1^{[1,2]})_{b,d} \end{aligned} \quad (3.15)$$

QR 分解をすることで LT は図 3.14 のようにユニタリ行列 \tilde{T} と上三角行列 L' に分解される。

CDL テンソルからなるテンソル LT を QR 分解して \tilde{T} がユニタリ行列になるためには $(\tilde{T})^\dagger \tilde{T} = I$ を満たさなければならない。具体的には、図 3.13 の上段中央のように分解されれば、図 3.15 のように白丸が乗っている足がただのスカラーになるので条件が満たされる (ただし今の場合、中央の白丸は 2 つ少ない)。

この時、CDL テンソル $T^{[1]}$ の 4 つの白丸のうち 2 つが $L_1^{[1,2]}$ に移ることが分かる。つまり、

$$(L_1^{[1,2]})_{(i_1,i_2),(j_1,j_2)} \propto \Lambda_{i_1,j_1} \otimes \Lambda_{i_2,j_2} \quad (3.16)$$

となる。引き続き今度は $L_1^{[1,2]}$ と $T^{[2]}$ の積を QR 分解

$$L_1^{[1,2]}T^{[2]} \stackrel{\text{QR}}{=} \tilde{T}^{[2]}L_1^{[1,3]} \quad (3.17)$$

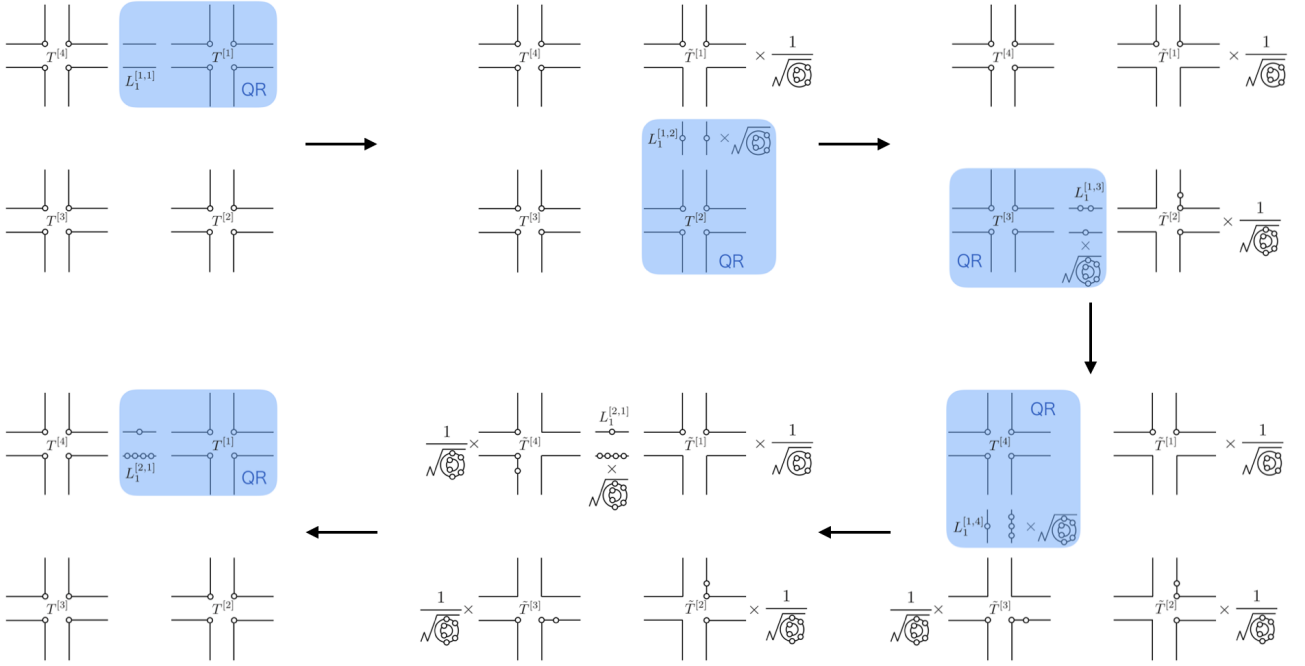


図 3.13: CDL テンソルで構成されるプラケット $T^{[1]}T^{[2]}T^{[3]}T^{[4]}$ 上での QR 分解の各ステップ。まず、テンソル $L_1^{[1,1]} = I$ をテンソル $T^{[1]}$ と $T^{[2]}$ の間に挿入する。各ステップの青色の 2 つのテンソル $L^{[i,n]}, T^{[n]}$ の縮約をとることで 1 つのテンソル $(L^{[i,n]}T^{[n]})$ を作り、 $(L^{[i,n]}T^{[n]})$ の QR 分解を行うことで新しいテンソル $T^{[n]}, L^{[i,n+1]}$ を得る。この操作を繰り返すことで、図のように $L^{[i,n]}$ を構成する 2 本のテンソルのうちの片側に Λ テンソルの白丸が溜まる。ただし、 $T^{[1]}$ の白丸が無くなることを防ぐために下段中央のステップで $T^{[n]} \rightarrow T^{[n]}$ の置き換えを行う。これにより最終的に $L_1^{[\infty,1]}$ を得る。

することで、図 3.13 の上段右図のように今度は 1 つだけ白丸が $L_1^{[1,3]}$ に移って

$$(L_1^{[1,3]})_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)} \propto \Lambda_{i_1, j_1} \otimes (\Lambda_{i_2, j_2})^2 \quad (3.18)$$

となり、 $\tilde{T}^{[2]}$ は図 3.15 のように $(\tilde{T}^{[2]})^\dagger \tilde{T}^{[2]} = I$ を満たす。同様に、もう 2 回 QR 分解をすることで

$$L_1^{[1,3]}T^{[3]} \stackrel{\text{QR}}{\cong} \tilde{T}^{[3]}L_1^{[1,4]} \quad (3.19)$$

$$L_1^{[1,4]}T^{[4]} \stackrel{\text{QR}}{\cong} \tilde{T}^{[4]}L_1^{[2,1]} \quad (3.20)$$

となり $L_1^{[2,1]}$ は $L_1^{[1,1]}$ の位置に戻ってくるが

$$(L_1^{[2,1]})_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)} \propto \Lambda_{i_1, j_1} \otimes (\Lambda_{i_2, j_2})^4 \quad (3.21)$$

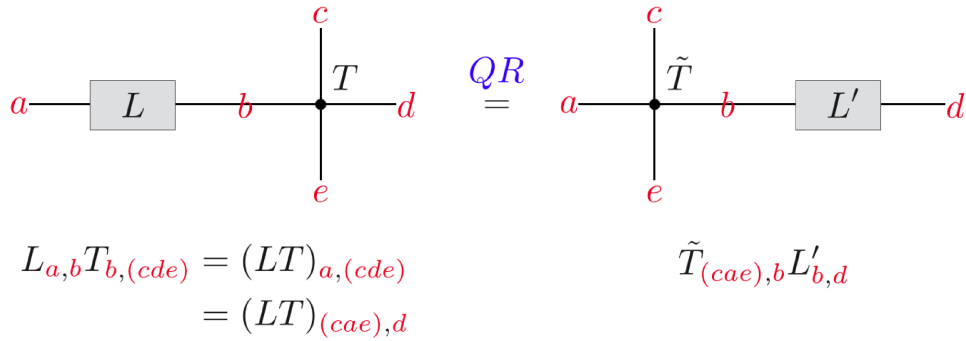


図 3.14: テンソル LT の QR 分解。左辺でテンソル L とテンソル T の縮約をとったテンソル (LT) を作り、 (LT) を行列と見なすことで QR 分解を行う。ただし、QR 分解によって 4 階のテンソル \tilde{T} と 2 階のテンソル L' ができるように行列 (LT) の添え字を $\{a, (cde)\} \rightarrow \{(cae), d\}$ と並び替える。 L' を次の L とし、再び右隣りのテンソルと縮約をとることで次の QR 分解を繰り返す。

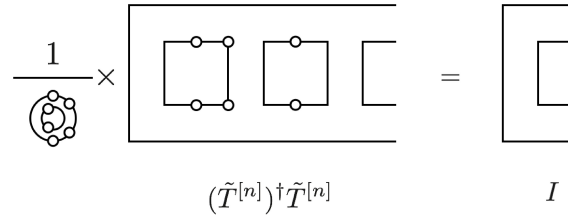


図 3.15: ユニタリ行列 $\tilde{T}^{[n]}$ 。QR 分解で作られたテンソル $\tilde{T}^{[n]}$ は $(\tilde{T}^{[n]})^\dagger \tilde{T}^{[n]} = I$ を満たす。図の白丸が乗った足は縮約がとられてスカラー量となる。

となり、ブラケットの内側の実線上にのみ白丸が増えていく。1 周する毎に

$$(L_1^{[2,1]})_{(i_1, i_2), (j_1, j_2)} = \Lambda_{i_1, j_1} \otimes (\Lambda_{i_2, j_2})^4 \tag{3.22}$$

と規格化することとする。ここまで来たら、全ての $\tilde{T}^{[i]}$ を $T^{[i]}$ に戻す。この操作を右回りに何周も行うことで最終的に

$$L_1^{[\infty, 1]} = \Lambda \otimes (\Lambda)^\infty = \Lambda \times (\lambda_1)^\infty \tag{3.23}$$

のように、ブラケットの内側の実線に関して、 Λ の要素のうち最大の λ_1 の部分が支配的となり実質 1 成分とみなすことができる。ここで Λ を 1 成分とみなせるのに十分な回数を ∞ 回と表した。1 成分になった実線は図 3.16 のように点線で表す。 $L_1^{[1, 1]} = I$ と同様に新しいテンソル $R_4^{[1, 4]} = I$ を $T^{[4]}$ と $T^{[1]}$ の間に挿入し、今度は左回りに LQ 分解を繰り返す行うことで図 3.16 のように

$$R_4^{[\infty, 4]} = \Lambda \otimes (\Lambda)^\infty = \Lambda \times (\lambda_1)^\infty \tag{3.24}$$

となる。

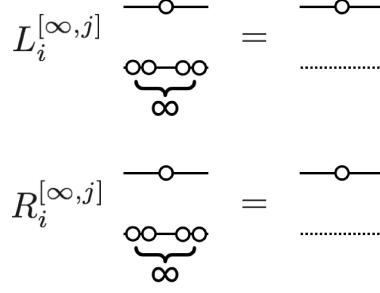


図 3.16: テンソル $L_i^{[\infty, j]}$ とテンソル $R_i^{[\infty, j]}$ 。QR 分解を繰り返すことで求めたテンソル $L_i^{[\infty, j]}$ と LQ 分解を繰り返すことで求めたテンソル $R_i^{[\infty, j]}$ は、図のように、それぞれを構成しているテンソル 2 本のうち 1 本に白丸が積み重なることで $(\Lambda)^\infty \rightarrow (\lambda_1)^\infty$ となり、このテンソルの足の自由度が 1 になる。

このようにして得た $L_1^{[\infty, 1]}$ と $R_4^{[\infty, 4]}$ を $(L_1^{[\infty, 1]})^{-1}L_1^{[\infty, 1]} = 1$ と $R_4^{[\infty, 4]}(R_4^{[\infty, 4]})^{-1} = 1$ の形で $T^{[4]}$ と $T^{[1]}$ の間に挿入する。同様に $T^{[1]}$ と $T^{[2]}$ 、 $T^{[2]}$ と $T^{[3]}$ 、 $T^{[3]}$ と $T^{[4]}$ の間に $L_i^{[\infty, j]}$ と $R_i^{[\infty, j]}$ を図 3.17 のように挿入する。これらのテンソルの挿入によって CDL テンソルが変形され、図 3.12 のように赤色部分の相関が無くすることができる。

最後に、射影テンソル積 P_{4R}, P_{1L} を得るために次のような変形をする (図 3.18)。

$$\begin{aligned}
 I &= (L_1^{[\infty, 1]})^{-1}L_1^{[\infty, 1]}R_4^{[\infty, 4]}(R_4^{[\infty, 4]})^{-1} \\
 &= (L_1^{[\infty, 1]})^{-1}U_{41}\sqrt{\Lambda_{41}}\sqrt{\Lambda_{41}}V_{41}^\dagger(R_4^{[\infty, 4]})^{-1} \quad (\text{SVD : } L_1^{[\infty, 1]}R_4^{[\infty, 4]} = U_{41}\Lambda_{41}V_{41}^\dagger) \\
 &= R_4^{[\infty, 4]}V_{41}\frac{1}{\Lambda_{41}}U_{41}^\dagger U_{41}\sqrt{\Lambda_{41}}\sqrt{\Lambda_{41}}V_{41}^\dagger V_{41}\frac{1}{\Lambda_{41}}U_{41}^\dagger L_1^{[\infty, 1]} \\
 &= R_4^{[\infty, 4]}V_{41}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{41}}}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{41}}}U_{41}^\dagger L_1^{[\infty, 1]} \\
 &\equiv P_{4R}P_{1L} \quad (P_{4R} \equiv R_4^{[\infty, 4]}V_{41}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{41}}}, P_{1L} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{41}}}U_{41}^\dagger L_1^{[\infty, 1]}) \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

ここで、2 行目から 3 行目で

$$(L_1^{[\infty, 1]}R_4^{[\infty, 4]})^{-1} = (R_4^{[\infty, 4]})^{-1}(L_1^{[\infty, 1]})^{-1} = V_{41}\frac{1}{\Lambda_{41}}U_{41}^\dagger \quad (3.26)$$

を変形した式

$$(L_1^{[\infty, 1]})^{-1} = R_4^{[\infty, 4]}V_{41}\frac{1}{\Lambda_{41}}U_{41}^\dagger, \quad (R_4^{[\infty, 4]})^{-1} = V_{41}\frac{1}{\Lambda_{41}}U_{41}^\dagger L_1^{[\infty, 1]} \quad (3.27)$$

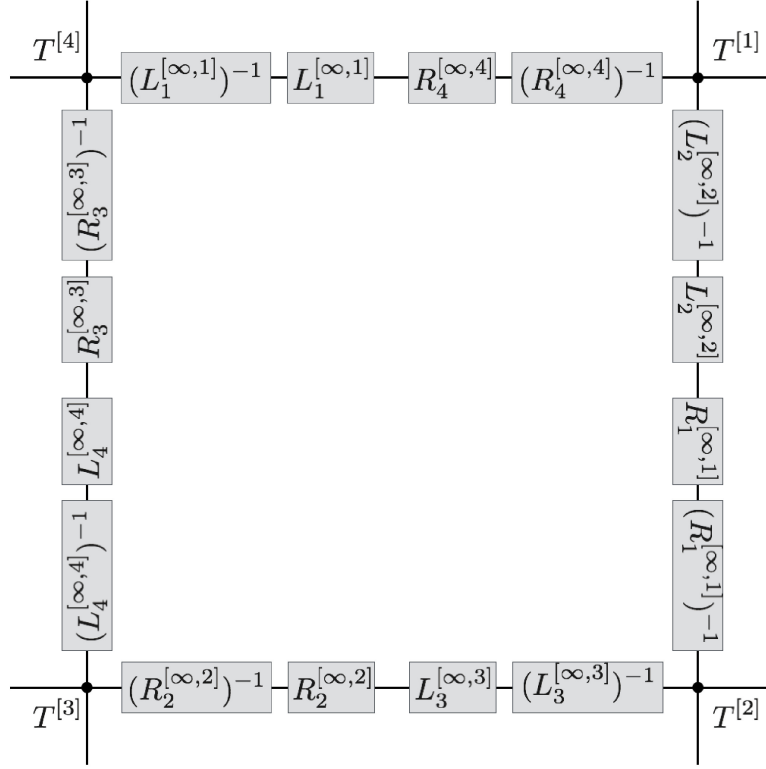


図 3.17: $(L_i^{[\infty,i]})^{-1}L_i^{[\infty,i]} = 1$ と $R_j^{[\infty,j]}(R_j^{[\infty,j]})^{-1} = 1$ の挿入。QR 分解 (LQ 分解) を繰り返すことで求めたテンソル $L_i^{[\infty,i]}$ (テンソル $R_j^{[\infty,j]}$) とそれらの逆をテンソル $T^{[1]}, T^{[2]}, T^{[3]}, T^{[4]}$ の間に挿入する。これにより図 3.12 のようにテンソルネットワークの形を変形することができる。

を用いた。他の射影テンソルに関しても同様に求めることができる。まとめると、

$$P_{4R} \equiv R_4^{[\infty,4]}V_{41}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{41}}}, \quad P_{1L} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{41}}}U_{41}^\dagger L_1^{[\infty,1]}, \quad (3.28)$$

$$P_{1R} \equiv R_1^{[\infty,4]}V_{12}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{12}}}, \quad P_{2L} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{12}}}U_{12}^\dagger L_1^{[\infty,2]}, \quad (3.29)$$

$$P_{2R} \equiv R_2^{[\infty,4]}V_{23}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{23}}}, \quad P_{3L} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{23}}}U_{23}^\dagger L_1^{[\infty,3]}, \quad (3.30)$$

$$P_{3R} \equiv R_3^{[\infty,4]}V_{34}\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{34}}}, \quad P_{4L} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_{34}}}U_{34}^\dagger L_1^{[\infty,4]} \quad (3.31)$$

となる。これら射影テンソルの挿入によって、1) EF ステップが完了する。

2) テンソルの分解では、TRG と同様に SVD による分解を行う。プラケットをなすテンソル $T_A T_B T_C T_D$ を分解すると 8 角形のテンソル $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8$ となる。ただし、テンソルの足の自由度の最大値は D_{cut} に制限する。ここで求めたテンソル $S_{1\sim 8}$ は図 3.7 のような損失関数を最小にするテンソルになっているため、このままだと TRG と同じ精度で分配関数が求まることになる。

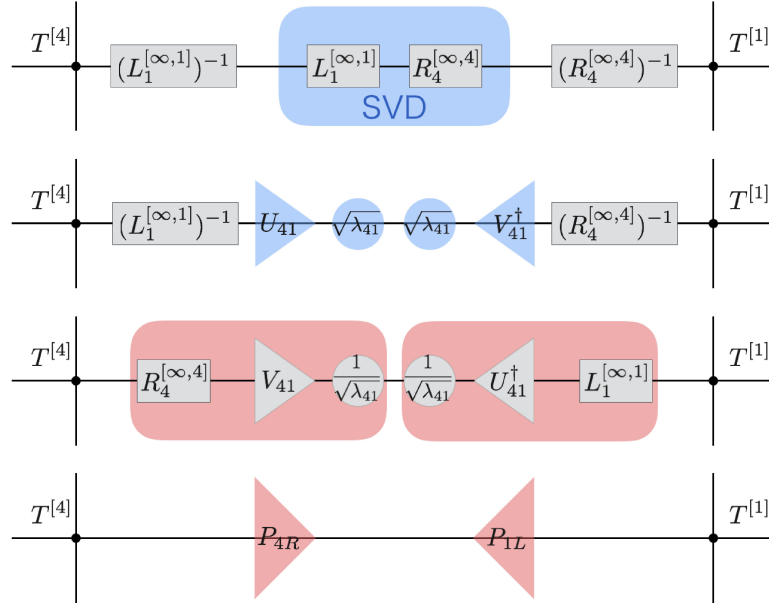


図 3.18: 射影テンソル P_{4R}, P_{1L} の求め方。SVD を用いることで、図 3.17 で挿入した $(L_1^{[\infty,1]})^{-1} L_1^{[\infty,1]} R_4^{[\infty,4]} (R_4^{[\infty,4]})^{-1}$ を変形する。ここで SVD により現れる特異値のうち小さい特異値を捨てることで、得られた射影テンソル P_{4R} と P_{1L} の間の自由度を減らすことができる。

そこで 3) テンソルのループ最適化では、以下のような Loop-TNR における損失関数 $\delta_{\text{Loop-TNR}}$ を最小にすることを考える：

$$\delta_{\text{Loop-TNR}} = \|T_A T_B T_C T_D - S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8\|. \quad (3.32)$$

ここで $T_A T_B T_C T_D$ はブラケット、 $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8$ は八角形のネットワークを意味する。この $\delta_{\text{Loop-TNR}}$ を最小化することをループ最適化と呼ぶ。式 (3.32) を図示すると図 3.19 の 1 番上のようなになる。ループ最適化を行うにあたって、テンソル $T_A T_B T_C T_D$ と $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8$ をそれぞれベクトル $|\Psi\rangle$ と $|\Psi'\rangle$ と表すと分かりやすい。これを図の 2 行目のように描く。このベクトル表記を用いると図の 3 行目のように $\delta_{\text{Loop-TNR}}^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle + \langle \Psi' | \Psi' \rangle - \langle \Psi | \Psi' \rangle - \langle \Psi' | \Psi \rangle$ と展開できる。ここで S_i を除く全てのテンソルを固定して、 S_i をパラメータとして

$$f(S_i) = \delta_{\text{Loop-TNR}}^2 = C + S_i^\dagger N_i S_i - W_i^\dagger S_i - S_i^\dagger W_i \quad (3.33)$$

を最小化することを考える。図 3.7 では S_6 を例にして描いている。 $f(S_i)$ を最小にする S_i は線型方程式

$$N_i S_i = W_i \quad (3.34)$$

を解くことで得られる。 $\delta_{\text{Loop-TNR}}$ の最小化するために、 $S_1 \sim S_8$ について順番に線型方程式を解く。 $S_1 \sim S_8$ の全てについて 1 回解いたら $N_{\text{opt}} = 1$ とカウントする。 N_{opt} を十分大きくすることで $\delta_{\text{Loop-TNR}}$ は最小化され、ループ最適化が完了する。

$$\begin{aligned}
 \delta_{\text{Loop-TNR}}^2 &= \left\| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right\|^2 \\
 &= \left\| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ |\Psi\rangle \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ |\Psi'\rangle \end{array} \right\|^2 \\
 &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \langle \Psi | \Psi \rangle \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \langle \Psi' | \Psi' \rangle \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \langle \Psi | \Psi' \rangle \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \langle \Psi' | \Psi \rangle \end{array} \\
 &= \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ C \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ N_6 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ S_6^\dagger \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ W_6^\dagger \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ S_6 \end{array} - \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ W_6 \end{array} \\
 &= C + S_6^\dagger N_6 S_6 - W_6^\dagger S_6 - S_6^\dagger W_6
 \end{aligned}$$

図 3.19: Loop-TNR の損失関数。テンソルの分解前後の誤差を、分解前のテンソルネットワーク $T_A T_B T_C T_D$ と分解後のテンソルネットワーク $S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6 S_7 S_8$ の差のフロベニウスノルムとして定義する。この式を展開すると、 $C + S_i^\dagger N_i S_i - W_i^\dagger S_i - S_i^\dagger W_i$ で表される。図では $i = 6$ の場合について描いている。

4) テンソルの縮約では、TRG と同様に古い自由度について縮約することでテンソルの数を少なくできる。

以上、1) ~ 4) を繰り返すことでテンソルネットワークくりこみを行い、最終的に分配関数を近似的に計算することができる。TRG と同様に D_{cut} を増やすことで近似の精度が上がる。さらに Loop-TNR では、 N_{opt} を増やしループ最適化の処理を行うことで、より近似の精度を上げることができる。ここで図 3.20 に、臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数について、Loop-TNR を用いて計算した結果の厳密解に対する相対誤差を示す。 N_{opt} を増やすことで近似の精度が上がっているのが分かる。十分収束していると考えられる $N_{\text{opt}} = 500$ で固定して、Loop-TNR で分配関数を計算した結果を図 3.8 に示す。Loop-TNR を用いることで、 D_{cut} を増やすにつれて相対誤差の減少が緩やかになるという TRG の欠点を解消できたことが分かる。

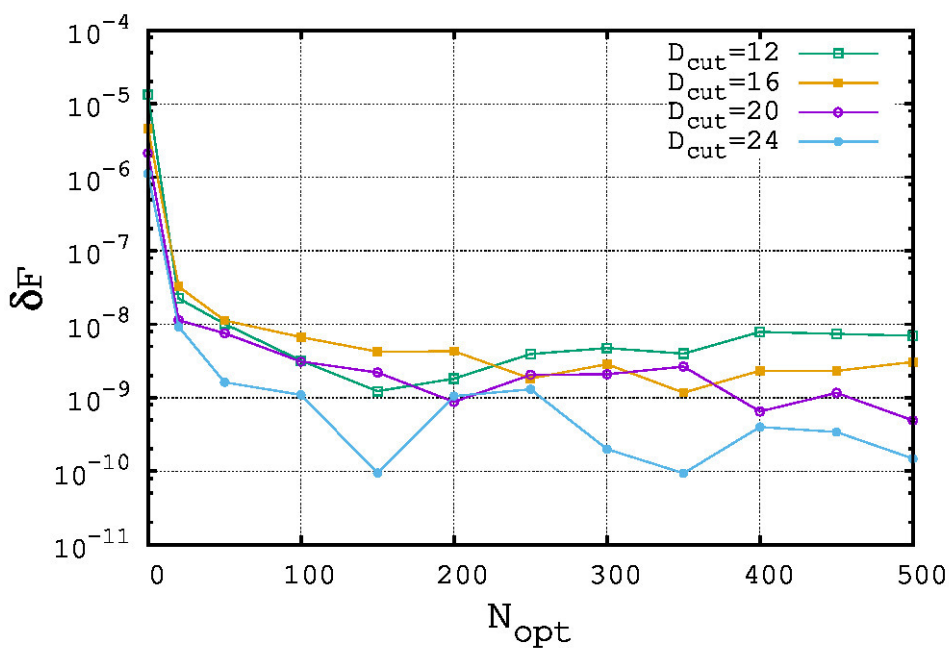


図 3.20: ループ最適化を用いて計算した臨界温度における 2 次元イジングモデルの分配関数の計算結果。縦軸は自由エネルギーの厳密解との相対誤差 δF 、横軸は $S_1 \sim S_8$ についての線型方程式を解いた回数 N_{opt} である。ただしここで、スピンの数は 2^{39} として計算を行った。この体積では、倍精度で分配関数の体積依存性は見られなかった。 N_{opt} を増やすことで誤差が減少していることが分かる。

第4章 2次元格子 $CP(N-1)$ モデルの解析

この章では、まず、2次元 $CP(N-1)$ モデルの分配関数のテンソルネットワーク表示について説明する。その後、得られたテンソルに対してテンソルくりこみの手法を適用することで数値解析を行う。数値解析は $\theta = 0$ の場合と $\theta \neq 0$ の場合について行い、モンテカルロ法や強結合展開の結果との比較も行う。以下の結果は [56, 57, 58, 59] の内容に従う。

4.1 2次元 $CP(N-1)$ モデルのテンソルネットワーク表示

2次元の格子 $CP(N-1)$ モデルの分配関数は、結合定数の逆数 β とパラメータ θ を用いて、

$$Z = \int \prod_x dz(x) \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) e^{-S_\theta}, \quad (4.1)$$

と書かれる。ここで、

$$S_\theta = -\beta N \sum_{x,\mu} \left[z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu}) U_\mu(x) + z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}) U_\mu^*(x) \right] - i \frac{\theta}{2\pi} \sum_p q_p, \quad (4.2)$$

$$dz(x) \equiv d^N z(x) d^N z^*(x) \delta(|z(x)| - 1), \quad (4.3)$$

である。 $z^a(x)$ は N 個の成分の複素スカラー場 ($a = 1, \dots, N$) であり、その大きさは $z(x) \cdot z(x) \equiv z^{*a}(x) z^a(x) = 1$ である。 $U_\mu(x)$ は補助場 $A_\mu(x)$ で書かれるリンク変数 ($U_\mu(x) = \exp\{iA_\mu(x)\} \in U(1)$) である。また、作用 S_θ の第2項は θ 項であり、

$$q_p = A_1(x) + A_2(x + \hat{1}) - A_1(x + \hat{2}) - A_2(x) \pmod{2\pi} \quad (4.4)$$

である。 p はブラケットを意味し、和は2次元格子上の全てのブラケットについてとる。

テンソルくりこみ群を用いて分配関数を計算するために、分配関数のテンソルネットワーク表示を得る必要がある。そのために、まず、ボルツマン因子を新しい整数で展開し、その後、古い自由度 (複素スカラー場 $z(x)$ と補助場 $A_\mu(x)$) で積分をする必要がある。展開と積分を完了することで、展開に用いた新しい整数自由度を添え字に持つテンソルネットワーク表示を得ることができる。

まず、 θ 項を含まない場合のテンソルネットワーク表示を導く。ボルツマン因子を新しい整数自由度で展開するために、character-like 展開を用いた [60]:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \beta N \left[z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu}) U_{\mu}(x) + z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}) U_{\mu}^{\dagger}(x) \right] \right\} \\ &= Z_0(\beta) \sum_{l,m=0}^{\infty} d_{(l;m)} \exp[i(m-l)A_{\mu}(x)] h_{(l;m)}(\beta) f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu})). \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで、 $d_{(l;m)}$ は character-like 表現の次元、 $h_{(l;m)}(\beta)$ は character-like 展開の係数、 $f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ は character-like 展開の character、 $Z_0(\beta)$ は $h_{(0;0)}(\beta) = 1$ と規格化する因子である。 l と m は非負の整数で、以下に示すようにテンソルの添え字になる。 $h_{(l;m)}(\beta)$ は第 1 種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ で表される：¹

$$h_{(l;m)}(\beta) = \frac{I_{N-1+l+m}(2N\beta)}{I_{N-1}(2N\beta)}. \quad (4.6)$$

第 1 種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ は固定された x に対して n の増加とともに急速に減少する関数であるため、例えば $l = m = l_{\max}$ で打ち切ることができる。規格化因子 $Z_0(\beta)$ は

$$Z_0(\beta) = \frac{(N-1)! I_{N-1}(2N\beta)}{(N\beta)^{N-1}}. \quad (4.7)$$

と表される。 $d_{(l;m)}$ と $f_{(l;m)}(z, z')$ は以下の直交条件を満たすように決定される：

$$\int dz f_{(l;m)}(z', z) f_{(l',m')}^*(z'', z) = \frac{1}{d_{(l;m)}} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} f_{(l;m)}(z', z''), \quad (4.8)$$

$$f_{(l;m)}(z, z) = d_{(l;m)}. \quad (4.9)$$

$m = 1, 2, 3$ の場合、任意の $l \geq 0$ に対して以下のように計算できる：

$m = 0$ の場合、

$$d_{(l;0)} = \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-2)!(N-1)}}, \quad (4.10)$$

$$f_{(l;0)}(z(x), z(x + \hat{\mu})) = \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-2)!(N-1)}} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^l. \quad (4.11)$$

$m = 1$ の場合、

$$d_{(l;1)} = \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \frac{N-1}{N-1+l}, \quad (4.12)$$

¹我々はこの表現を $l \geq 0$ かつ $m = 0, 1, 2, 3$ の場合について確認した。

$$f_{(l;1)}(z(x), z(x + \hat{\mu})) = \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[(z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^l (z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu})) - \frac{l}{N-1+l} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^{l-1} \right]. \quad (4.13)$$

$m = 2$ の場合、

$$d_{(l;2)} = \sqrt{\frac{(N+1+l)!(N+l)(N-1+l)}{2!l!N!(N-1)}} \frac{N(N-1)}{(N+l)(N-1+l)}, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & f_{(l;2)}(z(x), z(x + \hat{\mu})) \\ &= \sqrt{\frac{(N+1+l)!(N+l)(N-1+l)}{2!l!N!(N-1)}} \left[(z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^l (z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu}))^2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{2l}{N+l} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^{l-1} (z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu})) + \frac{l(l-1)}{(N+l)(N-1+l)} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^{l-2} \right]. \quad (4.15) \end{aligned}$$

$m = 3$ の場合、

$$d_{(l;3)} = \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{3!l!(N+1)!(N-1)}} \frac{(N+1)N(N-1)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}, \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} & f_{(l;3)}(z(x), z(x + \hat{\mu})) \\ &= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{3!l!(N+1)!(N-1)}} \left[(z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^l (z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu}))^3 \right. \\ & \quad - \frac{3l}{N+1+l} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^{l-1} (z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu}))^2 \\ & \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^{l-2} (z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu})) \\ & \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}))^{l-3} \right]. \quad (4.17) \end{aligned}$$

元の自由度 $z(x)$ を含む $f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ は複素スカラー場 $z(x)$ と $z(x + \hat{\mu})$ で表される。テンソルネットワーク表示を得るためには、各サイト毎に複素スカラー場 $z(x)$ の積分を実行しなくてはならない。そのために $f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ を以下のように書き直すことを考える。

$$f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu})) = \sum_{\{a\}} F_{(l;m)}^{\{a\}}(z(x)) \tilde{F}_{(l;m)}^{\{a\}}(z(x + \hat{\mu})), \quad (4.18)$$

ただし、 $\{a\} = a_1, a_2, \dots, a_l, a'_1, a'_2, \dots, a'_m$ であり、 $i = 1, 2, \dots, l$ に対して $a_i = 1, 2, \dots, N$ 、 $j = 1, 2, \dots, m$ に対して $a'_j = 1, 2, \dots, N$ とする。 $f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ の分解を絵で表すと図 4.1 のようになる。

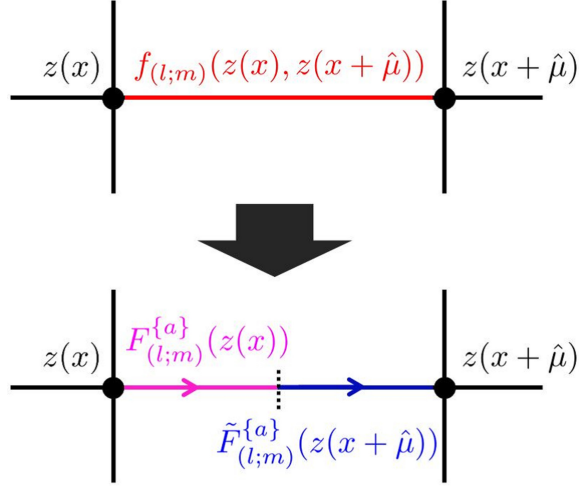


図 4.1: $f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ の分解。複素スカラー場 $z(x)$ を各サイト x 毎に積分するために、 $z(x)$ と $z(x + \hat{\mu})$ の結合を分割することを考える。新しい整数自由度 $\{a\}$ を用いることで、 $f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ を新しい 2 つの関数 $F_{(l;m)}^{\{a\}}(z(x))$ と $\tilde{F}_{(l;m)}^{\{a\}}(z(x + \hat{\mu}))$ に分解することができる。

F と \tilde{F} は $m = 1, 2, 3$ に対して以下のように求まる:
 $m = 0$ の場合、

$$F_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z) = C_{(l;0)} z^{a_1} \dots z^{a_l}, \quad (4.19)$$

$$\tilde{F}_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z) = C_{(l;0)} z^{*a_1} \dots z^{*a_l}, \quad (4.20)$$

ただし、

$$C_{(l;0)} \equiv \left(\frac{(N-1+l)!}{l!(N-2)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (4.21)$$

$m = 1$ の場合、

$$F_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z) = C_{(l;1)} \left[z^{a_1} z^{*a'_1} + E_{(l;1)}^{a_1 a'_1} \right] z^{a_2} \dots z^{a_l}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{F}_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z) = C_{(l;1)} \left[z^{*a_1} z^{a'_1} + \tilde{E}_{(l;1)}^{a_1 a'_1} \right] z^{*a_2} \dots z^{*a_l}, \quad (4.23)$$

ただし、

$$C_{(l;1)} = \left(\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.24)$$

$$E_{(l;1)}^{a_1 a'_1} = \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1}, \quad (4.25)$$

$$\tilde{E}_{(l;1)}^{a_1 a'_1} = -\sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1}. \quad (4.26)$$

