博士論文

L1 ノルム最適化に基づく セルオートマトンモデル同定法の研究

金沢大学大学院自然科学研究科
電子情報科学専攻
学籍番号：1524042007
山本 倖大

主任指導教員：山本 茂 教授

2018 年 1 月 5 日

概要

セルオートマトンの状態遷移関数の同定法として，l_1 ノルム最適化に基づく手法を提案した．セルオートマトンモデルはセル空間の各セルの離散状態の遷移を表現する離散時間モデルである．セルの状態は遷移ルールにしたがい遷移し，この遷移ルールは max 関数の加減算で記述することも可能である．一般的に，遷移ルールを表現する状態遷移関数は複数の表現方法が存在することが知られており，状態遷移を解析するためには状態遷移関数がより簡素な構造であることが望ましい．簡素なモデルの獲得のために，セルオートマトンモデルの同定問題を l_1 ノルム最適化に基づく最適化問題として定式化する．この l_1 ノルム最適化における空間計算量は同定問題の大規模化にしたがい増加する．この計算負荷の軽減と，最適化問題が可解／不可解となる状態遷移の組が存在するかの考察が課題として挙げられた．同定時の計算負荷の軽減のために分割統治法を導入する．すなわち，分割統治により分割して得たサブ問題を解く最適化問題の制約条件の数は分割前の同定問題のそれと比較し減ること，さらに，各サブ問題は独立に解くことが可能なため，分割前の最適化問題と比較し計算負荷を低減させることが可能となる．さらに，セルオートマトン同定問題においては分割統治法による問題の分割は一般化が可能で，これによって計算負荷はより低減され，分割統治法の考え方を一般化したことで，同定時の最適化問題が常に可解であることが明らかとなった．これらの結果は数値例を用いて示す．

目次

謝辞

はじめに，6 年にもわたって指導教員を引き受けてくださり，研究の進め方や論文の読み進め方，作成術など様々な点で，終始ご指導ご鞭撻を賜りました金沢大学理工研究域電子情報学系 山本 茂 教授，ならびに，2015 年 9 月まで副指導教員を引き受けてくださった電気通信大学大学院情報理工学研究科 金子 修 教授，2015 年 9 月より副指導教員を引き受けてくださった金沢大学理工研究域電子情報学系 山根 智 教授，金沢大学理工研究域機械工学系 小松崎 俊彦 教授に対し甚大なる謝意を表します．

つぎに，常に私の味方であり続け，研究に励めるようあらゆる点で支援をしていただき，時には厳しい助言で奮い立たせてくれた両親，兄弟に甚大なる謝意を表します．あなた方の力なしで，私の博士後期課程進学は決して叶うことはありませんでした．進学を決意した私の我が儘に最後まで付き合っていただきありがとうございました．

また，多くの支援を賜りましたシステム制御研究室の皆様に心より深く感謝いたします．

第 1 章

序論

1.1　研究背景と目的

セルオートマトンは格子状のセルと単純なルールによって記述できる離散的計算モデルである [1, 2]．各セルの離散状態の遷移ルールを適切に選ぶことにより，定性的には連続な微分方程式／偏微分方程式を解いた場合と変わらない解が高速に導出できる．各セルのとる値は整数値であるため，浮動小数点演算よりも高速のセルオートマトン専用計算機が開発されてきた歴史的背景もある [2]．大規模なシステムを定量的にシミュレーションするために必要となる微分・偏微分方程式を適切に導出することは，規模が大きくなるに従い困難になる．セルオートマトンは問題をマクロに捉えて，問題の規模が大きくなっても定性的性質を保ちながら数値誤差を生じずに数値シミュレーションを高速に実行できるという特徴を持つため，集団現象の解析 [3, 4]，交通流 [7, 5, 6] や波の解析モデル [8] 等に多く用いられている．セルオートマトンの各セルの状態は近傍のセルの状態から構成される状態遷移関数と呼ぶルールにしたがって遷移する．観測される全てのセルの状態遷移を説明する状態遷移関数の同定をセルオートマトンモデル同定問題と呼び，多くの同定手法が提案されている [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17]．文献 [9, 10, 11, 12] では，状態遷移関数の同定に遺伝的アルゴリズムを用いることが提案されている．遺伝的アルゴリズムは，評価関数が多峰性を有する最適化問題に対し有用であるとされている．ところが，同定問題を評価関数が多峰性を有さない最適化問題に帰着してより効率的な最適化手法を適用することも重要な課題である．一方，文献 [15, 16, 17] では，状態遷移関数を max 関数と min 関数で記述して，それを二分決定グラフを用いて同定する方法を提案している．しかし二分決定グラフは二値論理関数のグラフ表現であるため，同定手法をセルの離散状態が三値以上の多値の場合へ拡張することは困難である．

そこで本論文では，多値状態遷移関数を affine 関数を引数として持つ max 関数の加減算で定義し，max 関数の入力である affine 関数の個数を最小化する最適化問題として同定

問題を定式化する．

1.2 本論文の構成

本論文は，l_1 ノルム最適化問題に基づくセルオートマトンモデルの同定法に関する研究成果をまとめたものである．本論文は，以下の 3 つの研究テーマで構成される．

1. l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデルの同定法 （第 3 章）

2. 分割統治法による計算負荷の軽減 （第 4 章)

3. 分割統治法に基づく同定法の一般化 （第 5 章）

1.2.1 l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデルの同定法 （第 3 章）

第 3 章では，セルオートマトンの状態遷移を表現する状態遷移関数を affine 関数を引数として持つ max 関数の加減算で定義し，max 関数の入力である affine 関数の個数を最小化する最適化問題として同定問題を定式化する（3.2 節）．状態遷移関数を簡素な形で求めるため，スパース（疎）な解を得やすいという特徴をもつ l_1 ノルム最適化 [21] として定式化する．l_1 ノルム最適化は信号処理 [22]，システム同定 [23, 24]，制御 [25, 26] などにも応用されている（3.3 節）．さらに，最適化問題の解のうち，削除可能な affine 関数を最小被覆問題を用いて探索し，状態遷移関数を簡略化する（3.4 節）．最後に，手法の有効性を離散値データから状態遷移関数を同定する数値例を用いて確認する（3.5 節）．

1.2.2 分割統治法による計算負荷の軽減 （第 4 章)

第 4 章では，l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデルの同定法を解く際の計算負荷の軽減を考える．第 3 章で説明する同定手法は，対象の状態遷移の大規模化にしたがい，最適化問題の制約条件の数が爆発的に増加するため，計算機で解くことができない場合がある．したがって，この計算負荷の軽減が提案手法の課題の一つに挙げられる．

そこで，第 3 章の l_1 ノルム最適化問題（原問題）を分割統治法を用いて近傍の取りうる状態の種類と同数の最適化問題（サブ問題）に分け（4.2 節），各サブ問題の最適化問題から得られた解を統合することで，状態遷移関数を獲得する（4.3 節）．問題を分割することで，各サブ問題で考慮すべき制約条件の数は原問題で考慮すべき制約条件の数より少なく

なる．さらに各サブ問題は独立に解くことが可能なため，原問題を解く場合と比較して，計算機のメモリの使用量も抑えることができる．また，各サブ問題の解へ最小被覆問題を適用することで簡略化された状態遷移関数を獲得し，それらを統合し原問題の解から構成されるべき状態遷移関数を導出する（4.4 節）.

最後に，分割統治法に基づくサブ問題を解いた場合の有効性を離散値データから状態遷移関数を同定する数値例を用いて確認する（4.5 節）.

1.2.3 分割統治法に基づく同定法の一般化 （第 5 章）

第 5 章では，第 4 章で論ずる内容を一般化する，すなわち，最適化問題への分割統治法への再帰的な適用について考察する．そこで，サブ問題で求める状態遷移関数を定義し（5.2 節），あわせて，この状態遷移関数を l_1 ノルム最適化問題によって同定するための制約条件を考察する（5.3 節）．次に，サブ問題の同定のための最適化問題が常に可解であることを示し，この結果と状態遷移関数の簡略化における考察を基に，第 3 章の同定手法が常に可解であることを証明する（5.5 節）.

最後に，手法の有効性を数値例を用いて確認する（5.6 節）.

1.3 記法

論文中の $\mathbf{1}_i$，$0_{i\times j}$，I_i は，それぞれサイズが i で要素が全て 1 の列ベクトル，$i\times j$ の零行列，$i\times i$ の単位行列を表す．また，$m\times n$ 行列 A の第 $1,\ldots,n$ 列をそれぞれ $a_1,\ldots,a_n$ とするとき，行列 A の列展開を

$$\mathrm{vec}(A)=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$$

と表す.

$n\times m$ 行列 $A=(a_{ij})$ と $p\times q$ 行列 B のクロネッカー積を $np\times mq$ 行列

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B & \ldots & a_{1m}B\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}B & \ldots & a_{nm}B\end{bmatrix}$$

と定義する.

実数 x に対し，それ以下の最大の整数を与える floor 関数を $\lfloor x\rfloor$ と表記する.

ベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ の l_0 ノルムは $\boldsymbol{x}$ の非零の要素の個数を表し，$\|\boldsymbol{x}\|_0$ と表記する．さらに l_1 ノルム $\sum_{i=1}^n|x_i|$ を $\|\boldsymbol{x}\|_1$ と表記する.

ベクトル $\boldsymbol{x}$ について，$\boldsymbol{x} \leq 0$ は全ての要素が非正であることを表すとする．

適当なサイズのベクトル $a_1, \ldots, a_n$ について，ブロック対角行列を

$$\operatorname{diag}\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{bmatrix}$$

と表記する．

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^m$ と $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^n$ に対するミンコフスキー和を

$$\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b} := \begin{bmatrix} a_1 \mathbf{1_n} + \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ a_m \mathbf{1_n} + \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn}$$

と定義する．

ベクトル $a = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^\top$ を引数とする max 関数について，

$$\max a = \max(a_1, \ldots, a_n)$$

と表記する．

第 2 章

多値セルオートマトンモデル

有限のセル空間 $\mathbb{C}_K := \{1, 2 \ldots, K\}$ 上で有限離散状態 $\mathbb{S}_L := \{0, 1, \ldots, L-1\}$ の状態遷移を表現するセルオートマトンを対象とする．セル c_x (ただし $x \in \mathbb{C}_K$) の時刻 t での状態を $U(t, x) \in \mathbb{S}_L$ と記すとき，セル c_x の時刻 $t+1$ での状態 $U(t+1, x)$ はセル c_x の近傍の N 個のセルの状態に依存して決まるものとする．その状態遷移が関数 $F(\boldsymbol{u})$ を用いて次のように表現できるとする

$$U(t+1, x) = F(\boldsymbol{u}), \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} U(t_1, x_1) \\ \vdots \\ U(t_N, x_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^N, \tag{2.2}$$

$$t_1, \cdots, t_N \in \{0, 1, \ldots, t\}, \tag{2.3}$$

$$x_1, \cdots, x_N \in \mathbb{C}_K. \tag{2.4}$$

セル c_x の近傍は (t_l, x_l) の組の集合 $(l = 1, \ldots, N)$ で定義され，集合には同一の組がない（重複するものがない）と仮定し，この関数 $c_x \to \{(t_1, x_1), \ldots, (t_N, x_N)\}$ は，セル c_x によらず不変であるとする．さらにセル空間には周期境界条件を設け，空間の両端同士は接続されているとする．$x + x_l \leq 0$，$N < x + x_l$ となる場合は $x + x_l$ の代わりに，

$$x + x'_l \in \mathbb{C}_K,\ x + x'_l \equiv x + x_l \pmod N \tag{2.5}$$

を用いて (t_l, x'_l) をセル c_x の近傍の組とする．状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ は max 関数の加減算で構成され，関数の引数は近傍の状態 $U(t, x)$ の affine 式であるとする．交通渋滞の再現 [5, 6, 7] や進行波の挙動の解析 [8] に用いられる実用上有用なセルオートマトンモデルの状態遷移関数は上述の構造を有している．このとき，例えば表 2.1 に示す入出力関係を表す状態遷移関数は $F(x, y) = -\max(-x, -y)$ であるが，$F(x, y) = \max(0, x + y - 1)$ と表現することも可能であり，与えられた真理値表を表現する状態遷移関数は複数存在する．ま

表 2.1　状態遷移関数 $F(x, y)$

x	y	$F(x, y)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

た，max 関数における分配法則や，冗長な関数の追加を考慮すれば本質的には状態遷移関数の表現方法は無限個存在する．この無限個の状態遷移関数の表現の中からより簡潔な表現を抽出することが，セルオートマトンモデルの用途目的から望まれる．

第 3 章

l_1 ノルム最適化に基づく CA モデル同定法

3.1　はじめに

セルオートマトンモデルの同定手順は，状態遷移関数の近傍の数 N と近傍 (t_l, x_l) を同定 [11, 12] し，次に状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ を同定する二段階からなること，またはこれらの同定を繰り返すことが一般的である．

本論文では，与えられている状態遷移のデータを完全に表現するモデルを導出する問題を取り扱い，特に，入力に対する出力が一意に定まる決定論的セルオートマトンを対象とする．これは，観測データが決定論的セルオートマトンによってエラーなく生成され，観測誤差が無いことを仮定する．