$m = 2$ の場合、

$$\begin{aligned} F_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z) \\ = C_{(l;2)} \left[z^{a_1} z^{a_2} z^{*a'_1} z^{*a'_2} + E_{(l;2)}^{a_1 a'_1} z^{a_2} z^{*a'_2} \right] z^{a_3} \dots z^{a_l}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z) \\ = C_{(l;2)} \left[z^{*a_1} z^{*a_2} z^{a'_1} z^{a'_2} + \tilde{E}_{(l;2)}^{a_2 a'_2} z^{*a_1} z^{a'_1} \right] z^{*a_3} \dots z^{*a_l}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

ただし、

$$C_{(l;2)} = \left(\frac{(N+1+l)!(N+l)(N-1+l)}{2!l!N!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.29)$$

$$E_{(l;2)}^{a_1 a'_1} = -\frac{l(N-1+l) + \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N+l)(N-1+l)} \delta^{a_1 a'_1}, \quad (4.30)$$

$$\tilde{E}_{(l;2)}^{a_2 a'_2} = -\frac{l(N-1+l) - \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N+l)(N-1+l)} \delta^{a_2 a'_2}. \quad (4.31)$$

$m = 3$ の場合、

$$\begin{aligned} F_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z) \\ = C_{(l;3)} \left[z^{a_1} z^{a_2} z^{a_3} z^{*a'_1} z^{*a'_2} z^{*a'_3} + E_{1(l;3)}^{a_1 a'_1} z^{a_2} z^{a_3} z^{*a'_2} z^{*a'_3} + E_{2(l;3)}^{a_1 a_3 a'_1 a'_3} z^{a_2} z^{*a'_2} \right] z^{a_4} \dots z^{a_l}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z) \\ = C_{(l;3)} \left[z^{*a_1} z^{*a_2} z^{*a_3} z^{a'_1} z^{a'_2} z^{a'_3} + \tilde{E}_{1(l;3)}^{a_2 a'_2} z^{*a_1} z^{*a_3} z^{a'_1} z^{a'_3} + \tilde{E}_{2(l;3)}^{a_2 a_3 a'_2 a'_3} z^{*a_1} z^{a'_1} \right] z^{*a_4} \dots z^{*a_l}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

ただし、

$$C_{(l;3)} = \left(\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{3!l!(N+1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (4.34)$$

$$E_{1(l;3)}^{a_1 a'_1} = \frac{-\frac{3l}{N+1+l} + \sqrt{X}}{2} \delta^{a_1 a'_1}, \quad (4.35)$$

$$\tilde{E}_{1(l;3)}^{a_2 a'_2} = \frac{-\frac{3l}{N+1+l} - \sqrt{X}}{2} \delta^{a_2 a'_2}, \quad (4.36)$$

$$E_{2(l;3)}^{a_1 a_3 a'_1 a'_3} = \frac{\sqrt{Y} - \sqrt{X}}{2N} \delta^{a_1 a'_1} \delta^{a_3 a'_3}, \quad (4.37)$$

$$\tilde{E}_{2(l;3)}^{a_2 a_3 a'_2 a'_3} = -\frac{\sqrt{Y} - \sqrt{X}}{2N} \delta^{a_2 a'_2} \delta^{a_3 a'_3}, \quad (4.38)$$

$$X = \frac{3l(N+4-Nl-l^2)}{(N+l)(N+1+l)^2}, \quad (4.39)$$

$$Y = X + \frac{4Nl(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}. \quad (4.40)$$

ボルツマン因子を新しい自由度で展開できたので、あとは古い自由度 z と A の積分ができれば良い。今、あるサイト x に着目すると、図 4.2 のように 2つの F と \tilde{F} がある。それらを用いて、テンソルは以下のように表現できる:

$$\begin{aligned} & D_{((l_s; m_s), \{a\})((l_t; m_t), \{b\})((l_u; m_u), \{c\})((l_v; m_v), \{d\})}^x \\ &= \int dz(x) \sqrt{d_{(l_s; m_s)} d_{(l_t; m_t)} d_{(l_u; m_u)} d_{(l_v; m_v)} h_{(l_s; m_s)}(\beta) h_{(l_t; m_t)}(\beta) h_{(l_u; m_u)}(\beta) h_{(l_v; m_v)}(\beta)} \\ & \quad \times \tilde{F}_{(l_s; m_s)}^{\{a\}}(z(x)) F_{(l_t; m_t)}^{\{b\}}(z(x)) \tilde{F}_{(l_u; m_u)}^{\{c\}}(z(x)) F_{(l_v; m_v)}^{\{d\}}(z(x)). \end{aligned} \quad (4.41)$$

複素スカラー場 $z(x)$ と $z^*(x)$ の積分は、以下の積分公式 [61, 60] を用いることで実行できる:

$$\begin{aligned} \int dz z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_m} z^{*b_1} z^{*b_2} \dots z^{*b_k} &\equiv \int d^N z d^N z^* \delta(|z| - 1) z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_m} z^{*b_1} z^{*b_2} \dots z^{*b_k} \\ &= (\text{const.}) \times \delta_k^m \frac{(N-1)!}{(N-1+m)!} \sum_{\sigma \in S_m} \delta_{b_{\sigma_1}}^{a_1} \delta_{b_{\sigma_2}}^{a_2} \dots \delta_{b_{\sigma_m}}^{a_m} \\ &\equiv (\text{const.}) \times \delta_k^m \frac{(N-1)!}{(N-1+m)!} \delta_{\{b_1, b_2, \dots, b_m\}}^{\{a_1, a_2, \dots, a_m\}}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

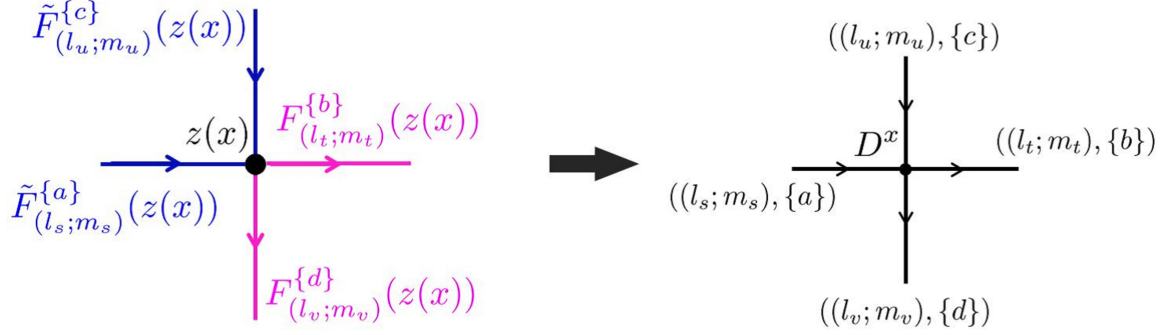


図 4.2: 複素スカラー場 $z(x)$ の積分。 $z(x)$ が含まれている $\tilde{F}_{(l;m)}^{\{a\}}(z(x))$, $F_{(l;m_t)}^{\{b\}}(z(x))$, $\tilde{F}_{(l;m)}^{\{c\}}(z(x))$, $F_{(l_v;m_v)}^{\{d\}}(z(x))$ を x 集め、 $z(x)$ の積分を行うことでテンソル D^x を得る。

ここで、2行目の \sum は添え字 b の順列について和をとる。以下に式 (4.41) にあるテンソル D^x の計算例をいくつか示す。ただし、ここでは

$$W_{(l;m)} \equiv \sqrt{d_{(l;m)} h_{(l;m)}(\beta)} C_{(l;m)} \quad (4.43)$$

とする。

例 1:

$$\begin{aligned} & D_{((l_s;0),\{a\})((l_t;0),\{b\})((l_u;0),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \\ &= \int dz(x) \sqrt{d_{(l_s;0)} d_{(l_t;0)} d_{(l_u;0)} d_{(l_v;0)} h_{(l_s;0)}(\beta) h_{(l_t;0)}(\beta) h_{(l_u;0)}(\beta) h_{(l_v;0)}(\beta)} \\ & \quad \times \tilde{F}_{(l_s;0)}^{a_1, \dots, a_{l_s}}(z(x)) F_{(l_t;0)}^{b_1, \dots, b_{l_t}}(z(x)) \tilde{F}_{(l_u;0)}^{c_1, \dots, c_{l_u}}(z(x)) F_{(l_v;0)}^{d_1, \dots, d_{l_v}}(z(x)) \\ &= W_{(l_s;0)} W_{(l_t;0)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\ & \quad \times \int dz(x) [z^{*a_1}(x) \cdots z^{*a_{l_s}}(x)] [z^{b_1}(x) \cdots z^{b_{l_t}}(x)] [z^{*c_1}(x) \cdots z^{*c_{l_u}}(x)] [z^{d_1}(x) \cdots z^{d_{l_v}}(x)] \\ &= W_{(l_s;0)} W_{(l_t;0)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \delta_{l_t+l_v}^{l_s+l_u} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u)!} \delta_{\{b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

最後の2行では、式 (4.19) と式 (4.42) を用いた。

例 2:

$$\begin{aligned}
 & D_{((l_s;1),\{a\})((l_t;0),\{b\})((l_u;0),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &= W_{(l_s;1)} W_{(l_t;0)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \int dz(x) \left[z^{*a_1}(x) z^{a'_1}(x) + \tilde{E}_{(l_s;1)}^{a_1 a'_1} \right] [z^{*a_2}(x) \cdots z^{*a_{l_s}}(x)] [z^{b_1}(x) \cdots z^{b_{l_t}}(x)] \\
 &\quad \quad \times [z^{*c_1}(x) \cdots z^{*c_{l_u}}(x)] [z^{d_1}(x) \cdots z^{d_{l_v}}(x)] \\
 &= W_{(l_s;1)} W_{(l_t;0)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \left[\delta_{l_t+l_v+1}^{l_s+l_u} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u)!} \delta_{\{a'_1, b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \tilde{E}_{(l_s;1)}^{a_1 a'_1} \delta_{l_t+l_v}^{l_s+l_u-1} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u-1)!} \delta_{\{b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_2, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}} \right]. \tag{4.45}
 \end{aligned}$$

例 3:

$$\begin{aligned}
 & D_{((l_s;2),\{a\})((l_t;0),\{b\})((l_u;0),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &= W_{(l_s;2)} W_{(l_t;0)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \int dz(x) \left[z^{*a_1}(x) z^{*a_2}(x) z^{a'_1}(x) z^{a'_2}(x) + \tilde{E}_{(l_s;2)}^{a_2 a'_2} z^{*a_1}(x) z^{a'_1}(x) \right] [z^{*a_3}(x) \cdots z^{*a_{l_s}}(x)] \\
 &\quad \quad \times [z^{b_1}(x) \cdots z^{b_{l_t}}(x)] [z^{*c_1}(x) \cdots z^{*c_{l_u}}(x)] [z^{d_1}(x) \cdots z^{d_{l_v}}(x)] \\
 &= W_{(l_s;2)} W_{(l_t;0)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \left[\delta_{l_t+l_v+2}^{l_s+l_u} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u)!} \delta_{\{a'_1, a'_2, b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}} \right. \\
 &\quad \quad \left. + \tilde{E}_{(l_s;2)}^{a_2 a'_2} \delta_{l_t+l_v+1}^{l_s+l_u-1} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u-1)!} \delta_{\{a'_1, b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, a_3, a_4, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}} \right]. \tag{4.46}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{((l_s;0),\{a\})((l_t;2),\{b\})((l_u;0),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &= W_{(l_s;0)} W_{(l_t;2)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \int dz(x) [z^{a_1}(x) \cdots z^{*a_{l_s}}(x)] \left[z^{b_1}(x) z^{b_2}(x) z^{*b'_1}(x) z^{*b'_2}(x) + E_{(l_t;2)}^{b_1 b'_1} z^{b_2}(x) z^{*b'_2}(x) \right] \\
 &\quad \quad \times [z^{b_3}(x) \cdots z^{b_{l_t}}(x)] [z^{*c_1}(x) \cdots z^{*c_{l_u}}(x)] [z^{d_1}(x) \cdots z^{d_{l_v}}(x)] \\
 &= W_{(l_s;0)} W_{(l_t;2)} W_{(l_u;0)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \left[\delta_{l_t+l_v}^{l_s+l_u+2} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u+2)!} \delta_{\{b_1, b_2, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, b'_1, b'_2, c_1, \dots, c_{l_u}\}} \right. \\
 &\quad \quad \left. + E_{(l_t;2)}^{b_1 b'_1} \delta_{l_t+l_v-1}^{l_s+l_u+1} \frac{(N-1)!}{(N-1+l_s+l_u+1)!} \delta_{\{b_2, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, b'_2, c_1, \dots, c_{l_u}\}} \right]. \tag{4.47}
 \end{aligned}$$

より簡単に表現するために次の式を定義する。

$$\begin{aligned}
 & S^x_{((l_s; \widetilde{m_s}), \{a\})((l_t; m_t), \{b\})((l_u; \widetilde{m_u}), \{c\})((l_v; m_v), \{d\})} \\
 & \equiv \delta_{m_s + l_t + m_u + l_v}^{l_s + m_t + l_u + m_v} \frac{(N-1)!}{(N-1 + l_s + m_t + l_u + m_v)!} \delta_{\{a'_1, \dots, a'_{m_s}, b_1, \dots, b_{l_t}, c'_1, \dots, c'_{m_u}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, b'_1, \dots, b'_{m_t}, c_1, \dots, c_{l_u}, d'_1, \dots, d'_{m_v}\}}. \quad (4.48)
 \end{aligned}$$

これを用いて、例えば次のように書くことができる。

$$S^x_{((l_s; 2), \{a\})((l_t; 0), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} = \delta_{l_t + l_v + 2}^{l_s + l_u} \frac{(N-1)!}{(N-1 + l_s + l_u)!} \delta_{\{a'_1, a'_2, b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}}, \quad (4.49)$$

$$S^x_{((l_s; 0), \{a\})((l_t; 2), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} = \delta_{l_t + l_v}^{l_s + l_u + 2} \frac{(N-1)!}{(N-1 + l_s + l_u + 2)!} \delta_{\{b_1, b_2, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, b'_1, b'_2, c_1, \dots, c_{l_u}\}}, \quad (4.50)$$

$$S^x_{((l_s-1; 1), \{a\})((l_t; 0), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} = \delta_{l_t + l_v + 1}^{l_s + l_u - 1} \frac{(N-1)!}{(N-1 + l_s + l_u - 1)!} \delta_{\{a'_1, b_1, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, a_3, a_4, \dots, a_{l_s}, c_1, \dots, c_{l_u}\}}, \quad (4.51)$$

$$S^x_{((l_s; 0), \{a\})((l_t-1; 1), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} = \delta_{l_t + l_v - 1}^{l_s + l_u + 1} \frac{(N-1)!}{(N-1 + l_s + l_u + 1)!} \delta_{\{b_2, \dots, b_{l_t}, d_1, \dots, d_{l_v}\}}^{\{a_1, \dots, a_{l_s}, b'_2, c_1, \dots, c_{l_u}\}}. \quad (4.52)$$

これらのテンソル S を用いることで、次のように表現できる。

$$\begin{aligned}
 & D^x_{((l_s; 2), \{a\})((l_t; 0), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} \\
 & = W_{(l_s; 2)} W_{(l_t; 0)} W_{(l_u; 0)} W_{(l_v; 0)} \\
 & \quad \times \left[S^x_{((l_s; 2), \{a\})((l_t; 0), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} + \tilde{E}_{(l_s; 2)}^{a_2 a'_2} S^x_{((l_s-1; 1), \{a\}_2)((l_t; 0), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} \right], \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D^x_{((l_s; 0), \{a\})((l_t; 2), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} \\
 & = W_{(l_s; 0)} W_{(l_t; 2)} W_{(l_u; 0)} W_{(l_v; 0)} \\
 & \quad \times \left[S^x_{((l_s; 0), \{a\})((l_t; 2), \{b\})((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} + E_{(l_t; 2)}^{b_1 b'_1} S^x_{((l_s; 0), \{a\})((l_t-1; 1), \{b\}_1)((l_u; 0), \{c\})((l_v; 0), \{d\})} \right]. \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

ここで $\{a\}_2$ の下付き添え字 “2” は $\{a\}$ の中に a_2 と a'_2 が無いことを意味する。 $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$ に関して同様である。このテンソル D の簡単な表記によって、より複雑なテンソルも簡単に計算することができる。

きる。例えば、

$$\begin{aligned}
 & D_{((l_s;1),\{a\})((l_t;2),\{b\})((l_u;2),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &= W_{(l_s;1)} W_{(l_t;2)} W_{(l_u;2)} W_{(l_v;0)} \\
 &\quad \times \left[S_{((l_s;1),\{a\})((l_t;2),\{b\})((l_u;2),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x + \tilde{E}_{(l_s;1)}^{a_1 a'_1} S_{((l_{s-1};0),\{a\}_1)((l_t;2),\{b\})((l_u;2),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \right. \\
 &\quad + E_{(l_t;2)}^{b_1 b'_1} S_{((l_s;1),\{a\})((l_{t-1};1),\{b\}_1)((l_u;2),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x + \tilde{E}_{(l_u;2)}^{c_2 c'_2} S_{((l_s;1),\{a\})((l_t;2),\{b\})((l_{u-1};1),\{c\}_2)((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &\quad + E_{(l_t;2)}^{b_1 b'_1} \tilde{E}_{(l_u;2)}^{c_2 c'_2} S_{((l_s;1),\{a\})((l_{t-1};1),\{b\}_1)((l_{u-1};1),\{c\}_2)((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &\quad + \tilde{E}_{(l_s;1)}^{a_1 a'_1} \tilde{E}_{(l_u;2)}^{c_2 c'_2} S_{((l_{s-1};0),\{a\}_1)((l_t;2),\{b\})((l_{u-1};1),\{c\}_2)((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &\quad + \tilde{E}_{(l_s;1)}^{a_1 a'_1} E_{(l_t;2)}^{b_1 b'_1} S_{((l_{s-1};0),\{a\}_1)((l_{t-1};1),\{b\}_1)((l_u;2),\{c\})((l_v;0),\{d\})}^x \\
 &\quad \left. + \tilde{E}_{(l_s;2)}^{a_1 a'_1} E_{(l_t;2)}^{b_1 b'_1} \tilde{E}_{(l_u;2)}^{c_2 c'_2} S_{((l_{s-1};0),\{a\}_1)((l_{t-1};1),\{b\}_1)((l_{u-1};1),\{c\}_2)((l_v;0),\{d\})}^x \right]. \tag{4.55}
 \end{aligned}$$

次に補助場 $A_\mu(x)$ の積分について考える。そのためにまず θ 項を含むボルツマン因子の展開を行う。character 展開 [62, 63] を用いると以下のように新しい整数自由度 n_p で展開できる:

$$\begin{aligned}
 e^{i\frac{\theta}{2\pi}q_p} &= \sum_{n_p \in \mathbb{Z}} e^{in_p \varphi_p} \frac{2\sin \frac{\theta+2\pi n_p}{2}}{\theta+2\pi n_p} \quad (\varphi_p \equiv A_1(x) + A_2(x+\hat{1}) - A_1(x+\hat{2}) - A_2(x)) \\
 &\equiv \sum_{n_p \in \mathbb{Z}} e^{in_p \varphi_p} G_{n_p}(\theta) \\
 &= \sum_{n_p \in \mathbb{Z}} e^{in_p(A_1(x)+A_2(x+\hat{1})-A_1(x+\hat{2})-A_2(x))} G_{n_p}(\theta). \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

複素スカラー場の場合と比較して、リンク変数の積分は簡単に実行できる。図 4.3 のように 1 つのリンクに 4 つの整数があり、

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} dA e^{i(u_p-t_p)A} e^{i(m-l)A} &= \delta_{u_p-t_p}^{l-m} \\
 &\equiv H_{u_p, t_p}^{(l; m)} \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

のように積分できる。

$\theta = 0$ の場合は特に、テンソル G と H は以下のように計算される:

$$G_{n_p}(\theta = 0) = \frac{\sin \pi n_p}{\pi n_p} = \delta_{n_p, 0}, \tag{4.58}$$

$$H_{u_p, t_p}^{(l; m)} \rightarrow H_{0, 0}^{(l; m)} = \delta_{l, m}. \tag{4.59}$$

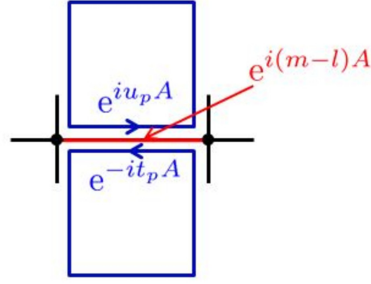


図 4.3: 補助場 A の積分。式 (4.5) の character-like 展開と式 (4.56) の character 展開で現れる補助場の項を積分する。

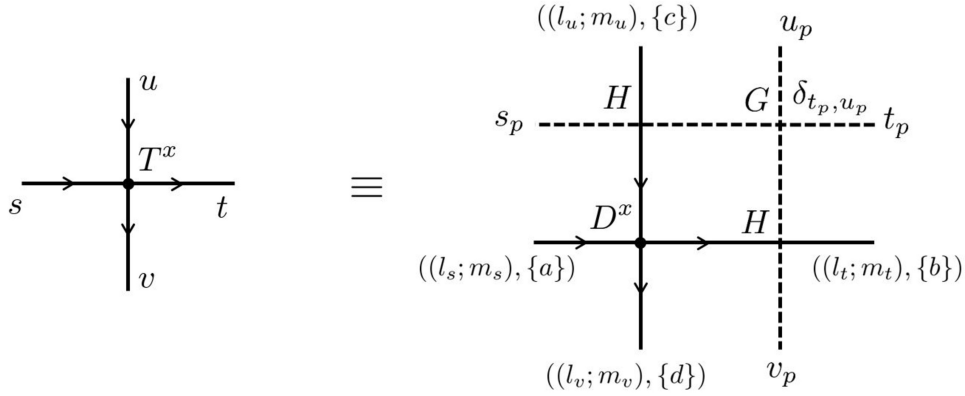


図 4.4: $CP(N-1)$ モデルのテンソルネットワーク表示。以上で求めたテンソル D , H , G をまとめて $CP(N-1)$ モデルのテンソル T とする。

以上のテンソルを全て合わせることで1つのテンソルネットワーク表示を得ることができる:

$$\begin{aligned}
 T_{stuv}^x &\equiv T_{((l_s; m_s), \{a\}, s_p)((l_t; m_t), \{b\}, t_p)((l_u; m_u), \{c\}, u_p)((l_v; m_v), \{d\}, v_p)}^x \\
 &\equiv D_{((l_s; m_s), \{a\})((l_t; m_t), \{b\})((l_u; m_u), \{c\})((l_v; m_v), \{d\})}^x \\
 &\quad \times H_{u_p, v_p}^{(l_t; m_t)} H_{s_p, t_p}^{(l_u; m_u)} G_{t_p}(\theta) \delta_{t_p, u_p}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

このテンソル T は図 4.4 のように描ける。

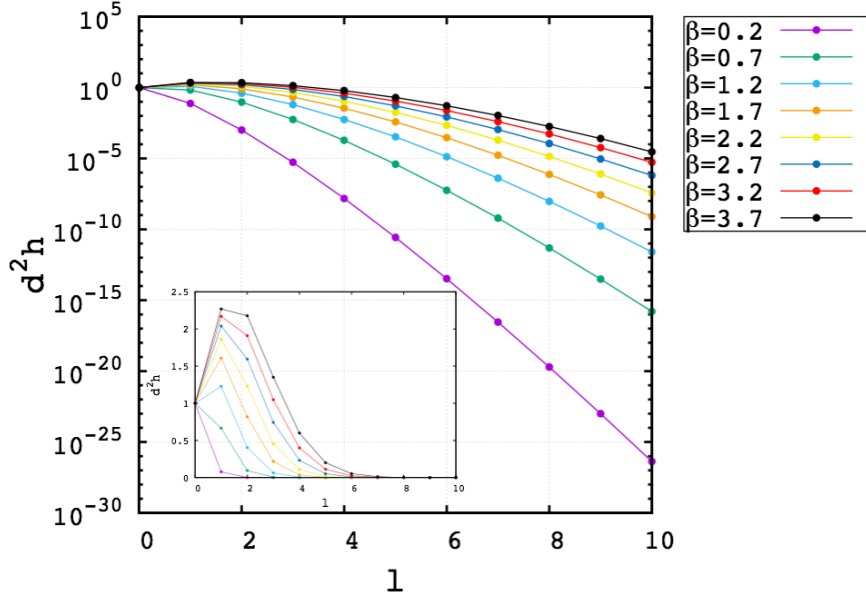


図 4.5: $CP(1)$ モデルの character-like 展開の重み ($N = 2$ の場合)。縦軸は character-like 展開の重み d^2h 、横軸は character-like 展開の非負の整数 l である。 l が増えると第 1 種変形ベッセル関数 $h_{(l;l)}$ が減少するため d^2h も減少する。また、 β が大きくなるにつれて、その減少は小さくなる。

4.2 $CP(1)$ モデルの数値解析 ($\theta = 0$ の場合)

本節では、 $N = 2, \theta = 0$ の場合について、式 (4.60) のテンソルを用いてテンソルネットワークのくりこみ手法により $CP(1)$ モデルの分配関数を計算した結果を示す。 $\theta = 0$ の場合、テンソルは式 (4.58)、(4.59) よりテンソルは

$$\begin{aligned} T_{stuv}^x &\equiv T_{((l_s;l_s),\{a\},0)((l_t;l_t),\{b\},0)((l_u;l_u),\{c\},0)((l_v;l_v),\{d\},0)}^x \\ &= D_{((l_s;l_s),\{a\})((l_t;l_t),\{b\})((l_u;l_u),\{c\})((l_v;l_v),\{d\})}^x, \end{aligned} \quad (4.61)$$

となる。ここで、 $i = 1, 2, \dots, l_s$ 、 $j = 1, 2, \dots, l_s$ であり、 a_i と a'_j は 1 または 2 をとる。また、 $\{b\}$ 、 $\{c\}$ 、 $\{d\}$ についても同様である。このテンソルは無限の要素から構成されるため、我々は (i) $l = 0, 1$ ($l_{\max} = 1$) の場合と、(ii) $l = 0, 1, 2$ ($l_{\max} = 2$) の場合について計算を行った。これは式 (4.5) において、 l と m の和を打ち切ることに対応する。ある $l = m$ で打ち切ることで、テンソルの足の自由度は $D_{\text{cut}} = (4^{l_{\max}+1} - 1)/3$ となる。 $l = m = 2$ の時、 $D_\beta = 21$ となる。式 (4.5) の重み $d_{(l;l)}^2 h_{(l;l)}(\beta)$ を図 weight に示す。²また $N = 2$ の時、 $d_{(l;l)} = \sqrt{2l+1}$ となる。³図から β が大きくなるにつれて打ち切り誤差が大きくなるのが分かる。

²ただし、ここで $f_{(l;m)}(z(x), z(x+\hat{\mu}))$ に関しては、その最大値である $d_{(l;m)}$ で置き換えた。

³我々はこの表現を $l = 0, 1, 2, 3$ の場合について確かめた。

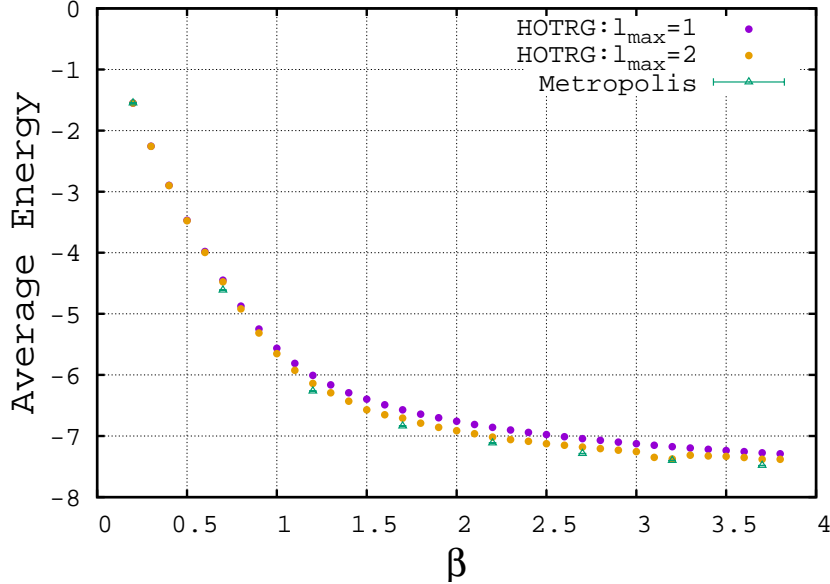


図 4.6: HOTRG とメトロポリス法によって計算した 4×4 格子での $CP(1)$ モデルの平均エネルギー。縦軸は平均エネルギー、横軸は結合定数の逆数 β である。 l の最大値 l_{\max} が増えるにつれて HOTRG の結果がメトロポリス法による結果に近づいているのが分かる。

まず、高次特異値分解を用いた高次テンソルくりこみ群 (Higher order TRG, 以下 HOTRG⁴[53]) という手法を用いて $CP(1)$ モデルの平均エネルギーを計算した。以下で $l_{\max} = 1, 2$ の場合について HOTRG を用いて計算した結果とモンテカルロシミュレーションによる結果を比較する。図 4.6 は、 4×4 格子での 2 つの方法による $CP(1)$ モデルの平均エネルギーの計算結果である。平均エネルギー E は

$$E = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (4.62)$$

で定義される。ここで L は 1 辺の格子サイズである。HOTRG では分配関数を計算し、 β に関する数値微分で計算した。モンテカルロシミュレーションではメトロポリス法を用いて、各 β に関して熱平衡後の 10^6 配位を用いて解析した。統計誤差はジャックナイフ法を用いて見積もり、自己相関時間は $\beta = 0 - 0.8$ の範囲で $\tau_{\text{int}} = 1 - 65$ となった。図 4.6 より、HOTRG の結果は l_{\max} を増やすとモンテカルロによる結果に近づくことが分かる。

⁴(付録 D) を参照。

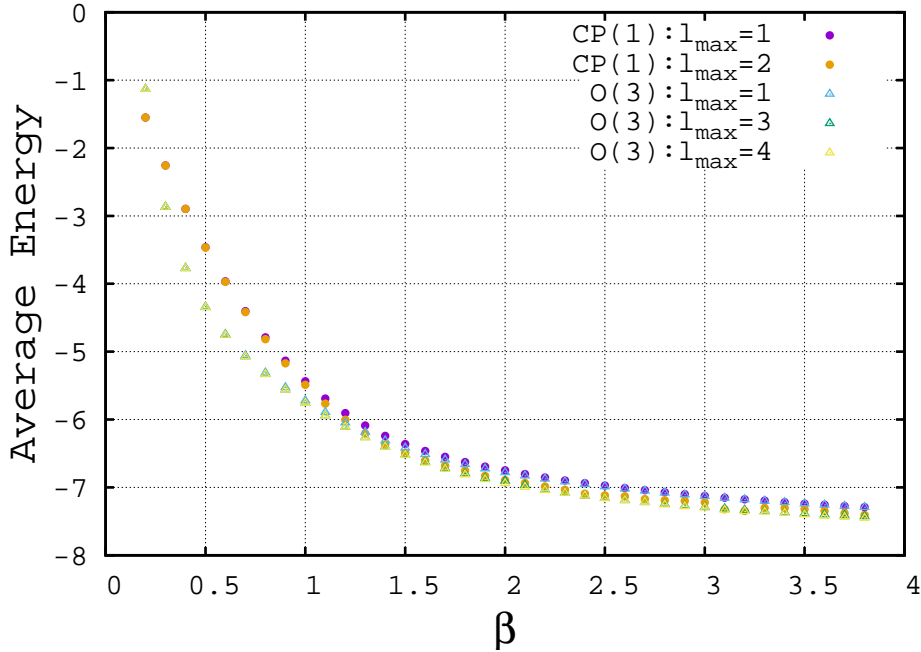


図 4.7: HOTRG によって計算した $CP(1)$ モデルと $O(3)$ モデルの $2^{20} \times 2^{20}$ 格子での平均エネルギー。縦軸は平均エネルギー、横軸は結合定数の逆数 β である。連続極限 ($\beta \rightarrow \infty$) に近づくにつれて 2 つの方法による結果も近づいているのが分かる。

次に、図 4.7 に HOTRG を用いて解析した $CP(1)$ モデルと $O(3)$ モデルの結果を示す。格子サイズは $2^{20} \times 2^{20}$ である。 $O(3)$ モデルのテンソルネットワーク表示は Unmuth-Yockey らの結果 [64] を用いた。 $CP(1)$ モデルと $O(3)$ モデルは連続極限で、平均エネルギーは

$$\frac{1}{\beta} + E_{O(3)}(\beta) = E_{CP(1)}(\beta) + 6 \quad (4.63)$$

の関係がある。この関係を用いて $O(3)$ モデルの結果 $E_{O(3)}$ を $CP(1)$ モデルの結果 $E_{CP(1)}(\beta)$ に重ねて表示している。連続極限 ($\beta \rightarrow \infty$) に近づくにつれて 2 つの結果も近づいているのが分かる。

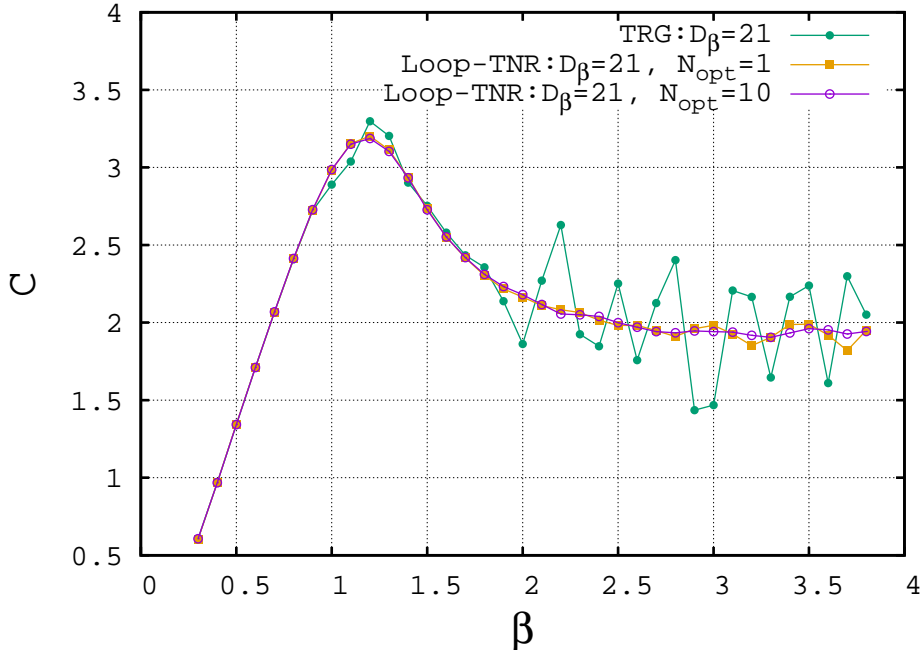


図 4.8: TRG と Loop-TNR を用いて計算した $CP(1)$ モデルの $2^{20} \times 2^{20}$ 格子での比熱の計算結果。縦軸は比熱、横軸は結合定数の逆数 β である。TRG による結果では比熱に揺らぎが見られるのに対して、Loop-TNR による結果は N_{opt} を増やすにつれて揺らぎが小さくなっているのが分かる。

次に、TRG と Loop-TNR を用いて比熱を計算した結果を示す。ここで比熱は

$$C = \frac{\beta^2}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z \tag{4.64}$$

で定義される。図 4.8 は数値微分を用いて比熱 C を計算した結果である。テンソルの足の自由度は $D_\beta = 21$ 、1 辺の格子サイズは $L = 2^{20}$ である。Loop-TNR におけるループ最適化の回数は $N_{\text{opt}} = 1$ または 10 とした。分配関数の誤差が大きい場合、 β の数値微分により生じる揺らぎが大きくなる。図 4.8 から分かるように、 N_{opt} が大きくなるにつれて揺らぎが小さくなっている。

4.3 $CP(1)$ モデルの数値解析 ($\theta \neq 0$ の場合)

$\theta \neq 0$ の場合、式 (4.58)、(4.59) の $l = m$ の条件はなくなり、 l と m が別々に走ることになる。図 4.1 に l_s, m_s の走り方と、その時の $\{a\}$ の次元を示す。

表 4.1: l_s, m_s の値と $\{a\}$ の次元

l_s	m_s	dim. of $\{a\}$
0	0	1
1	0	N
0	1	N
2	0	N^2
1	1	N^2
0	2	N^2
		\vdots

$l_s + m_s$ の最大値を k で打ち切ると $l_s \otimes m_s \otimes \{a\}$ の合わせた次元 D_β は

$$D_\beta = \frac{1 - (2+k)N^{k+1} + (1+k)N^{k+2}}{(1-N)^2} \quad (4.65)$$

となる。特に $N = 2$ の時、 $D_\beta = 1 + k \cdot 2^{k+1}$ になる。同様に、式 (4.56) の G の形から十分大きな $|s_p|$ で s_p の次元を打ち切ることができる。 s_p の打ち切り次元を D_θ とする。

図 4.9 と図 4.10 に $CP(1)$ モデルの分配関数を TRG と強結合展開を用いて計算した結果を示す。1 辺の格子サイズは $L = 2^{20}$ である。TRG では $D_\beta = 5, D_\theta = 2$ として計算している。強結合展開の結果は

Plefka と Samuel が求めた分配関数の式 [60] で $N = 2$ としたもの

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{L^2} \log Z \\
&= 2 \log Z_0(\beta) + \log \left(\frac{2}{\theta} \sin \frac{\theta}{2} \right) + d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta}{2\pi - \theta} - \frac{\theta}{2\pi + \theta} \right) h_{(1;0)}^4(\beta) \\
&+ 2d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)^2} + \frac{\theta^2}{(2\pi + \theta)^2} \right) h_{(1;0)}^6(\beta) + d_{(1;1)}^2 h_{(1;1)}^4(\beta) + 5d_{(1;0)}^4 \frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)(2\pi + \theta)} h_{(1;0)}^8(\beta) \\
&+ d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta^4}{(2\pi - \theta)^4} + \frac{\theta^4}{(2\pi + \theta)^4} \right) h_{(1;0)}^8(\beta) + 6d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta^3}{(2\pi - \theta)^3} - \frac{\theta^3}{(2\pi + \theta)^3} \right) h_{(1;0)}^8(\beta) \\
&- \frac{5}{2} d_{(1;0)}^4 \left(\frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)^2} + \frac{\theta^2}{(2\pi + \theta)^2} \right) h_{(1;0)}^8(\beta) + \frac{2}{\sqrt{3}} d_{(1;0)}^2 d_{(1;1)} \left(\frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)^2} + \frac{\theta^2}{(2\pi + \theta)^2} \right) h_{(1;0)}^6(\beta) h_{(1;1)}(\beta) \\
&- \frac{8}{\sqrt{3}} d_{(1;0)}^2 d_{(2;0)} \frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)(2\pi + \theta)} h_{(1;0)}^6(\beta) h_{(2;0)}(\beta) + d_{(2;0)}^2 \left(\frac{\theta}{\theta - 4\pi} + \frac{\theta}{\theta + 4\pi} \right) h_{(2;0)}^4(\beta) \\
&+ 2d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta^6}{(2\pi - \theta)^6} + \frac{\theta^6}{(2\pi + \theta)^6} \right) h_{(1;0)}^{10}(\beta) + 8d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta^5}{(2\pi - \theta)^5} - \frac{\theta^5}{(2\pi + \theta)^5} \right) h_{(1;0)}^{10}(\beta) \\
&+ 18d_{(1;0)}^2 \left(\frac{\theta^4}{(2\pi - \theta)^4} + \frac{\theta^4}{(2\pi + \theta)^4} \right) h_{(1;0)}^{10}(\beta) \\
&- 16d_{(1;0)}^4 \left(\frac{\theta}{2\pi - \theta} - \frac{\theta}{2\pi + \theta} \right) \left(\frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)^2} + \frac{\theta^2}{(2\pi + \theta)^2} \right) h_{(1;0)}^{10}(\beta) \\
&+ \frac{12}{\sqrt{3}} d_{(1;0)}^2 d_{(1;1)} \left(\frac{\theta^3}{(2\pi - \theta)^3} - \frac{\theta^3}{(2\pi + \theta)^3} \right) h_{(1;0)}^8(\beta) h_{(1;1)}(\beta) \\
&+ \frac{4}{\sqrt{3}} d_{(1;0)}^2 d_{(1;1)} \left(\frac{\theta}{2\pi - \theta} - \frac{\theta}{2\pi + \theta} \right) h_{(1;0)}^4(\beta) h_{(1;1)}^3(\beta) \\
&+ \frac{24}{\sqrt{3}} d_{(1;0)}^2 d_{(2;0)} \left(\frac{\theta^3}{(2\pi - \theta)(2\pi + \theta)^2} - \frac{\theta^3}{(2\pi - \theta)^2(2\pi + \theta)} \right) h_{(1;0)}^8(\beta) h_{(2;0)}(\beta) \\
&+ \frac{8}{\sqrt{3}} d_{(1;0)}^2 d_{(2;0)} \left(\frac{\theta^2}{(2\pi - \theta)(\theta - 4\pi)} - \frac{\theta^2}{(2\pi + \theta)(\theta + 4\pi)} \right) h_{(1;0)}^4(\beta) h_{(2;0)}^3(\beta) \tag{4.66}
\end{aligned}$$

を用いた。図 4.9 から、 $\beta = 0.2$ では 2 つの方法による解析結果が一致しているのが分かる。よって複素作用問題が生じる系に対して TRG による解析が正しく機能していることがわかる。一方で図 4.9 の $\beta = 0.7$ の結果では、2 つの方法による解析結果にずれが生じているのが分かる。このずれは、強結合展開による方法が β が小さい領域でのみ有効な手法であることから生じていると考えられる。強結合展開を用いた先行研究では、自由エネルギーの最大値を相転移点とし、 $\beta - \theta$ 平面を閉じ込め相と非閉じ込め相に分けた。強結合展開の方法を用いて、さらに大きな β に関して解析した結果が図 4.11 である。この結果は Schierholz のモンテカルロ法を用いて解析した結果 [39] を支持している。しかし、この β の領域では、強結合展開による解析が有効ではない可能性があるため、非閉じ込め相の存在の有無についてはさらなる調査が必要である。Plefka と Samuel [40] や Imachi ら [41] は Schierholz と同様の数値解析を行なったが、非閉じ込め相に対して否定的な結果を得ている。以下の TRG による解析で示すように、本研究で解析した領域 $0 \leq \beta \leq 0.8$ では非閉じ込め相は見つからなかった。

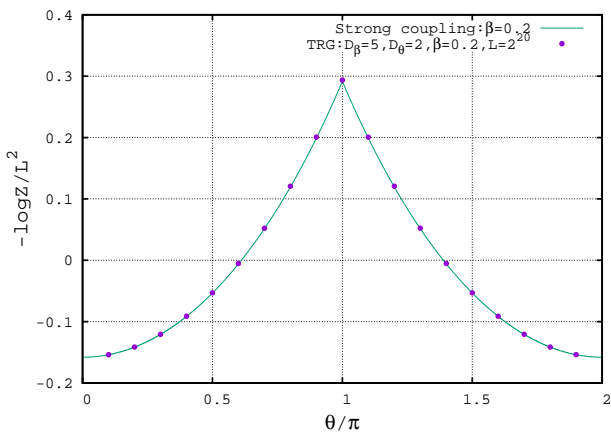


図 4.9: $\beta = 0.2$ での θ 項を含む $CP(1)$ モデルの分配関数を TRG と強結合展開を用いて計算した結果。横軸は θ/π である。TRG の解析では体積を $2^{20} \times 2^{20}$ とした。このスケールでは 2 つの方法による結果が一致しているのが分かる。

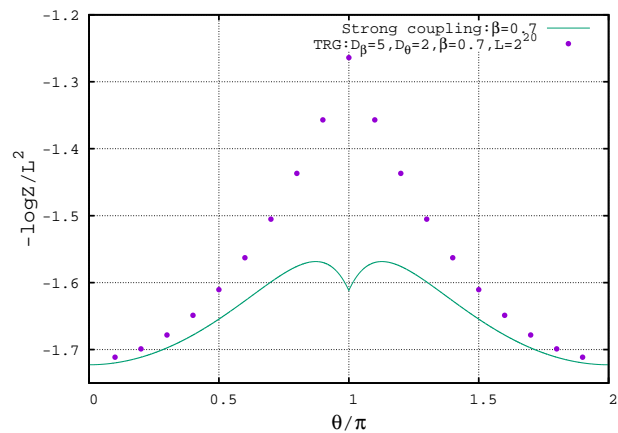


図 4.10: $\beta = 0.7$ での θ 項を含む $CP(1)$ モデルの分配関数を TRG と強結合展開を用いて計算した結果。横軸は θ/π である。TRG の解析では体積を $2^{20} \times 2^{20}$ とした。 β が大きくなると 2 つの方法による結果にずれが生じることが分かる。

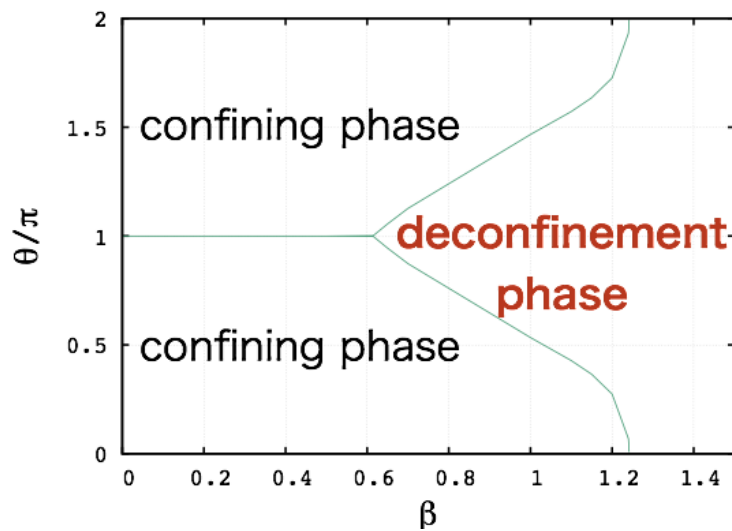


図 4.11: $\beta - \theta$ 平面における強結合展開を用いた $CP(1)$ モデルの相構造の解析結果。先行研究に従って、自由エネルギーが平らになる点を相転移点として閉じ込め相と非閉じ込め相に分けた。

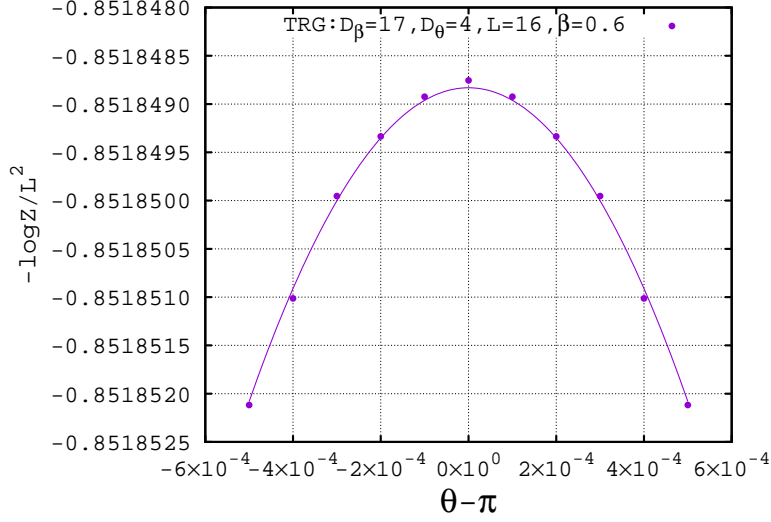


図 4.12: $\beta = 0.6, L = 16$ での TRG を用いた $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。横軸は $\theta - \pi$ とした。式 (4.67) に従ってフィットした結果を実線で描いた。

次に、 $\theta = \pi$ での相転移の次数を調べるために $\theta = \pi$ 近傍の解析を行った。図 4.12、図 4.13、図 4.14 に $\beta = 0.6$ の時の $\theta = \pi$ 近傍での結果を示す。1 辺の格子サイズはそれぞれ $L = 16, 32, 64$ である。図の点は TRG を用いて $-\frac{1}{L^2} \log Z$ を計算している。テンソルの足の自由度を $D_\beta = 17, D_\theta = 4$ とした。曲線は多項式

$$-\frac{1}{L^2} \log Z = c_0 + c_2(\theta - \pi)^2 + c_4(\theta - \pi)^4 + \dots \tag{4.67}$$

でフィットした結果である。ここで、フィッティングパラメータを c_0, c_2, c_4, \dots とした。ここで、データ点を 2 つの関数

$$G(\theta) = g_0 + g_2(\theta - \pi)^2, \tag{4.68}$$

$$H(\theta) = h_0 + h_2(\theta - \pi)^2 + h_4(\theta - \pi)^4 \tag{4.69}$$

でフィットすることで、パラメータ c_2 と c_4 に関して誤差を含めて $g_2 \pm \delta g_2, h_2 \pm \delta h_2$ と求めたとする。これらを用いることで c_2 を誤差を含めて、

$$c_2 = g_2 \pm \delta c_2 \quad (\delta c_2 = \delta g_2 + |g_2 - h_2|) \tag{4.70}$$

とした。

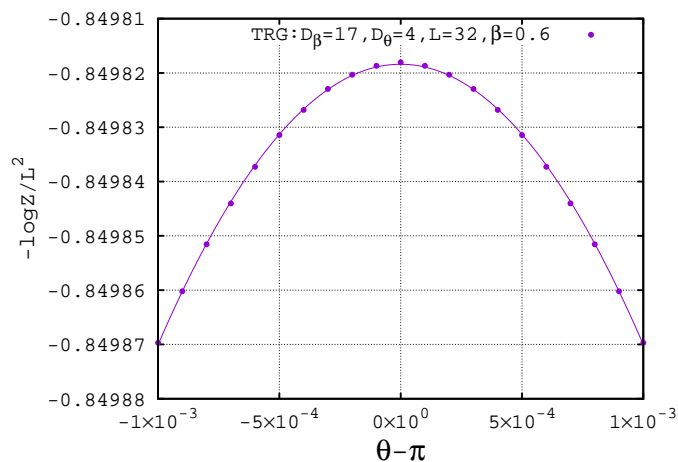


図 4.13: $\beta = 0.6, L = 32$ での TRG を用いた $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。横軸は $\theta - \pi$ とした。式 (4.67) に従ってフィットした結果を実線で描いた。

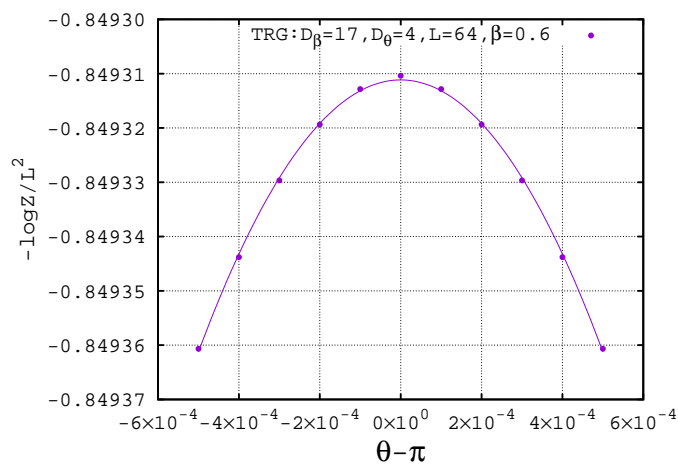


図 4.14: $\beta = 0.6, L = 64$ での TRG を用いた $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。横軸は $\theta - \pi$ とした。式 (4.67) に従ってフィットした結果を実線で描いた。

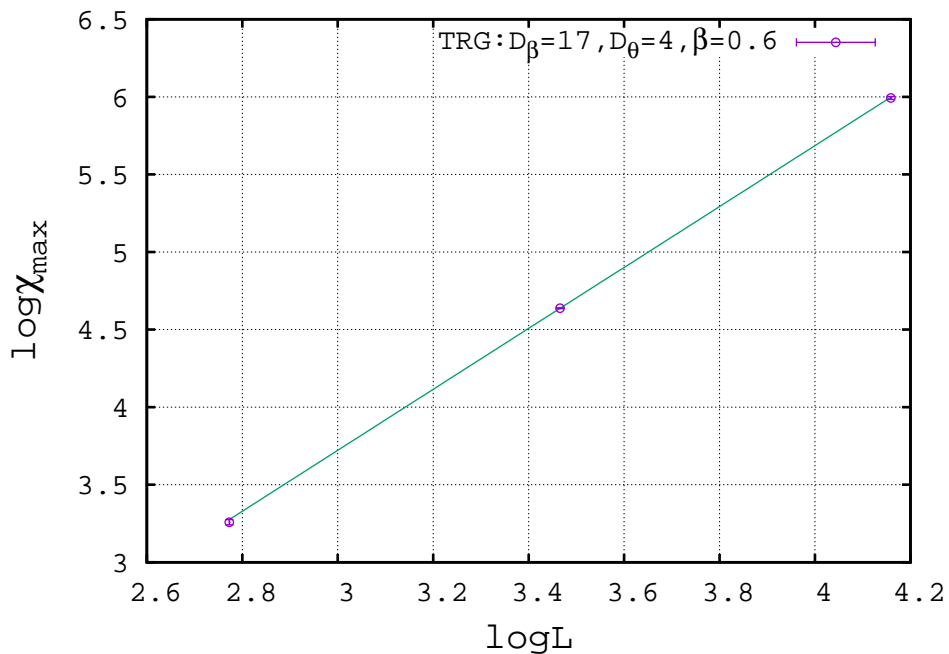


図 4.15: $\beta = 0.6$ での χ_{\max} の体積依存性。

ここで相転移の次数を調べるために、トポロジカル感受率を

$$\chi(\theta) = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \log Z}{\partial \theta^2}. \quad (4.71)$$

と定義する。式 (4.67)、(4.71) から $\chi(\theta)$ の最大値 χ_{\max} を求めることができ、

$$\chi_{\max} = \chi(\theta = \pi) = -2c_2 \quad (4.72)$$

となる。相転移の次数は χ_{\max} の体積依存性

$$\chi_{\max} \propto L^b \quad (4.73)$$

から決定できる。図 4.15 の傾きから指数 b を得ることができる。

以上の指数 b を求める手順を $\beta = 0.0 - 0.8$ で 0.1 刻みで行なった。 $\beta = 0.6$ 以外の $-\frac{1}{L^2} \log Z$ と χ_{\max} の結果を以下に示す。各パラメータ D_β, D_θ, L は以下の場合について計算した。

- $\beta = 0.0$ の場合 : $D_\theta = 2, L = 128, 256, 512, 1024$
- $\beta = 0.1$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 2, L = 64, 128, 256, 512, 1024$
- $\beta = 0.2$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 2, L = 64, 128, 256$
- $\beta = 0.3$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 2, L = 64, 128, 256$
- $\beta = 0.4$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 2, L = 32, 64, 128$
- $\beta = 0.5$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 2, L = 8, 16, 32$
- $\beta = 0.7$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 4, L = 8, 16, 32$
- $\beta = 0.8$ の場合 : $D_\beta = 17, D_\theta = 4, L = 8, 16, 32$

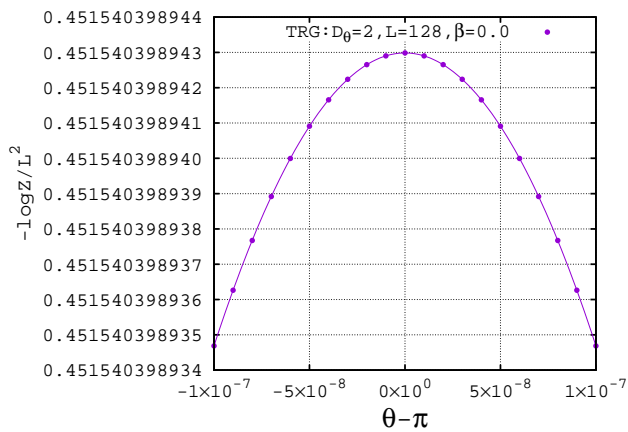


図 4.16: $\beta = 0.0, L = 128$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

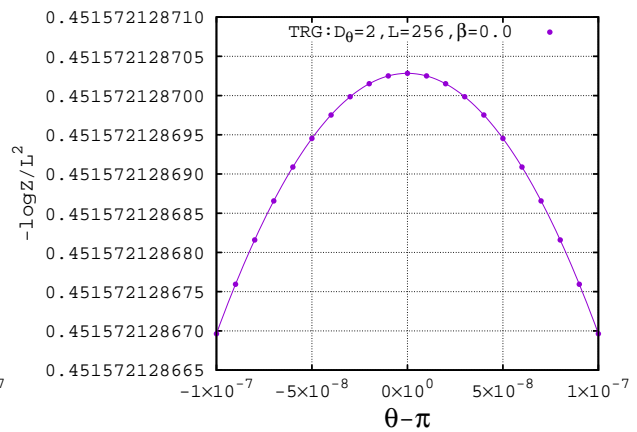


図 4.17: $\beta = 0.0, L = 256$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

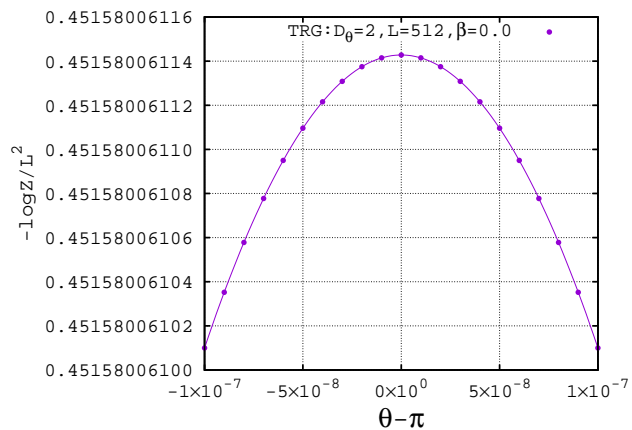


図 4.18: $\beta = 0.0, L = 512$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

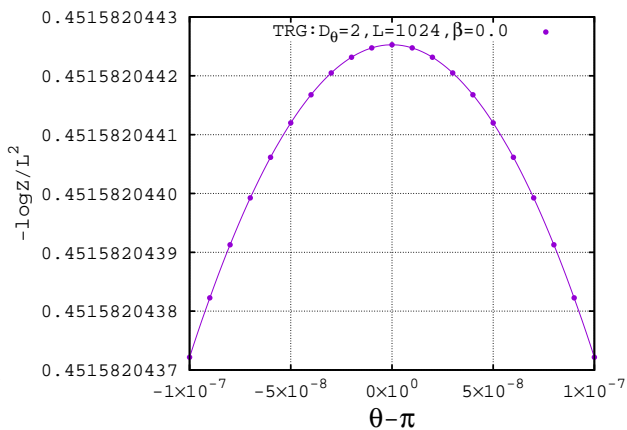


図 4.19: $\beta = 0.0, L = 1024$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

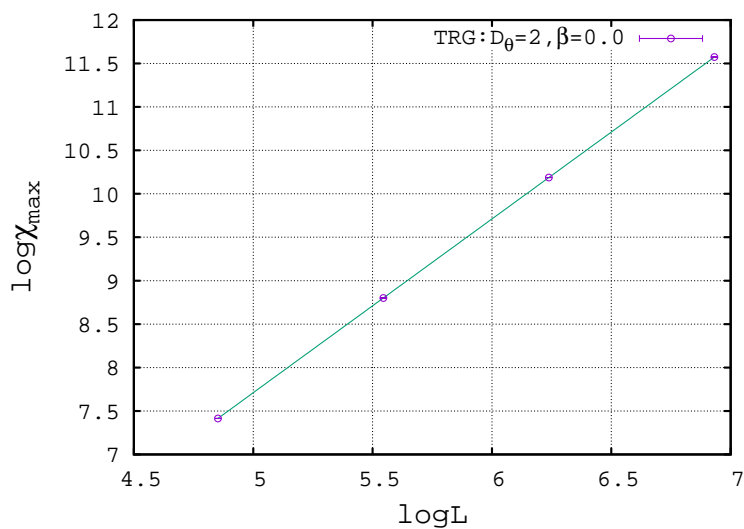


図 4.20: $\beta = 0.0$ での χ_{\max} の体積依存性。

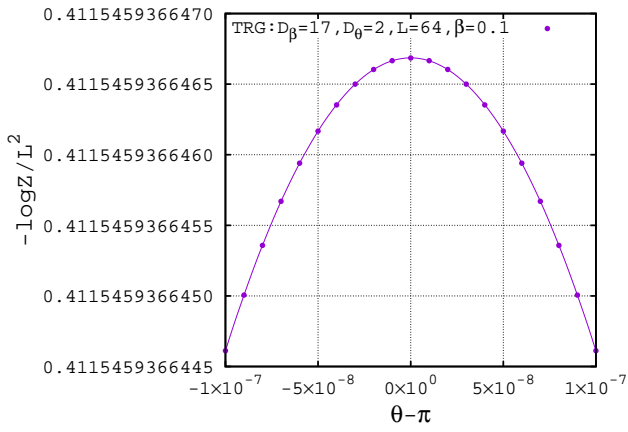


図 4.21: $\beta = 0.1, L = 64$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

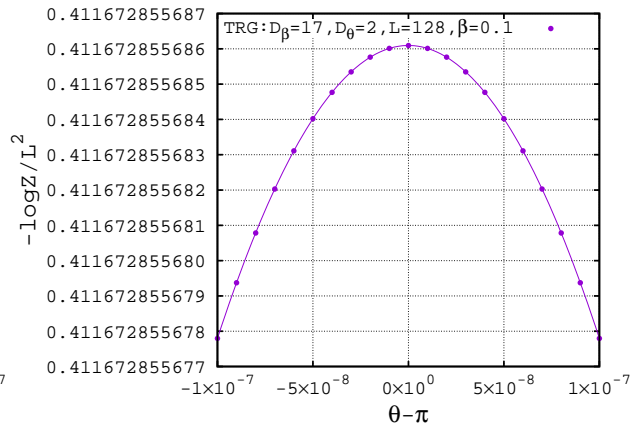


図 4.22: $\beta = 0.1, L = 128$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

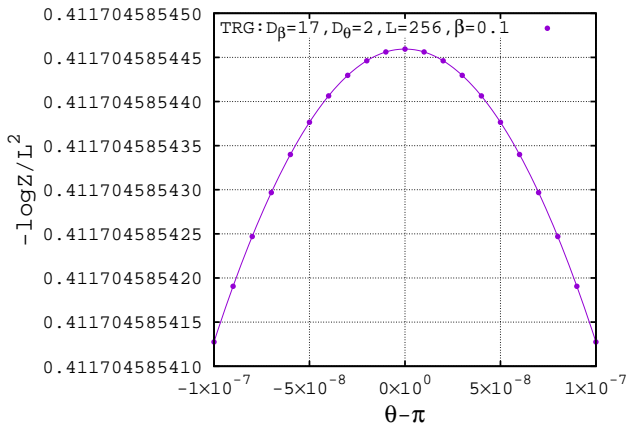


図 4.23: $\beta = 0.1, L = 256$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

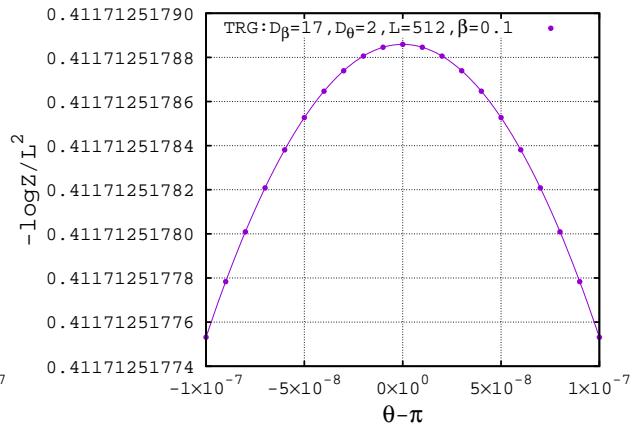


図 4.24: $\beta = 0.1, L = 512$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

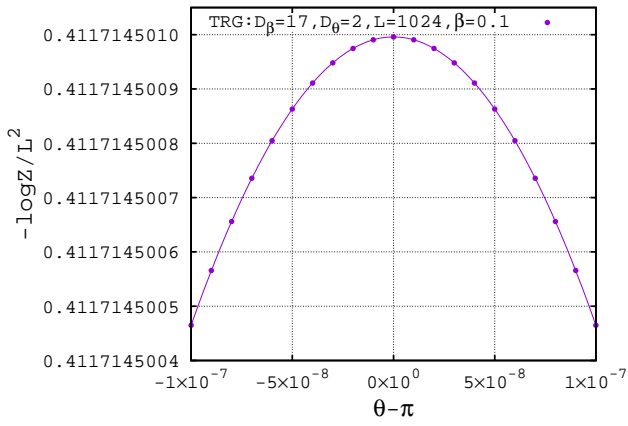


図 4.25: $\beta = 0.1, L = 1024$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

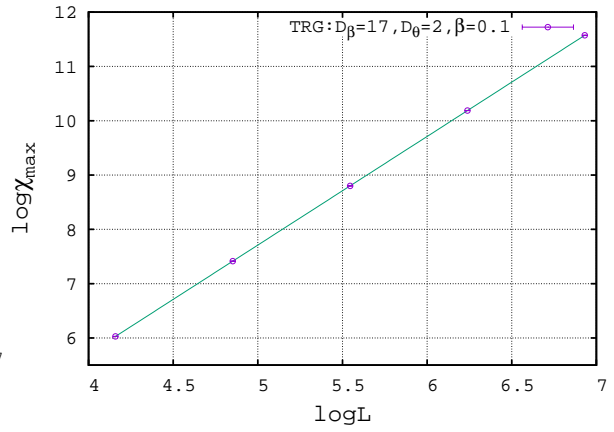


図 4.26: $\beta = 0.1$ での χ_{\max} の体積依存。

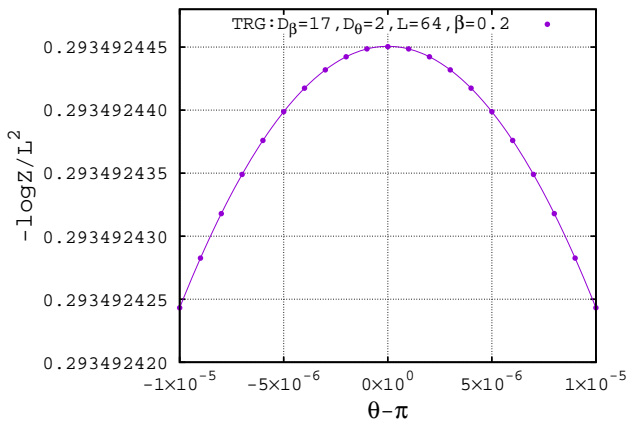


図 4.27: $\beta = 0.2, L = 64$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

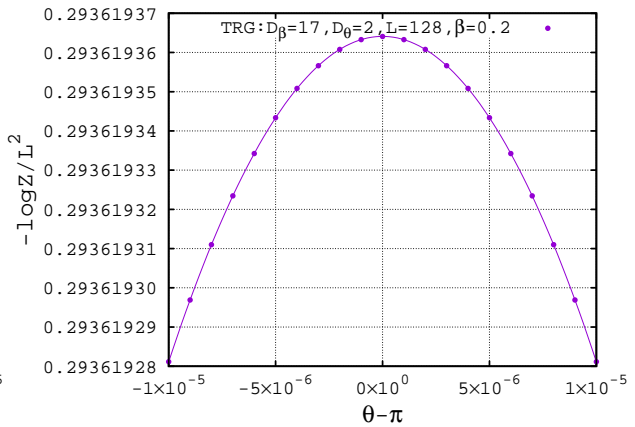


図 4.28: $\beta = 0.2, L = 128$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

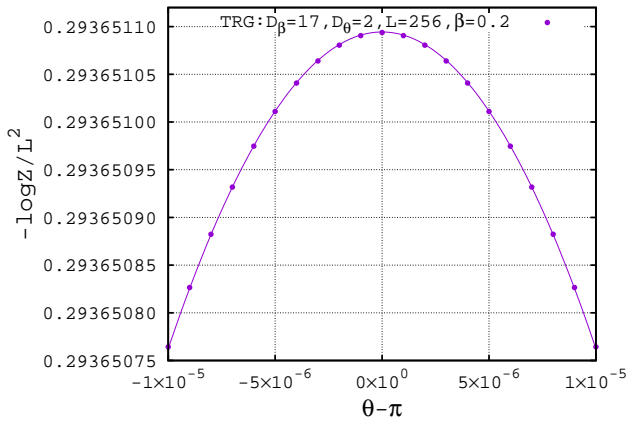


図 4.29: $\beta = 0.2, L = 256$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

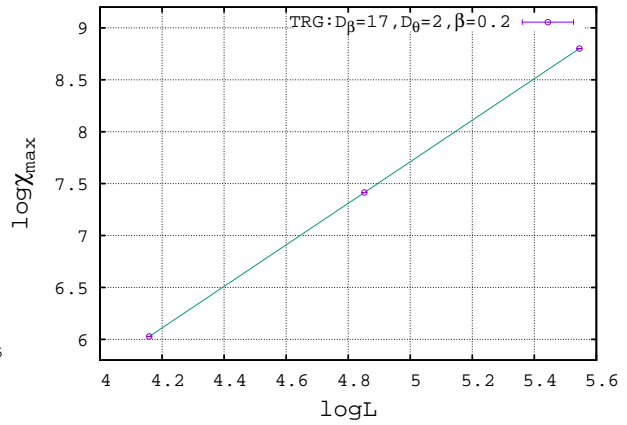


図 4.30: $\beta = 0.2$ での χ_{\max} の体積依存性。

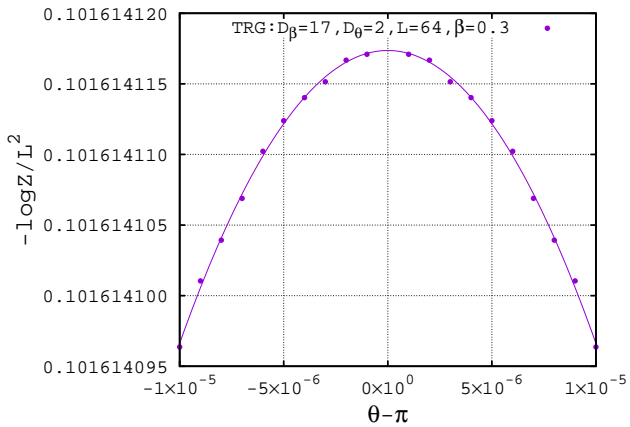


図 4.31: $\beta = 0.3, L = 64$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

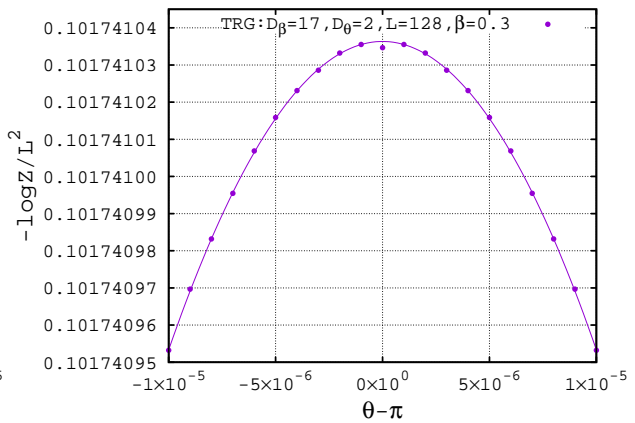


図 4.32: $\beta = 0.3, L = 128$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