本論文では近傍が既に同定されており，近傍の状態と $U(t+1, x)$ の状態の関係を表す真理値表が得られているとして，その状態遷移を表現する状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ を l_1 ノルム最適化に基づいて同定する方法を説明する．

3.2 状態遷移関数の定義と同定問題

今，それぞれ異なる $m = L^N$ 組の入力 $\boldsymbol{u}_j$ と，対応する状態遷移関数 $F : \mathbb{S}_L^N \to \mathbb{S}_L$ の値 f_j が

$$\boldsymbol{u}_j = \begin{bmatrix} u_{j1} \\ \vdots \\ u_{jN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\lfloor \frac{j-1}{L^{N-1}} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{j-1}{L^{N-2}} \right\rfloor \bmod L \\ \vdots \\ \left\lfloor \frac{j-1}{L} \right\rfloor \bmod L \\ j-1-L\left\lfloor \frac{j-1}{L} \right\rfloor \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^N, \tag{3.1}$$

$$f_j \in S,\ j \in \{1, \ldots, m\} \tag{3.2}$$

で与えられたとし，

$$F(\boldsymbol{u}_j) = f_j \tag{3.3}$$

であるとする．ここで状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ を

$$F(\boldsymbol{u}) = \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{h}_m \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{N+1}, \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{g}_j,\ \boldsymbol{h}_j \in \mathbb{R}^{N+1} \tag{3.6}$$

と定義すると，考えるべき同定問題は

$$\boldsymbol{U} := \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_1 & \ldots & \bar{\boldsymbol{u}}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{(N+1)\times m}, \tag{3.7}$$

$$\boldsymbol{f} := \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^m \tag{3.8}$$

に対して，(3.3) 式を満足させる係数ベクトル $\boldsymbol{g}_j$ と $\boldsymbol{h}_j$ を見つける問題へ帰着する．

3.3 l_1 ノルム最適化問題

状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ の引数である affine 関数の係数ベクトル $\boldsymbol{g}_j$ に重複したものがあるとき，すなわち，$k \neq j$ なる k について，$\boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{g}_k$ が存在するとき，$\boldsymbol{g}_k$ を削除しても状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ の出力は変化しない．係数ベクトル $\boldsymbol{h}_j$ についても同様である．この点で，

affine 関数を決定する係数ベクトル $\boldsymbol{g}_j$ と $\boldsymbol{h}_j$ の多くが重複し削除できる，すなわち，max 関数の引数となる affine 関数の種類が少なくなることが簡単な状態遷移関数の獲得のためには望ましい．

このとき，affine 関数の種類を直接最小化する代わりに，係数ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$, $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_m$ の多くを零ベクトルとし，重複させることが，重複しない affine 関数の種類の最小化に寄与すると考えられる．これを考慮すると係数ベクトルの非零の要素数を最小にするための l_0 ノルム最適化問題を考えることが適切であるが，一般的に l_0 ノルム最適化問題を解くことは困難である．そこで本論文では，ベクトルの要素の絶対和を最小とする l_1 ノルム最適化問題を解いて，係数ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_m$ と $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_m$ を求めることとする．

係数ベクトルをまとめて

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_m \\ \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(N+1)m} \tag{3.9}$$

を定義すると，(3.9) 式を求める l_1 ノルム最適化問題は (3.7) 式と (3.8) 式を用いて

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \|\boldsymbol{x}\|_1 && (3.10)\\ &\text{subject to} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0}, && (3.11)\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f} && (3.12) \end{aligned}$$

となる．この l_1 ノルム最適化問題は線形計画問題に帰着でき，計算機を用いて容易に解くことが可能である [21].

(3.3) 式で設けた状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ が満たすべき条件を，l_1 ノルム最適化問題の等式制約条件 (3.12) 式で

$$\bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_j - \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_j = f_j \tag{3.13}$$

と定義する．したがって，(3.13) 式を満たすように不等式制約条件を設けるものとする．すなわち，

$$\max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_j, \tag{3.14}$$

$$\max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_m \end{bmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_j \tag{3.15}$$

となるように定めるものとする．(3.14) 式と (3.15) 式は

$$\max_{i=1,\ldots,m} \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_i = \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_j, \tag{3.16}$$

$$\max_{i=1,\ldots,m} \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_i = \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_j \tag{3.17}$$

でもあるから，全ての $i \neq j$ について

$$\bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_i - \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{g}_j \leq 0, \tag{3.18}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_i - \bar{\boldsymbol{u}}_j^\top \boldsymbol{h}_j \leq 0 \tag{3.19}$$

が成立しなくてはならない．したがって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) : \mathbb{S}_L^{(N+1)\times m} \to \mathbb{S}_L^{2m^2\times 2(N+1)m}, \tag{3.20}$$

$$\boldsymbol{U} \overset{\boldsymbol{A}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} I_2 \otimes (I_m - \mathbf{1}_m e_1^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_1^\top \\ \vdots \\ I_2 \otimes (I_m - \mathbf{1}_m e_m^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_m^\top \end{bmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}) : \mathbb{S}_L^{(N+1)\times m} \to \mathbb{Z}^{m\times 2(N+1)m}, \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{U} \overset{\boldsymbol{C}}{\longmapsto} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathrm{diag}\boldsymbol{U}^\top \tag{3.23}$$

と定義される．

3.4 最小被覆問題

l_1 ノルム解 $\boldsymbol{x}$ を用いて構成した状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ は，重複する affine 関数や冗長な affine 関数を含む場合がある．これらを削除することで，さらに簡潔な表現が可能となる．重複する affine 関数は，最適解 $\boldsymbol{x}$ から得られる m 組の係数ベクトル $\boldsymbol{g}_j$ と $\boldsymbol{h}_j$ を逐次探索することで抽出される．探索により抽出された重複する係数ベクトル $\boldsymbol{g}_j$ と $\boldsymbol{h}_j$ を削除したとき，互いに異なる P 種類の $\boldsymbol{g}_j$ と Q 種類の $\boldsymbol{h}_j$ がそれぞれ

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_l,\ l = 1, 2, \ldots, P, \tag{3.24}$$

$$\tilde{\boldsymbol{h}}_l,\ l = 1, 2, \ldots, Q \tag{3.25}$$

であったとする．このとき，(3.4) 式の状態遷移関数は

$$F(\boldsymbol{u}) = \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_P \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_Q \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

と記述でき，(3.26) 式の状態遷移関数の簡略化は，

$$\tilde{G}_{i,l} := \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_l = \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_P \end{bmatrix}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.27}$$

$$\tilde{H}_{i,l} := \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_l = \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_Q \end{bmatrix} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.28}$$

を i 行 l 列の要素とする行列 $\tilde{G} \in \{0,1\}^{m \times P}$ と $\tilde{H} \in \{0,1\}^{m \times Q}$ を定義し，これらの各行が少なくとも 1 つの「1」を持つように（ゼロの要素のみの行が存在しないように）なるべく多くの列を $\tilde{G}$ と $\tilde{H}$ から排除する最小被覆問題として定式化ができる．行列 $\tilde{G}$ と $\tilde{H}$ の最小被覆問題は

$$\omega' := \begin{bmatrix} \omega'_g \\ \omega'_h \end{bmatrix} \in \{0,1\}^{P+Q}, \tag{3.29}$$

$$\omega'_g \in \{0,1\}^P, \tag{3.30}$$

$$\omega'_h \in \{0,1\}^Q \tag{3.31}$$

を最適化変数とする 0-1 整数計画問題

$$\underset{\omega' \in \{0,1\}^{2m}}{\text{minimize}} \ \ \|\omega'\|_1 \tag{3.32}$$

$$\text{subject to} \begin{bmatrix} \tilde{G} & 0_{m \times C'} \\ 0_{m \times C} & \tilde{H} \end{bmatrix} \omega' \geq \mathbf{1}_{2m} \tag{3.33}$$

へ帰着できる．(3.32) 式の最適解 ω'_g の i 番目の要素が 1 であるとき，行列 $\tilde{G}$ の最小被覆問題の解の列集合の要素の一つが i 列である，すなわち，最小の種類の affine 関数で (3.26) 式の右辺第一項の max 関数を表現するためには affine 関数 $\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_i$ を用いればよいことがわかる．同様に，ω'_h の i 番目の要素が 1 であるとき，最小の種類の affine 関数で (3.26) 式の右辺第二項の max 関数を表現するためには affine 関数 $\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_i$ を用いればよい．したがって l_1 ノルム最適解 $\boldsymbol{x}$ から最小の種類の affine 関数で状態遷移関数を表現するために用いる affine 関数が抽出でき，簡略化された状態遷移関数を得る．

(3.32) 式の 0-1 整数計画問題は，次に示す理由から最適解 $\boldsymbol{x}$ から定まるそれぞれ m 個

の affine 関数 $\boldsymbol{g}_j$ と $\boldsymbol{h}_j$ を全て用いて，

$$G_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \boldsymbol{g}_j = \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \boldsymbol{g}_m \end{bmatrix}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.34}$$

$$H_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \boldsymbol{h}_j = \max \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{u}}_i^\top \boldsymbol{h}_m \end{bmatrix} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.35}$$

を i 行 j 列の要素とする行列 $G \in \{0,1\}^{m\times m}$ と $H \in \{0,1\}^{m\times m}$ の最小被覆問題，すなわち，

$$\omega := \begin{bmatrix} \omega_g \\ \omega_h \end{bmatrix} \in \{0,1\}^{2m}, \tag{3.36}$$

$$\omega_g \in \{0,1\}^m, \tag{3.37}$$

$$\omega_h \in \{0,1\}^m \tag{3.38}$$

を最適化変数とする 0-1 整数計画問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && \|\omega\|_1 \\ &\text{subject to} && \begin{bmatrix} G & 0_{m\times m} \\ 0_{m\times m} & H \end{bmatrix} \omega \geq \mathbf{1}_{2m} \end{aligned} \tag{3.39}$$

と本質的に等価であるため，重複する affine 関数の探索と削除は不要である．行列 $G \in \{0,1\}^{m\times m}$ は $\tilde{G} \in \{0,1\}^{m\times P}$ を構成する P 種類の列ベクトルのみで構成され，$m > P$ の場合は必ず重複する列ベクトルを持つ．このとき，重複する列ベクトル同士は互いに列支配的であり，行列 G が等しい列ベクトルを二つ以上持つことは，最小被覆問題の解（行列の被覆に必須な列ベクトル集合）には影響しない．行列 $H \in \{0,1\}^{m\times m}$ と $\tilde{H} \in \{0,1\}^{m\times Q}$ の被覆についても同様である．以上の点から，最適解 ω と ω' は本質的に等価であるため，状態遷移関数の簡略化を (3.32) 式ではなく (3.39) 式の最小被覆問題に帰着させて解くと，重複する affine 関数も同時に削除できる．

次節の数値例では紙面の制約のため，状態遷移関数の簡略化に (3.32) 式を用いてその結果を考察する．

3.5 数値例

この節では数値例を用いて，状態遷移関数が (3.4) 式の形式で求まること，求まった状態遷移関数が与えられた状態遷移を完全に再現するものであることを示す．さらに 3.5.2

節の数値例については，目的関数として係数ベクトルの l_2 ノルムを選んだ場合に得られたモデルとの比較を行い，提案手法で得られたモデルの方が簡潔となることを示す．

セルオートマトンモデル同定のための l_1 ノルム最適化計算には，MATLAB® 用の最適化計算ソフト cvx[27] を使用し，(3.32) 式の 0-1 整数計画問題には cvx のソルバの 1 つである mosek[28] を用いた．

3.5.1　2 状態 2 近傍のセルオートマトンモデル

2 状態 2 近傍セルオートマトン ($L = 2, N = 2$，$m = L^N = 4$) の状態遷移が

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_1 & \bar{\boldsymbol{u}}_2 & \bar{\boldsymbol{u}}_3 & \bar{\boldsymbol{u}}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{3\times 4}, \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3.41}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\boldsymbol{u}_1) \\ F(\boldsymbol{u}_2) \\ F(\boldsymbol{u}_3) \\ F(\boldsymbol{u}_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.42}$$

で与えられたとし，状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ を同定する．求める係数ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_4 \\ \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24} \tag{3.43}$$

となり，不等式制約条件を与える (3.20) 式と等式制約条件を与える (3.22) 式は

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathrm{diag}\boldsymbol{U}^\top \in \mathbb{Z}^{4\times 24}, \tag{3.44}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} I_2 \otimes (I_4 - \mathbf{1}_4 e_1^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_1^\top \\ \vdots \\ I_2 \otimes (I_4 - \mathbf{1}_4 e_4^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_4^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{32\times 24} \tag{3.45}$$

で定まる．

l_1 ノルム最適化問題を解くと係数ベクトルは

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{3.46}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{3.47}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{3.48}$$

$$\boldsymbol{h}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top,\ j = 1, 2, 3, 4 \tag{3.49}$$

となった．このとき $\|\boldsymbol{x}\|_0 = 4$ である．これらの解より，

$$\overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_j = \begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_1 = 0, & j = 1, 4 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_2 = -u_1 + u_2, & j = 2 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_3 = u_1 - u_2, & j = 3 \end{cases} \tag{3.50}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{h}_j = 0,\ j = 1, 2, 3, 4 \tag{3.51}$$

であるから，(3.4) 式の状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ は

$$F(\boldsymbol{u}) = F(u_1, u_2) = \max \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 - u_1 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_3 \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