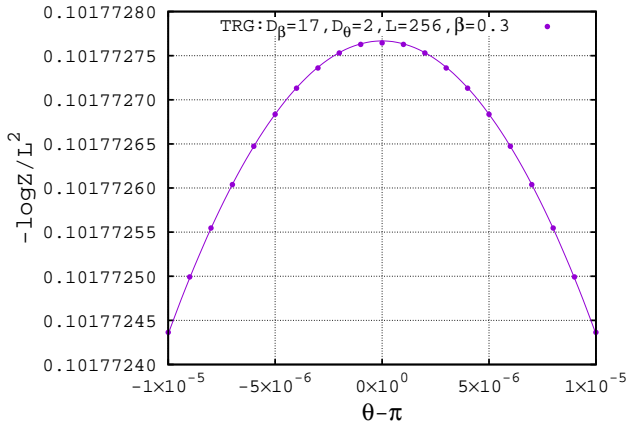


図 4.33: $\beta = 0.3, L = 256$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

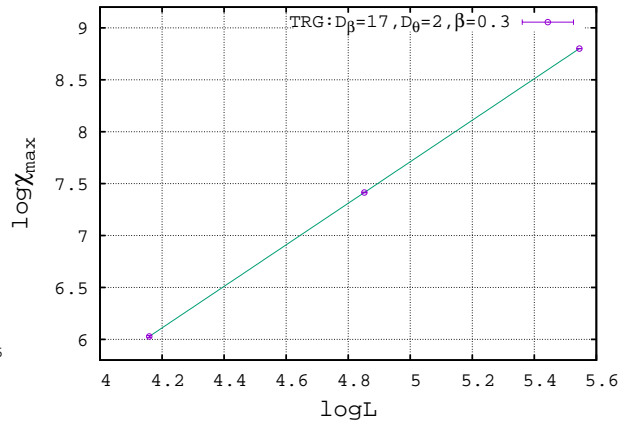


図 4.34: $\beta = 0.3$ での χ_{\max} の体積依存性。

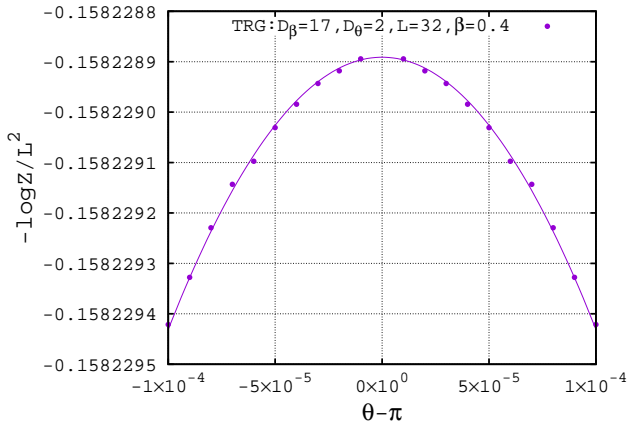


図 4.35: $\beta = 0.4, L = 32$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

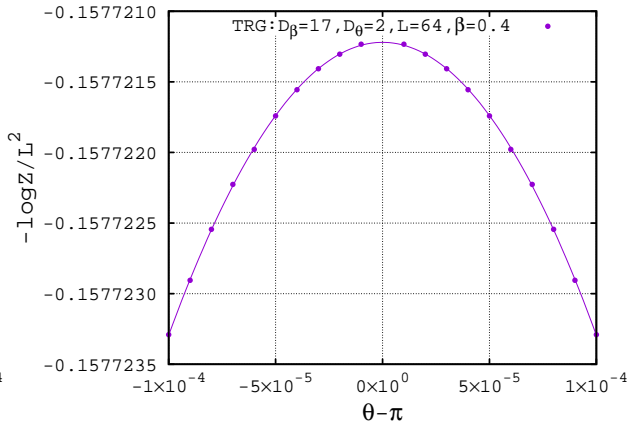


図 4.36: $\beta = 0.4, L = 64$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

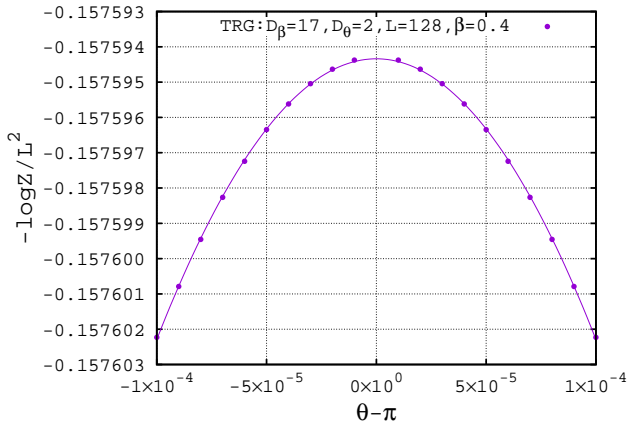


図 4.37: $\beta = 0.4, L = 128$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

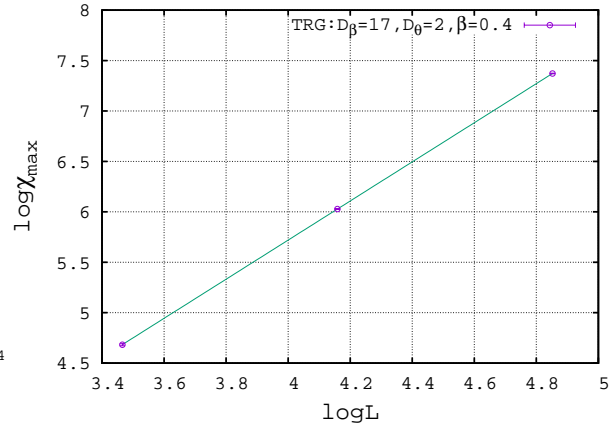


図 4.38: $\beta = 0.4$ での χ_{\max} の体積依存性。

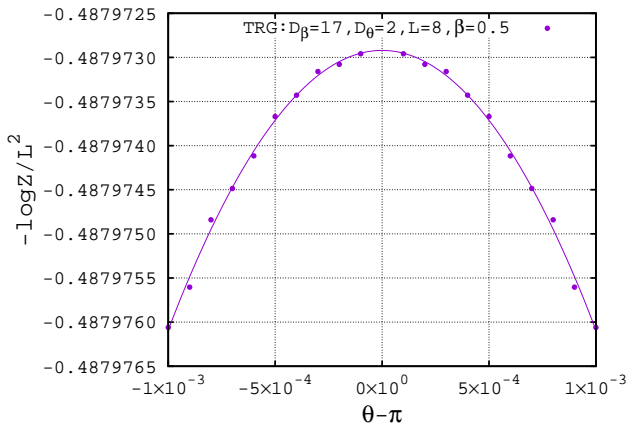


図 4.39: $\beta = 0.5, L = 8$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

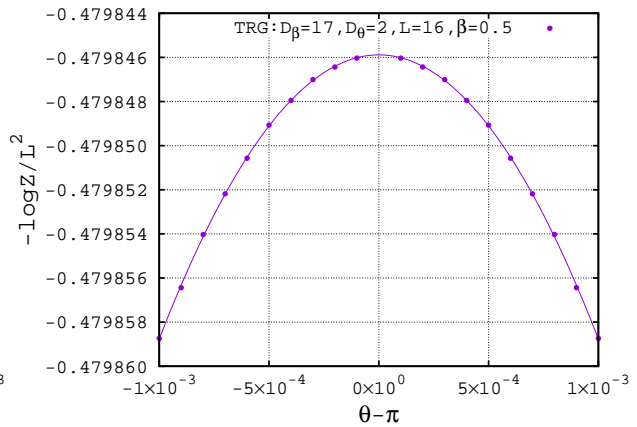


図 4.40: $\beta = 0.5, L = 16$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

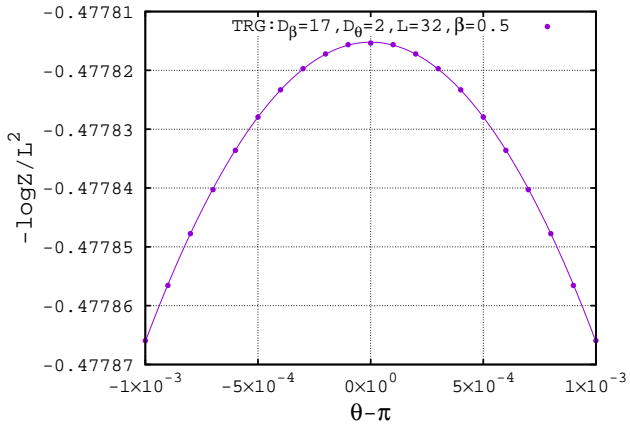


図 4.41: $\beta = 0.5, L = 32$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

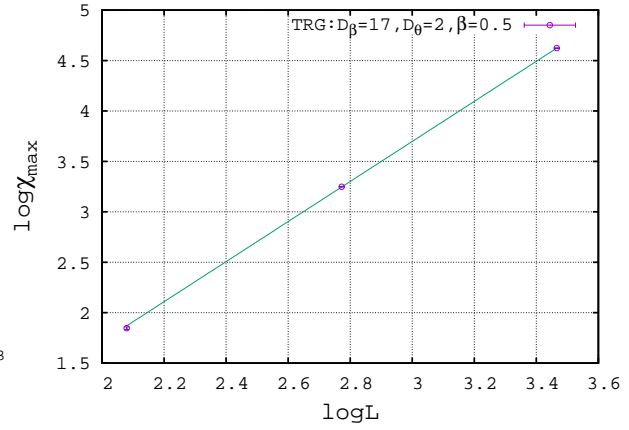


図 4.42: $\beta = 0.5$ での χ_{\max} の体積依存性。

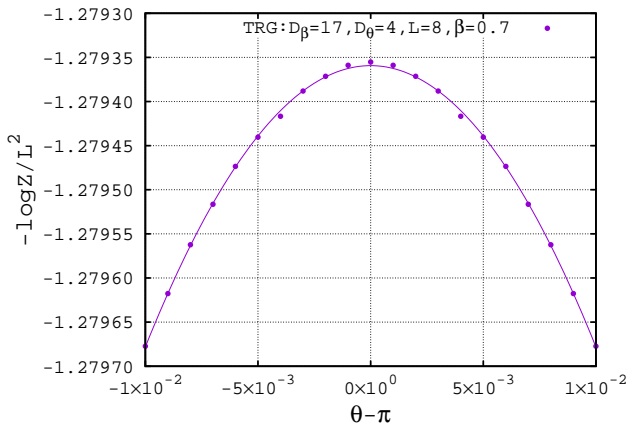


図 4.43: $\beta = 0.7, L = 8$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

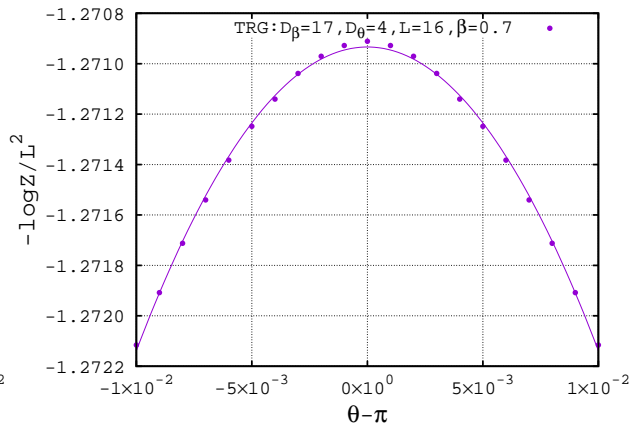


図 4.44: $\beta = 0.7, L = 16$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

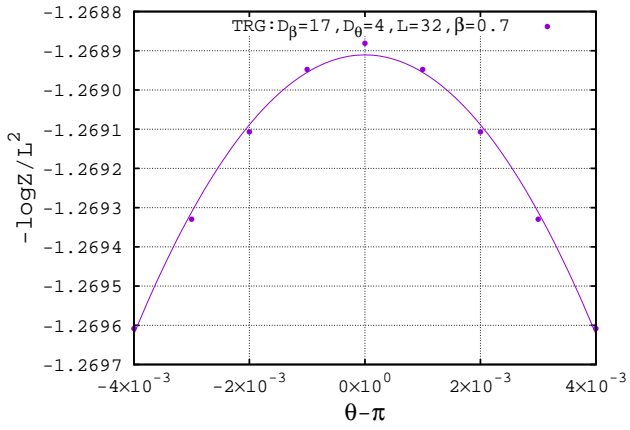


図 4.45: $\beta = 0.7, L = 32$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

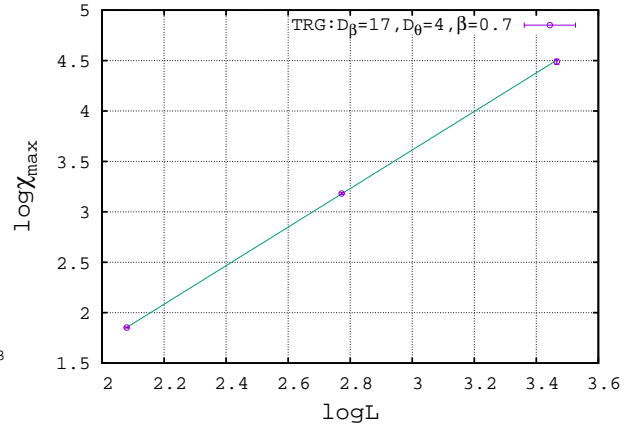


図 4.46: $\beta = 0.7$ での χ_{\max} の体積依存。

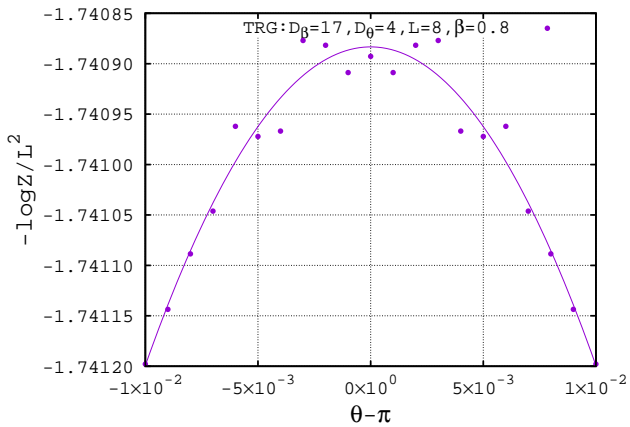


図 4.47: $\beta = 0.8, L = 8$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

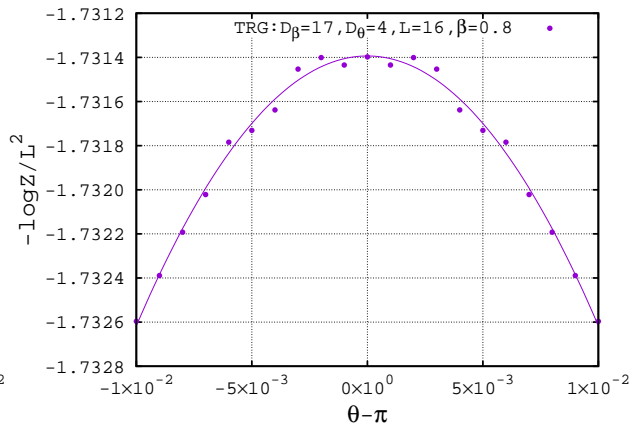


図 4.48: $\beta = 0.8, L = 16$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

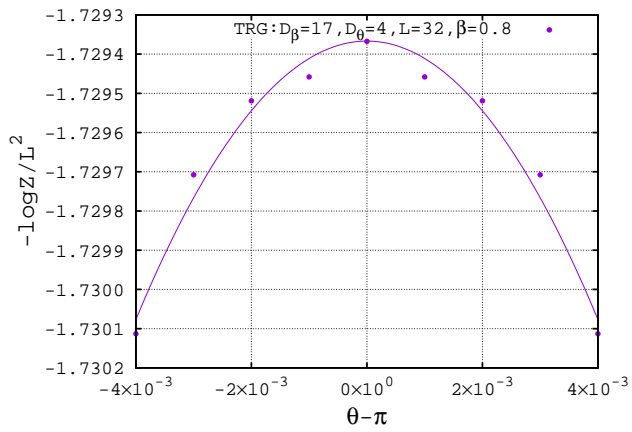


図 4.49: $\beta = 0.8, L = 32$ での $CP(1)$ モデルの分配関数の計算結果。

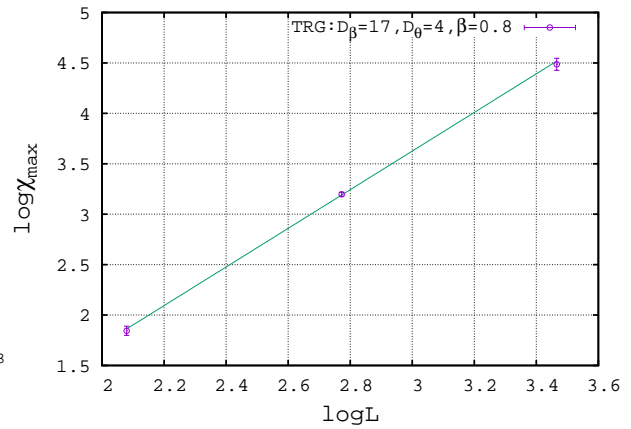


図 4.50: $\beta = 0.8$ での χ_{\max} の体積依存性。

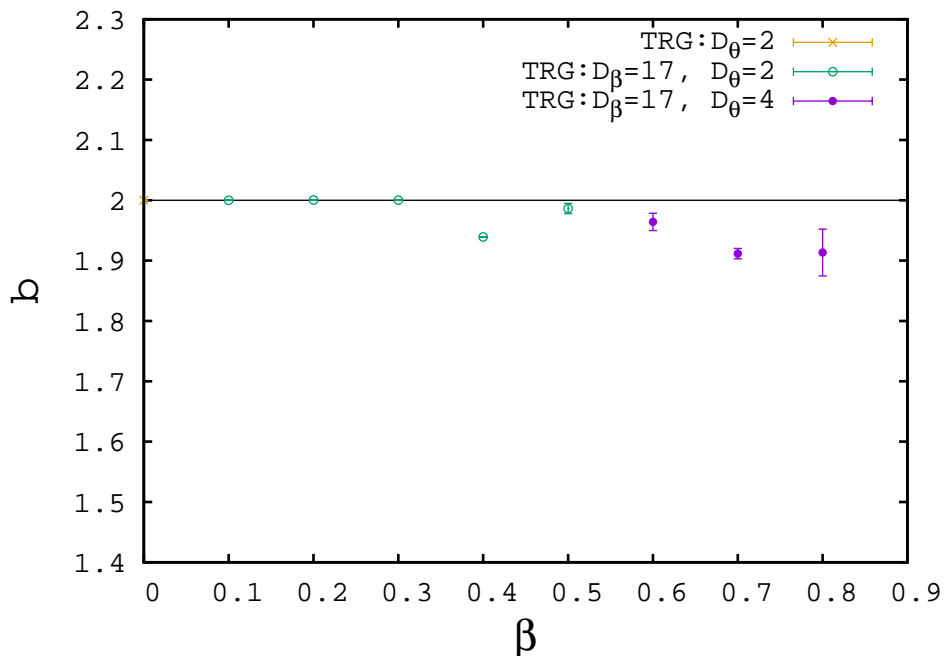


図 4.51: 各 β における式 (4.73) の指数 b 。

各 β で b を計算した結果を図 4.51 に示す。 $0 \leq \beta \leq 0.3$ では b はほぼ 2 となり、これは 1 次相転移を意味する。一方、 $0.4 \leq \beta \leq 0.8$ では、 b は 2 より小さくなり、 2 次相転移を意味する。これは Azcoiti らによる結果 [34] と似た振る舞いを示している。ただし、これらはテンソルの足の自由度の打ち切り $D_{\text{cut}} = D_\beta \times D_\theta$ から生じる系統誤差を含んでいるため D_{cut} を増やした時の収束を調べる必要がある。

第5章 まとめと展望

本論文では、テンソルネットワークのくりこみ手法を2次元格子 $CP(N-1)$ モデルの解析に適用した。具体的には $N=2$ の場合の $CP(1)$ モデルの解析を行った。このモデルは連続極限で2次元 $O(3)$ 非線形シグマモデルと等価である。この $O(3)$ モデルは Haldane の主張から $\theta = \pi$ でギャップレスになり、臨界点の存在が予想される。一般に、 θ 項が存在する系に対して、格子上の場の理論の数値計算でよく用いられるモンテカルロ法を適用する場合、複素作用問題が生じて計算が困難となる。本研究では、この問題を回避するためにテンソルネットワークの手法の適用を考えた。本論文で行った内容をまとめると以下のようなになる。

- 1) TRG のアルゴリズムを $CP(N-1)$ モデルの解析に適用するため、 θ 項を含む $CP(N-1)$ モデルの分配関数のテンソルネットワーク表示を求めた。テンソルネットワーク表示を得るために character 展開と character-like 展開を用いてボルツマン因子を新しい整数自由度で展開した。その際、character-like 展開で現れる各項について、任意の $l, m = 0, 1, 2, 3$ に関して求めた。さらに、古い自由度である複素スカラー場 ψ と補助場 A の積分を行うことで、新しい整数自由度を添え字に持つテンソルネットワーク表示を得た。
- 2) $N=2, \theta=0$ の場合において TRG を適用することで、 $CP(1)$ モデルの平均エネルギーを計算した。弱結合領域において $CP(1)$ モデルの数値結果が $O(3)$ モデルの結果とほぼ一致することを確認した。また、TRG による結果がテンソルの足の自由度を増やすことでモンテカルロ法による計算結果に近づいていくことを確かめた。これにより、複素作用問題が生じない領域において、TRG のアルゴリズムが正しく機能していることが確認できた。
- 3) $N=2, \theta \neq 0$ の場合において TRG を適用し、 $\beta-\theta$ 平面における $CP(1)$ モデルの相構造を解析した。そこで、 β が小さい領域で、TRG による結果が強結合展開による結果と一致することを確認した。これにより複素作用問題が生じる系においても TRG による解析が有効であることが分かった。また、 $\beta = 0.0-0.8$ において $\theta = \pi$ の近傍でトポロジカル感受率を調べることにより、 $\beta \leq 0.3$ において1次相転移、 $0.4 \leq \beta$ において2次相転移となった。この2次相転移の存在は $\theta = \pi$ 上でギャップレスになることを意味し、Haldane の主張と矛盾しない結果である。また、 β に対し臨界指数が変化する振る舞いは、Azcoiti らによる解析と似た結果となっている。しかし、この結果はテンソルの足の自由度の打ち切り誤差を含んでいるため、今後は足の次元を増やした際の収束を調べる必要がある。
- 4) より高精度の解析を行うため、Loop-TNR による $CP(1)$ モデルの解析を行なった。この手法を $\theta=0$ の場合に適用し、Loop-TNR におけるループ最適化の回数を増やすことで、TRG の解析で

は大きかった比熱の揺らぎを抑えることができた。Loop-TNR によるくりこみは、TRG がくりこむことのできなかった近距離相関を適切に処理することができるため、臨界点近傍の解析に適している。今後は、この手法を $\theta = \pi$ 近傍の解析に適用することで、2 次相転移近傍をより高精度で解析することを目指す。これにより、1 次相転移から 2 次相転移に切り替わる点を高精度で決定できる可能性がある。

- 5) さらなる展望としては、より大きな β での解析を行い、その際の $\theta = \pi$ 上における相転移の次数の変化、臨界指数の変化を調べることが挙げられる。
- 6) 他の展望としては、より大きな N での相構造を解析し、非閉じ込め相の存在を検証することが挙げられる。Schierholz の解析では $N = 4$ の場合の CP(3) モデルにおいて、非閉じ込め相の存在を主張した。
- 7) さらに、新たなくりこみ手法の開発も展望として挙げられる。 β と N を増やすと第 1 種変形ベッセル関数 $I_n(2N\beta)$ の形から、テンソルの足の打ち切りから生じる誤差が大きくなることが分かる。また、 N を増やすと、テンソルの足の自由度が増えてしまうため、計算コストが増えてしまう。そのため、より低コストで計算精度の良いくりこみ手法の開発が必要である。

付録 A 1次元反強磁性 Heisenberg モデルの有効理論

A.1 コヒーレント表示と経路積分

ここではスピンのコヒーレント表示を用いた分配関数の経路積分表示について説明する¹。第2章で定義した大きさ S のスピン $\hat{S} = (\hat{S}^x, \hat{S}^y, \hat{S}^z)$ に対して $\hat{S}^z = S$ を与える基底ベクトルを $|S\rangle$ とする。この時、 $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ の方向にスピンの向きが向く状態 $|\zeta\rangle$ を

$$|\zeta\rangle \equiv N^{-1/2} \exp(\zeta(\theta, \phi) S^-) |S\rangle \quad (\text{A.1})$$

とする。ただし、ここで $\zeta(\theta, \phi), N$ は

$$\zeta(\theta, \phi) = \tan\frac{\theta}{2} e^{i\phi}, \quad (\text{A.2})$$

$$N = (1 + \zeta^* \zeta)^{2S} \quad (\text{A.3})$$

である。この状態 $|\zeta\rangle$ をスピンコヒーレント状態と呼び、以下のことが成り立つ²。まず、状態 $|\zeta\rangle$ におけるスピン演算子の期待値が

$$\langle \zeta | \mathbf{S} | \zeta \rangle = S(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) = S\mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

となる。また、状態 $|\zeta\rangle$ は $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ の全方向について考えた時に完全性を満たす:

$$\int d\mu(\zeta) |\zeta\rangle \langle \zeta| \equiv \frac{2S+1}{4\pi} \int d\Omega |\zeta\rangle \langle \zeta| = 1. \quad (\text{A.5})$$

ここで、 Ω は角度 θ, ϕ によって決まる立体角である。よって、任意の状態とスピン演算子をコヒーレント状態 $|\zeta\rangle$ を用いて表すことができることが分かる。ただしここでは示さないが、状態 $|\zeta\rangle$ は異なる角度の状態 $|\zeta'\rangle$ との間に直交性が成り立たず、過剰完全系となっている。

これらを用いて、以下ではスピン系の分配関数の経路積分表示を行う。スピン系のハミルトニアンを \hat{H} 、 N 個のスピンを含む系を $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ で指定される状態 $|\zeta\rangle \equiv |\zeta_1\rangle |\zeta_2\rangle \dots |\zeta_N\rangle$ で表す。 ζ_i のそれぞれに対し θ_i, ϕ_i が指定される。分配関数は逆温度 β を n 等分して $\Delta\tau = \beta/n, \tau_i = i\Delta\tau$ とおき、 $n-1$

¹[45, 46] を参考にした。

²証明は省略。

個の中間状態を挿入すれば

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int d\mu(\zeta) \langle \zeta | e^{-\beta \hat{H}} | \zeta \rangle \\ &= \prod_i \int d\mu(\zeta(\tau_i)) \langle \zeta(\beta) | e^{-\Delta\tau \hat{H}} | \zeta(\tau_{n-1}) \rangle \langle \zeta(\tau_{n-1}) | e^{-\Delta\tau \hat{H}} | \zeta(\tau_{n-2}) \rangle \cdots \langle \zeta(\tau_1) | e^{-\Delta\tau \hat{H}} | \zeta(0) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ここで、

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\tau) | e^{-\Delta\tau \hat{H}} | \zeta(\tau - \Delta\tau) \rangle &\simeq \langle \zeta(\tau) | (1 - \Delta\tau \hat{H}) (| \zeta(\tau) \rangle - \Delta\tau \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle) \\ &\simeq \langle \zeta(\tau) | \zeta(\tau) \rangle - \Delta\tau \langle \zeta(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle - \Delta\tau \langle \zeta(\tau) | \hat{H} | \zeta(\tau) \rangle \\ &= 1 + \Delta\tau \left(- \langle \zeta(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle - \langle \zeta(\tau) | \hat{H} | \zeta(\tau) \rangle \right) \\ &\simeq \exp \left\{ \Delta\tau \left(- \langle \zeta(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle - \langle \zeta(\tau) | \hat{H} | \zeta(\tau) \rangle \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$(\text{A.8})$$

と書ける。さらに、この式の $\langle \zeta(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle \zeta(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle &= -\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d}{d\tau} \langle \zeta(\tau) | \right) | \zeta(\tau) \rangle - \langle \zeta(\tau) | \frac{d}{d\tau} | \zeta(\tau) \rangle \right\} \\ &= - \sum_{j=1}^N \frac{S}{1 + |\zeta_j(\tau_i)|^2} \left(\dot{\zeta}_j^*(\tau_i) \zeta_j(\tau_i) - \zeta_j^*(\tau_i) \dot{\zeta}_j(\tau_i) \right) \\ &= iS \sum_{j=1}^N 2 \tan^2 \frac{\theta_j(\tau_i)}{2} \cos^2 \frac{\theta_j(\tau_i)}{2} \frac{d\phi(\tau_i)}{d\tau} \\ &= iS \sum_{j=1}^N 2 \sin^2 \frac{\theta_j(\tau_i)}{2} \frac{d\phi(\tau_i)}{d\tau} \\ &= iS \sum_{j=1}^N (1 - \cos \theta_j(\tau_i)) \frac{d\phi(\tau_i)}{d\tau} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

と計算できる。ただしここで、

$$\zeta_j(\tau_i) = \tan \frac{\theta_j(\tau_i)}{2} e^{i\phi_j(\tau_i)} \quad (\text{A.10})$$

であり、また、

$$\langle \zeta | \hat{S}^x | \zeta \rangle = S \sin \theta \cos \phi = S \frac{\zeta + \zeta^*}{1 + |\zeta|^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\langle \zeta | \hat{S}^y | \zeta \rangle = S \sin \theta \sin \phi = -iS \frac{\zeta - \zeta^*}{1 + |\zeta|^2} \quad (\text{A.12})$$

と書けることを用いた。以上より、 $n \rightarrow \infty$ の極限を取ることで分配関数 Z は

$$Z = \int \mathcal{D}\mu(\zeta(\tau)) e^{-\mathcal{S}}, \quad (\text{A.13})$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2, \quad (\text{A.14})$$

$$\mathcal{S}_1 = \int_0^\beta d\tau \langle \zeta(\tau) | \hat{H} | \zeta(\tau) \rangle, \quad (\text{A.15})$$

$$\mathcal{S}_2 = iS \sum_{j=1}^N \int_0^\beta (1 - \cos\theta_j(\tau)) d\phi(\tau) \quad (\text{A.16})$$

となる。ここで、作用 \mathcal{S}_1 は Heisenberg モデル

$$\hat{H} = J \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{S}}_j \cdot \hat{\mathbf{S}}_{j+1} \quad (\text{A.17})$$

の場合、 $\hat{\mathbf{S}}_i$ を $S\mathbf{n}_j(\tau)$ に置き換えれば良く、

$$\mathcal{S}_1 = JS^2 \int_0^\beta d\tau \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j(\tau) \cdot \mathbf{n}_{j+1}(\tau) \quad (\text{A.18})$$

となる。また、作用 \mathcal{S}_2 は新しいパラメータ $u (0 \leq u \leq 1)$ を導入することで、

$$\mathcal{S}_2 = iS \sum_{j=1}^N \int_0^\beta (1 - \cos\theta_j(\tau)) d\phi(\tau) = iS \sum_{j=1}^N \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \mathbf{n}_j \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial \tau} \right) \quad (\text{A.19})$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{n}(\tau)$ は τ と u の関数 $\mathbf{n}(\tau, u)$ に拡張し、

$$\mathbf{n}(\tau, 0) = (0, 0, 1), \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{n}(\tau, 1) = \mathbf{n}(\tau) = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta), \quad (\text{A.21})$$

$$\mathbf{n}(0, u) = \mathbf{n}(\beta, u) \quad (\text{A.22})$$

となるように定義した。以下では、式 (A.19) の右辺の u 積分を行うことで左辺に戻ることを示す。まず、

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_j \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial \tau} \right) &= -\frac{\partial \cos\theta_j}{\partial u} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \cos\theta_j}{\partial \tau} \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left[(1 - \cos\theta_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial \tau} \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 - \cos\theta_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

と変形できる。この式の2項目の τ 積分は式 (A.22) より、

$$\int_0^\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 - \cos\theta_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial u} \right] = (1 - \cos\theta_j(\beta, u)) \frac{\partial \phi_j(\beta, u)}{\partial u} - (1 - \cos\theta_j(\beta, 0)) \frac{\partial \phi_j(\beta, 0)}{\partial u} = 0 \quad (\text{A.24})$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}
& \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \mathbf{n}_j \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial \tau} \right) \\
&= \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \frac{\partial}{\partial u} \left[(1 - \cos\theta_j) \frac{\partial \phi_j}{\partial \tau} \right] \\
&= \int_0^\beta d\tau \left[\{1 - \cos\theta_j(\tau, 1)\} \frac{\partial \phi_j(\tau, 1)}{\partial \tau} - \{1 - \cos\theta_j(\tau, 0)\} \frac{\partial \phi_j(\tau, 0)}{\partial \tau} \right] \\
&= \int_0^\beta d\tau \{1 - \cos\theta_j(\tau)\} \frac{\partial \phi_j(\tau)}{\partial \tau} \\
&= \int_0^\beta \{1 - \cos\theta_j(\tau)\} d\phi_j(\tau)
\end{aligned} \tag{A.25}$$

となり、式 (A.19) が示された。

A.2 2次元 O(3) 非線形シグマモデル

ここでは1次元反強磁性 Heisenberg モデルが2次元の O(3) 非線形シグマモデルで書けることを示す。³ 上で求めたように、Heisenberg モデルの分解関数はコヒーレント表示を用いて

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{n} e^{-\mathcal{S}[\mathbf{n}]}, \tag{A.26}$$

$$\mathcal{S}[\mathbf{n}] = \mathcal{S}_1[\mathbf{n}] + \mathcal{S}_2[\mathbf{n}] \tag{A.27}$$

と書けることが分かった。ここで、作用 $\mathcal{S}_1[\mathbf{n}]$ と $\mathcal{S}_2[\mathbf{n}]$ は

$$\mathcal{S}_1[\mathbf{n}] = JS^2 \int_0^\beta d\tau \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j(\tau) \cdot \mathbf{n}_{j+1}(\tau), \tag{A.28}$$

$$\mathcal{S}_2[\mathbf{n}] = iS \int_0^\beta d\tau \int_0^1 du \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j(\tau, u) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}_j(\tau, u)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{n}_j(\tau, u)}{\partial \tau} \right) \tag{A.29}$$

である。以下では、 $\tau = it, \beta = iT$ と置き換え、実時間で書いた分配関数

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{n} e^{i\mathcal{S}[\mathbf{n}]}, \tag{A.30}$$

$$\mathcal{S}[\mathbf{n}] = \mathcal{S}_1[\mathbf{n}] + \mathcal{S}_2[\mathbf{n}] \tag{A.31}$$

³[45, 47] を参考にした。

で議論を進める。ここで、作用 $\mathcal{S}_1[\mathbf{n}]$ と $\mathcal{S}_2[\mathbf{n}]$ は

$$\mathcal{S}_1[\mathbf{n}] = -JS^2 \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j(t) \cdot \mathbf{n}_{j+1}(t), \quad (\text{A.32})$$

$$\mathcal{S}_2[\mathbf{n}] = S \int_0^T dt \int_0^1 du \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j(t, u) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}_j(t, u)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{n}_j(t, u)}{\partial t} \right) \quad (\text{A.33})$$

となる。ただし簡単のため、作用 $\mathcal{S}, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ は虚時間の場合と同じ表記を用いた。

反強磁性の場合 ($J > 0$) を考える。この場合、Néel 状態は基底状態とはならないが、隣り合うスピンのほぼ反平行に向いていると考えて、

$$\mathbf{n}_j \rightarrow (-1)^j \mathbf{n}_j \quad (\text{A.34})$$

という置き換えを行うと、 $\mathcal{S}_1[\mathbf{n}]$ は、定数項

$$-JS^2 TN = -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \{\mathbf{n}_j^2 + \mathbf{n}_{j+1}^2\} \quad (\text{A.35})$$

を加えることで、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1[\mathbf{n}] &\rightarrow -JS^2 \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_{j+1} - \frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \{\mathbf{n}_j^2 + \mathbf{n}_{j+1}^2\} \\ &\rightarrow -JS^2 \int_0^T dt \sum_{j=1}^N (-1)^{j+j+1} \mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_{j+1} - \frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \{\mathbf{n}_j^2 + \mathbf{n}_{j+1}^2\} \\ &= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N \{\mathbf{n}_j^2 - 2\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_{j+1} + \mathbf{n}_{j+1}^2\} \\ &= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N (\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_{j+1})^2 \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

となる。一方で $\mathcal{S}_2[\mathbf{n}]$ は Wess-Zumino 項 $\mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}]$ を

$$\mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_j] \equiv \int_0^T dt \int_0^1 du \mathbf{n}_j(t, u) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{n}_j(t, u)}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{n}_j(t, u)}{\partial t} \right) \quad (\text{A.37})$$

とおくと、式 (A.34) の変換で

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2[\mathbf{n}] &= S \sum_{j=1}^N \mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_j] \\
&\rightarrow S \sum_{j=1}^N (-1)^j \mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_j] \\
&= S \sum_{r=1}^{N/2} \{\mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_{2r}] - \mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_{2r-1}]\} \\
&= S \sum_{r=1}^{N/2} \delta \mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_{2r}] \\
&= S \sum_{r=1}^{N/2} \int_0^T dt \delta \mathbf{n}_{2r}(t) \cdot \{\mathbf{n}_{2r}(t) \times \partial_t \mathbf{n}_{2r}(t)\}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

となる。ただし、最後の変形では、

$$\delta \mathcal{S}_{\text{WZ}}[\mathbf{n}_{2r}] = \int_0^T dt \delta \mathbf{n}_{2r}(t) \cdot \{\mathbf{n}_{2r}(t) \times \partial_t \mathbf{n}_{2r}(t)\} \tag{A.39}$$

と書けることを用いた [47, 48]。 \mathbf{n} を穏やかに変化する部分 \mathbf{m} と素早く変化する小さな部分 \mathbf{l} に分けると、格子間隔 a を用いて、

$$\mathbf{n}_j = \mathbf{m}_j + (-1)^j a \mathbf{l}_j \tag{A.40}$$

とかける。これより $\delta \mathbf{n}$ は

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{n} &= \mathbf{n}_{2r} - \mathbf{n}_{2r-1} \\
&= \mathbf{m}_{2r} + (-1)^{2r} a \mathbf{l}_{2r} - \mathbf{m}_{2r-1} + (-1)^{2r-1} a \mathbf{l}_{2r-1} \\
&= \mathbf{m}_{2r} - \mathbf{m}_{2r-1} + a(\mathbf{l}_{2r} + \mathbf{l}_{2r-1}) \\
&= a \left(\frac{\partial \mathbf{m}_{2r}}{\partial x} + 2\mathbf{l}_{2r} \right) + \mathcal{O}(a^2)
\end{aligned} \tag{A.41}$$

となる。ただし、ここで j に対応する連続変数を x とした。これを用いると、 $\mathcal{S}_2[\mathbf{n}]$ は

$$\mathcal{S}_2[\mathbf{n}] \simeq S \sum_{r=1}^{N/2} \int_0^T dt a (\partial_x \mathbf{m}_{2r} + 2\mathbf{l}_{2r}) \cdot (\mathbf{n}_{2r} \times \partial_t \mathbf{n}_{2r}). \tag{A.42}$$

連続極限 ($a \rightarrow 0$) を取り、 $a \sum_{r=1}^{N/2} = \frac{1}{2} \int_0^L dx$ と置き換えると、

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_2[\mathbf{n}] &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{S}{2} \int_0^T dt \int_0^L dx (\partial_x \mathbf{m} + 2\mathbf{l}) \cdot (\mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m}) \\
&= \frac{S}{2} \int dt dx \mathbf{m} \cdot (\partial_t \mathbf{m} \times \partial_x \mathbf{m}) + S \int dt dx \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m})
\end{aligned} \tag{A.43}$$

となる。

$\mathcal{S}_1[\mathbf{n}]$ についても同様にして、

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_1[\mathbf{n}] &= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N (\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_{j+1})^2 \\
&= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N (\mathbf{m}_j + (-1)^j a \mathbf{l}_j - \mathbf{m}_{j+1} - (-1)^{j+1} a \mathbf{l}_{j+1})^2 \\
&= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt \sum_{j=1}^N (-a \partial_x \mathbf{m}_j + 2(-1)^j a \mathbf{l}_j + \mathcal{O}(a^2))^2 \\
&\simeq -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt a^2 \sum_{j=1}^N \{(\partial_x \mathbf{m}_j)^2 - 4(-1)^j (\partial_x \mathbf{m}_j) \cdot \mathbf{l}_j + 4\mathbf{l}_j^2\} \\
&= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt a^2 \left[\sum_{j=1}^N \{(\partial_x \mathbf{m}_j)^2 + 4\mathbf{l}_j^2\} - 4 \sum_{r=1}^{N/2} \{(\partial_x \mathbf{m}_{2r}) \cdot \mathbf{l}_{2r} - (\partial_x \mathbf{m}_{2r-1}) \cdot \mathbf{l}_{2r-1}\} \right] \\
&= -\frac{JS^2}{2} \int_0^T dt a^2 \left[\sum_{j=1}^N \{(\partial_x \mathbf{m}_j)^2 + 4\mathbf{l}_j^2\} - 4 \sum_{r=1}^{N/2} a \partial_x \{(\partial_x \mathbf{m}_{2r}) \cdot \mathbf{l}_{2r}\} \right] \\
&\simeq -\frac{aJS^2}{2} \int dt dx \{(\partial_x \mathbf{m})^2 + 4\mathbf{l}^2\}. \tag{A.44}
\end{aligned}$$

式 (A.43)、(A.44) を合わせれば、作用 $\mathcal{S}[\mathbf{m}, \mathbf{l}] = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ は、

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}[\mathbf{m}, \mathbf{l}] &= -\frac{aJS^2}{2} \int dt dx \{(\partial_x \mathbf{m})^2 + 4\mathbf{l}^2\} + \frac{S}{2} \int dt dx \mathbf{m} \cdot (\partial_t \mathbf{m} \times \partial_x \mathbf{m}) + S \int dt dx \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m}) \\
&= \int dt dx \left[-2aJS^2 \mathbf{l}^2 + S \mathbf{l} \cdot (\mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m}) - \frac{aJS^2}{2} (\partial_x \mathbf{m})^2 + \frac{S}{2} \mathbf{m} \cdot (\partial_t \mathbf{m} \times \partial_x \mathbf{m}) \right] \\
&= \int dt dx \left[-2aJS^2 \left\{ \mathbf{l} - \frac{1}{4aJS} (\mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m}) \right\}^2 + \frac{1}{8aJ} (\partial_t \mathbf{m})^2 - \frac{aJS^2}{2} (\partial_x \mathbf{m})^2 + \frac{S}{4} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}) \right]. \tag{A.45}
\end{aligned}$$

ただし、ここで

$$\mathbf{m}^2 \simeq 1, \tag{A.46}$$

$$\mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{m} \simeq 0 \tag{A.47}$$

から導かれる式

$$\begin{aligned}
(\mathbf{m} \times \partial_t \mathbf{m})^2 &= (\mathbf{m} \cdot \mathbf{m})(\partial_t \mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{m}) - (\partial_t \mathbf{m} \cdot \mathbf{m})(\mathbf{m} \cdot \partial_t \mathbf{m}) \\
&\simeq (\partial_t \mathbf{m})^2 \tag{A.48}
\end{aligned}$$

を用いた。式 (A.45) の形から \mathbf{l} に関する積分を行うことで \mathbf{l} を含む項を消去すると作用は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\mathbf{m}] &= \int dt dx \left[\frac{1}{8aJ} (\partial_t \mathbf{m})^2 - \frac{aJS^2}{2} (\partial_x \mathbf{m})^2 + \frac{S}{4} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}) \right] \\ &= \int dt dx \left[\frac{1}{2g} \left\{ \frac{1}{v_s} (\partial_t \mathbf{m})^2 - v_s (\partial_x \mathbf{m})^2 \right\} + \frac{\theta}{8\pi} \epsilon_{\mu\nu} \mathbf{m} \cdot (\partial_\mu \mathbf{m} \times \partial_\nu \mathbf{m}) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

となる。ここで、 g, v_s はそれぞれ、結合定数、スピン波の速度であり、

$$g = \frac{2}{S}, \quad (\text{A.50})$$

$$v_s = 2aJS \quad (\text{A.51})$$

とおいた。また、最後の項はトポロジカル項であり、係数 θ は

$$\theta = 2\pi S \quad (\text{A.52})$$

である。よって、1次元反強磁性 Heisenberg モデルの有効理論として2次元 O(3) 非線形シグマモデルが導かれることが分かった。

付録B Character-like展開の各項の導出

Plefka と Samuel は格子 $CP(N-1)$ モデルのボルツマン因子の展開方法として character-like 展開を開発した [60]。この展開において、彼らは非負の整数の組 $(l; m)$ を用いてボルツマン因子を展開したが、展開で現れる各項 $d_{(l;m)}, h_{(l;m)}(\beta), f_{(l;m)}(z(x), z(x + \hat{\mu}))$ に関しては $(l; m)$ を具体的に決めることで1つずつ求めていた。しかし、この方法でテンソルネットワーク表示を求める場合、計算が煩雑になってしまう。そこで以下では l を任意の非負整数とし、 $m = 0, 1, 2$ の場合について character-like 展開の各項を導出する。

式 (4.5) において、 $z(x) = v, z(x + \hat{\mu}) = w$ とし、リンク変数以外の部分に注目する ($A_\mu(x) = 0$ とする) と、

$$e^{\beta N[v^* \cdot w + v \cdot w^*]} = Z_0(\beta) \sum_{l,m} d_{(l;m)} h_{(l;m)}(\beta) f_{(l;m)}(v, w) \quad (\text{B.1})$$

となる。 l と m は非負の整数である。 $f_{(l;m)}(v, w)$ は $(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^m$ とそれ以下の次数の項からなる多項式であり、次の直交関係を満たす。

$$\int dv_n f_r(w, v) f_r^*(w', v) = \frac{1}{d_r} \delta_{r,r'} f_r(w, w'), \quad (\text{B.2})$$

$$f_r(w, w) = d_r. \quad (\text{B.3})$$

ただし、 $(l; m)$ を r で表した。 $f_r(v, w)$ には、

$$f_{(l;m)}(v, w) = f_{(m;l)}^*(v, w) = f_{(m;l)}(w, v) \quad (\text{B.4})$$

の関係がある。ここで v_n の積分は、 $2N$ 次元球の表面積 $\int dv \delta(v^* \cdot v - 1) = 2\pi^N / (N-1)!$ で規格化された積分

$$\int dv_n (\dots) = \frac{\int dv \delta(v^* \cdot v - 1) (\dots)}{\int dv \delta(v^* \cdot v - 1)} \quad (\text{B.5})$$

を意味するものとする。また、 $z_{l;m}(\beta)$ は β で表される関数であり、 $Z_0(\beta)$ は $z_{0;0}(\beta)$ を 1 に規格化する関数である。

v_n の積分を行う場合、実際には、式 (B.5) から導かれる公式、

$$\int dv_n v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_m} v_{j_1}^* v_{j_2}^* \cdots v_{j_m}^* = \frac{(N-1)!}{(N-1+m)!} \sum_{\sigma \in S_m} \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \delta_{j_{\sigma(2)}}^{i_2} \cdots \delta_{j_{\sigma(m)}}^{i_m} \quad (\text{B.6})$$

を用いる。ここで、 $\sum_{\sigma \in S_m}$ は取り得る全ての組み合わせの和である。式 (B.6) を用いると、

$$\int dv_n (v \cdot w^*)^m (v^* \cdot w)^l = m! \frac{(N-1)!}{(N-1+m)!} \delta_l^m \quad (\text{B.7})$$

と計算できる。

以下では、 l を任意の非負整数とし、 $m = 0, 1, 2$ のときに関してについて考える。ただし、 $l \geq m$ とする。

B.1 $(l; m) = (l; 0)$ の場合

$f_{(l;0)}(v, w) = c(v \cdot w^*)^l$ とすると、式 (B.2) より、

$$\int dv_n f_{(l;0)}(w, v) f_{(l;0)}^*(w, v) = \frac{1}{d_{(l;0)}} f_{(l;0)}(w, w) = 1 \quad (\text{B.8})$$

なので、

$$c^2 \int dv_n (w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l = 1. \quad (\text{B.9})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} c^2 l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} &= 1 \\ \therefore c &= \pm \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!}}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$c = +\sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!}}$ にとると、

$$f_{(l;0)}(v, w) = \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!}} (v \cdot w^*)^l, \quad (\text{B.11})$$

$$d_{(l;0)} = f_{(l;0)}(w, w) = \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!}}. \quad (\text{B.12})$$

$h_{(l;0)}(\beta)$ は、

$$\begin{aligned}
& h_{(l;0)}(\beta) \\
&= \frac{1}{d_{(l;0)} Z_0(\beta)} \int dv_n f_{(l;0)}(v, w) e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \int dv_n (v \cdot w^*)^l e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \int dv_n (v \cdot w^*)^l \left[1 + (N\beta)[v \cdot w^* + v^* \cdot w] + \frac{1}{2!}(N\beta)^2[v \cdot w^* + v^* \cdot w]^2 \dots \right] \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \left[\frac{1}{l!} (N\beta)^l \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] + \frac{1}{(l+2)!} (N\beta)^{l+2} \int dv_n [{}_{l+2}C_1 (v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] + \dots \right] \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \left[\frac{1}{l!} (N\beta)^l l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + \frac{1}{(l+2)!} (N\beta)^{l+2} {}_{l+2}C_1 (l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+(l+1))!} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \left[\frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} (N\beta)^l + \frac{(N-1)!}{1!(N-1+(l+1))!} (N\beta)^{l+2} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \left[\frac{(N\beta)^{2 \cdot 0 + N - 1 + l}}{0!(0 + N - 1 + l)!} + \frac{(N\beta)^{2 \cdot 1 + N - 1 + l}}{1!(1 + N - 1 + l)!} + \frac{(N\beta)^{2 \cdot 2 + N - 1 + l}}{2!(2 + N - 1 + l)!} + \dots \right] \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N\beta)^{2 \cdot m + N - 1 + l}}{m!(m + N - 1 + l)!} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1)! I_{N-1+l}(2N\beta)}{(N\beta)^{N-1}} \\
&= \frac{I_{N-1+l}(2N\beta)}{I_{N-1}(2N\beta)}. \tag{B.13}
\end{aligned}$$

ここで、最後に第一種変形ベッセル関数

$$I_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \tag{B.14}$$

を用いた。以上より、 $m=0$ のときに関して、任意の l について計算することができた。

B.2 $(l; m) = (l; 1)$ の場合

$f_{(l;1)}(v, w) = A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w) + B(v \cdot w^*)^{l-1}$ とすると、式 (B.2) より、

$$\int dv_n f_{(l;1)}(w, v) f_{(l;1)}^*(w, v) = \frac{1}{d_{(l;1)}} f_{(l;1)}(w, w) = 1 \quad (\text{B.15})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \{A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v) + B(w \cdot v^*)^{l-1}\} \{A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w) + B(v \cdot w^*)^{l-1}\} = 1 \\ A^2 \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+1} (w^* \cdot v)^{l+1}] + 2AB \int dv_n [(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l] + B^2 \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1}] = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} & A^2(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} + 2ABl! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + B^2(l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} = 1 \\ (l+1)!A^2 + 2 \cdot l!AB(N-1+l+1) + (l-1)!B^2(N-1+l+1)(N-1+l) &= \frac{(N-1+l+1)!}{(N-1)!}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

また、

$$\int dv_n f_{(l;1)}(w, v) f_{(l-1;0)}^*(w, v) = 0 \quad (\text{B.18})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \cdot \{A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v) + B(w \cdot v^*)^{l-1}\} \sqrt{\frac{(N-1+l-1)!}{(l-1)!(N-1)!}} (v \cdot w^*)^{l-1} = 0 \\ A \int dv_n [(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l] + B \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1}] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} & Al! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + B(l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} = 0 \\ B &= -\frac{lA}{N-1+l}. \end{aligned}$$

式 (B.20) を式 (B.17) に代入して解くと、

$$\begin{aligned}
& (l+1)!A^2 + 2 \cdot l!(N-1+l+1)A \left(-\frac{lA}{N-1+l} \right) \\
& \quad + (l-1)!(N-1+l+1)(N-1+l) \left(-\frac{lA}{N-1+l} \right)^2 = \frac{(N-1+l+1)}{(N-1)!} \\
& \{ (l+1)!(N-1+l) - 2 \cdot ll(N-1+l+1) + (l-1)!l^2(N-1+l+1) \} A^2 \\
& \quad = \frac{(N-1+l+1)!}{(N-1)!} (N-1+l) \\
& l! \left\{ (l+1)(N-1+l) - 2 \cdot l(N+l) + \frac{1}{l}l^2(N+l) \right\} A^2 = \frac{(N-1+l+1)!}{(N-1)!} (N-1+l) \\
& l! \{ Nl - l + l^2 + N - 1 + l - 2Nl - 2l^2 + Nl + l^2 \} A^2 = \frac{(N-1+l+1)!}{(N-1)!} (N-1+l) \\
& l!(N-1)A^2 = \frac{(N-1+l+1)!}{(N-1)!} (N-1+l) \\
& A = \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}}. \quad (A \text{ を正にとった})
\end{aligned}$$

式 (B.20) より、

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{lA}{N-1+l} \\
&= -\frac{l}{N-1+l} \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}}. \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
f_{(l;1)}(v, w) &= A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w) + B(v \cdot w^*)^{l-1} \\
&= \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} (v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w) - \frac{l}{N-1+l} \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} (v \cdot w^*)^{l-1} \\
&= \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w) - \frac{l}{N-1+l} (v \cdot w^*)^{l-1} \right], \quad (\text{B.21})
\end{aligned}$$

$$d_{(l;1)} = f_{(l;1)}(w, w) = \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[1 - \frac{l}{N-1+l} \right] = \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \frac{N-1}{N-1+l} \quad (\text{B.22})$$

$$= \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1)}{l!(N-1)!(N-1+l)}}. \quad (\text{B.23})$$

$h_{(l;1)}(\beta)$ は、

$$\begin{aligned}
& h_{(l;1)}(\beta) \\
&= \frac{1}{d_{(l;1)}Z_0(\beta)} \int dv_n f_{(l;1)}(v, w) e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{N-1+l}{N-1} \int dv_n \left[(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w) - \frac{l}{N-1+l} (v \cdot w^*)^{l-1} \right] e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{N-1+l}{N-1} \left\{ \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^l (v^* w)^l] - \frac{l}{N-1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right] \frac{l-1 C_0}{(l-1)!} (N\beta)^{l-1} \right. \\
&\quad + \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* w)^{l+1}] - \frac{l}{N-1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right] \frac{l+1 C_1}{(l+1)!} (N\beta)^{l+1} \\
&\quad \left. + \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* w)^{l+2}] - \frac{l}{N-1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \right] \frac{l+3 C_2}{(l+3)!} (N\beta)^{l+3} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{N-1+l}{N-1} \left\{ \left[l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} - \frac{l}{N-1+l} (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \right] \frac{l-1 C_0}{(l-1)!} (N\beta)^{l-1} \right. \\
&\quad + \left[(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} - \frac{l}{N-1+l} l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \right] \frac{l+1 C_1}{(l+1)!} (N\beta)^{l+1} \\
&\quad \left. + \left[(l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+2)!} - \frac{l}{N-1+l} (l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} \right] \frac{l+3 C_2}{(l+3)!} (N\beta)^{l+3} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{N-1+l}{N-1} \left\{ 0 + \left[(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N+l)!} - \frac{l}{N-1+l} l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \right] \frac{1}{l!} (N\beta)^{l+1} \right. \\
&\quad \left. + \left[(l+2)! \frac{(N-1)!}{(N+1+l)!} - \frac{l}{N-1+l} (l+1)! \frac{(N-1)!}{(N+l)!} \right] \frac{1}{2(l+1)!} (N\beta)^{l+3} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{N-1+l}{N-1} \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \left\{ \frac{(l+1)(N-1+l) - l(N+l)}{(N+l)!(N-1+l)} (N\beta)^{N+l} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{(l+2)(N-1+l) - l(N+1+l)}{(N+1+l)!(N-1+l)} (N\beta)^{2+N+l} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{N-1+l}{N-1} \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \left\{ \frac{N-1}{N-1+l} \frac{1}{(N+l)!} (N\beta)^{N+l} \right. \\
&\quad \left. + \frac{N-1}{N-1+l} \frac{1}{(N+1+l)!} (N\beta)^{2+N+l} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \left\{ \frac{(N\beta)^{2 \cdot 0 + N+l}}{0!(N+l)!} + \frac{(N\beta)^{2 \cdot 1 + N+l}}{1!(N+1+l)!} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{I_{N-1}(2N\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N\beta)^{2 \cdot m + N+l}}{(m+N+l)!} \\
&= \frac{I_{N+l}(2N\beta)}{I_{N-1}(2N\beta)}. \tag{B.24}
\end{aligned}$$

以上より、 $m=1$ のときに関して、 m 以上の任意の l について計算することができた。

B.3 $(l; m) = (l; 2)$ の場合

$f_{(l;2)}(v, w) = A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^2 + B(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w) + C(v \cdot w^*)^{l-2}$ とすると、式 (B.2) より、

$$\int dv_n f_{(l;2)}(w, v) f_{(l;2)}^*(w, v) = \frac{1}{d_{(l;2)}} f_{(l;2)}(w, w) = 1 \quad (\text{B.25})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \{A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^2 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v) + C(w \cdot v^*)^{l-2}\} \\ & \quad \times \{A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^2 + B(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w) + C(v \cdot w^*)^{l-2}\} = 1 \\ & A^2 \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+2} (w^* \cdot v)^{l+2}] + 2AB \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+1} (w^* \cdot v)^{l+1}] \\ & \quad + (2ac + B^2) \int dv_n [(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l] + 2BC \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1}] \\ & \quad \quad \quad + C^2 \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2}] = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} & A^2(l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+2)!} + 2AB(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} + (2ac + B^2)l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \\ & \quad + 2BC(l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} + C^2(l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} = 1 \\ & A^2(l+2)! + 2AB(l+1)!(N+1+l) + (2ac + B^2)l!(N+1+l)(N+l) \\ & \quad + 2BC(l-1)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\ & \quad \quad \quad + C^2(l-2)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l) = \frac{(N+1+l)!}{(N-1)!}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

また、

$$\int dv_n f_{(l;2)}(w, v) f_{(l-1;1)}^*(w, v) = 0 \quad (\text{B.28})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \{A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^2 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v) + C(w \cdot v^*)^{l-2}\} \\ & \quad \times \sqrt{\frac{(N+l-1)!(N-1+l-1)}{(l-1)!(N-1)!(N-1)}} \left[(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w) - \frac{l-1}{N-1+l-1} (v \cdot w^*)^{l-2} \right] = 0 \\ & A \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+1} (w^* \cdot v)^{l+1}] + \left(-\frac{l-1}{N+l} A + B \right) \int dv_n [(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l] \\ & \quad + \left(-\frac{l-1}{N+l} B + C \right) \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1}] - \frac{l-1}{N+l} C \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2}] = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$A(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} + \left(-\frac{l-1}{N-2+l}A + B \right) l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \\ + \left(-\frac{l-1}{N-2+l}B + C \right) (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} - \frac{l-1}{N-2+l}C(l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} = 0. \quad (\text{B.30})$$

この式は次のように簡単になる。

$$2Al + B(N+l) = 0. \quad (\text{B.31})$$

よって、

$$B = -\frac{2l}{N+l}A \quad (\text{B.32})$$

また、

$$\int dv_n f_{(l;2)}(w, v) f_{(l-2;0)}^*(w, v) = 0 \quad (\text{B.33})$$

なので、

$$\int dv_n \{ A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^2 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v) + C(w \cdot v^*)^{l-2} \} \sqrt{\frac{(N-1+l-2)!}{(l-2)!(N-1)!}} (v \cdot w^*)^{l-2} = 0 \\ A \int dv_n [(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l] + B \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1}] + C \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2}] = 0.$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$Al! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + B(l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \\ + C(l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} = 0. \quad (\text{B.34})$$

この式を C について解くと、

$$C = -\frac{l(l-1)}{(N-2+l)(N-1+l)}A - \frac{l-1}{N-2+l}B. \quad (\text{B.35})$$

式 (B.32) を式 (B.35) に代入すると、

$$C = \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)}A. \quad (\text{B.36})$$

式 (B.32) と式 (B.36) を式 (B.27) に代入して、 A について解くと、

$$A = \sqrt{\frac{(N-1+l)(N+l)(N+1+l)!}{2(N-1)l!N!}} \quad (A \text{ を正にとった}). \quad (\text{B.37})$$

これを式 (B.32) と式 (B.36) に代入すると、

$$B = -\frac{2l}{N+l}A = -\frac{2l}{N+l}\sqrt{\frac{(N-1+l)(N+l)(N+1+l)!}{2(N-1)!N!}}, \quad (\text{B.38})$$

$$C = \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)}A = \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)}\sqrt{\frac{(N-1+l)(N+l)(N+1+l)!}{2(N-1)!N!}}. \quad (\text{B.39})$$

よって、式 (B.37)、式 (B.38)、式 (B.39) より、 $f_{(l;2)}(v, w)$ と $d_{(l;2)}$ は、

$$\begin{aligned} & f_{(l;2)}(v, w) \\ &= A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^2 + B(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w) + C(v \cdot w^*)^{l-2} \\ &= \sqrt{\frac{(N-1+l)(N+l)(N+1+l)!}{2(N-1)!N!}} \\ & \quad \times \left[(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^2 - \frac{2l}{N+l} (v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w) + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} (v \cdot w^*)^{l-2} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} d_{(l;2)} = f_{(l;2)}(w, w) &= \sqrt{\frac{(N-1+l)(N+l)(N+1+l)!}{2(N-1)!N!}} \left[1 - \frac{2l}{N+l} + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \right] \\ &= \sqrt{\frac{(N-1+l)(N+l)(N+1+l)!}{2(N-1)!N!}} \frac{N(N-1)}{(N-1+l)(N+l)}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$h_{(l;2)}(\beta)$ は、

$$\begin{aligned}
& h_{(l;2)}(\beta) \\
&= \frac{1}{d_{(l;2)} Z_0(\beta)} \int dv_n f_{(l;2)}(v, w) e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1+l)(N+l)}{N(N-1)} \\
&\quad \times \int dv_n \left[(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^2 - \frac{2l}{N+l} (v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w) + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} (v \cdot w^*)^{l-2} \right] e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1+l)(N+l)}{N(N-1)} \\
&\quad \times \left\{ \left[\int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] - \frac{2l}{N+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right. \right. \\
&\quad \quad \left. \left. + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)^{l-2}] \right] \frac{l-2}{(l-2)!} C_0 (N\beta)^{l-2} \right. \\
&\quad + \left[\int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] - \frac{2l}{N+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right] \frac{l}{l!} C_1 (N\beta)^l \\
&\quad + \left[\int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* \cdot w)^{l+2}] - \frac{2l}{N+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right] \frac{l+2}{(l+2)!} C_2 (N\beta)^{l+2} \\
&\quad + \left[\int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+3} (v^* \cdot w)^{l+3}] - \frac{2l}{N+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* \cdot w)^{l+2}] \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \right] \frac{2 \cdot 1 + l + 2}{(2 \cdot 1 + l + 2)!} C_{1+2} (N\beta)^{2 \cdot 1 + l + 2} \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \left[\int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l+2} (v^* \cdot w)^{m+l+2}] - \frac{2l}{N+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l+1} (v^* \cdot w)^{m+l+1}] \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l} (v^* \cdot w)^{m+l}] \right] \frac{2m+l+2}{(2m+l+2)!} C_{m+2} (N\beta)^{2m+l+2} + \dots \left. \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1+l)(N+l)}{N(N-1)} (N-1)! \frac{N(N-1)}{(N-1+l)(N+l)} \\
&\quad \times \left\{ 0 + 0 + \frac{(N\beta)^{l+2}}{(N+l+1)!} + \frac{(N\beta)^{2 \cdot 1 + l + 2}}{1!(1+N+l+1)!} + \dots + \frac{(N\beta)^{2m+l+2}}{m!(m+N+l+1)!} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \left\{ \frac{(N\beta)^{2 \cdot 0 + N + l + 1}}{0!(0+N+l+1)!} + \frac{(N\beta)^{2 \cdot 1 + N + l + 1}}{1!(1+N+l+1)!} + \dots + \frac{(N\beta)^{2m+N+l+1}}{m!(m+N+l+1)!} + \dots \right\} \\
&= \frac{1}{I_{N-1}(2N\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N\beta)^{2m+N+l+1}}{m!(m+N+l+1)!} \\
&= \frac{I_{N+l+1}(2N\beta)}{I_{N-1}(2N\beta)}. \tag{B.42}
\end{aligned}$$

以上より、 $m = 2$ のときに関して、 m 以上の任意の l について計算することができた。

B.4 $(l; m) = (l; 3)$ の場合

$f_{(l;3)}(v, w) = A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^3 + B(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^2 + C(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)^1 + D(v \cdot w^*)^{l-3}$ とすると、式 (B.2) より、

$$\int dv_n f_{(l;3)}(w, v) f_{(l;3)}^*(w, v) = \frac{1}{d_{(l;3)}} f_{(l;3)}(w, w) = 1 \quad (\text{B.43})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \{A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^3 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^2 + C(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v) + D(w \cdot v^*)^{l-3}\} \\ & \quad \times \{A(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^3 + B(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^2 + C(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)\} + D(v \cdot w^*)^{l-3} = 1 \\ A^2 & \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+3} (w^* \cdot v)^{l+3}] + 2AB \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+2} (w^* \cdot v)^{l+2}] + (2ac + B^2) \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l+1} (w^* \cdot v)^{l+1}] \\ & + (2bc + 2AD) \int dv_n [(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l] + (2BD + C^2) \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1}] \\ & + 2CD \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2}] + D^2 \int dv_n [(w \cdot v^*)^{l-3} (w^* \cdot v)^{l-3}] = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} A^2(l+3)! & \frac{(N-1)!}{(N-1+l+3)!} + 2AB(l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+2)!} + (2ac + B^2)(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} \\ & + (2bc + 2AD)l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + (2BD + C^2)(l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} + 2CD(l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} \\ & + D^2(l-3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-3)!} = 1. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

ここで両辺に $\frac{(N+2+l)!}{(N-1)!}$ をかけると、

$$\begin{aligned} & A^2(l+3)! + 2AB(l+2)!(N+2+l) + (2ac + B^2)(l+1)!(N+2+l)(N+1+l) \\ & + (2AD + 2BC)l!(N+2+l)(N+1+l)(N+l) \\ & + (2BD + C^2)(l-1)!(N+2+l)(N+1+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\ & + 2CD(l-2)!(N+2+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l) \\ & + D^2(l-3)!(N+2+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l) = \frac{(N+2+l)!}{(N-1)!}. \end{aligned} \quad (\text{B.46})$$

また、

$$\int dv_n f_{(l;3)}(w, v) f_{(l-1;2)}^*(w, v) = 0 \quad (\text{B.47})$$

なので、

$$\begin{aligned}
& \int dv_n \{ A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^3 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^2 + C(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v) + D(w \cdot v^*)^{l-3} \} \\
& \times \sqrt{\frac{(N+1+l-1)!(N-1+l-1)(N+l-1)}{2(l-1)!N!(N-1)}} \{ (w^* \cdot v)^{l-1} (w \cdot v^*)^2 - \frac{2(l-1)}{N+l-1} (w^* \cdot v)^{l-2} (w \cdot v^*) \\
& + \frac{(l-1-l)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} (w^* \cdot v)^{l-3} \} = 0 \\
& A \int dv_n (w \cdot v^*)^{l+2} (w^* \cdot v)^{l+2} + \left(-\frac{2(l-1)}{N+l-1} A + B \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^{l+1} (w^* \cdot v)^{l+1} \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} A - \frac{2(l-1)}{N+l-1} B + C \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} B - \frac{2(l-1)}{N+l-1} C + D \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1} \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} C - \frac{2(l-1)}{N+l-1} D \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2} \\
& + \frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} D \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-3} (w^* \cdot v)^{l-3} = 0 \\
& A(l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+2)!} + \left(-\frac{2(l-1)}{N+l-1} A + B \right) (l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} A - \frac{2(l-1)}{N+l-1} B + C \right) l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} B - \frac{2(l-1)}{N+l-1} C + D \right) (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} C - \frac{2(l-1)}{N+l-1} D \right) (l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} \\
& + \frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} D (l-3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-3)!} = 0. \tag{B.48}
\end{aligned}$$

ここで両辺に $\frac{(N+1+l)!}{(l-3)!(N-1)!}$ をかけると、

$$\begin{aligned}
& A(l+2)(l+1)l(l-1)(l-2) + \left(-\frac{2(l-1)}{N+l-1} A + B \right) (l+1)l(l-1)(l-2)(N+1+l) \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} A - \frac{2(l-1)}{N+l-1} B + C \right) l(l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l) \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} B - \frac{2(l-1)}{N+l-1} C + D \right) (l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\
& + \left(\frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} C - \frac{2(l-1)}{N+l-1} D \right) (l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l) \\
& + \frac{(l-2)(l-1)}{(N-1+l-1)(N+l-1)} D (N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l) = 0. \tag{B.49}
\end{aligned}$$

さらに両辺に $(N-2+l)(N-1+l)$ をかけると、

$$\begin{aligned}
& A(l+2)(l+1)l(l-1)(l-2)(N-2+l)(N-1+l) \\
& - 2(l+1)l(l-1)^2(l-2)(N+1+l)(N-2+l)A \\
& + (l+1)l(l-1)(l-2)(N+1+l)(N-1+l)(N-2+l)B \\
& + l(l-1)^2(l-2)^2(N+1+l)(N+l)A \\
& - 2l(l-1)^2(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-2+l)B \\
& + l(l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)C \\
& + (l-1)^2(l-2)^2(N+1+l)(N+l)(N-1+l)B \\
& - 2(l-1)^2(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)C \\
& + (l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)^2(N-2+l)D \\
& + (l-2)^2(l-1)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)C \\
& - 2(l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)^2D \\
& + (l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l)D = 0. \tag{B.50}
\end{aligned}$$

D の項の係数は $(l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)$ でくくると、

$$(N-1+l) - 2(N-2+l) + (N-3+l) = 0 \tag{B.51}$$

となり D の項は消える。また、 C の項の係数は $(l-2)(l-1)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)$ をくくると、

$$l - 2(l-1) + (l-2) = 0 \tag{B.52}$$

となり、 C の項も消える。 B の項の係数は

$$\begin{aligned}
& (l+1)l(l-1)(l-2)(N+1+l)(N-1+l)(N-2+l) - 2l(l-1)^2(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-2+l) \\
& + (l-1)^2(l-2)^2(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\
& = (l-1)(l-2)(N+1+l) \\
& \quad \times \{(l+1)l(N-1+l)(N-2+l) - 2l(l-1)(N+l)(N-2+l) + (l-1)(l-2)(N+l)(N-1+l)\} \\
& = 2N(N-1)(l-1)(l-2)(N+1+l) \tag{B.53}
\end{aligned}$$