となる．(3.50) 式と (3.51) 式より，(3.52) 式の簡略化のための行列 $\tilde{G}$ と $\tilde{H}$ は

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ \tilde{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.53}$$

となり，(3.32) 式を解くと

$$\omega' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top \tag{3.54}$$

を得る．したがって，(3.52) 式は

$$F(\boldsymbol{u}) = F(u_1, u_2) = \max \begin{bmatrix} u_2 - u_1 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} \tag{3.55}$$

へ簡略化できる．上式は (3.42) 式と同じ値を与えることから，同定が正しく行われたことを確認できる．(3.32) 式ではなく，行列 $G \in \{0, 1\}^{4\times4}$ と $H \in \{0, 1\}^{4\times4}$ を用いて (3.39) 式を解いた場合も同様の結果を得ることができた．

3.5.2　3 状態 3 近傍のセルオートマトンモデル

3 状態 3 近傍 ($L = 3$，$N = 3$，$m = L^N = 27$) の状態遷移が

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_1 & \bar{\boldsymbol{u}}_2 & \cdots & \bar{\boldsymbol{u}}_{26} & \bar{\boldsymbol{u}}_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 1 & & 1 & 2 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_3^{4\times 27}, \tag{3.56}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{u}_1) \\ \vdots \\ f(\boldsymbol{u}_{27}) \end{bmatrix} = \mathrm{vec}\left(F^\top\right), \tag{3.57}$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} \\ f_{13} & f_{14} & f_{15} \\ f_{16} & f_{17} & f_{18} \\ f_{19} & f_{20} & f_{21} \\ f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{25} & f_{26} & f_{27} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

で与えられたとして状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ を同定する．

なお紙面のスペースを節約するために (3.57) 式と (3.58) 式の表現を用いた．$\boldsymbol{u}_j^\top$ は $j-1 = 0,\ldots,26$ を 3 桁の 3 進数で表記したときの各桁の値を要素とするベクトルになっている．例えば，$j = 8$ すなわち $j - 1 = 7_{(10)} = 021_{(3)}$ は $\boldsymbol{u}_8^\top = [0\ 2\ 1]$ で，$j = 23$ すなわち $j - 1 = 22_{(10)} = 211_{(3)}$ は $\boldsymbol{u}_{23}^\top = [2\ 1\ 1]$ で表現される．すなわち

$$\boldsymbol{u}_j = \begin{bmatrix} \left\lfloor \dfrac{j-1}{9} \right\rfloor \\ \left\lfloor \dfrac{j-1}{3} \right\rfloor \mod 3 \\ (j+2) \mod 3 \end{bmatrix} \tag{3.59}$$

である．求める係数ベクトルは

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{27} \\ \boldsymbol{h}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{h}_{27} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{216} \tag{3.60}$$

であり，不等式制約条件を与える (3.20) 式と等式制約条件を与える (3.22) 式は

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \mathrm{diag} \boldsymbol{U}^\top \in \mathbb{Z}^{27\times 216}, \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) = \begin{bmatrix} I_2 \otimes (I_{27} - \mathbf{1}_{27} e_1^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_1^\top \\ \vdots \\ I_2 \otimes (I_{27} - \mathbf{1}_{27} e_{27}^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_{27}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_3^{1458\times 216} \tag{3.62}$$

で定まる．l_1 ノルム最適化問題を解き，重複する係数ベクトルを抽出し削除すると，

$$\tilde{\boldsymbol{g}}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_1} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_2} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_3} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_4} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_5} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_6} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_7} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{g_8} \end{cases} \tag{3.63}$$

$$\tilde{\boldsymbol{h}}_j = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_1} \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_2} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_3} \\ \begin{bmatrix} -0.7 & 0.5 & -0.3 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_4} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_5} \\ \begin{bmatrix} -1 & 0.2 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_6} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_7} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^\top, & j \in J_{h_8} \end{cases} \tag{3.64}$$

を得た．このとき $\|\boldsymbol{x}\|_0 = 71$ である．紙面の制約上，(3.63) 式，(3.64) 式では，計算結果の小数点以下二桁を四捨五入したものを記している．また，(3.63) 式，(3.64) 式のインデッ

クス j の集合を

$$
\begin{aligned}
J_{g_1} &:= \{1,4,10,13\}\\
J_{g_2} &:= \{2,5,11,14\}\\
J_{g_3} &:= \{3,6,12,15,18,21,24,27\}\\
J_{g_4} &:= \{7,16,17\}\\
J_{g_5} &:= \{8,9\}\\
J_{g_6} &:= \{19,20\}\\
J_{g_7} &:= \{22,23\}\\
J_{g_8} &:= \{25,26\}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{h_1} &:= \{1,2,4,5\}\\
J_{h_2} &:= \{3,12\}\\
J_{h_3} &:= \{6\}\\
J_{h_4} &:= \{7\}\\
J_{h_5} &:= \{8\}\\
J_{h_6} &:= \{9\}\\
J_{h_7} &:= \{10,11,13,14,15,17,18,\ldots,24,26,27\}\\
J_{h_8} &:= \{16,25\}
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

と定義した．これらの解より

$$
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{g}_j = \begin{cases}
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 = 1 & j \in J_{g_1}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_2 = 0.5u_3 + 0.5, & j \in J_{g_2}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_3 = u_3, & j \in J_{g_3}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_4 = 0.5u_2, & j \in J_{g_4}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_5 = -u_1 + u_2 + u_3 - 1, & j \in J_{g_5}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_6 = u_1 - u_2, & j \in J_{g_6}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_7 = 0.5u_1, & j \in J_{g_7}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_8 = 0.3u_1 + 0.2u_2, & j \in J_{g_8}
\end{cases}
\tag{3.67}
$$

$$
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \boldsymbol{h}_j = \begin{cases}
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 = -u_1 + 1, & j \in J_{h_1}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_2 = -u_1 - u_2 + u_3, & j \in J_{h_2}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_3 = -u_1 + 0.5u_3, & j \in J_{h_3}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_4 = -0.7u_1 + 0.5u_2 - 0.3u_3, & j \in J_{h_4}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_5 = -u_1 + 0.5u_2, & j \in J_{h_5}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_6 = -u_1 + 0.2u_2 + 0.3u_3, & j \in J_{h_6}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_7 = 0, & j \in J_{h_7}\\
\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_8 = u_2 - u_3 - 1, & j \in J_{h_8}
\end{cases}
\tag{3.68}
$$

を得る．(3.4) 式で表現される状態遷移関数は (3.67) 式の 8 種類の $\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_i$ を含む max 関数と (3.68) 式の 8 種類の $\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_i$ を含む $-$max 関数とで次式のように表現できる．

$$
F(\boldsymbol{u}) = F(u_1, u_2, u_3) = \max \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_8 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_8 \end{bmatrix}
\tag{3.69}
$$

(3.67) 式，(3.68) 式で計算される行列 $\tilde{G} \in \{0,1\}^{27\times 8}$ と $\tilde{H} \in \{0,1\}^{27\times 8}$

$$
\tilde{G} = \begin{bmatrix}
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0
\end{bmatrix}, \quad
\tilde{H} = \begin{bmatrix}
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\
0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0
\end{bmatrix} \tag{3.70}
$$

の最小被覆問題 (3.32) 式を解くと，

$$
\omega' = \begin{bmatrix} \omega_g'^{\top} & \omega_h'^{\top} \end{bmatrix}^{\top}, \tag{3.71}
$$

$$
\omega_g' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\top}, \tag{3.72}
$$

$$
\omega_h' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\top} \tag{3.73}
$$

が得られた．(3.73) 式は行列 $\tilde{G}$ の最小被覆は 1，3，5，6 列目で，行列 $\tilde{H}$ の最小被覆は 1，2，7，8 列目でそれぞれ達成されることを表すため，(3.69) 式は

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{u}) &= \max \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{g}}_1 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{g}}_3 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{g}}_5 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{g}}_6 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{h}}_1 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{h}}_2 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{h}}_7 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{\top} \tilde{\boldsymbol{h}}_8 \end{bmatrix} \\
&= \max \begin{bmatrix} 1 \\ u_3 \\ -u_1 + u_2 + u_3 - 1 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} -u_1 + 1 \\ -u_1 - u_2 + u_3 \\ 0 \\ u_2 - u_3 - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.74}
$$

へ簡略化できることが分かる．上式が (3.57) 式を満たすことは容易に確認できる．(3.32) 式ではなく，行列 $G \in \{0,1\}^{27\times 27}$ と $H \in \{0,1\}^{27\times 27}$ を用いて (3.39) 式を解いた場合も同様の結果を得ることができた．

比較のために，目的関数を $\|\boldsymbol{x}\|_2$ として解を求めたところ，$\|\boldsymbol{x}\|_0 = 212$ となり解がスパース性を持たなかった．l_2 ノルム最適解 $\boldsymbol{x}$ からは 26 種類の $\boldsymbol{g}_j$ と 23 種類の $\boldsymbol{h}_j$ を得たため，行列 $\tilde{G} \in \{0,1\}^{27\times 26}$ と $\tilde{H} \in \{0,1\}^{27\times 23}$ を用いて (3.32) 式の最小被覆問題を解くと，9 種類のベクトル $\boldsymbol{g}_j$ と 9 種類のベクトル $\boldsymbol{h}_j$ に簡略化できた．しかし，l_1 ノルム最適解の 4 種類の $\boldsymbol{g}_j$ と 4 種類の $\boldsymbol{h}_j$ より多く，l_1 ノルム最適解を用いた方が簡略化できることが分かる．解のスパース性と状態遷移関数を構成する関数の数が少ないという観点において，提案手法の方がより簡潔な状態遷移関数を求められていることが示せた．

なお，最適解から得られる関数 $\boldsymbol{g}_j$ と $\boldsymbol{h}_j$ は重複する個数も数に入れるとそれぞれ $m = L^N$ 個あり，被覆問題を解くための行列 G と H の計算には m^2 の計算量が必要であり，(3.39) 式の最適化計算の計算量は $O(2^{2m})$ となる．最小被覆問題は NP 困難であり多項式時間の解法は知られていない．したがって，N と L が大きな値のとき，(3.39) 式の最適化問題を解くことは困難となる．

注意 1　(3.73) 式が最小被覆問題の解であることは，(3.70) 式の行列 $\tilde{G}$ の被覆には 1，3，5，6 列が必須で，かつ，$\tilde{G}$ の行を被覆するために十分な行であることと，同様の理由で (3.70) 式の行列 $\tilde{H}$ の被覆問題では，1，2，7，8 列が解となることから容易に確認できる．この結果は 4. 2 節の数値例において，m 組の affine 関数の簡略化が (3.70) 式の被覆に必須な列ベクトルを探すだけで達成できたことを示す．ただし，被覆に必須な集合を抽出するだけで行列の被覆が達成できるとは限らないため，必須列のみを抽出する簡略化の方法は一般の問題には適用できない，すなわち，この方法は必須列のみで行列の被覆が達成できない場合には適用できない．また，(3.69) 式の max 関数において，$u_1, u_2 = 0, 1, 2$ に対し

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_2 = 0.5u_3 + 0.5 \le \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 = 1 & u_3 = 0 \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_2 = 0.5u_3 + 0.5 \le \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_3 = u_3 & u_3 = 1, 2 \end{cases} \tag{3.75}$$

が常に成り立ち，さらに

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_4 = 0.5u_2 \le \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 = 1 \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_7 = 0.5u_1 \le \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 = 1 \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_8 = 0.3u_1 + 0.2u_2 \le \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_1 = 1 \end{cases} \tag{3.76}$$

も常に成り立つので，これらの左辺 $\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_2$，$\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_4$，$\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_7$，$\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{g}}_8$ は max 関数から除去できる．また，(3.69) 式の $-\max$ 関数で，$u_1 = 1$，$u_2 = 2$，$u_3 = 0$ のとき

$$\bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_8 = u_2 - u_3 - 1 \ge \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_4 = -0.7u_1 + 0.5u_2 - 0.3u_3 \tag{3.77}$$

となり，それを除くすべての $u_2, u_3 = 0, 1, 2$ に対し

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 = -u_1 + 1 \ge \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_4 = -0.7u_1 + 0.5u_2 - 0.3u_3 & u_1 = 0, 1 \\ \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_7 = 0 \ge \bar{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_4 = -0.7u_1 + 0.5u_2 - 0.3u_3 & u_1 = 2 \end{cases} \tag{3.78}$$

が常に成り立つ．さらに $u_1, u_2, u_3 = 0, 1, 2$ に対し

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 = -u_1 + 1 \geq \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_3 = -u_1 + 0.5u_3 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 = -u_1 + 1 \geq \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_5 = -u_1 + 0.5u_2 \\ \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_1 = -u_1 + 1 \geq \overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_6 = -u_1 + 0.2u_2 + 0.3u_3 \end{cases} \tag{3.79}$$

が常に成り立つので，これらの右辺 $\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_3$，$\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_4$，$\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_5$，$\overline{\boldsymbol{u}}^\top \tilde{\boldsymbol{h}}_6$ は $-\max$ 関数から削除することができる．この結果からも，(3.73) 式が最小被覆問題の解であることが確認できる．ただし (3.75) 式から (3.79) 式の affine 関数の大小関係は最適解から自動的に得られるものではないため，大小関係を知るためには全ての affine 関数の組の関係を調べなければならない．したがって上述の方法による最適解の簡略化は一般の問題，特にサイズの大きな問題に適用するのは困難である．