となる。 A の項の係数は

$$\begin{aligned}
& (l+2)(l+1)l(l-1)(l-2)(N-2+l)(N-1+l) - 2(l+1)l(l-1)^2(l-2)(N+1+l)(N-2+l) \\
& + l(l-1)^2(l-2)^2(N+1+l)(N+l)A \\
& = l(l-1)(l-2)\{(l+2)(l+1)(N-2+l)(N-1+l) \\
& \quad - 2(l+1)(l-1)(N+1+l)(N-2+l) + (l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)\} \\
& = 6N(N-1)l(l-1)(l-2). \tag{B.54}
\end{aligned}$$

よって、式 (B.50) は

$$\begin{aligned} 6N(N-1)l(l-1)(l-2)A + 2N(N-1)(l-1)(l-2)(N+1+l)B &= 0 \\ \therefore 3lA + (N+1+l)B &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.55})$$

また、

$$\int dv_n f_{(l;3)}(w, v) f_{(l-2;1)}^*(w, v) = 0 \quad (\text{B.56})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \{ A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^3 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^2 + C(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v) + D(w \cdot v^*)^{l-3} \} \\ & \times \sqrt{\frac{(N+l-2)!(N-1+l-2)}{(l-2)!(N-1)!(N-1)}} \left\{ (w^* \cdot v)^{l-2} (w \cdot v^*) - \frac{l-2}{N-1+l-2} (w^* \cdot v)^{l-3} \right\} = 0 \\ & A \int dv_n (w \cdot v^*)^{l+1} (w^* \cdot v)^{l+1} + \left(-\frac{l-2}{N-1+l-2} A + B \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-1+l-2} B + C \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1} \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-1+l-2} C + D \right) \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2} - \frac{l-2}{N-1+l-2} D \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-3} (w^* \cdot v)^{l-3} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.57})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} & A(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} + \left(-\frac{l-2}{N-3+l} A + B \right) l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-3+l} B + C \right) (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-3+l} C + D \right) (l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} - \frac{l-2}{N-3+l} D (l-3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-3)!} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

この式の両辺に $\frac{(N+l)!}{(l-3)!(N-1)!}$ をかけると、

$$\begin{aligned} & A(l+1)l(l-1)(l-2) + \left(-\frac{l-2}{N-3+l} A + B \right) l(l-1)(l-2)(N+l) \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-3+l} B + C \right) (l-1)(l-2)(N+l)(N-1+l) \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-3+l} C + D \right) (l-2)(N+l)(N-1+l)(N-2+l) \\ & - \frac{l-2}{N-3+l} D(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

D の項は消えて、

$$\begin{aligned} & A(l+1)l(l-1)(l-2) + \left(-\frac{l-2}{N-3+l}A+B\right)l(l-1)(l-2)(N+l) \\ & + \left(-\frac{l-2}{N-3+l}B+C\right)(l-1)(l-2)(N+l)(N-1+l) \\ & - \frac{l-2}{N-3+l}C(l-2)(N+l)(N-1+l)(N-2+l) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.60})$$

さらに両辺に $(N-3+l)$ をかけると、

$$\begin{aligned} & A(l+1)l(l-1)(l-2)(N-3+l) - Al(l-1)(l-2)^2(N+l) \\ & + Bl(l-1)(l-2)(N+l)(N-3+l) - B(l-1)(l-2)^2(N+l)(N-1+l) \\ & + C(l-1)(l-2)(N+l)(N-1+l)(N-3+l) - C(l-2)^2(N+l)(N-1+l)(N-2+l) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.61})$$

A, B, C の各項でまとめると、

$$\begin{aligned} & 3l(l-1)(l-2)(N-1)A + 2(l-1)(l-2)(N+l)(N-1)B + (l-2)(N+l)(N-1+l)(N-1)C = 0 \\ \therefore & 3l(l-1)A + 2(l-1)(N+l)B + (N+l)(N-1+l)C = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

また、

$$\int dv_n f_{(l;3)}(w, v) f_{(l-3;1)}^*(w, v) = 0 \quad (\text{B.63})$$

なので、

$$\begin{aligned} & \int dv_n \{A(w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^3 + B(w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^2 + C(w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v) + D(w \cdot v^*)^{l-3}\} \\ & \quad \times \sqrt{\frac{(N-1+l-3)!}{(l-3)!(N-1)!}} (w^* \cdot v)^{l-3} = 0 \\ & A \int dv_n (w \cdot v^*)^l (w^* \cdot v)^l + B \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-1} (w^* \cdot v)^{l-1} \\ & \quad + C \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-2} (w^* \cdot v)^{l-2} + D \int dv_n (w \cdot v^*)^{l-3} (w^* \cdot v)^{l-3} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

ここで、式 (B.7) を用いて、

$$\begin{aligned} & Al! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + B(l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \\ & \quad + C(l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} + D(l-3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-3)!} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

ここで両辺に $\frac{(N-1+l)!}{(l-3)!}$ をかけると、

$$Al(l-1)(l-2) + B(l-1)(l-2)(N-1+l) + C(l-2)(N-1+l)(N-2+l) + D(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l) = 0. \quad (\text{B.66})$$

ここで式 (B.55) より、

$$B = -\frac{3l}{N+1+l}A. \quad (\text{B.67})$$

これを式 (B.62) に代入して、

$$\begin{aligned} 3l(l-1)A - 2(l-1)(N+l)\frac{3l}{N+1+l}A + (N+l)(N-1+l)C &= 0 \\ \{3l(l-1)(N+1+l) - 6l(l-1)(N+l)\}A + (N+l)(N-1+l)(N+1+l)C &= 0 \\ -3l(l-1)(N-1+l)A + (N+l)(N-1+l)(N+1+l)C &= 0 \\ \therefore C = \frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)}A. \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

次に、式 (B.66) に式 (B.67)、式 (B.68) を代入すると、

$$\begin{aligned} l(l-1)(l-2)A - (l-1)(l-2)(N-1+l)\frac{3l}{N+1+l}A \\ + (l-2)(N-1+l)(N-2+l)\frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)}A + (N-1+l)(N-2+l)(N-3+l)D &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

ここで両辺に $(N+l)(N+1+l)$ をかけると、

$$\begin{aligned} \{l(l-1)(l-2)(N+l)(N+1+l) - 3l(l-1)(l-2)(N-1+l)(N+l) \\ + 3l(l-1)(l-2)(N-1+l)(N-2+l)\}A + (N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l)D &= 0 \\ l(l-1)(l-2)(N-2+l)(N-3+l)A + (N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l)D &= 0 \\ \therefore D = -\frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}A. \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

また、式 (B.46) に式 (B.67)、式 (B.68)、式 (B.70) を代入すると、

$$\begin{aligned}
& A^2(l+3)! + 2A \left(-\frac{3l}{N+1+l} A \right) (l+2)!(N+2+l) \\
& + 2A \left(\frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} A \right) (l+1)!(N+2+l)(N+1+l) \\
& + \left(-\frac{3l}{N+1+l} A \right)^2 (l+1)!(N+2+l)(N+1+l) \\
& + 2A \left(-\frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} A \right) l!(N+2+l)(N+1+l)(N+l) \\
& + 2 \left(-\frac{3l}{N+1+l} A \right) \left(\frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} A \right) l!(N+2+l)(N+1+l)(N+l) \\
& + 2 \left(-\frac{3l}{N+1+l} A \right) \left(-\frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} A \right) \\
& \times (l-1)!(N+2+l)(N+1+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\
& + \left(\frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} A \right)^2 (l-1)!(N+2+l)(N+1+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\
& + 2 \left(\frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} A \right) \left(-\frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} A \right) \\
& \times (l-2)!(N+2+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l) \\
& + \left(-\frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} A \right)^2 \\
& \times (l-3)!(N+2+l)(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N-2+l)(N-3+l) \\
& = \frac{(N+2+l)!}{(N-1)!}. \tag{B.71}
\end{aligned}$$

両辺に $\frac{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{(l-3)!}$ をかけると、

$$\begin{aligned}
& \{(l+3)(l+2)(l+1)l(l-1)(l-2)(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \\
& - 6(l+2)(l+1)l^2(l-1)(l-2)(N+2+l)(N+l)(N-1+l) \\
& + 6(l+1)l^2(l-1)^2(l-2)(N+2+l)(N+1+l)(N-1+l) \\
& + 9(l+1)l^3(l-1)(l-2)(N+2+l)(N+l)(N-1+l) \\
& - 2l^2(l-1)^2(l-2)^2(N+2+l)(N+1+l)(N+l) \\
& - 18l^3(l-1)^2(l-2)(N+2+l)(N+l)(N-1+l) \\
& + 6l^2(l-1)^2(l-2)^2(N+2+l)(N+l)(N-1+l) \\
& + 9l^2(l-1)^3(l-2)(N+2+l)(N-1+l)^2 \\
& - 6l^2(l-1)^2(l-2)^2(N+2+l)(N-1+l)(N-2+l) \\
& + l^2(l-1)^2(l-2)^2(N+2+l)(N-2+l)(N-3+l)\}A^2 \\
& = \frac{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)(N+2+l)!}{(N-1)!(l-3)!}.
\end{aligned} \tag{B.72}$$

ここで簡単のため、 $a = N+1, b = N, c = N-1$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{\text{式 (B.72) の左辺}}{l(l-1)(l-2)A^2} & = (l+3)(l+2)(l+1)(a+l)(b+l)(c+l) \\
& - 6(l+2)(l+1)l(a+l+1)(b+l)(c+l) \\
& + 6(l+1)l(l-1)(a+l+1)(b+l+1)(c+l) \\
& + 9(l+1)l^2(a+l+1)(b+l)(c+l) \\
& - 2l(l-1)(l-2)(a+l+1)(b+l+1)(c+l+1) \\
& - 18l^2(l-1)(a+l+1)(b+l)(c+l) \\
& + 6l(l-1)(l-2)(a+l+1)(b+l)(c+l) \\
& + 9l(l-1)^2(a+l+1)(b+l-1)(c+l) \\
& - 6l(l-1)(l-2)(a+l+1)(b+l-1)(c+l-1) \\
& + l(l-1)(l-2)(a+l+1)(b+l-2)(c+l-2).
\end{aligned} \tag{B.73}$$

ここで式 (B.73) の abc の項を除いたものを考える。

(式 (B.73) の abc 以外の項)

$$\begin{aligned}
&= (l+3)(l+2)(l+1)\{l(ac+bc+ab) + l^2(a+b+c) + l^3\} \\
&\quad - 6(l+2)(l+1)l\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\
&\quad + 6(l+1)l(l-1)\{(l+1)ac + (l+1)bc + lab + (l+1)^2c + (l+1)la + (l+1)lb + (l+1)^2l\} \\
&\quad + 9(l+1)l^2\{lac + (l+1)bc + lab + l(l+1)c + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\
&\quad - 2l(l-1)(l-2)\{(l+1)ac + (l+1)bc + (l+1)ab + (l+1)^2c + (l+1)^2a + (l+1)^2b + (l+1)^3\} \\
&\quad - 18l^2(l-1)\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\
&\quad + 6l(l-1)(l-2)\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\
&\quad + 9l(l-1)^2\{(l-1)ac + (l+1)bc + lab + (l+1)(l-1)c + (l-1)la + (l+1)lb + (l+1)(l-1)l\} \\
&\quad - 6l(l-1)(l-2) \\
&\quad \times \{(l-1)ac + (l+1)bc + (l-1)ab + (l-1)(l+1)c + (l+1)(l-1)b + (l-1)^2a + (l+1)(l-1)^2\} \\
&\quad + l(l-1)(l-2) \\
&\quad \times \{(l-2)ac + (l+1)bc + (l-2)ab + (l+1)(l-2)c + (l-2)^2a + (l+1)(l-2)b + (l+1)(l-2)^2\}.
\end{aligned} \tag{B.74}$$

式 (B.74) の 1 項目は

$$\begin{aligned}
&(l+3)(l+2)(l+1)\{l(ac+bc+ab) + l^2(a+b+c) + l^3\} \\
&= (l^3 + 6l^2 + 11l + 6)\{l(ac+bc+ab) + l^2(a+b+c) + l^3\} \\
&= (6ab + 6ac + 6bc)l + (6a + 6b + 6c + 11ab + 11ac + 11bc)l^2 \\
&\quad + (6 + 11a + 11b + 11c + 6ab + 6ac + 6bc)l^3 + (11 + 6a + 6b + 6c + ab + ac + bc)l^4 \\
&\quad + (6 + a + b + c)l^5 + l^6.
\end{aligned} \tag{B.75}$$

式 (B.74) の 2 項目は

$$\begin{aligned}
&- 6(l+2)(l+1)l\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\
&= -6(l+2)(l+1)l\{bc + l(ac+bc+ab+b+c) + l^2(a+b+c+1) + l^3\}.
\end{aligned} \tag{B.76}$$

式 (B.74) の 3 項目は

$$\begin{aligned}
&6(l+1)l(l-1)\{(l+1)ac + (l+1)bc + lab + (l+1)^2c + (l+1)la + (l+1)lb + (l+1)^2l\} \\
&= 6(l+1)l(l-1)\{ac + bc + c + l(ac+bc+ab+2c+a+b+1) + l^2(c+a+b+2) + l^3\}.
\end{aligned} \tag{B.77}$$

式 (B.74) の 4 項目は

$$\begin{aligned}
&9(l+1)l^2\{lac + (l+1)bc + lab + l(l+1)c + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\
&= 9(l+1)l^2\{bc + l(ac+bc+ab+c+b) + l^2(a+b+c+1) + l^3\}.
\end{aligned} \tag{B.78}$$

式 (B.74) の 5 項目は

$$\begin{aligned} & -2l(l-1)(l-2)\{(l+1)ac + (l+1)bc + (l+1)ab + (l+1)^2c + (l+1)^2a + (l+1)^2b + (l+1)^3\} \\ & = -2l(l-1)(l-2)\{ac + bc + ab + c + a + b + 1 + l(ac + bc + ab + 2c + 2a + 2b + 3) \\ & \quad + l^2(c + a + b + 3) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

式 (B.74) の 6 項目は

$$\begin{aligned} & -18l^2(l-1)\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\ & = -18l^2(l-1)\{bc + l(ac + bc + ab + c + b) + l^2(a + b + c + 1) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.80})$$

式 (B.74) の 7 項目は

$$\begin{aligned} & 6l(l-1)(l-2)\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\ & = 6l(l-1)(l-2)\{bc + l(ac + bc + ab + c + b) + l^2(a + b + c + 1) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

式 (B.74) の 8 項目は

$$\begin{aligned} & 9l(l-1)^2\{(l-1)ac + (l+1)bc + lab + (l+1)(l-1)c + (l-1)la + (l+1)lb + (l+1)(l-1)l\} \\ & = 9l(l-1)^2\{-ac + bc - c + l(ac + bc + ab - a + b - 1) + l^2(a + b + c) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

式 (B.74) の 9 項目は

$$\begin{aligned} & -6l(l-1)(l-2) \times \{(l-1)ac + (l+1)bc + (l-1)ab \\ & \quad + (l-1)(l+1)c + (l+1)(l-1)b + (l-1)^2a + (l+1)(l-1)^2\} \\ & = -6l(l-1)(l-2) \times \{(-ac + bc - ab - c + a - b + 1) \\ & \quad + l(ac + bc + ab - 2a - 1) + l^2(a + b + c - 1) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.83})$$

式 (B.74) の 10 項目は

$$\begin{aligned} & l(l-1)(l-2) \times \{(l-2)ac + (l+1)bc + (l-2)ab \\ & \quad + (l+1)(l-2)c + (l-2)^2a + (l+1)(l-2)b + (l+1)(l-2)^2\} \\ & = l(l-1)(l-2) \times \{(-2ac + bc - 2ab - 2c + 4a - 2b + 4) \\ & \quad + l(ac + bc + ab - c - 4a - b) + l^2(a + b + c - 3) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

6 項目と 7 項目を足すと、

$$\begin{aligned} & 6l(l-1)\{-3l + (l-2)\}\{lac + (l+1)bc + lab + (l+1)lc + l^2a + (l+1)lb + (l+1)l^2\} \\ & = -12(l+1)l(l-1)\{bc + l(ac + bc + ab + c + b) + l^2(a + b + c + 1) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

この式に 2, 4 項目を足すと、

$$\begin{aligned} & \{-6(l+2) + 9l - 12(l-1)\}(l+1)l\{bc + l(ac + bc + ab + c + b) + l^2(a + b + c + 1) + l^3\} \\ & = -9l^2(l+1)\{bc + l(ac + bc + ab + c + b) + l^2(a + b + c + 1) + l^3\}. \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

3, 5, 8, 9, 10 項目を足すと、

$$\begin{aligned} & l(l-1) \left[6(l+1) \times \{ac + bc + c + l(ac + bc + ab + 2c + a + b + 1) + l^2(c + a + b + 2) + l^3\} \right. \\ & - 2(l-2) \times \{ac + bc + ab + c + a + b + 1 + l(ac + bc + ab + 2c + 2a + 2b + 3) \\ & \quad \left. + l^2(c + a + b + 3) + l^3\} \right. \\ & + 9(l-1) \times \{(-ac + bc - c) + l(ac + bc + ab - a + b - 1) + l^2(a + b + c) + l^3\} \\ & - 6(l-2) \times \{(-ac + bc - ab - c + a - b + 1) \\ & \quad \left. + l(ac + bc + ab - 2a - 1) + l^2(a + b + c - 1) + l^3\} \right. \\ & + (l-2) \times \{(-2ac + bc - 2ab - 2c + 4a - 2b + 4) \\ & \quad \left. + l(ac + bc + ab - c - 4a - b) + l^2(a + b + c - 3) + l^3\} \right] \\ & = l(l-1) \left[\{(6ac + 6bc + 6c) + l(12ac + 12bc + 18c + 6ab + 6a + 6b + 6) \right. \\ & \quad \left. + l^2(6ac + 6bc + 6ab + 18c + 12a + 12b + 18) + l^3(6a + 6b + 6c + 18) + 6l^4\} \right. \\ & + \{(4ac + 4bc + 4ab + 4c + 4a + 4b + 4) + l(2ac + 2bc + 2ab + 6c + 6a + 6b + 10) \\ & \quad \left. + l^2(-2ac - 2bc - 2ab + 6) + l^3(-2a - 2b - 2c - 2) - 2l^4\} \right. \\ & + \{(9ac - 9bc + 9c) + l(-18ac - 9c - 9ab + 9a - 9b + 9) \\ & \quad \left. + l^2(9ac + 9bc + 9ab - 18a - 9 - 9c) + l^3(9a + 9b + 9c - 9) + 9l^4\} \right. \\ & + \{(-12ac + 12bc - 12ab - 12c + 12a - 12b + 12) + l(18ac + 6bc + 18ab + 6c - 30a + 6b - 18) \\ & \quad \left. + l^2(-6ac - 6bc - 6ab + 24a + 12b + 12c - 6) + l^3(-6a - 6b - 6c + 18) - 6l^4\} \right. \\ & + \{(4ac - 2bc + 4ab + 4c - 8a + 4b - 8) + l(-4ac - bc - 4ab + 12a + 4) \\ & \quad \left. + l^2(ac + bc + ab - 3c - 6a - 3b + 6) + l^3(a + b + c - 5) + l^4\} \right] \\ & = l(l-1) \left[(11ac + 11bc + 11c - 4ab + 8a - 4b + 8) \right. \\ & \quad + l(10ac + 19bc + 21c + 13ab + 3a + 9b + 11) \\ & \quad \left. + l^2(8ac + 8bc + 8ab + 18c + 12a + 21b + 15) + l^3(8a + 8b + 8c + 20) + 8l^4 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

式 (B.86) と式 (B.87) を合わせると式 (B.74) の 2 10 項目の和が計算できて、

$$\begin{aligned}
& -9l^2(l+1) \left[bc + l(ac + bc + ab + c + b) + l^2(a + b + c + 1) + l^3 \right] \\
& + l(l-1) \left[(11ac + 11bc + 11c - 4ab + 8a - 4b + 8) \right. \\
& + l(10ac + 19bc + 21c + 13ab + 3a + 9b + 11) \\
& \left. + l^2(8ac + 8bc + 8ab + 18c + 12a + 21b + 15) + l^3(8a + 8b + 8c + 20) + 8l^4 \right] \\
= & l \left[(-11ac - 11bc - 11c + 4ab - 8a + 4b - 8) + l(-17bc + ac - 10c - 17ab + 5a - 13b - 3) \right. \\
& + l^2(-7ac - 7bc - 4ab - 6c - 21b - 9a - 4) + l^3(-ac - bc - ab - 8c - 5b - 5a - 14) \\
& \left. + l^4(-a - b - c - 6) - l^5 \right]. \tag{B.88}
\end{aligned}$$

式 (B.75)、式 (B.88) を加えると式 (B.74) が計算できて、

$$\begin{aligned}
& \left[(6ab + 6ac + 6bc)l + (6a + 6b + 6c + 11ab + 11ac + 11bc)l^2 \right. \\
& + (6 + 11a + 11b + 11c + 6ab + 6ac + 6bc)l^3 + (11 + 6a + 6b + 6c + ab + ac + bc)l^4 \\
& \left. + (6 + a + b + c)l^5 + l^6 \right] \\
& + \left[(-11ac - 11bc - 11c + 4ab - 8a + 4b - 8)l + (-17bc + ac - 10c - 17ab + 5a - 13b - 3)l^2 \right. \\
& + (-7ac - 7bc - 4ab - 6c - 21b - 9a - 4)l^3 + (-ac - bc - ab - 8c - 5b - 5a - 14)l^4 \\
& \left. + (-a - b - c - 6)l^5 - l^6 \right] \\
= & (10ab - 5ac - 5bc - 11c - 8a + 4b - 8)l + (11a - 7b - 4c - 6ab + 12ac - 6bc - 3)l^2 \\
& + (2 + 2a - 10b + 5c + 2ab - ac - bc)l^3 + (-3 + a + b - 2c)l^4. \tag{B.89}
\end{aligned}$$

ここで $a = N + 1, b = N, c = N - 1$ を代入すると、式 (B.89) の l の項の係数は

$$\begin{aligned}
& 10ab - 5ac - 5bc - 11c - 8a + 4b - 8 \\
= & 10(N+1)N - 5(N+1)(N-1) - 5N(N-1) - 11(N-1) - 8(N+1) + 4N - 8 \\
= & 10N^2 + 10N - 5N^2 + 5 - 5N^2 + 5N - 11N + 11 - 8N - 8 + 4N - 8 \\
= & 0. \tag{B.90}
\end{aligned}$$

式 (B.89) の l^2 の項の係数は

$$\begin{aligned}
& 11a - 7b - 4c - 6ab + 12ac - 6bc - 3 \\
& = 11(N+1) - 7N - 4(N-1) - 6(N+1)N + 12(N+1)(N-1) - 6N(N-1) - 3 \\
& = 11N + 11 - 7N - 4N + 4 - 6N^2 - 6N + 12N^2 - 12 - 6N^2 + 6N - 3 \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{B.91}$$

式 (B.89) の l^3 の項の係数は

$$\begin{aligned}
& 2 + 2a - 10b + 5c + 2ab - ac - bc \\
& 2 + 2(N+1) - 10N + 5(N-1) + 2(N+1)N - (N+1)(N-1) - N(N-1) \\
& 2 + 2N + 2 - 10N + 5N - 5 + 2N^2 + 2N - N^2 + 1 - N^2 + N \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{B.92}$$

式 (B.89) の l^4 の項の係数は

$$\begin{aligned}
& -3 + a + b - 2c \\
& -3 + (N+1) + N - 2(N-1) \\
& -3 + N + 1 + N - 2N + 2 \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{B.93}$$

よって、式 (B.73) の abc 以外の項は全て消える。 abc の項の係数は

$$\begin{aligned}
& (l+3)(l+2)(l+1) - 6(l+2)(l+1)l + 6(l+1)l(l-1) + 9(l+1)l^2 \\
& - 2l(l-1)(l-2) - 18l^2(l-1) + 6l(l-1)(l-2) + 9l(l-1)^2 - 6l(l-1)(l-2) + l(l-1)(l-2) \\
& = (l+3)(l+2)(l+1) + (l+1)l[-6(l+2) + 6(l-1) + 9l] \\
& + l(l-1)(l-2)[-2 + 6 - 6] + l(l-1)[-18l + 9(l-1) + (l-2)] \\
& = (l+3)(l+2)(l+1) + 9(l-2)(l+1)l - 2l(l-1)(l-2) - (8l+11)l(l-1) \\
& = (l+1)(l^2 + 5l + 6 + 9l^2 - 18l) + l(l-1)[-2(l-2) - (8l+11)] \\
& = 10l^3 - 3l^2 - 7l + 6 - 10l^3 + 3l^2 + 7l \\
& = 6.
\end{aligned} \tag{B.94}$$

したがって、式 (B.72) は $a = N+1, b = N, c = N-1$ とすると、

$$\begin{aligned}
6l(l-1)(l-2)abcA^2 &= \frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{(N-1)!(l-3)!} \\
\therefore A &= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{6!(N-1)!(N+1)N(N-1)}}.
\end{aligned} \tag{B.95}$$

これと、式 (B.67)、式 (B.68)、式 (B.70) を合わせると $f_{(l;3)}(v, w)$ は

$$\begin{aligned}
f_{(l;3)}(v, w) &= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{6l!(N-1)!(N+1)N(N-1)}} \\
&\times \left[(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^3 - \frac{3l}{N+1+l} (v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^2 \right. \\
&\left. + \frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} (v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w) - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (v \cdot w^*)^{l-3} \right]. \quad (\text{B.96})
\end{aligned}$$

また、 $d_{(l;3)}$ は

$$\begin{aligned}
d_{(l;3)} &= f_{(l;3)}(w, w) \\
&= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{6l!(N-1)!(N+1)N(N-1)}} \\
&\times \left[1 - \frac{3l}{N+1+l} + \frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \right] \\
&= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{6l!(N-1)!(N+1)N(N-1)}} \\
&\times \frac{(N+1+l)(N+l)(N-1+l) - 3l(N+l)(N-1+l) + 3l(l-1)(N-1+l) - l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \\
&= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{6l!(N-1)!(N+1)N(N-1)}} \frac{N(N+1)(N-1)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}. \quad (\text{B.97})
\end{aligned}$$

$h_{(l;3)}(\beta)$ は、

$$\begin{aligned}
& h_{(l;3)}(\beta) \\
&= \frac{1}{d_{(l;3)} Z_0(\beta)} \int dv_n f_{(l;3)}(v, w) e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1+l)(N+l)(N-1+l)}{(N+1)N(N-1)} \\
&\quad \times \int dv_n \left[(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^3 - \frac{3l}{N+1+l} (v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^2 + \frac{3l(l-1)}{(N+l)(N+1+l)} (v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w) \right. \\
&\quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (v \cdot w^*)^{l-3} \right] e^{N\beta[v \cdot w^* + v^* \cdot w]} \\
&= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N-1+l)(N+l)(N-1+l)}{(N+1)N(N-1)} \\
&\quad \times \left\{ \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^l (v^* w)^l] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)^{l-2}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-3} (v^* \cdot w)^{l-3}] \right] \frac{l-3}{(l-3)!} C_0 (N\beta)^{l-3} \right. \\
&\quad \left. + \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* w)^{l+1}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)^{l-2}] \right] \frac{l-1}{(l-1)!} C_1 (N\beta)^{l-1} \right. \\
&\quad \left. + \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* w)^{l+2}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right] \frac{l+1}{(l+1)!} C_2 (N\beta)^{l+1} \right. \\
&\quad \left. + \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+3} (v^* w)^{l+3}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* \cdot w)^{l+2}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right] \frac{l+3}{(l+3)!} C_3 (N\beta)^{l+3} \right. \\
&\quad \left. + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{m+l+3} (v^* w)^{m+l+3}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l+2} (v^* \cdot w)^{m+l+2}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l+1} (v^* \cdot w)^{m+l+1}] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l} (v^* \cdot w)^{m+l}] \right] \frac{2m+l+3}{(2m+l+3)!} C_{m+3} (N\beta)^{2m+l+3} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

(B.98)

以下で { 括弧 } 中の各項を計算していく。式 (B.98) の 1 項目は

$$\begin{aligned}
& \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^l (v^* w)^l] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right. \\
& \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)^{l-2}] \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-3} (v^* \cdot w)^{l-3}] \right] \frac{l-3}{(l-3)!} C_0 (N\beta)^{l-3} \\
&= \left[l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} - \frac{3l}{N+1+l} (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} \right. \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (l-3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-3)!} \right] \frac{l-3}{(l-3)!} C_0 (N\beta)^{l-3} \\
&= \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[(N+1+l)(N+l) - 3(N-1+l)(N+l) \right. \\
& \quad \left. + 3(N-1+l)(N-2+l) - (N-2+l)(N-3+l) \right] \frac{l-3}{(l-3)!} C_0 (N\beta)^{l-3} \\
&= \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[(N+1+l-3N+3-3l)(N+l) \right. \\
& \quad \left. + (3N-3+3l-N+3-l)(N-2+l) \right] \frac{l-3}{(l-3)!} C_0 (N\beta)^{l-3} \\
&= \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[-2(N-2+l)(N+l) + 2(N+l)(N-2+l) \right] \frac{l-3}{(l-3)!} C_0 (N\beta)^{l-3} \\
&= 0. \tag{B.99}
\end{aligned}$$

式 (B.98) の 2 項目は

$$\begin{aligned}
& \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* w)^{l+1}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right. \\
& \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-2} (v^* \cdot w)^{l-2}] \right] \frac{l-1}{(l-1)!} (N\beta)^{l-1} \\
= & \left[(l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} - \frac{3l}{N+1+l} l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \right. \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (l-2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-2)!} \right] \frac{l-1}{(l-1)!} (N\beta)^{l-1} \\
= & \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[(l+1)(N+1+l) - 3l(N+l) + 3(l-1)(N-1+l) - (l-2)(N-2+l) \right] \frac{l-1}{(l-1)!} (N\beta)^{l-1} \\
= & \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[Nl + l + l^2 + N + 1 + l - 3Nl - 3l^2 \right. \\
& \quad \left. + 3Nl - 3l + 3l^2 - 3N + 3 - 3l - Nl + 2l - l^2 + 2N - 4 + 2l \right] \frac{l-1}{(l-1)!} (N\beta)^{l-1} \\
= & 0. \tag{B.100}
\end{aligned}$$

式 (B.98) の 3 項目は

$$\begin{aligned}
& \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* w)^{l+2}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \right. \\
& \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l-1} (v^* \cdot w)^{l-1}] \right] \frac{l+1}{(l+1)!} (N\beta)^{l+1} \\
= & \left[(l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+2)!} - \frac{3l}{N+1+l} (l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \right. \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (l-1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l-1)!} \right] \frac{l+1}{(l+1)!} (N\beta)^{l+1} \\
= & \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[(l+2)(l+1) - 3l(l+1) + 3l(l-1) - (l-1)(l-2) \right] \frac{l+1}{(l+1)!} (N\beta)^{l+1} \\
= & \frac{l!(N-1)!}{(N+1+l)!} \left[l^2 + 3l + 2 - 3l^2 - 3l + 3l^2 - 3l - l^2 + 3l - 2 \right] \frac{l+1}{(l+1)!} (N\beta)^{l+1} \\
= & 0. \tag{B.101}
\end{aligned}$$

式 (B.98) の 4 項目は

$$\begin{aligned}
& \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{l+3} (v^* w)^{l+3}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+2} (v^* \cdot w)^{l+2}] \right. \\
& \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{l+1} (v^* \cdot w)^{l+1}] \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^l (v^* \cdot w)^l] \right] \frac{l+3 C_3}{(l+3)!} (N\beta)^{l+3} \\
= & \left[(l+3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+3)!} - \frac{3l}{N+1+l} (l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+2)!} + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+l+1)!} \right. \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} l! \frac{(N-1)!}{(N-1+l)!} \right] \frac{l+3 C_3}{(l+3)!} (N\beta)^{l+3} \\
= & \frac{l!(N-1)!}{(N+2+l)!(N-1+l)(N+l)(N+1+l)} \\
& \times \left[(l+3)(l+2)(l+1)(N-1+l)(N+l)(N+1+l) - 3(l+2)(l+1)l(N+2+l)(N-1+l)(N+l) \right. \\
& \quad \left. + 3(l+1)l(l-1)(N+2+l)(N+1+l)(N-1+l) - l(l-1)(l-2)(N+2+l)(N+1+l)(N+l) \right] \\
& \times \frac{l+3 C_3}{(l+3)!} (N\beta)^{l+3}. \tag{B.102}
\end{aligned}$$

ここで [括弧] の中は

$$\begin{aligned}
& (l+2)(l+1)(N-1+l)(N+l) \{ (l+3)(N+1+l) - 3l(N+2+l) \} \\
& \quad + l(l-1)(N+2+l)(N+1+l) \{ 3(l+1)(N-1+l) - (l-2)(N+l) \} \\
= & (l+2)(l+1) \{ l^2 + (2N-1)l + N^2 - N \} \{ -2l^2 - 2(N+1)l + 3(N+1) \} \\
& \quad + l(l-1) \{ l^2 + (2N+3)l + N^2 + 3N + 2 \} \{ 2l^2 + 2(N+1) + 5N - 3 \} \\
= & (l^2 + 3l + 2) \{ -2l^4 - 6Nl^3 + (-6N^2 + 3N + 5)l^2 + (-2N^3 + 6N^2 + 5N - 3)l + (3N^3 + 3N^2 - 3N^2 - 3N) \} \\
& \quad + (l^2 - l) \{ 2l^4 + (6N+8)l^3 + (6N^2 + 21N + 7)l^2 + (2N^3 + 18N^2 + 19N - 5)l + (5N^3 + 12N^2 + N - 6) \} \\
= & (-2+2)l^6 + (-6-6N-2+6N+8)l^5 + (-6N^2+3N+5-18N-4+6N^2+21N+7-6N-8)l^4 \\
& \quad + (-2N^3+6N^2+5N-3-18N^2+9N+15-12N+2N^3+18N^2+19N-5-6N^2-21N-7)l^3 \\
& \quad + (3N^3+3N^2-3N^2-3N-6N^3+18N^2+15N-9 \\
& \quad \quad - 12N^2+6N+10+5N^3+12N^2+N-6-2N^3-18N^2-19N+5)l^2 \\
& \quad + (9N^3+9N^2-9N^2-9N-4N^3+12N^2+10N-6-5N^3-12N^2-N+6)l \\
& \quad + 2(3N^3+3N^2-3N^2-3N) \\
= & l^6 \times 0 + l^5 \times 0 + l^4 \times 0 + l^3 \times 0 + l^2 \times 0 + l \times 0 + 6N(N^2-1) \\
= & 6N(N+1)(N-1). \tag{B.103}
\end{aligned}$$

よって、以上を合わせると式 (B.98) の 4 項目は

$$\begin{aligned}
& \frac{l!(N-1)!}{(N+2+l)!(N-1+l)(N+l)(N+1+l)} \times 6N(N+1)(N-1) \times \frac{l+3}{(l+3)!} C_3 (N\beta)^{l+3} \\
&= \frac{l!(N-1)!}{(N+2+l)!(N-1+l)(N+l)(N+1+l)} \times 6N(N+1)(N-1) \times \frac{1}{3!l!} (N\beta)^{l+3} \\
&= \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \frac{(N\beta)^{2 \cdot 0 + N + l + 2}}{0!(N+l+2)!} \frac{(N+1)N(N-1)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}. \tag{B.104}
\end{aligned}$$