3.6　第 3 章のまとめ

L 状態 N 近傍セルオートマトンの状態遷移を表す状態遷移関数を $L^N = m$ 個の affine 関数を引数としてもつ max 関数の加減算で定義することによってセルオートマトンモデル同定問題を $2m$ 組の affine 関数の係数を求める問題に帰着させ，これらの係数を求める問題を l_1 ノルム最適化問題として定式化した．l_1 ノルム最適化の目的関数を求めるべき係数を要素として持つベクトル $\boldsymbol{x}$ の l_1 ノルムとすることで，スパース解を得ることが可能となる．すなわち，m 組ずつある affine 関数の多くを 0 にすることが期待できる．この l_1 ノルム最適化から得られる affine 関数は重複するものや冗長なもの（削除可能なもの）が含まれる．これらの探索と削除は最小被覆問題を解くことで可能となる．これらの有効性は数値例を用いて確認した．

第 4 章

分割統治法による計算負荷の軽減

4.1　はじめに

前章で説明したセルオートマトンモデル同定のための最適化問題において最適化問題の不等式制約条件と等式制約条件を表す行列 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ の空間的複雑度はそれぞれ,

$$O(4m^3(N+1)) = O(4L^{3N}(N+1)) = O(L^{3N}), \tag{4.1}$$

$$O(2m^2(N+1)) = O(2L^{2N}(N+1)) = O(L^{2N}) \tag{4.2}$$

である．したがって，対象とするセルオートマトンの有限離散状態 L と近傍 N が増えるにしたがって，制約条件を記述する行列のサイズは指数関数的に増加する．例えば，$N = 5,\ L = 3$ であっても，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}) \in \mathbb{S}_3^{118098\times 2916}$，$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}) \in \mathbb{Z}^{243\times 2916}$，であり，数値計算ソフト MATLAB® でこれらの行列を扱うためには，それぞれ約 2.75GB と約 5.7MB のメモリが必要であり，筆者の使用する計算機ではメモリ不足で $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ が定義不可能であった.

本章では，l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデルの同定法へ分割統治法を適用し，同定のための最適化問題を解く際にかかる計算負荷の軽減を行う．このとき，与えられた状態遷移を入力に制限を設けた L 個の状態遷移に分割する．すなわち，L 個のサブ問題に分割する．あわせて，各サブ問題で求めるべき状態遷移関数と同定問題で求めるべき係数ベクトルを再定義し，l_1 ノルム最適化問題の制約条件もサブ問題で求める状態遷移関数の形式に合わせてそれぞれ再記述する.

L 個の最適化問題をそれぞれ解いて得られた L 個の状態遷移関数は，すべて足し合わせることで元の状態遷移を表現する状態遷移関数となる．max 関数の分配法則を用いると，この状態遷移関数は一個の max 関数の加減算にまとめることが可能であり，まとめられた状態遷移関数に対し，最小被覆問題を適用して簡略化を行う.

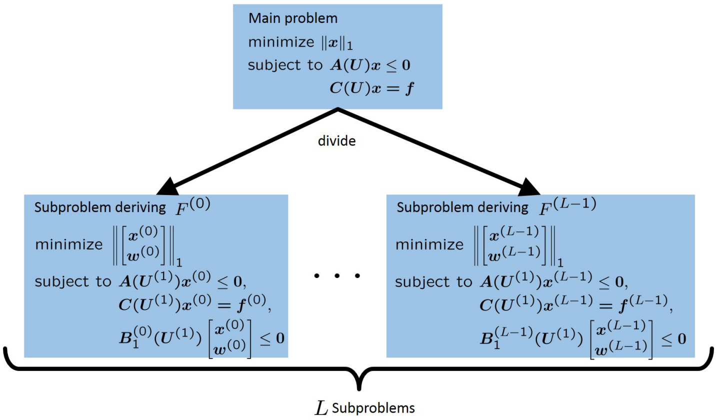

図 4.1　分割統治法の分割部分．原問題は L 個のサブ問題に分割可能で，このとき入力 u_1 の値を固定している．

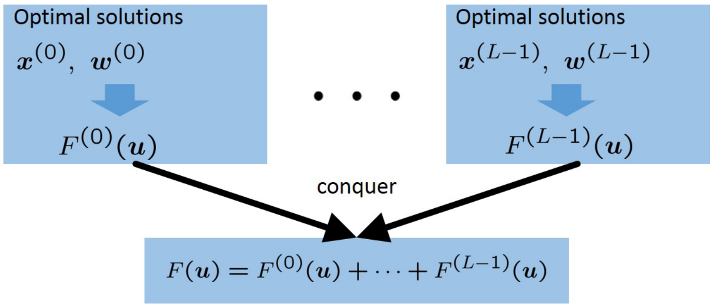

図 4.2　L 個のサブ問題を解いて得た解より L 個の状態遷移関数が得られる．これらを足し合わせることで，状態遷移関数 F を得る．

4.2　状態遷移関数の定義と同定問題

原問題の制約条件を表現する (3.20) 式と (3.22) 式の行列 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ のサイズを縮小するために，(3.10) 式と (3.12) 式の最適化問題（原問題）を分割統治法によって図 4.1 に示すように L 個の最適化問題に分割する．図 4.1 の分割では，入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第一要素

u_1 の値に制限を設け，サブ問題の解より得られる状態遷移関数を

$$F^{(k_1)}(\boldsymbol{u}) = \max \boldsymbol{G}^{(k_1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(k_1)}(\boldsymbol{u}), \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{G}^{(k_1)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top}\boldsymbol{g}_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top}\boldsymbol{g}_{m'}^{(k_1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^{(k_1)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top}\boldsymbol{h}_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top}\boldsymbol{h}_{m'}^{(k_1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m'+2}, \tag{4.4}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}^{(1)} = \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_N \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^N, \tag{4.5}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_l)} := \begin{bmatrix} u_l \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^2, l \in \{1, \ldots, N\} \tag{4.6}$$

と定義し，$\boldsymbol{g}_i^{(k_1)}$，$\boldsymbol{h}_i^{(k_1)} \in \mathbb{R}^N$ と $\boldsymbol{y}_1^{(k_1)}$，$\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \in \mathbb{R}^2$ である．

原問題の解より得られる状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ とサブ問題を解いて得られる状態遷移関数 $F^{(k_1)}$ の間には

$$F(\boldsymbol{u}) = F^{(0)}(\boldsymbol{u}) + \cdots + F^{(L-1)}(\boldsymbol{u}), \tag{4.7}$$

$$F^{(k_1)}(\boldsymbol{u}_j) = \begin{cases} f_j & j \in \mathcal{J}(k_1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{J}(k_1) := \{k_1 m' + i \mid i = 1, \ldots, m'\}, \tag{4.9}$$

$$m' := \frac{m}{L} = L^{N-1} \tag{4.10}$$

の関係が成り立つものとする．

ここで係数ベクトルとして

$$\boldsymbol{x}^{(k_1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{m'}^{(k_1)} \\ \boldsymbol{h}_1^{(k_1)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{m'}^{(k_1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2Nm'}, \tag{4.11}$$

$$\boldsymbol{w}^{(k_1)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \\ \boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \tag{4.12}$$

を定義すると，サブ問題で考えるべき同定問題は，

$$\boldsymbol{U}^{(1)} := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}_1^{(1)} & \cdots & \overline{\boldsymbol{u}}_{m'}^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{N\times m'}, \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{f}^{(k_1)} := \begin{bmatrix} f_{k_1 m'+1} \\ \vdots \\ f_{k_1 m'+m'} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{m'}, \tag{4.14}$$

に対して，(4.8) 式を満足させる係数ベクトル $\boldsymbol{x}^{(k_1)}$ と $\boldsymbol{w}^{(k_1)}$ を見つける問題となる．

ところで，$j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ には常に

$$P^{(1)}\boldsymbol{u}_j = P^{(1)}\boldsymbol{u}_i, \tag{4.15}$$

$$P^{(1)} := \begin{bmatrix} 0_{N-1\times 1} & I_{N-1} \end{bmatrix} \in \{0, 1\}^{N\times(N-1)} \tag{4.16}$$

を満たす $i \in \{1, 2, \ldots, m'\}$ が存在するため，不等式制約条件を考慮する際は，上式を満たす $\boldsymbol{u}_i$ について考えるのみで十分である．

4.3 サブ問題が表す l_1 ノルム最適化問題

(4.11) 式と (4.12) 式を求める l_1 ノルム最適化問題を，(4.13) 式と (4.14) 式を用いて

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1)} \\ \boldsymbol{w}^{(k_1)} \end{bmatrix} \right\|_1 & (4.17) \\ \text{subject to} \quad & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(1)})\boldsymbol{x}^{(k_1)} \leq \boldsymbol{0}, & (4.18) \\ & \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(1)})\boldsymbol{x}^{(k_1)} = \boldsymbol{f}^{(k_1)}, & (4.19) \\ & \boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(1)}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1)} \\ \boldsymbol{w}^{(k_1)} \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{0} & (4.20) \end{aligned}$$

と記述する．

$F^{(k_1)}(\boldsymbol{u})$ が (4.8) 式を満足するためには，不等式制約条件

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top} \left(\boldsymbol{g}_{\tilde{i}}^{(k_1)} - \boldsymbol{g}_i^{(k_1)} \right) \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top} \left(\boldsymbol{h}_{\tilde{i}}^{(k_1)} - \boldsymbol{h}_i^{(k_1)} \right) \leq 0 \end{cases} \tag{4.21}$$

を満たすことに加えて，さらに以下の三つの場合についての不等式制約条件を考慮する必要がある．

(i) $j \in \mathcal{J}(k_1)$ の場合，

$$\begin{cases} -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \leq 0 \\ -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \leq 0 \end{cases}, \tag{4.22}$$

$$\begin{cases} -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \leq 0 \\ -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \leq 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

の二つの制約不等式条件を満たすとき

$$\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top}\boldsymbol{g}_i^{(k_1)} - \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top}\boldsymbol{h}_i^{(k_1)} = f_j \tag{4.24}$$

が成り立つ.

(ii) $j \in \mathcal{J}(k_1-1), \ldots, j \in \mathcal{J}(0)$ の場合,

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top}\boldsymbol{g}_i^{(k_1)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1-1)\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top}\boldsymbol{h}_i^{(k_1)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1-1)\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1)} \leq 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

の二組を満たせば

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{j1})\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{j1})\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1)} = 0 \tag{4.26}$$

が成り立つ.

(iii) $j \in \mathcal{J}(k_1+1), \ldots, j \in \mathcal{J}(L-1)$ の場合,

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top}\boldsymbol{g}_i^{(k_1)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1+1)\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(1)\top}\boldsymbol{h}_i^{(k_1)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(k_1+1)\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} \leq 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

の二組を満たせば

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{j1})\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{j1})\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1)} = 0 \tag{4.28}$$

が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(1)})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(1)})$ は (3.21) 式と (3.23) 式と同様に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(1)}) : \mathbb{S}_L^{N\times m'} \to \mathbb{S}_L^{2m'^2\times 2Nm'}, \tag{4.29}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(1)}) : \mathbb{S}_L^{N\times m'} \to \mathbb{Z}^{m'\times 2Nm'} \tag{4.30}$$

と定義され，行列 $\boldsymbol{B}_1^{(k_1)}$ は

$$\boldsymbol{B}_1^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(1)}) : \mathbb{S}_L^{N\times m'} \to \mathbb{S}_L^{8m'\times 2(Nm'+2)}, \tag{4.31}$$

$$\boldsymbol{U}^{(1)} \xmapsto{\boldsymbol{B}_1^{(u_1)}} \left[\begin{bmatrix} -I_2 \\ -I_2 \\ I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \operatorname{diag} \boldsymbol{U}^{(1)\top}\ \boldsymbol{W}^{(k_1)}\right], \tag{4.32}$$

$$\boldsymbol{W}^{(k_1)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 1 \end{bmatrix} \\ -\boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} k_1-1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1+1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{8m'\times 4} \tag{4.33}$$

と定義できる.

L 個の l_1 ノルム最適化問題の解を用いることで $F^{(0)}(\boldsymbol{u}), \ldots, F^{(L-1)}(\boldsymbol{u})$ が求まる.

4.4　状態遷移関数の統合と簡略化

サブ問題の解 $\boldsymbol{x}^{(k_1)}$ と $\boldsymbol{w}^{(k_1)}$ より，

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}) &= F^{(0)}(\boldsymbol{u}) + \cdots + F^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \\ &= \max \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) + \cdots + \max \boldsymbol{G}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \end{aligned} \tag{4.34}$$

が得られる．max 関数同士または-max 関数に成り立つ分配法則 [7]

$$\max \boldsymbol{a} + \max \boldsymbol{b} = \max(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}), \tag{4.35}$$

$$-\max \boldsymbol{a} - \max \boldsymbol{b} = -\max(\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b}) \tag{4.36}$$

を用いると，(4.34) 式は

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}) &= \max \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) + \cdots + \max \boldsymbol{G}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \\ &= \max\left(\boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u})\right) + \max \boldsymbol{G}^{(2)}(\boldsymbol{u}) + \cdots + \max \boldsymbol{G}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \\ &\quad - \max\left(\boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u})\right) - \max \boldsymbol{H}^{(2)}(\boldsymbol{u}) - \cdots - \max \boldsymbol{H}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \\ &\ \ \vdots \\ &= \max\left(\boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{G}^{(L-1)}(\boldsymbol{u})\right) - \max\left(\boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{H}^{(L-1)}(\boldsymbol{u})\right) \end{aligned} \tag{4.37}$$

とまとめることができる．

(4.37) 式の右辺は重複する affine 関数や削除可能な affine 関数を含む場合があるため，これを 3.4 節の最小被覆問題を用いて探索し，(3.3) 式を満たすために必要な関数のみを抽出することで，簡略化された状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ を得る．ただし，

$$\boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{G}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{(m'+2)^L}, \tag{4.38}$$

$$\boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{H}^{(L-1)}(\boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}^{(m'+2)^L} \tag{4.39}$$

となり，要素数が指数関数のオーダーであるため (4.38) 式と (4.39) 式に対する最小被覆問題を解くことは一般的に困難である．そこで，Algorithm 1 を用いて状態遷移関数の簡略化を段階的に行うこととする．

Algorithm 1 は，第一ステップとして

$$\boldsymbol{G}_1 := \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{H}_1 := \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) \tag{4.40}$$

を定義し，$\boldsymbol{G}_1$ と $\boldsymbol{H}_1$ へ (3.39) 式の最小被覆問題を適用し簡略化する．ここで，最小被覆問題の解から冗長な affine 関数や重複する affine 関数，すなわち，削除可能な affine 関数が判別される．$\boldsymbol{G}_1$ と $\boldsymbol{H}_1$ から削除可能な affine 関数を全て削除することで残った affine 関数を

用いて $\boldsymbol{G}_{1-}$, $\boldsymbol{H}_{1-}$ を定義する．第二ステップは $\boldsymbol{G}_2 := \boldsymbol{G}_{1-} \oplus \boldsymbol{G}^{(2)}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{H}_2 := \boldsymbol{H}_{1-} \oplus \boldsymbol{H}^{(2)}(\boldsymbol{u})$ へ最小被覆問題を適用し削除可能な affine 関数を探索／削除する．こうして得られた結果が $\boldsymbol{G}_{2-}$, $\boldsymbol{H}_{2-}$ となる．これを段階的に適用していき，第 i ステップでは，$\boldsymbol{G}_i := \boldsymbol{G}_{i-1-} \oplus \boldsymbol{G}^{(i)}(\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{H}_i := \boldsymbol{H}_{i-1-} \oplus \boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{u})$ へ最小被覆問題を適用し削除可能な affine 関数を探索／削除する．これを $L-1$ 回行うと，

$$\boldsymbol{G}_{L-1-} := \begin{bmatrix} G_{L-1-,1}(\boldsymbol{u}) \\ \cdots \\ G_{L-1-,n}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}, \tag{4.41}$$

$$\boldsymbol{H}_{L-1-} := \begin{bmatrix} H_{L-1-,1}(\boldsymbol{u}) \\ \cdots \\ H_{L-1-,n}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

が得られ，これらを用いた

$$F(\boldsymbol{u}) = \max \boldsymbol{G}_{L-1-} - \max \boldsymbol{H}_{L-1-} \tag{4.43}$$

が簡略化された状態遷移関数として得られる．

Algorithm 1 $\boldsymbol{G}^{(\cdot)}(\boldsymbol{u})$ と $\boldsymbol{H}^{(\cdot)}(\boldsymbol{u})$ の簡略化

$$\boldsymbol{G}_1 := \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{H}_1 := \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u})$$

solve (3.39)

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \|\omega\|_1 \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} G & 0_{m\times m} \\ 0_{m'+2\times m'+2} & H \end{bmatrix} \omega \geq \mathbf{1}_{2(m'+2)} \end{array}$$

with $\boldsymbol{G}_1$ and $\boldsymbol{H}_1$

we define $\boldsymbol{G}_{1-}$, $\boldsymbol{H}_{1-}$ that factors are chosen as the required affine functions by the solution of (3.39)

for $i = 2$ to $L-1$ **do**

$\boldsymbol{G}_i := \boldsymbol{G}_{i-1-} \oplus \boldsymbol{G}^{(i)}(\boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{H}_i := \boldsymbol{H}_{i-1-} \oplus \boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{u})$

and solve (3.39) with $\boldsymbol{G}_i$ and $\boldsymbol{H}_i$

we define $\boldsymbol{G}_{i-}$, $\boldsymbol{H}_{i-}$ that factors are chosen as the required affine functions by the solution of (3.39)

end for

4.5 数値例

数値例を用いて，サブ問題を解いて得られる状態遷移関数がそれぞれ (4.3) 式の形式で求まること，それぞれの状態遷移関数を加え合わせることで原問題の状態遷移を完全に再現するものであることを示す．

セルオートマトンモデル同定のための l_1 ノルム最適化計算には，MATLAB® 用の最適化計算ソフト cvx [27] を使用する．

2 状態 2 近傍 ($L = 2, N = 2$，$m = L^N = 4$) セルオートマトンの状態遷移が

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}_1 & \overline{\boldsymbol{u}}_2 & \overline{\boldsymbol{u}}_3 & \overline{\boldsymbol{u}}_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{3\times 4}, \tag{4.44}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{u}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.45}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\boldsymbol{u}_1) \\ F(\boldsymbol{u}_2) \\ F(\boldsymbol{u}_3) \\ F(\boldsymbol{u}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

で与えられたとする．このとき $L = 2$ より，$F(\boldsymbol{u})$ を求める原問題は u_1 の値が 0 と 1 に固定された二つのサブ問題に分割され，求める状態遷移関数は (4.3) 式より

$$\begin{cases} F^{(0)}(\boldsymbol{u}) := \max \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \\ F^{(1)}(\boldsymbol{u}) := \max \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) \end{cases}, \tag{4.47}$$

$$\boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_1^{(0)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_2^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(0)} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_1^{(0)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_2^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(0)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4, \tag{4.48}$$

$$\boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_1^{(1)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_2^{(1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(1)} \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_1^{(1)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_2^{(1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{4.49}$$

となる．

$F^{(0)}(\boldsymbol{u})$ と $F^{(1)}(\boldsymbol{u})$ を求める二つのサブ問題は (4.44) 式 ~(4.46) 式より，

$$\boldsymbol{U}^{(1)} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}_1^{(1)} & \overline{\boldsymbol{u}}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{4.50}$$

$$\boldsymbol{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

を用いて構成される．求める係数ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{g}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{h}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{h}_2^{(0)} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{g}_2^{(1)} \\ \boldsymbol{h}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{h}_2^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8, \tag{4.52}$$

$$\boldsymbol{w}^{(0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{z}_1^{(0)} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{z}_1^{(1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{4.53}$$

となり，不等式制約条件を与える (4.29) 式と等式制約条件を与える (4.30) 式は

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \operatorname{diag} \boldsymbol{U}^{(1)\top} \in \mathbb{Z}^{2\times 8}, \tag{4.54}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(1)}) = \begin{bmatrix} I_2 \otimes (I_2 - \mathbf{1}_2 e_1^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_1^\top \\ I_2 \otimes (I_2 - \mathbf{1}_2 e_2^\top) \otimes \bar{\boldsymbol{u}}_2^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{2\times 4} \tag{4.55}$$

で定まり，もう一つの不等式制約条件を与える (4.32) 式は

$$\boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(1)}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_2 \\ -I_2 \\ I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \operatorname{diag} \boldsymbol{U}^{(1)\top} & \boldsymbol{W}^{(k_1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{16\times 12}, \tag{4.56}$$

$$\boldsymbol{W}^{(k_1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} k_1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 1 \end{bmatrix} \\ -\mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} k_1 - 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 + 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

で定まる．

二つの l_1 ノルム最適化問題を cvx で解くと係数ベクトルは

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{g}_2^{(0)} \\ \boldsymbol{h}_1^{(0)} \\ \boldsymbol{h}_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_2 \\ 1 \\ \mathbf{0}_5 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{g}_2^{(1)} \\ \boldsymbol{h}_1^{(1)} \\ \boldsymbol{h}_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \mathbf{0}_6 \end{bmatrix}, \tag{4.58}$$

$$\boldsymbol{w}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{w}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

となり，

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1^{(0)} = \boldsymbol{0}_2 \\ \boldsymbol{g}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^\top \\ \boldsymbol{h}_i^{(0)} = \boldsymbol{0}_2, \quad i = 1, 2 \\ \boldsymbol{y}_1^{(0)} = -\boldsymbol{z}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^\top \end{cases}, \tag{4.60}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \\ \boldsymbol{g}_2^{(1)} = \boldsymbol{0}_2 \\ \boldsymbol{h}_i^{(1)} = \boldsymbol{0}_2, \quad i = 1, 2 \\ \boldsymbol{y}_1^{(1)} = -\boldsymbol{z}_1^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \end{cases} \tag{4.61}$$

となった．このとき $\|\boldsymbol{x}^{(0)}\|_0 + \|\boldsymbol{x}^{(1)}\|_0 + \|\boldsymbol{w}^{(0)}\|_0 + \|\boldsymbol{w}^{(1)}\|_0 = 9$ である．これらの解より，

$$\boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_1^{(0)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_2^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ -u_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \tag{4.62}$$

$$\boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_1^{(0)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_2^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1 \\ u_1 \end{bmatrix}, \tag{4.63}$$

$$\boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_1^{(1)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{g}_2^{(1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(1)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2 + 1 \\ 0 \\ -u_1 + 1 \\ u_1 - 1 \end{bmatrix}, \tag{4.64}$$

$$\boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_1^{(0)} \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(1)\top} \boldsymbol{h}_2^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(0)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1 + 1 \\ u_1 - 1 \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

であるから，(4.3) 式の状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ は

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}) &= F^{(0)}(\boldsymbol{u}) + F^{(1)}(\boldsymbol{u}) \\ &= \max \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) + \max \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) \\ &= \max \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ -u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} + \max \begin{bmatrix} -u_2 + 1 \\ 0 \\ -u_1 + 1 \\ u_1 - 1 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1 + 1 \\ u_1 - 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.66}$$

となる．

(4.66) 式を，

$$F(\boldsymbol{u}) = \max \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}), \tag{4.67}$$

$$\boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{g}}_{16}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_2+1 \\ 0 \\ -u_1 \\ u_1 \\ 1 \\ u_2 \\ -u_1+u_2+1 \\ u_1+u_2-1 \\ -u_1-u_2+1 \\ -u_1 \\ -2u_1+1 \\ 1 \\ u_1-u_2+1 \\ u_1 \\ 1 \\ 2u_1-1 \end{bmatrix}, \tag{4.68}$$

$$\boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{h}}_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{h}}_{16}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -u_1+1 \\ u_1-1 \\ 0 \\ 0 \\ -u_1+1 \\ u_1-1 \\ -u_1 \\ -u_1 \\ -2u_1+1 \\ -1 \\ u_1 \\ u_1 \\ 1 \\ 2u_1-1 \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

と書き直し，(4.67) 式 ~(4.69) 式へ最小被覆問題を適用し簡略化する．(4.67) 式の簡略化

のための行列

$$G = \begin{bmatrix} 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} \in \{0,1\}^{4\times16}, \tag{4.70}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \end{bmatrix} \in \{0,1\}^{4\times16} \tag{4.71}$$

を用いた最小被覆問題を解くと，

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_g & \omega_h \end{bmatrix}^\top \in \{0,1\}^{32}, \tag{4.72}$$

$$\omega_g = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_6^\top & 1 & \mathbf{0}_5^\top & 1 & \mathbf{0}_3^\top \end{bmatrix}^\top, \tag{4.73}$$

$$\omega_h = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{14}^\top & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top \tag{4.74}$$

を得た．したがって，(4.67) 式は

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{u}) &= \max \boldsymbol{G}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{G}^{(1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \boldsymbol{H}^{(1)}(\boldsymbol{u}) \\ &= \max \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{g}}_7(\boldsymbol{u}) \\ \tilde{\boldsymbol{g}}_{13}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{h}}_{15}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \\ &= \max \begin{bmatrix} -u_1 + u_2 + 1 \\ u_1 - u_2 + 1 \end{bmatrix} - \max \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \\ &= \max \begin{bmatrix} -u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.75}$$

へ簡略化できる．上式は (4.46) 式と同じ値を与えることから，同定が正しく行われたことを確認できる．

4.6　第 4 章のまとめ

L 状態 N 近傍セルオートマトンモデル同定問題を解くための l_1 ノルム最適化分割統治法に基づき，L 個のサブ問題に分割し，L 個のサブ問題の解から得られた L 個の状態遷移関数を加え合わせることで原問題の状態遷移関数を得る手法を示した．これにより，計算複雑さは $O(L^{3N})$ と $O(L^{2N})$ から $O(L^{3N-2})$，$O(L^{2N-1})$ と $O(L^{2N-1})$ へ低減できる．さらに，この状態遷移関数へ最小被覆問題を適用し簡略化を行った．

数値例をあげて，これらの有効性を検証した．

第 5 章

分割統治法に基づく同定法の一般化

5.1 はじめに

前章では原問題を L 個のサブ問題に分割することを考えた．ここでは，分割統治法を各サブ問題に適用し，各サブ問題をさらに L 個ずつのサブ問題に分割する．本章では，前章の分割統治法を用いた問題の分割と解の統治についての一般的な考え方を説明し，さらに，問題の分割回数が増加するにしたがって，計算負荷がより軽減することを示す．