式 (B.98) の $4+m$ 項目は

$$\begin{aligned}
& \left[\int v_n [(v \cdot w^*)^{m+l+3} (v^* w)^{m+l+3}] - \frac{3l}{N+1+l} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l+2} (v^* \cdot w)^{m+l+2}] \right. \\
& \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l+1} (v^* \cdot w)^{m+l+1}] \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \int dv_n [(v \cdot w^*)^{m+l} (v^* \cdot w)^{m+l}] \right] \frac{2m+l+3}{(2m+l+3)!} C_{m+3} (N\beta)^{2m+l+3} \\
&= \left[(m+l+3)! \frac{(N-1)!}{(N-1+m+l+3)!} - \frac{3l}{N+1+l} (m+l+2)! \frac{(N-1)!}{(N-1+m+l+2)!} \right. \\
& \quad + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (m+l+1)! \frac{(N-1)!}{(N-1+m+l+1)!} \\
& \quad \left. - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (m+l)! \frac{(N-1)!}{(N-1+m+l)!} \right] \frac{2m+l+3}{(2m+l+3)!} C_{m+3} (N\beta)^{2m+l+3} \\
&= \frac{(m+l)! (N-1)!}{(N+m+l+2)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \\
& \quad \times \left[(m+l+3)(m+l+2)(m+l+1)(N+1+l)(N+l)(N-1+l) \right. \\
& \quad - 3l(m+l+2)(m+l+1)(N+m+l+2)(N+l)(N-1+l) \\
& \quad + 3l(l-1)(m+l+1)(N+m+l+2)(N+m+l+1)(N-1+l) \\
& \quad \left. - l(l-1)(l-2)(N+m+l+2)(N+m+l+1)(N+m+l) \right] \frac{2m+l+3}{(2m+l+3)!} C_{m+3} (N\beta)^{2m+l+3}. \tag{B.105}
\end{aligned}$$

ここで [括弧] の中は

$$\begin{aligned}
& (m+l+2)(m+l+1)(N+l)(N-1+l) \{ (m+l+3)(N+1+l) - 3l(N+m+l+2) \} \\
& + l(l-1)(N+m+l+2)(N+m+l+1) \{ 3(m+l+1)(N-1+l) - (l-2)(N+m+l) \} \\
& = \{ l^2 + (2m+3)l + m^2 + 3m + 2 \} \{ l^2 + (2N-1)l + N^2 - N \} \{ -2l^2 - 2(N+m+1)l + mN + 3N + m + 3 \} \\
& + \{ l^3 + (N+m+1)l^2 + (-N-m-2)l \} (N+m+l+1) \{ 2l^2 + 2(N+m)l + 3mN + 5N - m - 3 \}. \tag{B.106}
\end{aligned}$$

この式の 1 項目を展開すると、

$$\begin{aligned}
& \{l^4 + 2(N + m + 1)l^3 + (N^2 + m^2 + m + 4mN + 5N - 1)l^2 \\
& + (2mN^2 + 3N^2 + 2m^2N - m^2 + 4mN - 3m - 2 + N)l + m^2N^2 - m^2N + 3mN^2 - 3mN + 2N^2 - 2N\} \\
& \times \{-2l^2 - 2(N + m + 1)l + mN + 3N + m + 3\} \\
= & -2l^6 + (-6N - 6m - 6)l^5 + (-6N^2 - 15mN - 15N - 6m^2 - 9m + 1)l^4 \\
& + (-2N^3 - 2m^3 - 12mN^2 - 12N^2 - 12m^2N - 18mN + 14m + 2N + 12)l^3 \\
& + (-3mN^3 - 3N^3 - 3m^3N + 3m^3 + 12m^2 + 12m + 1 - 6m^2N^2 - 6mN^2 + 21mN + 6N^2 + 18N)l^2 \\
& + (3mN^3 + 5N^3 + 6m^2N^2 + 3m^3N - m^3 - 11m + 18mN^2 + 12N^2 + 12m^2N - 6m^2 + 12mN + N - 6)l \\
& + (m^3N^3 + 6m^2N^3 + 11mN^3 + 6N^3 - m^3N - 6m^2N - 11mN - 6N). \tag{B.107}
\end{aligned}$$

また 2 項目を展開すると、

$$\begin{aligned}
& \{l^4 + (2N + 2m + 2)l^3 + (N^2 + 2mN + m^2 + N + m - 1)l^2 + (-N^2 - 2mN - m^2 - 3m - 3N - 2)l\} \\
& \times \{2l^2 + 2(N + m + 1)l + 3mN + 5N - m - 3\} \\
= & 2l^6 + (6N + 6m + 6)l^5 + (6N^2 + 15mN + 15N + 6m^2 + 9m - 1)l^4 \\
& + (2N^3 + 2m^3 + 12mN^2 + 12N^2 + 12m^2N + 18mN - 14m - 2N - 12)l^3 \\
& + (3mN^3 + 3N^3 - 3m^3N - 3m^3 - 12m^2 - 12m - 1 + 6m^2N^2 + 6mN^2 - 21mN - 6N^2 - 18N)l^2 \\
& + (-3mN^3 - 5N^3 - 6m^2N^2 - 3m^3N + m^3 - 11m - 18mN^2 - 12N^2 - 12m^2N + 6m^2 - 12mN - N + 6)l. \tag{B.108}
\end{aligned}$$

よって 1 項目と 2 項目を足すと l を含む項は打ち消し合うので、式 (B.98) の $4 + m$ 項目は

$$\begin{aligned}
& \frac{(m+l)!(N-1)!}{(N+m+l+2)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \\
& \times \left[m^3 N^3 + 6m^2 N^3 + 11mN^3 + 6N^3 - m^3 N - 6m^2 N - 11mN - 6N \right] \\
& \times \frac{{}^{2m+l+3}C_{m+3}}{(2m+l+3)!} (N\beta)^{2m+l+3} \\
& = \frac{(m+l)!(N-1)!}{(N+m+l+2)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \times (m^3 + 6m^2 + 11m + 6)(N^3 - N) \\
& \times \frac{1}{(2m+l+3)!} \frac{(2m+l+3)!}{(m+3)!(m+l)!} (N\beta)^{2m+l+3} \\
& = \frac{(m+l)!(N-1)!}{(N+m+l+2)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \times (m+1)(m+2)(m+3)N(N+1)(N-1) \\
& \times \frac{1}{(m+3)!(m+l)!} (N\beta)^{2m+l+3} \\
& = \frac{(N-1)!}{(N+m+l+2)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} N(N+1)(N-1) \frac{1}{m!} (N\beta)^{2m+l+3} \\
& = \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \frac{(N\beta)^{2m+N+l+2}}{m!(N+m+l+2)!} \frac{N(N+1)(N-1)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}. \tag{B.109}
\end{aligned}$$

よって以上より、式 (B.98) は、

$$\begin{aligned}
h_{(L;3)}(\beta) &= \frac{1}{Z_0(\beta)} \frac{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{(N+1)N(N-1)} \times \frac{(N-1)!}{(N\beta)^{N-1}} \frac{N(N+1)(N-1)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \\
& \times \left\{ 0 + 0 + 0 + \frac{(N\beta)^{2 \cdot 0 + N + l + 2}}{0!(N+l+2)!} + \cdots + \frac{(N\beta)^{2m + N + l + 2}}{m!(m+N+l+2)!} + \cdots \right\} \\
& = \frac{1}{I_{N-1}(\beta)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(N\beta)^{2m+N+l+2}}{m!(m+N+l+2)!} \\
& = \frac{I_{N+l+2}(2N\beta)}{I_{N-1}(2N\beta)}. \tag{B.110}
\end{aligned}$$

以上より、 $m = 3$ のときに関して、 m 以上の任意の l について計算することができた。

付録C f から F, \tilde{F} への分解

ここでは式 (4.18) の分解

$$f_{(l;m)}(z_i, z_j) = \sum_{\{a\}} F_{(l;m)}^{\{a\}}(z_i) \tilde{F}_{(l;m)}^{\{a\}}(z_j), \quad (\text{C.1})$$

の分解を $(l; m) = (l; 0), (l; 1), (l; 2)$ に関して以下で求める。

式 (4.11) より $f_{(l;0)}(z_i, z_j)$ の分解は

$$\begin{aligned} f_{(l;0)}(z_i, z_j) &= \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!}} (z_i \cdot z_j^*)^l \\ &= \sqrt{\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!}} \sum_{\{a\}} z_i^{a_1} z_j^{*a_1} \cdots z_i^{a_l} z_j^{*a_l} \\ &= \sum_{\{a\}} \left(\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!} \right)^{\frac{1}{4}} z_i^{a_1} \cdots z_i^{a_l} \times \left(\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!} \right)^{\frac{1}{4}} z_j^{*a_1} \cdots z_j^{*a_l} \\ &\equiv \sum_{\{a\}} F_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z_i) \tilde{F}_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z_j). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

ここで、 $F_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z_i)$ と $\tilde{F}_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z_i)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} F_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z_i) &= \left(\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!} \right)^{\frac{1}{4}} z_i^{a_1} \cdots z_i^{a_l} \\ &\equiv C_{(l;0)} z_i^{a_1} \cdots z_i^{a_l}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{(l;0)}^{a_1, \dots, a_l}(z_i) &= \left(\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!} \right)^{\frac{1}{4}} z_i^{*a_1} \cdots z_i^{*a_l} \\ &\equiv C_{(l;0)} z_i^{*a_1} \cdots z_i^{*a_l}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

係数を

$$C_{(l;0)} \equiv \left(\frac{(N-1+l)!}{l!(N-1)!} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{C.5})$$

とした。

式 (4.13) より $f_{(l;1)}(z_i, z_j)$ の分解は

$$\begin{aligned}
 & f_{(l;1)}(z_i, z_j) \\
 &= \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[(z_i \cdot z_j^*)^l (z_i^* \cdot z_j) - \frac{l}{N-1+l} (z_i \cdot z_j^*)^{l-1} \right] \\
 &= \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[(z_i \cdot z_j^*)(z_i^* \cdot z_j) - \frac{l}{N-1+l} \right] (z_i \cdot z_j^*)^{l-1} \\
 &= \sum_{\{a\}} \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[z_i^{a_1} z_j^{*a_1} z_i^{*a'_1} z_j^{a'_1} - \frac{l}{N-1+l} \frac{\delta^{a_1 a'_1} \delta^{a_1 a'_1}}{N} \right] z_i^{a_2} z_j^{*a_2} \dots z_i^{a_l} z_j^{*a_l} \\
 &= \sum_{\{a\}} \sqrt{\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)}} \left[z_i^{a_1} z_i^{*a'_1} + \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \right] \\
 &\quad \times \left[z_j^{*a_1} z_j^{a'_1} - \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \right] z_i^{a_2} z_j^{*a_2} \dots z_i^{a_l} z_j^{*a_l} \\
 &= \sum_{\{a\}} \left(\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}} \left[z_i^{a_1} z_i^{*a'_1} + \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \right] z_i^{a_2} \dots z_i^{a_l} \\
 &\quad \times \left(\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}} \left[z_j^{*a_1} z_j^{a'_1} - \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \right] z_j^{*a_2} \dots z_j^{*a_l} \\
 &\equiv \sum_{\{a\}} F_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z_i) \tilde{F}_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z_j). \tag{C.6}
 \end{aligned}$$

ここで、 $F_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z_i)$ と $\tilde{F}_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z_i)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
 F_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z_i) &= \left(\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}} \left[z_i^{a_1} z_i^{*a'_1} + \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \right] z_i^{a_2} \dots z_i^{a_l} \\
 &\equiv C_{(l;1)} \left[z_i^{a_1} z_i^{*a'_1} + E_{(l;1)}^{a_1 a'_1} \right] z_i^{a_2} \dots z_i^{a_l}, \tag{C.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}_{(l;1)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1}(z_i) &= \left(\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}} \left[z_i^{*a_1} z_i^{a'_1} - \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \right] z_i^{*a_2} \dots z_i^{*a_l} \\
 &\equiv C_{(l;1)} \left[z_i^{*a_1} z_i^{a'_1} + \tilde{E}_{(l;1)}^{a_1 a'_1} \right] z_i^{*a_2} \dots z_i^{*a_l} \tag{C.8}
 \end{aligned}$$

とし、係数をそれぞれ

$$C_{(l;1)} \equiv \left(\frac{(N+l)!(N-1+l)}{l!(N-1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{C.9}$$

$$E_{(l;1)}^{a_1 a'_1} \equiv \sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1}, \quad (\text{C.10})$$

$$\tilde{E}_{(l;1)}^{a_1 a'_1} \equiv -\sqrt{\frac{l}{N(N-1+l)}} \delta^{a_1 a'_1} \quad (\text{C.11})$$

とした。

式 (4.15) より $f_{(l;2)}(z_i, z_j)$ の分解は

$$\begin{aligned} & f_{(l;2)}(z_i, z_j) \\ &= \sqrt{\frac{(N+1+l)!(N-1+l)(N+l)}{2!N!(N-1)}} \\ & \quad \times \left[(z_i \cdot z_j^*)^l (z_i^* \cdot z_j)^2 - \frac{2l}{N+l} (z_i \cdot z_j^*)^{l-1} (z_i^* \cdot z_j) + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} (z_i \cdot z_j^*)^{l-2} \right] \\ &= C_{(l;2)}^2 \left[(z_i \cdot z_j^*)^2 (z_i^* \cdot z_j)^2 - \frac{2l}{N+l} (z_i \cdot z_j^*) (z_i^* \cdot z_j) + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \right] (z_i \cdot z_j^*)^{l-2} \\ &= C_{(l;2)}^2 \left[(z_i \cdot z_j^*)^2 (z_i^* \cdot z_j)^2 - \frac{l(N-1+l) + \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} (z_i \cdot z_j^*) (z_i^* \cdot z_j) \right. \\ & \quad \left. - \frac{l(N-1+l) - \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} (z_i \cdot z_j^*) (z_i^* \cdot z_j) + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} \right] (z_i \cdot z_j^*)^{l-2} \\ &= \sum_{\{a\}} C_{(l;2)}^2 \left[z_i^{a_1} z_j^{*a_1} z_i^{a_2} z_j^{*a_2} z_i^{*a_1} z_j^{a_1} z_i^{*a_2} z_j^{a_2} \right. \\ & \quad - \frac{l(N-1+l) + \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} z_i^{a_2} z_j^{*a_2} z_i^{*a_2} z_j^{a_2} z_j^{*a_1} z_j^{a_1} \delta^{a_1 a'_1} \\ & \quad - \frac{l(N-1+l) - \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} z_i^{a_1} z_j^{*a_1} z_i^{*a_1} z_j^{a_1} z_i^{*a_2} z_i^{a_2} \delta^{a_2 a'_2} \\ & \quad \left. + \frac{(l-1)l}{(N-1+l)(N+l)} z_j^{*a_1} z_j^{a_1} \delta^{a_1 a'_1} z_i^{*a_2} z_i^{a_2} \delta^{a_2 a'_2} \right] z_i^{a_3} z_j^{*a_3} \dots z_i^{a_l} z_j^{*a_l} \\ &= \sum_{\{a\}} C_{(l;2)} \left[z_i^{a_1} z_i^{a_2} z_i^{*a_1} z_i^{*a_2} - \frac{l(N-1+l) + \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} \delta^{a_1 a'_1} z_i^{a_2} z_i^{*a_2} \right] z_i^{a_3} \dots z_i^{a_l} \\ & \quad \times C_{(l;2)} \left[z_j^{*a_1} z_j^{*a_2} z_j^{a_1} z_j^{a_2} - \frac{l(N-1+l) - \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} z_j^{*a_1} z_j^{a_1} \delta^{a_2 a'_2} \right] z_j^{*a_3} \dots z_j^{*a_l} \\ &= \sum_{\{a\}} C_{(l;2)} \left[z_i^{a_1} z_i^{a_2} z_i^{*a_1} z_i^{*a_2} + E_{(l;2)}^{a_1 a'_1} z_i^{a_2} z_i^{*a_2} \right] z_i^{a_3} \dots z_i^{a_l} \\ & \quad \times C_{(l;2)} \left[z_j^{*a_1} z_j^{*a_2} z_j^{a_1} z_j^{a_2} + \tilde{E}_{(l;2)}^{a_2 a'_2} z_j^{*a_1} z_j^{a_1} \right] z_j^{*a_3} \dots z_j^{*a_l} \\ &\equiv \sum_{\{a\}} F_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z_i) \tilde{F}_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z_j). \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

ここで、 $F_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z_i)$ と $\tilde{F}_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z_i)$ はそれぞれ

$$F_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z_i) \equiv C_{(l;2)} \left[z_i^{a_1} z_i^{a_2} z_i^{*a'_1} z_i^{*a'_2} + E_{(l;2)}^{a_1 a'_1} z_i^{a_2} z_i^{*a'_2} \right] z_i^{a_3} \dots z_i^{a_l}, \quad (\text{C.13})$$

$$\tilde{F}_{(l;2)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2}(z_i) \equiv C_{(l;2)} \left[z_i^{*a_1} z_i^{*a_2} z_i^{a'_1} z_i^{a'_2} + \tilde{E}_{(l;2)}^{a_2 a'_2} z_i^{*a_1} z_i^{a'_1} \right] z_i^{*a_3} \dots z_i^{*a_l} \quad (\text{C.14})$$

とし、係数をそれぞれ

$$C_{(l;2)} \equiv \left(\frac{(N+1+l)!(N-1+l)(N+l)}{2!N!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{C.15})$$

$$E_{(l;2)}^{a_1 a'_1} \equiv -\frac{l(N-1+l) + \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} \delta^{a_1 a'_1}, \quad (\text{C.16})$$

$$\tilde{E}_{(l;2)}^{a_2 a'_2} \equiv -\frac{l(N-1+l) - \sqrt{lN(N-1+l)}}{(N-1+l)(N+l)} \delta^{a_2 a'_2} \quad (\text{C.17})$$

とした。

式 (4.17) より $f_{(l;3)}(z_i, z_j)$ の分解は

$$\begin{aligned} & f_{(l;3)}(z_i, z_j) \\ &= \sqrt{\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{3!l!(N+1)!(N-1)}} \\ & \times \left[(z_i \cdot z_j^*)^l (z_i^* \cdot z_j)^3 - \frac{3l}{N+1+l} (z_i \cdot z_j^*)^{l-1} (z_i^* \cdot z_j)^2 \right. \\ & \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (z_i \cdot z_j^*)^{l-2} (z_i^* \cdot z_j) - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} (z_i \cdot z_j^*)^{l-3} \right] \\ &= C_{(l;3)}^2 \left[(z_i \cdot z_j^*)^3 (z_i^* \cdot z_j)^3 - \frac{3l}{N+1+l} (z_i \cdot z_j^*)^2 (z_i^* \cdot z_j)^2 \right. \\ & \left. + \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)} (z_i \cdot z_j^*) (z_i^* \cdot z_j) - \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \right] (z_i \cdot z_j^*)^{l-3} \\ &= C_{(l;3)}^2 \left[(z_i \cdot z_j^*)^3 (z_i^* \cdot z_j)^3 + (A + A') (z_i \cdot z_j^*)^2 (z_i^* \cdot z_j)^2 + AA' (z_i \cdot z_j^*) (z_i^* \cdot z_j) + \{(A' - A)B - NB^2\} \right] (z_i \cdot z_j^*)^{l-3} \\ &= \sum_{\{a\}} C_{(l;3)} \left[z_i^{a_1} z_i^{a_2} z_i^{a_3} z_i^{*a'_1} z_i^{*a'_2} z_i^{*a'_3} + A \delta^{a_1 a'_1} z_i^{a_2} z_i^{a_3} z_i^{*a'_2} z_i^{*a'_3} + B \delta^{a_1 a'_1} \delta^{a_3 a'_3} z_i^{a_2} z_i^{*a'_2} \right] z_i^{a_4} \dots z_i^{a_l} \\ & \times C_{(l;3)} \left[z_j^{*a_1} z_j^{*a_2} z_j^{*a_3} z_j^{a'_1} z_j^{a'_2} z_j^{a'_3} + A' \delta^{a_2 a'_2} z_j^{*a_1} z_j^{*a_3} z_j^{a'_1} z_j^{a'_3} - B \delta^{a_2 a'_2} \delta^{a_3 a'_3} z_j^{*a_1} z_j^{a'_1} \right] z_j^{*a_4} \dots z_j^{*a_l} \\ &= \sum_{\{a\}} C_{(l;3)} \left[z_i^{a_1} z_i^{a_2} z_i^{a_3} z_i^{*a'_1} z_i^{*a'_2} z_i^{*a'_3} + E_{1(l;3)}^{a_1, a'_1} z_i^{a_2} z_i^{a_3} z_i^{*a'_2} z_i^{*a'_3} + E_{2(l;3)}^{a_1, a_3, a'_1, a'_3} z_i^{a_2} z_i^{*a'_2} \right] z_i^{a_4} \dots z_i^{a_l} \\ & \times C_{(l;3)} \left[z_j^{*a_1} z_j^{*a_2} z_j^{*a_3} z_j^{a'_1} z_j^{a'_2} z_j^{a'_3} + \tilde{E}_{1(l;3)}^{a_2, a'_2} z_j^{*a_1} z_j^{*a_3} z_j^{a'_1} z_j^{a'_3} + \tilde{E}_{2(l;3)}^{a_2, a_3, a'_2, a'_3} z_i^{*a_1} z_j^{a'_1} \right] z_j^{*a_4} \dots z_j^{*a_l} \\ &= \sum_{\{a\}} F_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z_i) \tilde{F}_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z_j). \quad (\text{C.18}) \end{aligned}$$

ここで、 $F_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z_i)$ と $\tilde{F}_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z_i)$ はそれぞれ

$$F_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z_i) \equiv C_{(l;3)} \left[z_i^{a_1} z_i^{a_2} z_i^{a_3} z_i^{*a'_1} z_i^{*a'_2} z_i^{*a'_3} + E_{1(l;3)}^{a_1, a'_1} z_i^{a_2} z_i^{a_3} z_i^{*a'_2} z_i^{*a'_3} + E_{2(l;3)}^{a_1, a_3, a'_1, a'_3} z_i^{a_2} z_i^{*a'_2} \right] z_i^{a_4} \dots z_i^{a_l}, \quad (\text{C.19})$$

$$\tilde{F}_{(l;3)}^{a_1, \dots, a_l, a'_1, a'_2, a'_3}(z_i) \equiv C_{(l;3)} \left[z_i^{*a_1} z_i^{*a_2} z_i^{*a_3} z_i^{a'_1} z_i^{a'_2} z_i^{a'_3} + \tilde{E}_{1(l;3)}^{a_2, a'_2} z_i^{*a_1} z_i^{*a_3} z_i^{a'_1} z_i^{a'_3} + \tilde{E}_{2(l;3)}^{a_2, a_3, a'_2, a'_3} z_i^{*a_1} z_i^{a'_1} \right] z_i^{*a_4} \dots z_i^{*a_l} \quad (\text{C.20})$$

とし、係数をそれぞれ

$$C_{(l;3)} \equiv \left(\frac{(N+2+l)!(N+1+l)(N+l)(N-1+l)}{3!l!(N+1)!(N-1)} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (\text{C.21})$$

$$E_{1(l;3)}^{a_1, a'_1} \equiv A \delta^{a_1 a'_1}, \quad (\text{C.22})$$

$$\tilde{E}_{1(l;3)}^{a_2, a'_2} \equiv A' \delta^{a_2 a'_2}, \quad (\text{C.23})$$

$$E_{2(l;3)}^{a_1, a_3, a'_1, a'_3} \equiv B \delta^{a_1 a'_1} \delta^{a_3 a'_3}, \quad (\text{C.24})$$

$$\tilde{E}_{2(l;3)}^{a_2, a_3, a'_2, a'_3} \equiv -B \delta^{a_2 a'_2} \delta^{a_3 a'_3}, \quad (\text{C.25})$$

$$A + A' = -\frac{3l}{N+1+l}, \quad (\text{C.26})$$

$$AA' = \frac{3l(l-1)}{(N+1+l)(N+l)}, \quad (\text{C.27})$$

$$(A' - A)B - NB^2 = -\frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \quad (\text{C.28})$$

とした。この式の A, A', B について解くと、

$$A = \frac{-\frac{3l}{N+1+l} + \sqrt{D}}{2}, \quad (\text{C.29})$$

$$A' = \frac{-\frac{3l}{N+1+l} - \sqrt{D}}{2}, \quad (\text{C.30})$$

$$B = \frac{-\sqrt{D} \pm \sqrt{D'}}{2N} \quad (\text{C.31})$$

であり、ここで D, D' は

$$D = \frac{3l(N+4-Nl-l^2)}{(N+l)(N+1+l)^2}, \quad (\text{C.32})$$

$$D' = D + 4N \frac{l(l-1)(l-2)}{(N+1+l)(N+l)(N-1+l)} \quad (\text{C.33})$$

である。

付録D 高次テンソルくりこみ群

高次テンソルくりこみ群 (Higher Order TRG, HOTRG) とは高次特異値分解 (Higher Order Singular Value Decomposition, HOSVD) を用いた TRG のことである [53]。HOTRG は従来の TRG より精度が高く、さらに、TRG では困難であった高次元化に適する。ここでは 2 次元の場合で説明する。

HOTRG は図 D.1 のような 2 つのステップをとる。

1. 2 つのテンソル T からテンソル M を作る。
2. 2 つのテンソル M の間に直交行列積 $\sum_m^{D_{cut}} U_{im} U_{jm}$ を挟んで自由度を落とし、新しいテンソル T^{new} を作る。

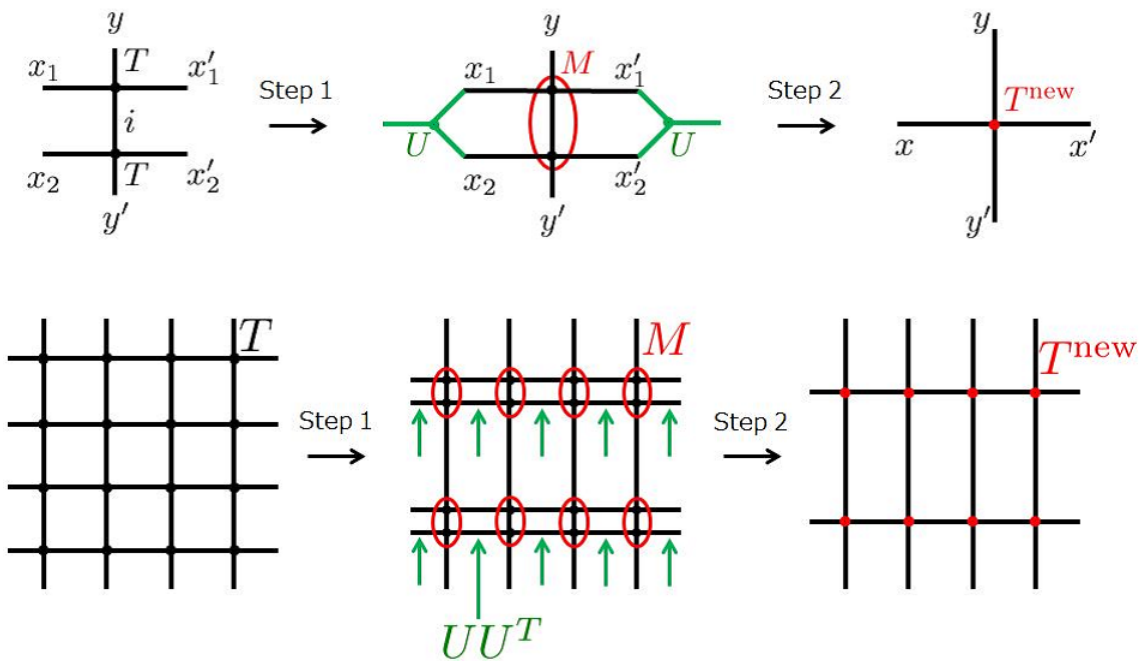


図 D.1: 高次テンソルくりこみ群

ここで M と T^{new} は

$$M_{xx'yy'} = \sum_i T_{x_1x'_1yi} T_{x_2x'_2iy'}, \quad (\text{D.1})$$

ただし、 $x = x_1 \otimes x_2$ 、 $x' = x'_1 \otimes x'_2$ である。ここで、テンソル M を直交行列 U で挟むことで、 x 方向の自由度を D に落とすことで、新しいテンソル T^{new} を作ると、

$$T_{xx'yy'}^{\text{new}} = \sum_{ij} U_{ix} M_{ijyy'} U_{jx'}. \quad (\text{D.2})$$

ここでの x 、 x' の自由度は D で打ち切っている。これで y 方向に関する粗視化が行われたことになる。次に、この操作を同じく x 方向に対して行い、さらに再び y 方向、 x 方向、と繰り返すことでテンソルの数を減らしていくことができる。ここで問題なのは、Step 2 のテンソルの足の自由度の打ち切りが本当に妥当なのかという点である。この点について以降で説明をする。

- 高次特異値分解 (HOSVD)

実テンソル $M_{xx'yy'}$ の HOSVD は、直交行列 U^L 、 U^R 、 U^U 、 U^D を用いて、

$$M_{xx'yy'} = \sum_{ijkl} S_{ijkl} U_{xi}^L U_{x'j}^R U_{yk}^U U_{y'l}^D \quad (\text{D.3})$$

となる。

S_{ijkl} はコアテンソルといい、次の条件を満たす。

(1) all orthogonality

$$\langle S_{:,j,:} | S_{:,j',:} \rangle \equiv \sum_{ikl} S_{ijkl} S_{ij'kl} = \delta_{jj'} |S_{:,j,:}|^2. \quad (\text{D.4})$$

ここで、

$$|S_{:,j,:}| = \sqrt{\sum_{ikl} S_{ijkl}^2}. \quad (\text{D.5})$$

(2) pseudodiagonal

$$|S_{:,j,:}| \geq |S_{:,j',:}| \quad \text{for } j < j'. \quad (\text{D.6})$$

- 自由度の打ち切り

図 D.1 のように、テンソル M の x と x' の自由度が y と y' の自由度よりも大きい場合を考える。ここで、次の手順に従ってテンソル T^{new} の x または x' の自由度を減らす (truncate する)。

まず、次の 2 つの量

$$\epsilon_1 = \sum_{i>D} |S_{i,::,::}|^2 \quad (\text{D.7})$$

$$\epsilon_2 = \sum_{j>D} |S_{:,j,::}|^2 \quad (\text{D.8})$$

を比較する。

(i) $\epsilon_1 < \epsilon_2$ の場合

$$M_{xx'yy'} \approx \sum_i^D \sum_{jkl} S_{ijkl} U_{xi}^L U_{x'j}^R U_{yk}^U U_{y'l}^D, \quad (\text{D.9})$$

(ii) $\epsilon_2 < \epsilon_1$ の場合

$$M_{xx'yy'} \approx \sum_j^D \sum_{ikl} S_{ijkl} U_{xi}^L U_{x'j}^R U_{yk}^U U_{y'l}^D, \quad (\text{D.10})$$

と近似することにする。この近似を用いて、テンソル T^{new} の x 、 x' の両方が truncation されていることを示す。次のような隣り合ったテンソル M について考える。

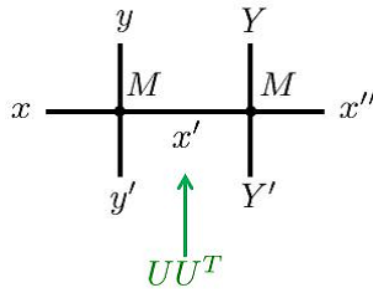


図 D.2: HOTRG における truncation

(i) $\epsilon_1 < \epsilon_2$ の場合についてのみ考える。このとき、式 (D.9) の truncation が実行され、図 D.2 は次の式で表される。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{x'} M_{xx'yy'} M_{x'x''YY'} \\
 & \approx \sum_{x'} M_{xx'yy'} \sum_a^D \sum_{bcd} S_{abcd} U_{x'a}^L U_{x''b}^D U_{Yc}^U U_{Y'd}^D \\
 & = \sum_{x'} M_{xx'yy'} \sum_{X'} \delta_{x'X'} \sum_a^D \sum_{bcd} S_{abcd} U_{X'a}^L U_{x''b}^D U_{Yc}^U U_{Y'd}^D \\
 & = \sum_{x'} M_{xx'yy'} \sum_{X'} \sum_m U_{x'm}^L U_{X'm}^L \sum_a^D \sum_{bcd} S_{abcd} U_{X'a}^L U_{x''b}^D U_{Yc}^U U_{Y'd}^D \\
 & = \sum_{x'} M_{xx'yy'} \sum_m U_{x'm}^L \sum_a^D \sum_{bcd} S_{abcd} \sum_{X'} U_{X'm}^L U_{X'a}^L U_{x''b}^D U_{Yc}^U U_{Y'd}^D \\
 & = \sum_m (MU^L)_{xmyy'} \sum_a^D \sum_{bcd} S_{abcd} \delta_{ma} U_{x''b}^D U_{Yc}^U U_{Y'd}^D. \tag{D.11}
 \end{aligned}$$

最後の行を見ると、 δ_{ma} を通して $(MU^L)_{xmyy'}$ の添え字 m も truncation されることが分かる。このことから式 (D.9) の近似を実行する代わりに、上式 4 行目の m に関する和を

$$\sum_m U_{x'm}^L U_{X'm}^L \rightarrow \sum_m U_{x'm}^L U_{X'm}^L \tag{D.12}$$

と、 D までの和にすればよい。これを用いれば、次のように並んだ M から新しいテンソル T^{new} を取り出すことができる。

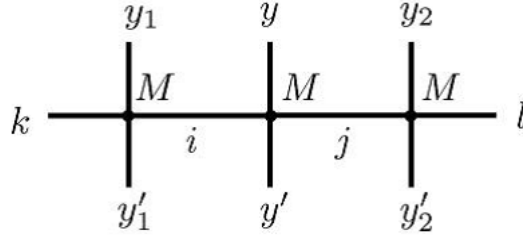


図 D.3: HOTRG における新しいテンソル

$$\begin{aligned}
 & \sum_i \sum_j M_{kiy_1y'_1} M_{ijyy'} M_{jly_2y'_2} \\
 &= \sum_i \sum_j \sum_m \sum_n M_{kiy_1y'_1} \delta_{im} M_{mjyy'} \delta_{jn} M_{nly_2y'_2} \\
 &\approx \sum_{ijmn} M_{kiy_1y'_1} \sum_{x=1}^D U_{ix} U_{mx} M_{mjyy'} \sum_{x'=1}^D U_{jx'} U_{nx'} M_{nly_2y'_2} \\
 &= \sum_{x=1}^D \sum_{x'=1}^D (MU)_{kxy_1y'_1} (U^T MU)_{xx'yy'} (U^T M)_{x'ly_2y'_2}.
 \end{aligned} \tag{D.13}$$

ここで、

$$T_{xx'yy'}^{\text{new}} \equiv (U^T MU)_{xx'yy'} \tag{D.14}$$

とできる。つまり、新しいテンソル T^{new} を求める際に HOSVD は必要なく、

$$T_{xx'yy'}^{\text{new}} = \sum_{ij}^{all} U_{ix}^{L(R)} M_{ijyy'} U_{jx'}^{L(R)} \tag{D.15}$$