ところで，l_1 ノルム最適化問題に基づくセルオートマトンモデルの同定法は必ず可解かどうかはこれまで証明を行っていない．しかし，分割統治法の再帰的な適用についての考察を行うと，l_1 ノルム最適化問題に基づくセルオートマトンモデルの同定法は必ず可解であることを示すことが明らかとなったため，これも合わせて説明する．

5.2 サブ問題で同定する状態遷移関数

4 章では，分割統治法で $F(\boldsymbol{u})$ を導出する最適化問題を L 個に分割する方法を示した．この分割統治法は，サブ問題の最適化問題にも再帰的な適用でき，原問題の分割から最大で N 回分割可能である．N 回目の分割の際には，m 個のサブ問題が生成される．

本章では，状態遷移関数 $F^{(k_1,\ldots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ を求める最適化問題への分割統治法の適用をより一般的に記述する．図 5.1 は，$p-1$ 回目の分割で得られたサブ問題の一つをさらに L 個のサブ問題に分割する様子を表す．この p 回目の分割 ($p = 1, \ldots, N$) では入力ベクトル $\boldsymbol{u}$ の第一要素 u_1 から第 p 要素 u_p の値を固定する．図 5.2 は，あるサブ問題を L 個のサブ問題に分割し，これら L 個の l_1 ノルム最適化問題の解から得られた L 個の状態遷移関数を足し合わせることで，分割前のサブ問題の解から得られる状態遷移関数となることを表している．

原問題の解から得られる状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$，$p-1$ 回目と p 回目の分割で得られる最適

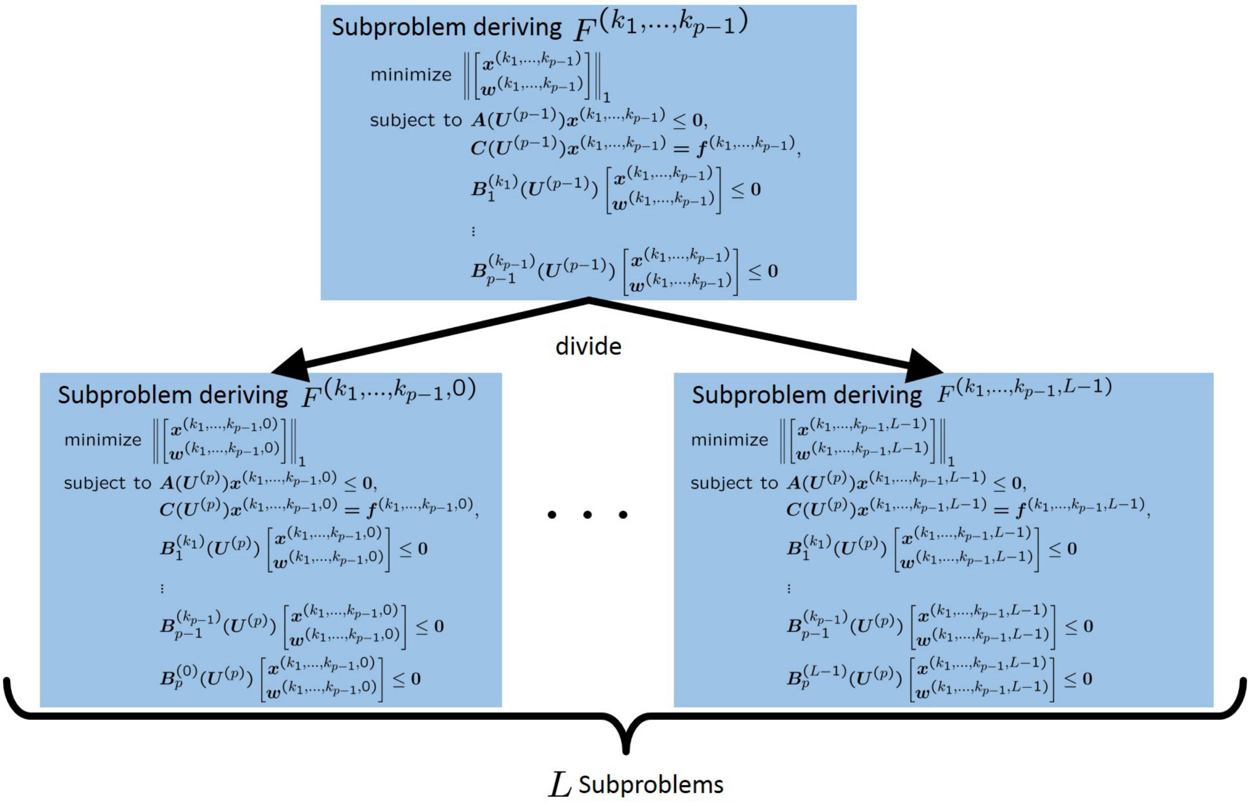

図 5.1　状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_{p-1})}(\boldsymbol{u})$ を求める最適化問題は，状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ を求める L 個のサブ問題に分割可能である．

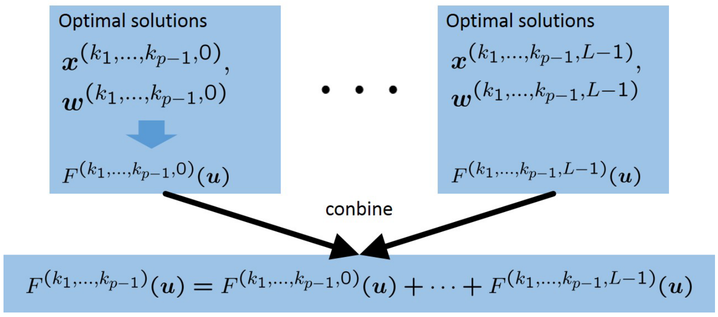

図 5.2　L 個の状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ が求まったとき，これらを足し合わせることで $F^{(k_1,\dots,k_{p-1})}(\boldsymbol{u})$ が得られる．

化問題の解から得られる状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_{p-1})}(\boldsymbol{u})$ と状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ には

$$F^{(k_1,\dots,k_{p-1})}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k_p=0}^{L-1} F^{(k_1,\dots,k_{p-1},k_p)}(\boldsymbol{u}), \tag{5.1}$$

$$F(\boldsymbol{u}) = \sum_{k_1=0}^{L-1} \cdots \sum_{k_p=0}^{L-1} F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}), \tag{5.2}$$

$$F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}_j) = \begin{cases} f_j & j \in \mathcal{J}(k_1,\dots,k_p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \tag{5.3}$$

$$\mathcal{J}(k_1,\dots,k_p) := \left\{ \sum_{l=1}^{p} k_l \frac{m}{L^l} + i \mid i = 1,\dots,m' \right\}, \tag{5.4}$$

$$m' := \frac{m}{L^p}, \tag{5.5}$$

の関係が成り立つものとする．

p 回目の分割で得られたサブ問題の解から得られる状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ を

$$F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) = \max \boldsymbol{G}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}), \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{G}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(p)\top} \boldsymbol{g}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(p)\top} \boldsymbol{g}_{m'}^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{Z}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{H}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}^{(p)\top} \boldsymbol{h}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{u}}^{(p)\top} \boldsymbol{h}_{m'}^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{Z}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m'+2p}, \tag{5.7}$$

$$\overline{\boldsymbol{u}}^{(p)} = \begin{bmatrix} u_{p+1} \\ \vdots \\ u_N \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{N+1-p}, \tag{5.8}$$

$$\boldsymbol{Y}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_p)\top} \boldsymbol{y}_p^{(k_1,\dots,k_p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{Z}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_p)\top} \boldsymbol{z}_p^{(k_1,\dots,k_p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \tag{5.10}$$

と定義し，$\boldsymbol{g}_i^{(k_1,\dots,k_p)}$, $\boldsymbol{h}_i^{(k_1,\dots,k_p)} \in \mathbb{R}^{N+1-p}$ と $\boldsymbol{y}_l^{(k_1,\dots,k_p)}$, $\boldsymbol{z}_l^{(k_1,\dots,k_p)} \in \mathbb{R}^2$, $l = 1,\dots,p$ である．さら

に，係数ベクトルとして

$$
\boldsymbol{x}^{(k_1,\dots,k_p)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{g}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{m'}^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \boldsymbol{h}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}_{m'}^{(k_1,\dots,k_p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2(N+1-p)m'}, \tag{5.11}
$$

$$
\boldsymbol{w}^{(k_1,\dots,k_p)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{w}_p^{(k_1,\dots,k_p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4p}, \tag{5.12}
$$

$$
\boldsymbol{w}_l^{(k_1,\dots,k_p)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\dots,k_p)} \\ \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\dots,k_p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{5.13}
$$

を定義すると，考えるべき同定問題は

$$
\boldsymbol{U}^{(p)} := \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{u}}_1^{(p)} & \cdots & \overline{\boldsymbol{u}}_{m'}^{(p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{(N+1-p)\times m'}, \tag{5.14}
$$

$$
\boldsymbol{f}^{(k_1,\dots,k_p)} := \begin{bmatrix} f_{k_1 \frac{m}{L} + \cdots + k_p \frac{m}{L^p} + 1} \\ \vdots \\ f_{k_1 \frac{m}{L} + \cdots + k_p \frac{m}{L^p} + m'} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_L^{m'} \tag{5.15}
$$

に対して，(5.3) 式を満足させる係数ベクトル $\boldsymbol{x}^{(k_1,\dots,k_p)}$ と $\boldsymbol{w}^{(k_1,\dots,k_p)}$ を見つける問題となる．

また，$j \in \{1, 2, \dots, m\}$ には常に

$$
P^{(p)}\boldsymbol{u}_j = P^{(p)}\boldsymbol{u}_i, \tag{5.16}
$$

$$
P^{(p)} := \begin{bmatrix} 0_{N-p\times p} & I_{N-p} \end{bmatrix} \in \{0, 1\}^{(N-p)\times N}, \tag{5.17}
$$

を満たす $i \in \{1, 2, \dots, m'\}$ が存在するため，不等式制約条件を考慮する際は，上式を満たす $\boldsymbol{u}_i$ について考えるのみで十分である．

5.3　サブ問題が表す l_1 ノルム最適化問題

(5.11) 式，(5.12) 式を求める l_1 ノルム最適化問題を，(5.14) 式と (5.15) 式を用いて

$$\text{minimize} \quad \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1,\ldots,k_p)} \\ \boldsymbol{w}^{(k_1,\ldots,k_p)} \end{bmatrix} \right\|_1 \tag{5.18}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(p)})\boldsymbol{x}^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq \boldsymbol{0}, \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(p)})\boldsymbol{x}^{(k_1,\ldots,k_p)} = \boldsymbol{f}^{(k_1,\ldots,k_p)}, \tag{5.20}$$

$$\begin{gathered} \boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(p)}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1,\ldots,k_p)} \\ \boldsymbol{w}_1^{(k_1,\ldots,k_p)} \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{0}, \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}^{(k_p)}(\boldsymbol{U}^{(p)}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1,\ldots,k_p)} \\ \boldsymbol{w}_p^{(k_1,\ldots,k_p)} \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{0}, \end{gathered} \tag{5.21}$$

と記述する．

(5.3) 式をみたすために，i と $\tilde{i} \neq i$ に対して不等式制約条件

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \left(\boldsymbol{g}_{\tilde{i}}^{(k_1,\ldots,k_p)} - \boldsymbol{g}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} \right) \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \left(\boldsymbol{h}_{\tilde{i}}^{(k_1,\ldots,k_p)} - \boldsymbol{h}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} \right) \leq 0 \end{cases}, \tag{5.22}$$

を満足することに加えて，さらに以下の三つの場合についての不等式制約条件を考慮する必要がある．

(i) $j \in \mathcal{J}(k_1, \ldots, k_p)$ の場合，

$$\begin{cases} -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq 0 \\ -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq 0 \end{cases}, \tag{5.23}$$

$$\begin{cases} -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq 0 \\ -\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq 0 \end{cases}, \tag{5.24}$$

の二つの不等式制約条件を満たすとき

$$\overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} - \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} = f_j \tag{5.25}$$

が成り立つ．

(ii) $j \notin \mathcal{J}(k_1, \ldots, k_p)$ かつ $u_{jl} < k_l$ の場合，

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il}-1)\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq 0 \\ \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1,\ldots,k_p)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il}-1)\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} \leq 0 \end{cases} \tag{5.26}$$

の二組を満たせば

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_p)} = 0 \tag{5.27}$$

が成り立つ．

(iii) $j \notin \mathcal{J}(k_1,\dots,k_p)$ かつ $u_{jl} > k_l$ の場合，

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{g}_i^{(k_1,\dots,k_p)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl}+1)\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\dots,k_p)} \le 0 \\ \overline{\boldsymbol{u}}_i^{(p)\top} \boldsymbol{h}_i^{(k_1,\dots,k_p)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl}+1)\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\dots,k_p)} \le 0 \end{cases} \tag{5.28}$$

の二組を満たせば

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\dots,k_p)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\dots,k_p)} = 0 \tag{5.29}$$

が成り立つ．したがって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ は (3.21) 式と (3.23) 式と同様に