を計算すればよい。ただし、 x, x' の自由度は D で打ち切っている。

• 直交行列 U の計算

テンソル M からテンソル T^{new} を求めるには直交行列 U を用いればよいことが分かった。次に、この U を導く方法について説明する。

例として、 U^L を求めることを考える。

$$M_{xx'yy'} \equiv M'_{(x),(x'yy')} \quad (\text{D.16})$$

と M を行列とみなせば $M'(M')^T$ は、

$$\begin{aligned} & (M'(M')^T)_{AB} \\ &= \sum_{x'yy'} M'_{(A),(x'yy')} M'^T_{(x'yy'),(B)} \\ &= \sum_{x'yy'} M'_{(A),(x'yy')} M'_{(B),(x'yy')} \\ &= \sum_{x'yy'} M'_{Ax'yy'} M'_{Bx'yy'} \\ &= \sum_{x'yy'} \left(\sum_{ijkl} S_{ijkl} U_{Ai}^L U_{x'j}^R U_{yk}^U U_{y'l}^D \right) \left(\sum_{abcd} S_{abcd} U_{Ba}^L U_{x'b}^R U_{yc}^U U_{y'd}^D \right) \\ &= \sum_{ijkl} \sum_{abcd} S_{ijkl} S_{abcd} U_{Ai}^L U_{Ba}^L \delta_{jb} \delta_{kc} \delta_{ld} \\ &= \sum_{ijkl} \sum_a S_{ijkl} S_{ajkl} U_{Ai}^L U_{Ba}^L \\ &= \sum_i \sum_a \delta_{ia} |S_{i,::,::}|^2 U_{Ai}^L U_{Ba}^L \\ &= \sum_i \Lambda_i^L U_{Ai}^L U_{Bi}^L. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

ただし、

$$\Lambda_i^L \equiv |S_{i,::,::}|^2. \quad (\text{D.19})$$

つまり、直交行列 U^L を求めたい場合は $M'M^T$ を固有値分解

$$M'M^T = U^L \Lambda^L (U^L)^T \quad (\text{D.20})$$

をすればよく、また ϵ_1 は、

$$\epsilon_1 = \sum_{i>D} |S_{i,::,::}|^2 = \sum_{i>D} \Lambda_i^L \quad (\text{D.21})$$

で求まる。

• HOTRG のまとめ

(1) テンソル M を作る。

$$M_{xx'yy'} = \sum_i^{\text{all}} T_{x_1x'_1yi} T_{x_2x'_2iy'}. \quad (\text{D.22})$$

ただし、 $x = x_1 \otimes x_2$ 、 $x' = x'_1 \otimes x'_2$ である。

(2) U^L と U^R 、 ϵ_1 と ϵ_2 を作る。

$M_{xx'yy'} \equiv M'_{(x),(x'yy')}$ として、

$$M' M'^T = U^L \Lambda^L (U^L)^T, \quad \epsilon_1 = \sum_{i>D} \Lambda_i^L. \quad (\text{D.23})$$

$M_{xx'yy'} \equiv M''_{(x'),(xyy')}$ として、

$$M'' M''^T = U^R \Lambda^R (U^R)^T, \quad \epsilon_2 = \sum_{i>D} \Lambda_i^R. \quad (\text{D.24})$$

(3) T^{new} を作る。

(i) $\epsilon_1 < \epsilon_2$ の場合、

$$T_{xx'yy'}^{\text{new}} = \sum_{ij}^{\text{all}} U_{ix}^L M_{ijyy'} U_{jx'}^L. \quad (\text{D.25})$$

ただし、 x 、 x' の自由度は D で打ち切る。

(ii) $\epsilon_2 < \epsilon_1$ の場合、

$$T_{xx'yy'}^{\text{new}} = \sum_{ij}^{\text{all}} U_{ix}^R M_{ijyy'} U_{jx'}^R. \quad (\text{D.26})$$

ただし、 x 、 x' の自由度は D で打ち切る。

(4) (1)~(3) を x 方向についても行う。

(5) (1)~(4) を繰り返す。

付録E メトロポリス法による2次元CP(1)モデルの解析

$\theta = 0$ の場合の CP(1) モデルの解析では、複素作用問題が生じないため、モンテカルロ法による解析が有効である。ここでは本論文で用いたメトロポリス法と呼ばれるアルゴリズムについて説明する。また、そこで行なった誤差評価についても示す。

モンテカルロ法ではボルツマン因子に基づいた確率で場の配位を繰り返し生成し、生成された配位を用いて各物理量を計算する。 $\theta = 0$ の場合の 2 次元 CP(1) モデルの作用は式 (4.2) より、

$$S = -2\beta \sum_{x,\mu} \left[z^*(x) \cdot z(x + \hat{\mu}) U_\mu(x) + z(x) \cdot z^*(x + \hat{\mu}) U_\mu^*(x) \right] \quad (\text{E.1})$$

と書かれる。ただしここで、2 成分複素スカラー場 $z(x)$ とリンク変数 $U_\mu(x) (\in U(1))$ は

$$|z(x)|^2 = z^{*1}(x) z^1(x) + z^{*2}(x) z^2(x) = 1, \quad (\text{E.2})$$

$$U_\mu(x) U_\mu^\dagger(x) = 1 \quad (\text{E.3})$$

を満たす。以下では、この作用にメトロポリス法を適用することで、CP(1) モデルの平均エネルギー E を計算する手順を示す。ただし、ここで格子サイズは $V = L \times L = 4 \times 4$ とし、周期的境界条件を用いた。

1. 場 $z^*(x)$ と $U_\mu(x)$ の初期配位 z', U' を定める。
2. この時のエネルギー $E' = S(z', U')/\beta$ を計算する。
3. ランダムに選んだ x において、場 $z^*(x)$ を式 (E.2) を満たすようにランダムに決定し、新しい配位 z^t を生成する。
4. この時のエネルギー $E^t = S(z^t, U')/\beta$ を計算する。
5. $\Delta E = E^t - E'$ を計算し、 $P = \min\{1, \exp(-\Delta E)\}$ の確率で次の配位を $z'' = z^t, U'' = U'$ 、エネルギーを $E'' = E^t$ と更新する。 $1 - P$ の確率で $z'' = z', U'' = U'$ 、エネルギーを $E'' = E'$ とする。
6. ランダムに選んだ x, μ において、場 $U_\mu(x)$ を式 (E.3) を満たすようにランダムに決定し、新しい配位 U^t を生成する。

7. この時のエネルギー $E^t = S(z'', U^t)/\beta$ を計算する。
8. $\Delta E = E^t - E''$ を計算し、 $P = \min\{1, \exp(-\Delta E)\}$ の確率で次の配位を $z' = z'', U' = U^t$ 、エネルギーを $E' = E^t$ と更新する。 $1 - P$ の確率で $z' = z'', U' = U''$ 、エネルギーを $E' = E''$ とする。
9. 2. ~ 8. を $L \times L$ 回繰り返した後、 E'' をサンプルする。
10. 2. ~ 9. を N 回繰り返し、そこでサンプルしたエネルギーを E_1, E_2, \dots, E_N と名付ける。
11. エネルギーの平均を $\langle E \rangle = \frac{1}{N-R} \sum_{i=R}^N E_i$ と計算する。
12. 平均エネルギーを $E = \langle E \rangle / L^2$ と計算する。

以上の手順で $\beta = 0.2, 0.7, 1.2, 1.7, 2.2, 2.7, 3.2, 3.7$ における平均エネルギー E を計算した。その結果を図 4.6 に示す。ここで、誤差はジャックナイフ法を用いて評価した。その結果を図 E.1 に示す。図 4.6 では、ジャックナイフ法のビンサイズを 10^4 としてエラーバーを付けた。

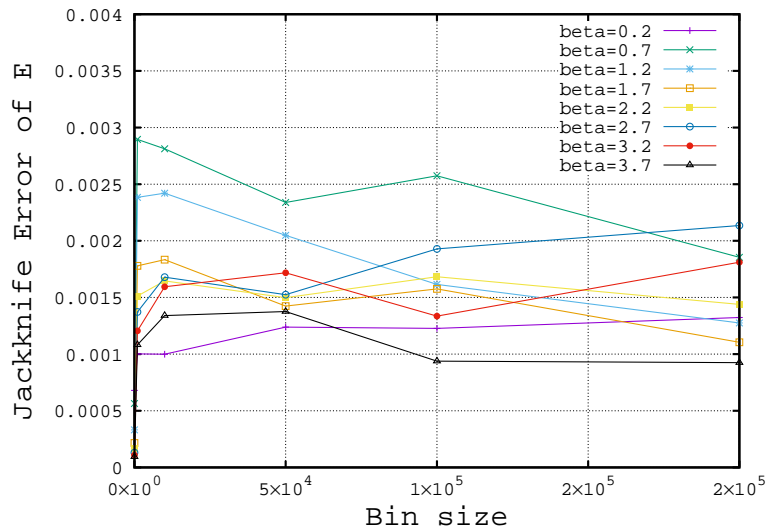


図 E.1: ジャックナイフ法を用いて評価した CP(1) モデルの平均エネルギーの誤差のビンサイズ依存性

一方で、自己相関を用いた誤差評価も行った。自己相関関数 $A(t)$ を

$$A(t) = \frac{1}{N-t} \sum_{i=1}^{N-t} E_i E_{i+t} - \langle E \rangle^2, \quad (\text{E.4})$$

と定義し、これを用いて自己相関時間の積分 $\tau_{\text{int}}(t)$ を

$$\tau_{\text{int}}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{A(0)} \sum_{i=1}^t A(t) \quad (\text{E.5})$$

とする。十分大きな t における $\tau_{\text{int}}(t)$ を τ_{int} とすることで、誤差を

$$\delta\langle E \rangle = \sqrt{\frac{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}{N/(2\tau_{\text{int}}) - 1}} \quad (\text{E.6})$$

と評価することができる。この方法で計算した各 β における誤差を図 E.2 ~ E.17 に示す。

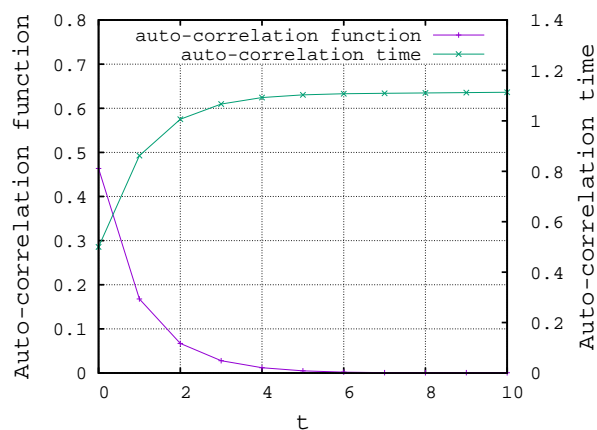


図 E.2: $\beta = 0.2$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

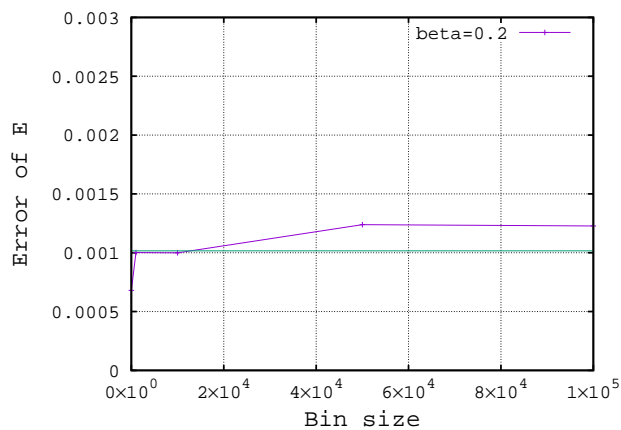


図 E.3: $\beta = 0.2$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

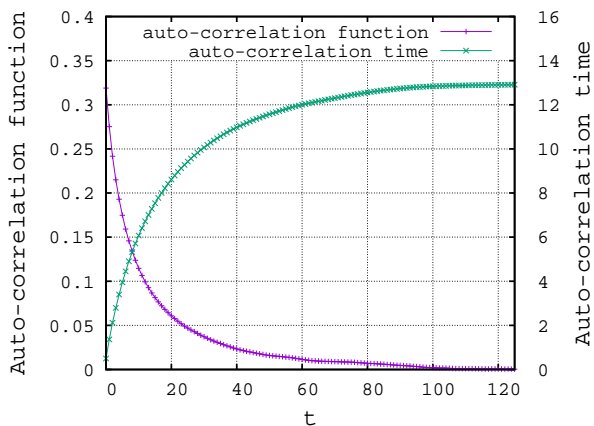


図 E.4: $\beta = 0.7$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

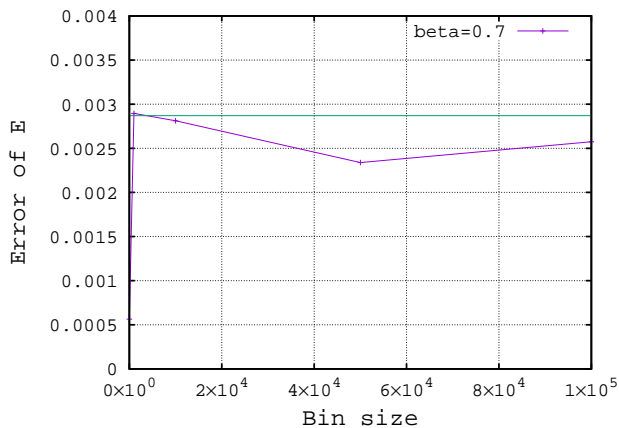


図 E.5: $\beta = 0.7$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

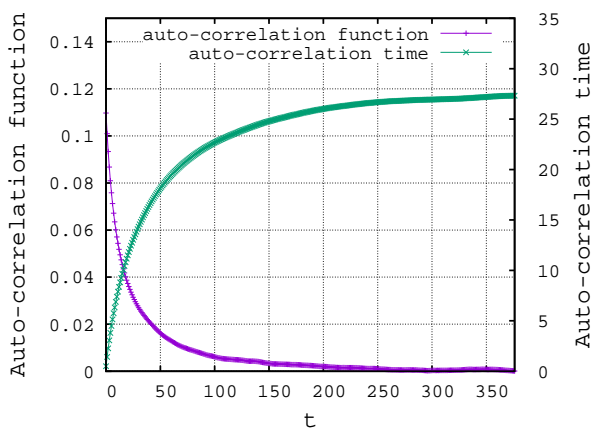


図 E.6: $\beta = 1.2$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

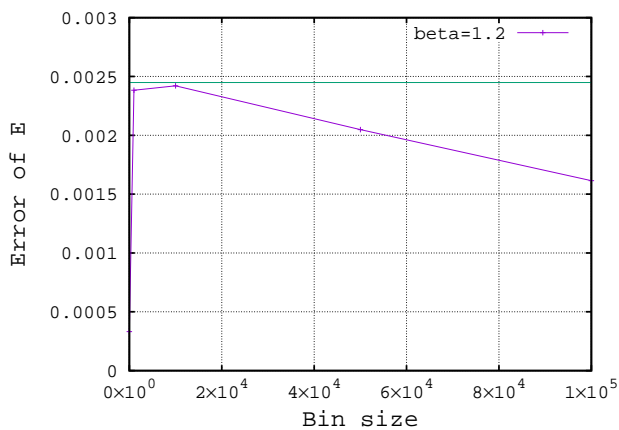


図 E.7: $\beta = 1.2$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

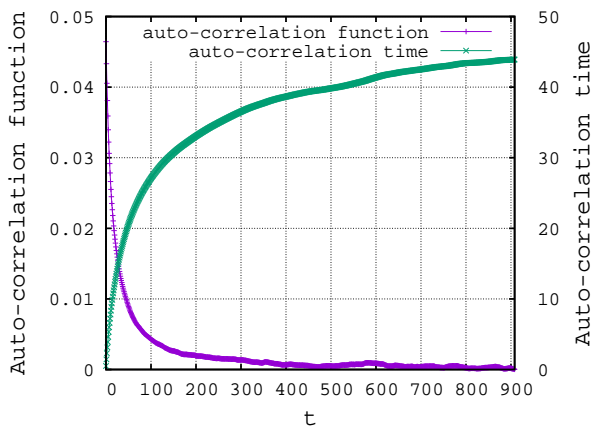


図 E.8: $\beta = 1.7$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

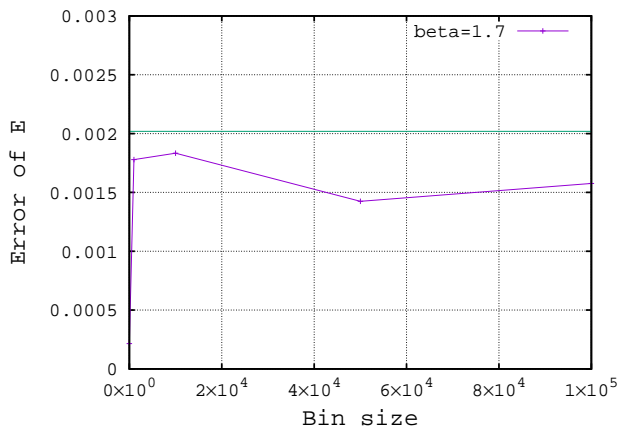


図 E.9: $\beta = 1.7$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

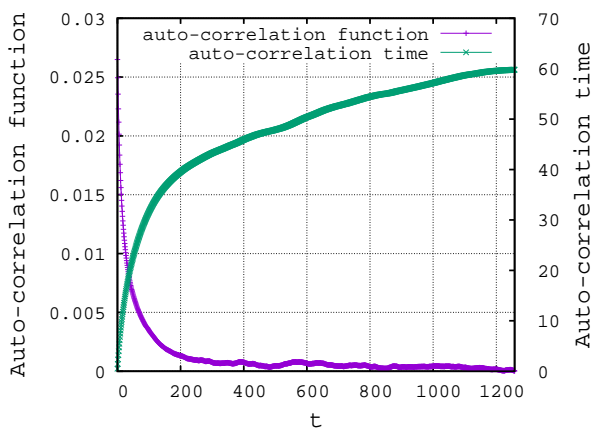


図 E.10: $\beta = 2.2$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

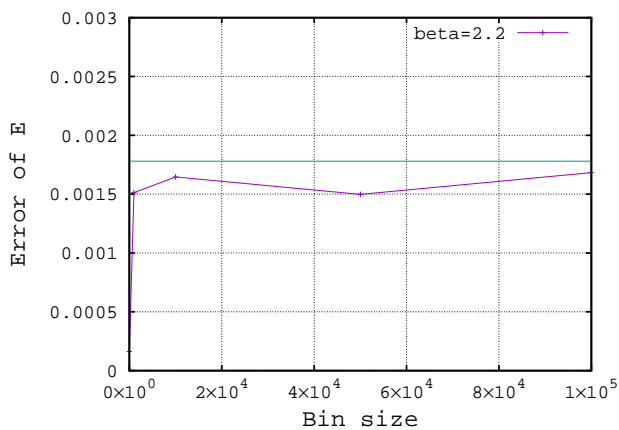


図 E.11: $\beta = 2.2$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

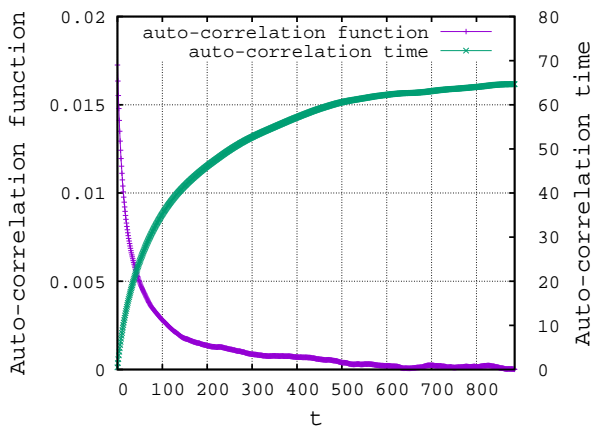


図 E.12: $\beta = 2.7$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

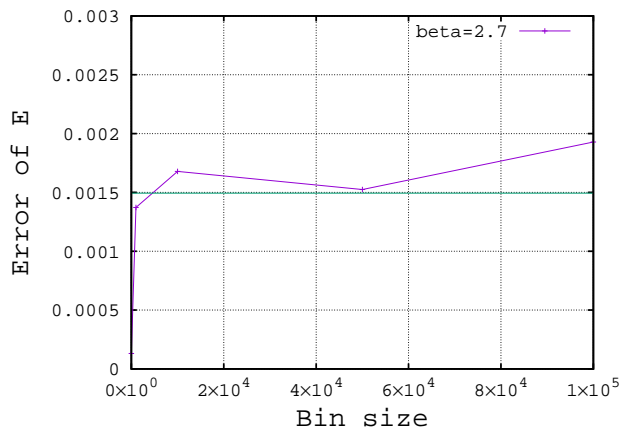


図 E.13: $\beta = 2.7$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

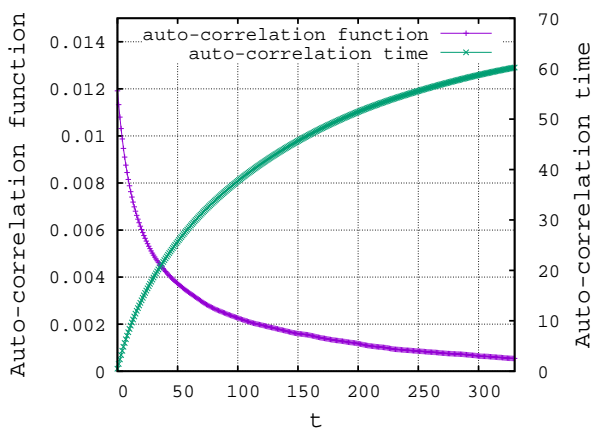


図 E.14: $\beta = 3.2$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

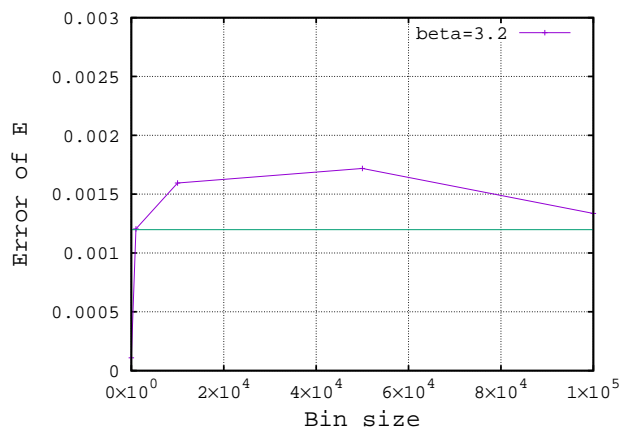


図 E.15: $\beta = 3.2$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

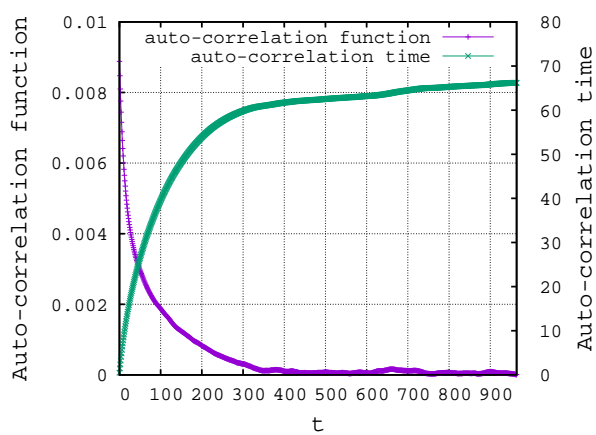


図 E.16: $\beta = 3.7$ における自己相関関数 (紫) と自己相関時間 (緑)

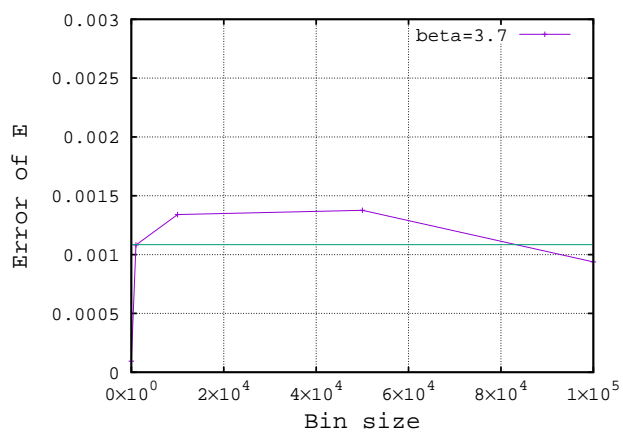


図 E.17: $\beta = 3.7$ の時の、ジャックナイフ法を用いて評価したビンサイズごとの誤差 (紫) と積分された自己相関時間から評価した誤差 (緑)

参考文献

- [1] F. D. M. Haldane, Phys. Lett. A **93**, 464 (1983).
- [2] F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. **50**, 1153 (1983).
- [3] F. D. M. Haldane, Journal of Applied Physics **57**, 3359 (1985).
- [4] F. D. M. Haldane, ArXiv e-prints (2016), 1612.00076.
- [5] H. Bethe, Z. Phys. **71**, 205 (1931).
- [6] W. J. L. Buyers, R. M. Morra, R. L. Armstrong, M. J. Hogan, P. Gerlach, and K. Hirakawa, Phys. Rev. Lett. **56**, 371 (1986).
- [7] J. P. Renard, M. Verdaguer, L. P. Regnault, W. A. C. Erkelens, J. Rossat-Mignod, and W. G. Stirling, Europhys. Lett. **3**, 945 (1987).
- [8] K. Katsumata, H. Hori, T. Takeuchi, M. Date, A. Yamagishi, and J. P. Renard, Phys. Rev. Lett. **63**, 86 (1989).
- [9] M. Hagiwara, K. Katsumata, I. Affleck, B. I. Halperin, and J. P. Renard, Phys. Rev. Lett. **65**, 3181 (1990).
- [10] S. H. Glarum, S. Geschwind, K. M. Lee, M. L. Kaplan, and J. Michel, Phys. Rev. Lett. **67**, 1614 (1991).
- [11] V. Gadet, M. Verdaguer, V. Briois, A. Gleizes, J. P. Renard, P. Beauvillain, C. Chappert, T. Goto, K. Le Dang, and P. Veillet, Phys. Rev. B **44**, 705 (1991).
- [12] J. Darriet and L. P. Regnault, Solid State Commun. **86** 409 (1993).
- [13] T. Yokoo, T. Sakaguchi, K. Kakurai, and J. Akimitsu, J. Phys. Soc. Jpn. **64**, 3651 (1995).
- [14] M. Kenzelmann, R. A. Cowley, W. J. L. Buyers, Z. Tun, R. Coldea, and M. Enderle Phys. Rev. B **66**, 024407 (2002).
- [15] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, Phys. Rev. Lett. **59**, 799 (1987).

-
- [16] I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets. In *Condensed Matter Physics and Exactly Soluble Models*, pages 253-304. Springer, 1988.
- [17] M. P. Nightingale and H. W. J. Blöte, *Phys. Rev. B* **33**, 659 (1986).
- [18] K. Nomura, *Phys. Rev. B* **40**, 9142 (1989).
- [19] S. R. White and D. A. Huse, *Phys. Rev. B* **48**, 3844 (1993).
- [20] S. Todo and K. Kato, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 047203 (2001).
- [21] “The Nobel Prize in Physics 2016 - Scientific background: Topological phase transitions and topological phases of matter”. Nobelprize.org. Nobel Media AB 2014. Web. 3 Dec 2017. <http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/advanced.html>
- [22] A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B* **59**, 79 (1975).
- [23] W. Bietenholz, A. Pochinsky, and U. J. Wiese, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4524 (1995) [hep-lat/9505019].
- [24] M. Bogli, F. Niedermayer, M. Pepe, and U. J. Wiese, *JHEP* **1204**, 117 (2012) [arXiv:1112.1873 [hep-lat]].
- [25] P. de Forcrand, M. Pepe, and U. J. Wiese, *Phys. Rev. D* **86**, 075006 (2012) [arXiv:1204.4913 [hep-lat]].
- [26] B. Alles and A. Papa, *Phys. Rev. D* **77**, 056008 (2008) [arXiv:0711.1496 [cond-mat.stat-mech]].
- [27] V. Azcoiti, G. Di Carlo, E. Follana, and M. Giordano, *Phys. Rev. D* **86**, 096009 (2012) [arXiv:1207.4905 [hep-lat]].
- [28] B. Alles, M. Giordano, and A. Papa, *Phys. Rev. B* **90**, no. 18, 184421 (2014) [arXiv:1409.1704 [hep-lat]].
- [29] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett. B* **37**, 95 (1971).
- [30] S. P. Novikov, *Sov. Math. Dokl.* **24**, 222 (1981).
- [31] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **92**, 455 (1984).
- [32] I. Affleck and F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. B* **36**, 5291 (1987).
- [33] I. Affleck, D. Gepner, H. J. Schulz and T. Ziman, *J. Phys. A* **22**, 511 (1989).
- [34] V. Azcoiti, G. Di Carlo, and A. Galante, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 257203 (2007) [arXiv:0710.1507 [hep-lat]].

-
- [35] M. Lajkó, K. Wamer, F. Mila and I. Affleck, Nucl. Phys. B **924**, 508 (2017) [arXiv:1706.06598 [cond-mat.str-el]].
- [36] C. A. Baker *et al.*, Phys. Rev. Lett. **97**, 131801 (2006) [hep-ex/0602020].
- [37] R. J. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano, and E. Witten, Phys. Lett. B **88**, 123 (1979) [Erratum-ibid. B **91**, 487 (1980)].
- [38] G. Schierholz, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **42**, 270 (1995).
- [39] G. Schierholz, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **37A**, 203 (1994) [hep-lat/9403012].
- [40] J. C. Plefka and S. Samuel, Phys. Rev. D **56**, 44 (1997) [hep-lat/9704016].
- [41] M. Imachi, S. Kanou, and H. Yoneyama, Prog. Theor. Phys. **102**, 653 (1999) [hep-lat/9905035].
- [42] M. Levin and C. P. Nave, Phys. Rev. Lett. **99**, 120601 (2007).
- [43] S. Yang, Z. C. Gu, and X. G. Wen, Phys. Rev. Lett. **118**, 110504 (2017).
- [44] 田崎 晴明, 「量子スピン系の理論 (講義ノート) (Haldane Gap, Disordered Ground States, Quantum Spin Liquid and All That in Quantum Spin Systems)」, 物性研究 58(2), 121-178, 1992-05-20.
- [45] 久保 健, 田中 秀数, 「磁性 I」, 朝倉書店, 2008.
- [46] 高橋 和孝, 西森 秀稔, 「相転移・臨界現象とくりこみ群」, 丸善出版, 2017.
- [47] Eduardo Fradkin, “Field Theories of Condensed Matter Systems”, Perseus Books, 1991.
- [48] A. Tanaka and S. Takayoshi, Sci. Technol. Adv. Mater. **16** 014404 (2015).
- [49] E. H. Lieb, T. D. Schultz, and D. Mattis, Ann. Phys. **16**, 407 (1961).
- [50] I. Affleck and E. H. Lieb, Lett. Math. Phys. **12**, 57 (1986).
- [51] M. Oshikawa, M. Yamanaka, and I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **78**, 1984 (1997).
- [52] I. Affleck, J. Phys. C **1**, 3047 (1989).
- [53] Z. Y. Xie, J. Chen, M. P. Qin, J. W. Zhu, L. P. Yang, and T. Xiang, Phys. Rev. B **86**, 045139 (2012).
- [54] Z. C. Gu and X. G. Wen, Phys. Rev. B **80**, 155131 (2009).
- [55] G. Evenbly and G. Vidal, Phys. Rev. Lett. **115**, 180405 (2015).
- [56] H. Kawauchi and S. Takeda, PoS LATTICE **2015**, 284 (2016) [arXiv:1511.00348 [hep-lat]].

-
- [57] H. Kawauchi and S. Takeda, Phys. Rev. D **93**, 114503 (2016) [arXiv:1603.09455 [hep-lat]].
- [58] H. Kawauchi and S. Takeda, PoS LATTICE **2016**, 322 (2016) [arXiv:1611.00921 [hep-lat]].
- [59] H. Kawauchi and S. Takeda, arXiv:1710.09804 [hep-lat].
- [60] J. C. Plefka and S. Samuel, Phys. Rev. D **55**, 3966 (1997) [hep-lat/9612004].
- [61] S. Samuel, Phys. Rev. D **28**, 2628 (1983).
- [62] A. S. Hassan, M. Imachi, N. Tsuzuki, and H. Yoneyama, Prog. Theor. Phys. **94**, 861 (1995) [hep-lat/9508011].
- [63] Y. Shimizu and Y. Kuramashi, Phys. Rev. D **90**, no. 7, 074503 (2014) [arXiv:1408.0897 [hep-lat]].
- [64] J. Unmuth-Yockey, Y. Meurice, J. Osborn, and H. Zou, arXiv:1411.4213 [hep-lat].
- [65] W. Marshall, Proc. Roy. Soc. **A232**, 48 (1955).
- [66] E. Lieb and D. Mattis, J. Math. Phys. **3**, 749 (1962).
- [67] 田崎 晴明, 「数学:物理を学び楽しむために」, URL: “<http://www.gakushuin.ac.jp/881791/math-book/>”.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、武田真滋助教には、修士2年からの4年間、隔週で行う報告会、発表スライドや論文のチェックなど、細やかなご指導と適切な助言を多々いただきました。心より感謝申し上げます。青木健一教授には、主任指導教員として様々な手続きや書類作成などをしていただきとてもお世話になりました。また、発表の際には誰よりも質問をしていただき、物事を深く考えるきっかけをいただきました。青木健一教授のご自宅で度々開かれる食事会では、美味しいご馳走をたくさんいただき、ご家族の皆様にもとても感謝しております。また、三浦伸一教授には、分野外にも関わらず外部審査員を引き受けていただき、多くの質問をしていただきました。久保治輔教授、末松大二郎教授、青木真由美准教授、石渡弘治助教にもゼミや研究会等、様々な形でお世話になりました。久保治輔教授には、北京のIHEPに滞在できるようにお取り計らいいただきました。末松大二郎教授には、色々な場所に連れて行っていただいたり、ご自宅で天ぷらを作っていただいたり研究以外の場面でも非常にお世話になりました。青木真由美准教授、石渡弘治助教には、ポスドク時代の体験や将来のことなど色々教えてくださいました。特に石渡弘治助教には、ポスドクの申請の仕方などでよく相談に乗っていただきました。秘書の西川さんには事務手続き全般でとてもお世話になりました。ありがとうございました。

Latticeグループの坂井さん、OBの吉村さん、中本さん、八木さんとは、毎回の報告会などで多くの議論を行うことができました。特に坂井さんは研究分野と学年が近いこともあり、互いに切磋琢磨できる大切な同僚でした。研究室の卒業生である熊本さん、小内さん、山田さん、柏瀬さん、飴谷さんから博士課程の間に多くのことを教えていただきました。特に山田さんには、一緒にゼミをやっていただき、研究の姿勢で見習うべき多くのことを学ばせていただきました。また、同期の後藤さんと松崎さんとは、一緒に中国に滞在したり、ゼミをしたりと多くの時間を共に過ごしました。特に後藤さんとは修士と博士を合わせた5年間、良き研究室仲間として、共に最後まで頑張ることができました。同じく同期のBinuさんは研究室で唯一外国人で、楽しい英語の議論ができました。後輩の藤田さん、富田さん、金子さん、吉野さんにも非常にお世話になりました。藤田さんは、外部から博士課程に入学しましたが、たわいも無い話から機械学習やくりこみ群まで多くの会話ができました。富田さんとは、一緒にゼミをしたりする中で、多くの議論をすることができました。金子さんは、席も近く、よくご飯に誘っていただきました。その他の研究室の皆さんにも、楽しい研究生活を送る上でとてもお世話になりました。ありがとうございました。

また、金沢大学以外の方々にも大変お世話になりました。特に、筑波大学の藏増嘉伸教授には、修士2年の終わり頃から、セミナーをさせていただいたり、理研のインターンシップに参加させていただいたり、筑波大学に滞在させていただいたり、非常に貴重な経験を多くさせていただきました。そして、研究に関する多くの助言をいただくことができました。また、理研の中村さん、清水さん、数納さんにはインターンシップ中に様々なアドバイスをいただき、色々とお助けいただきました。ありがとうございました。

最後に、これまで私を温かく見守って支えてくれた家族に深く感謝申し上げます。皆様本当にありがとうございました。