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(p)}) : \mathbb{S}_L^{(N+1-p)\times m'} \to \mathbb{S}_L^{2m'^2\times 2(N+1-p)m'}, \tag{5.30}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(p)}) : \mathbb{S}_L^{(N+1-p)\times m'} \to \mathbb{Z}^{m'\times 2(N+1-p)m'}, \tag{5.31}$$

と定義され，$\boldsymbol{B}^{(k_l)}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ は (4.32) 式より

$$\boldsymbol{B}^{(k_l)}(\boldsymbol{U}^{(p)}) : \mathbb{S}_L^{(N+1-p)\times m'} \to \mathbb{S}_L^{8m'\times 2\{(N+1-p)m'+2\}}, \tag{5.32}$$

$$\boldsymbol{U}^{(p)} \overset{\boldsymbol{B}^{(k_l)}}{\longmapsto} \left[\begin{bmatrix} -I_2 \\ -I_2 \\ I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} \otimes \operatorname{diag} \boldsymbol{U}^{(p)\top} \ \boldsymbol{W}^{(k_l)} \right], \tag{5.33}$$

$$\boldsymbol{W}^{(k_l)} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} k_l & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_l & 1 \end{bmatrix} \\ -\boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} k_l - 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\boldsymbol{1}_{2m'} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_l + 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{5.34}$$

と定義される．このとき，特に $p = N$ の場合は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^N) = 0_{2\times 2}$ となることに注意されたい．

これら L 個の l_1 ノルム最適化問題の解から構成される $F^{(k_1,\dots,k_{p-1},0)}(\boldsymbol{u}),\dots,F^{(k_1,\dots,k_{p-1},L-1)}(\boldsymbol{u})$ を足し合わせることで (5.1) 式より $F^{(k_1,\dots,k_{p-1})}(\boldsymbol{u})$ が導出される．同様にして L^{p-1} 個の $F^{(k_1,\dots,k_{p-1})}(\boldsymbol{u})$ を導出し足し合わせることで，(5.2) 式より $F(\boldsymbol{u})$ が求まる．すなわち，原問題を解かずに $F(\boldsymbol{u})$ を得る．原問題を p 回分割し L^p 個のサブ問題を解くとき，制約条件を表現する行列 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ の空間的複雑度について，以下の定理が成り立つ．

定理 1　提案手法を用いると，原問題を直接解く場合と比較して空間的複雑度は最大で $1/L^{2N}$ と $1/L^N$ に低減される．

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ の空間的複雑度はそれぞれ，

$$O(4m^3(N+1)) = O(4L^{3N}(N+1)) = O(L^{3N}), \tag{5.35}$$

$$O(2m^2(N+1)) = O(2L^{2N}(N+1)) = O(L^{2N}) \tag{5.36}$$

である．一方，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(p)})$，$\boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(p)}),\ldots,\boldsymbol{B}^{(k_p)}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ の計算的複雑度は

$$\begin{aligned}
&O(4m'^3(N-p+1)) = O(4L^{3(N-p)}(N-p+1)) = O(L^{3(N-p)}), && (5.37)\\
&O(p\times 16m'\{((N-p+1)m'+2)\}) && \\
&\ = O(16pL^{N-p}\{L^{N-p}(N-p+1)+2\}) = O(pL^{2(N-p)}), && (5.38)\\
&O(2m'^2(N-p+1)) = O(2L^{2(N-p)}(N-p+1)) = O(L^{2(N-p)}) && (5.39)
\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(p)})$，$\boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(p)}),\ldots,\boldsymbol{B}^{(k_p)}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ について L^p 個の最適化問題の計算的複雑度の合計は，

$$\begin{aligned}
&O(L^p\times 4m'^3(N-p+1)) = O(L^p\times 4L^{3(N-p)}(N-p+1)) = O(L^{3N-2p}), && (5.40)\\
&O(L^p\times p\times 16m'\{((N-p+1)m'+2)\} && \\
&\ = O(L^p\times 16pL^{N-p}\{L^{N-p}(N-p+1)+2\}) && \\
&\ = O(16pL^N\{L^{N-p}(N-p+1)+2\}) = O(pL^{(2N-p)}), && (5.41)\\
&O(L^p\times 2m'^2(N-p+1)) = O(L^p\times 2L^{2(N-p)}(N-p+1)) = O(L^{2N-p}) && (5.42)
\end{aligned}$$

である．特に $p=N$ のとき，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})$ それぞれに対する各サブ問題における低減比のオーダーは

$$\begin{aligned}
&O\left(\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(N)})+\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{B}^{(k_l)}}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})}\right) && \\
&\ = O\left(\frac{4L^N+16NL^N(1+2)}{4L^{3N}(N+1)}\right) && \\
&\ = O\left(\frac{1+12N}{L^{2N}(N+1)}\right) = O\left(\frac{1}{L^{2N}}\right), && (5.43)\\
&O\left(\frac{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(N)})}{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})}\right) = O\left(\frac{2L^N}{2L^{2N}(N+1)}\right) = O\left(\frac{1}{L^N}\right). && (5.44)
\end{aligned}$$

となり，L^N 個のサブ問題を解く際の空間複雑度は原問題を直接解く場合と比較して，

$$\begin{aligned}
&O\left(L^N\cdot\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(N)})+\sum_{l=1}^{N}\boldsymbol{B}^{(k_l)}}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U})}\right) && \\
&\ = O\left(L^N\cdot\frac{4L^N+16NL^N(1+2)}{4L^{3N}(N+1)}\right) && \\
&\ = O\left(\frac{1+12N}{L^{N}(N+1)}\right) = O\left(\frac{1}{L^{N}}\right), && (5.45)\\
&O\left(L^N\cdot\frac{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(N)})}{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U})}\right) = O\left(L^N\cdot\frac{2L^N}{2L^{2N}(N+1)}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right). && (5.46)
\end{aligned}$$

5.4 状態遷移関数の簡略化

サブ問題を解いて得られた状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ から状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ は (5.2) 式より

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{u}) &= \sum_{k_1=0}^{L-1}\cdots\sum_{k_p=0}^{L-1} F^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u}) \\
&= F^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) + \cdots + F^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u}) \\
&= \max \boldsymbol{G}^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) \\
&\quad + \cdots + \max \boldsymbol{G}^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u})
\end{aligned} \tag{5.47}
$$

となる．(4.35) 式と (4.36) 式を用いて (5.47) 式は

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{u}) &= \max\left(\boldsymbol{G}^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{G}^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u})\right) \\
&\quad - \max\left(\boldsymbol{H}^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{H}^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u})\right),
\end{aligned} \tag{5.48}
$$

$$ \tag{5.49} $$

とまとめることができる．このとき，(5.48) 式を

$$
F(\boldsymbol{u}) = \max \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u}) - \max \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}) \tag{5.50}
$$

$$
\boldsymbol{G}^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{G}^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u}) =: \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} G_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ G_{(m'+2p)^{L^p}}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m'+2p)^{L^p}} \tag{5.51}
$$

$$
\boldsymbol{H}^{(0,\dots,0)}(\boldsymbol{u}) \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{H}^{(L-1,\dots,L-1)}(\boldsymbol{u}) =: \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} H_1(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ H_{(m'+2p)^{L^p}}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m'+2p)^{L^p}} \tag{5.52}
$$

と書き直したとき，二つのベクトル $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u})$ と $\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u})$ において，入力ベクトル $\boldsymbol{u}_j$, $(j = 1, \dots, m)$ に対して最大値をとる m 組の affine 関数 $G^*_j(\boldsymbol{u})$ と $H^*_j(\boldsymbol{u})$

$$
\begin{aligned}
G^*_j(\boldsymbol{u}_j) &:= \max \hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u}_j), && (5.53)\\
H^*_j(\boldsymbol{u}_j) &:= \max \hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}_j), && (5.54)\\
G^*_j(\boldsymbol{u}_j) - H^*_j(\boldsymbol{u}_j) &= f_j && (5.55)
\end{aligned}
$$

が得られる．一方，残った $(m'+2p)^{L^p} - m$ 個の affine 関数は入力ベクトル $\boldsymbol{u}_j$ に対し $\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u}_j)$ と $\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u}_j)$ の中で最大値とならないため，$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{u})$ と $\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{u})$ から削除可能であることが分かる．したがって，0-1 整数計画問題 (3.32) 式を解くことで少なくとも $(m'+2p)^{L^p} - m$ 個の affine 関数が削除できる．しかし，(5.51) 式と (5.52) 式は要素数が $(m'+2p)^{L^p}$ であり，一

般的にこのサイズの 0-1 整数計画問題 (3.32) 式を解くことは難しい．そこで $\boldsymbol{G}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ と $\boldsymbol{H}^{(k_1,\dots,k_p)}(\boldsymbol{u})$ の上付き添え字を

$$(k_1,\dots,k_p) = \left(\sum_{l=1}^{p} k_l \frac{m}{L^l} + i\right),\ i = 1,\dots,m' \tag{5.56}$$

と付け替え，Algorithm 1 内の $i = 2$ to $L-1$ を $i = 2$ to $\sum_{l=1}^{p}(L-1)\frac{m}{L^l}$ に変更し簡略化を行う．

ところで，(5.47) 式は m 組の $G_1^*,\dots,G_m^*$ と $H_1^*,\dots,H_m^*$ を用いて

$$F(\boldsymbol{u}) = \max \boldsymbol{G}^{(*)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(*)}(\boldsymbol{u}), \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{G}^{(*)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} G_1^*(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ G_m^*(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m, \tag{5.58}$$

$$\boldsymbol{H}^{(*)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} H_1^*(\boldsymbol{u}) \\ \vdots \\ H_m^*(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \tag{5.59}$$

とも記述可能である．さらに，(5.58) 式と (5.59) 式は明らかに

$$G_j^*(\boldsymbol{u}_j) - H_j^*(\boldsymbol{u}_j) = f_j, \tag{5.60}$$

$$G_i^*(\boldsymbol{u}_j) - G_j^*(\boldsymbol{u}_j) \le 0, \tag{5.61}$$

$$H_i^*(\boldsymbol{u}_j) - H_j^*(\boldsymbol{u}_j) \le 0 \tag{5.62}$$

を満たし，これは (3.13) 式，(3.14) 式と (3.15) 式と等価であるため，(5.57) 式は (3.4) 式と等しい構造となっている．したがって，(5.57) 式は原問題の制約条件 (3.12) 式を満たす解の一つであることが分かる．

5.5 原問題が常に可解であることの証明

原問題の分割を一回目とし，サブ問題の分割が N 回目となるとき，すなわち，$m = L^N$ 個のサブ問題が得られたとき，状態遷移関数 $F^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u})$ は (5.6) 式 ~(5.10) 式より

$$F^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) = \max \boldsymbol{G}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}), \tag{5.63}$$

$$\boldsymbol{G}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} g_1^{(k_1,\dots,k_N)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{Z}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1}, \tag{5.64}$$

$$\boldsymbol{H}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} h_1^{(k_1,\dots,k_N)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{Z}^{(k_1,\dots,k_N)}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+1}, \tag{5.65}$$

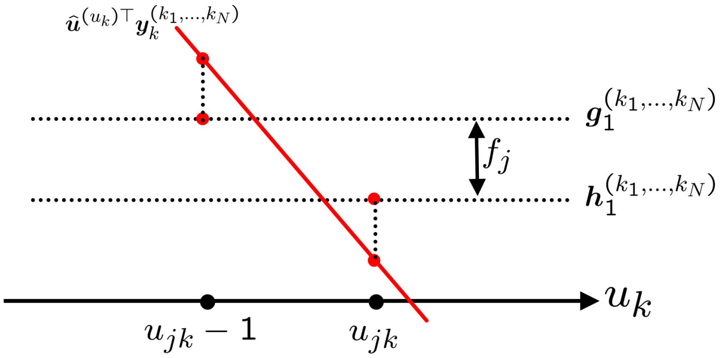

図 5.3　affine 関数 $\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jk}+1)\top}\boldsymbol{y}_k^{(k_1,\ldots,k_N)}$ が $g_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ と $h_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ に対し満たすべき不等式制約条件

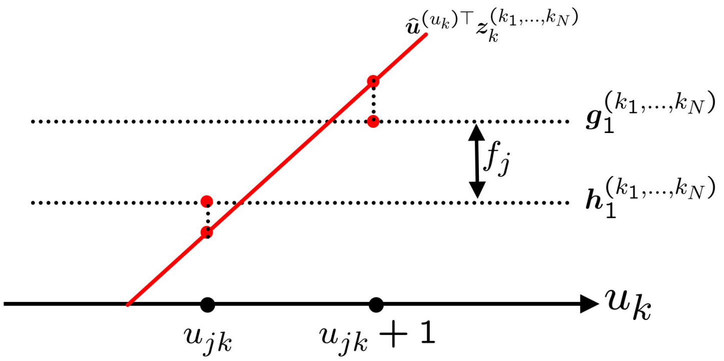

図 5.4　affine 関数 $\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jk}+1)\top}\boldsymbol{z}_k^{(k_1,\ldots,k_N)}$ が満たすべき不等式制約条件 $g_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ と $h_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ に対し満たすべき不等式制約条件

$$\boldsymbol{Y}^{(k_1,\ldots,k_N)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top}\boldsymbol{y}_1^{(k_1,\ldots,k_N)} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_N)\top}\boldsymbol{y}_N^{(k_1,\ldots,k_N)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \tag{5.66}$$

$$\boldsymbol{Z}^{(k_1,\ldots,k_N)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top}\boldsymbol{z}_1^{(k_1,\ldots,k_N)} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_N)\top}\boldsymbol{z}_N^{(k_1,\ldots,k_N)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \tag{5.67}$$

と定義され，さらに $g_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$，$h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} \in \mathbb{R}$ である．

このとき，

$$f^{(k_1,\ldots,k_N)} := f_{k_1\frac{m}{L}+\cdots+k_N+1} \in \mathbb{S}_L \tag{5.68}$$

を用いて以下の三つの場合の不等式制約条件を考慮した同定問題を解かなければならない．

(i) $j \in \mathcal{J}(k_1, \ldots, k_N)$，すなわち，$u_{jl} = k_l$ の場合

$$\begin{cases} -g_1^{(k_1,\ldots,k_N)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \\ -g_1^{(k_1,\ldots,k_N)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \end{cases}, \tag{5.69}$$

$$\begin{cases} -h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \\ -h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} + \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \end{cases}, \tag{5.70}$$

の二つの不等式制約条件を満たすとき

$$g_1^{(k_1,\ldots,k_N)} - h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} = f_j \tag{5.71}$$

が成り立つ．

(ii) $j \notin \mathcal{J}(k_1, \ldots, k_N)$ かつ $u_{jl} < k_l$ の場合，

$$\begin{cases} g_1^{(k_1,\ldots,k_N)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il}-1)\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \\ h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il}-1)\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \end{cases} \tag{5.72}$$

の二組を満たせば

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} = 0 \tag{5.73}$$

が成り立つ．

(iii) $j \notin \mathcal{J}(k_1, \ldots, k_N)$ かつ $u_{jl} > k_l$ の場合，

$$\begin{cases} g_1^{(k_1,\ldots,k_N)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il}+1)\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \\ h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{il}+1)\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} \leq 0 \end{cases} \tag{5.74}$$

の二組を満たせば

$$\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} - \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_{jl})\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)} = 0 \tag{5.75}$$

が成り立つ．

このとき，(5.71) 式を満たす $g_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ と $h_1^{(k_1,\ldots,k_N)} \in \mathbb{R}$ は無数に存在する．また，図 5.3 は $\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_l)\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)}$ が満たすべき制約不等式条件を満たした状態を表し，このような直線は (5.71) 式を満たす $g_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ と $h_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ に対し，無数に存在する．同様に，図 5.4 は $\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_l)\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)}$ が満たすべき制約不等式条件を満たした状態を表し，このような直線は (5.71) 式を満たす $g_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ と $h_1^{(k_1,\ldots,k_N)}$ に対し，無数に存在する．したがって，(i)~(iii) の条件を満足するような $\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_l)\top} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,\ldots,k_N)}$ と $\hat{\boldsymbol{u}}^{(u_l)\top} \boldsymbol{z}_l^{(k_1,\ldots,k_N)}$ が常に存在することは，幾何学的に明らかである．

5.4 節と 5.5 節の結果をまとめると，

1. $F^{(k_1,\ldots,k_N)}(\boldsymbol{u})$ を求めるサブ問題の最適化問題は常に可解である．

2. サブ問題の解から得られる状態遷移関数をまとめて得られた状態遷移関数は, (3.10) 式の l_1 ノルム最小化問題の制約条件を満たす構造をもつ.
3. サブ問題の解から得られる状態遷移関数をまとめ，一組の max 関数の加減算で記述したとき，状態遷移を表現するために必要不可欠な affine 関数は高々 m 個しかない.

となる．これらの結果から，サブ問題は必ず可解であり，最適解から構成される状態遷移関数を統合することで得た (5.2) 式の状態遷移関数は，必ず (3.10) 式の l_1 ノルム最小化問題の制約条件を満たす構造をもつ．したがって，原問題である (3.10) 式の l_1 ノルム最小化問題は必ず可解であることが明らかとなった.

5.6 数値例

(4.44) 式 ~(4.46) 式で与えられた 2 状態 2 近傍セルオートマトンの状態遷移を考える. 4.5 章で考えた二つのサブ問題をさらに二つに分割する．すなわち，四つのサブ問題を解く.

MATLAB® 用の最適化計算ソフト cvx [27] を使用する.

このとき，l_1 ノルム最適化問題は (5.14) 式と (5.15) 式より

$$\boldsymbol{U}^{(2)} = 1 \tag{5.76}$$

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{(0)} \\ \boldsymbol{f}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{(0,0)} \\ \boldsymbol{f}^{(0,1)} \\ \boldsymbol{f}^{(1,0)} \\ \boldsymbol{f}^{(1,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.77}$$

を用いて記述され，求める状態遷移関数は (5.6) 式より

$$\begin{cases} F^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) := \max \boldsymbol{G}^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) \\ F^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) := \max \boldsymbol{G}^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) \\ F^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) := \max \boldsymbol{G}^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) \\ F^{(1,1)}(\boldsymbol{u}) := \max \boldsymbol{G}^{(1,1)}(\boldsymbol{u}) - \max \boldsymbol{H}^{(1,1)}(\boldsymbol{u}) \end{cases}, \tag{5.78}$$

$$\boldsymbol{G}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} g_1^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{Z}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} h_1^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{Y}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{Z}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5, \tag{5.79}$$

$$\boldsymbol{Y}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{y}_1^{(k_1,k_2)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_2)\top} \boldsymbol{y}_2^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{5.80}$$

$$\boldsymbol{Z}^{(k_1,k_2)}(\boldsymbol{u}) := \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_1)\top} \boldsymbol{z}_1^{(k_1,k_2)} \\ \hat{\boldsymbol{u}}^{(u_2)\top} \boldsymbol{z}_2^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{5.81}$$

$$k_l = 0, 1,\ l = 1, 2 \tag{5.82}$$

となる．求める係数ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)} = \begin{bmatrix} g_1^{(k_1,k_2)} \\ h_1^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix}, \tag{5.83}$$

$$\boldsymbol{w}^{(k_1,k_2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{w}_2^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8, \tag{5.84}$$

$$\boldsymbol{w}_l^{(k_1,k_2)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_l^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{z}_l^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \tag{5.85}$$

となり，不等式制約条件を与える (5.30) 式と等式制約条件を与える (5.31) 式は

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \tag{5.86}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(2)}) = 0 \tag{5.87}$$

で定まり，もう一つの不等式制約条件を与える (5.33) 式は

$$\boldsymbol{B}^{(k_l)}(\boldsymbol{U}^{(2)}) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_2 \\ -I_2 \\ I_2 \\ I_2 \end{bmatrix} & \boldsymbol{W}^{(k_l)} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{8\times 6}, \tag{5.88}$$

$$\boldsymbol{W}^{(k_l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} k_l & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_l & 1 \end{bmatrix} \\ -\mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} k_l - 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ -\mathbf{1}_4 \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_l + 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{S}_2^{8\times 4} \tag{5.89}$$

となり，解くべき最適化問題は

$$\text{minimize} \quad \left\| \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{w}^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} \right\|_1 \tag{5.90}$$

$$\text{subject to} \quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(2)})\boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)} = \boldsymbol{f}^{(k_1,k_2)}, \tag{5.91}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(2)}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{w}_1^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} &\le \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{B}^{(k_2)}(\boldsymbol{U}^{(2)}) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)} \\ \boldsymbol{w}_2^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} &\le \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.92}$$

となる．四つの l_1 ノルム最適化問題を cvx で解くと係数ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)} = \begin{bmatrix} g_1^{(k_1,k_2)} \\ h_1^{(k_1,k_2)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_2,\ k_1, k_2 = 0, 1 \tag{5.93}$$

$$\boldsymbol{w}^{(0,0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^{(0,0)} \\ \boldsymbol{w}_2^{(0,0)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_8, \tag{5.94}$$

$$\boldsymbol{w}^{(0,1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^{(0,1)} \\ \boldsymbol{w}_2^{(0,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^\top, \tag{5.95}$$

$$\boldsymbol{w}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^{(1,0)} \\ \boldsymbol{w}_2^{(1,0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top, \tag{5.96}$$

$$\boldsymbol{w}^{(1,1)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1^{(1,1)} \\ \boldsymbol{w}_2^{(1,1)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_8 \tag{5.97}$$

となり，

$$\begin{cases} g_1^{(0,0)} = h_1^{(0,0)} = 0 \\ \boldsymbol{y}_l^{(0,0)} = \boldsymbol{z}_l^{(0,0)} = \boldsymbol{0}_2 \end{cases}, \tag{5.98}$$

$$\begin{cases} g_1^{(0,1)} = h_1^{(0,1)} = 0 \\ \boldsymbol{y}_1^{(0,1)} = -\boldsymbol{z}_1^{(0,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^\top \\ \boldsymbol{y}_2^{(0,1)} = -\boldsymbol{z}_2^{(0,1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \end{cases}, \tag{5.99}$$

$$\begin{cases} g_1^{(1,0)} = 1,\ h_1^{(1,0)} = 0 \\ \boldsymbol{y}_1^{(1,0)} = -\boldsymbol{z}_1^{(1,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^\top \\ \boldsymbol{y}_2^{(1,0)} = -\boldsymbol{z}_2^{(1,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^\top \end{cases}, \tag{5.100}$$

$$\begin{cases} g_1^{(1,1)} = 0,\ h_1^{(1,1)} = 0 \\ \boldsymbol{y}_l^{(1,1)} = -\boldsymbol{z}_l^{(1,1)} = \boldsymbol{0}_2 \end{cases} \tag{5.101}$$

となった．このとき，$\sum_{k_1=0}^{1} \sum_{k_2=0}^{1} \|\boldsymbol{x}^{(k_1,k_2)}\|_0 + \|\boldsymbol{w}^{(k_1,k_2)}\|_0 = 12$ である．これらの解より，

$$\boldsymbol{G}^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{H}^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_5 \tag{5.102}$$

$$\boldsymbol{G}^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{H}^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1 \\ -u_2 + 1 \\ u_1 \\ u_2 - 1 \end{bmatrix} \tag{5.103}$$

$$\boldsymbol{G}^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{H}^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -u_1 + 1 \\ -u_2 \\ u_1 - 1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{5.104}$$

$$\boldsymbol{G}^{(1,1)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{H}^{(1,1)}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_5 \tag{5.105}$$

を得る．したがって，状態遷移関数は

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{u}) &= F^{(0)}(\boldsymbol{u}) + F^{(1)}(\boldsymbol{u}) \\
&= F^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) + F^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) + F^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) + F^{(1,1)}(\boldsymbol{u})
\end{aligned}
\tag{5.106}
$$

となる．ただし，

$$
F^{(0,0)}(\boldsymbol{u}) = \max\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_5\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_5\end{bmatrix}, \tag{5.107}
$$

$$
F^{(0,1)}(\boldsymbol{u}) = +\max\begin{bmatrix}0\\-u_1\\-u_2+1\\u_1\\u_2-1\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}0\\-u_1\\-u_2+1\\u_1\\u_2-1\end{bmatrix}, \tag{5.108}
$$

$$
F^{(1,0)}(\boldsymbol{u}) = \max\begin{bmatrix}0\\-u_1+1\\-u_2\\u_1-1\\u_2\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}0\\-u_1+1\\-u_2\\u_1-1\\u_2\end{bmatrix}, \tag{5.109}
$$

$$
F^{(1,1)}(\boldsymbol{u}) = \max\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_5\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}_5\end{bmatrix} \tag{5.110}
$$

となる．(5.107) 式 ~(5.110) 式が (5.77) 式を満たすことは容易に確認することができ，同定が正しく行われたことが分かる．さらにこの結果から，(3.42) 式が満たされることも確認でき，状態遷移関数 $F(\boldsymbol{u})$ が得られたことが分かる．

(5.106) 式の max 関数と $-\max$ 関数をそれぞれ一つにまとめると，それぞれ $5^4 = 625$ の affine 関数を持つが，そのうち少なくとも 621 個の affine 関数は削除可能である．Algorithm 1 を用いると，

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{u}) &= \max\begin{bmatrix}2\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}-u_1-u_2+2\\u_1+u_2\end{bmatrix} \\
&= -\max\begin{bmatrix}-u_1-u_2\\u_1+u_2-2\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.111, 5.112}
$$

が得られ，max 関数からは 624 個の affine 関数が，-max 関数からは 623 個の affine 関数が削除可能であることが分かる．(5.111) 式が (4.51) 式を満たすことは容易に確認することができ，簡略化を行っても同定結果が保存されていることが分かる．

さらに，(5.111) 式は

$$
F(\boldsymbol{u}) = \max\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}-u_1-u_2+2\\u_1+u_2\\u_1+u_2\\u_1+u_2\end{bmatrix} =: \max\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}^\top\boldsymbol{g}_1\\\vdots\\\bar{\boldsymbol{u}}^\top\boldsymbol{g}_4\end{bmatrix} - \max\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}^\top\boldsymbol{h}_1\\\vdots\\\bar{\boldsymbol{u}}^\top\boldsymbol{h}_4\end{bmatrix} \tag{5.113}
$$

と記述することが可能であり，(5.113) 式は (3.13) 式，(3.18) 式，(3.19) 式を満たす．したがって，(5.111) 式は (3.4) 式の構造を有している，すなわち，原問題の解となっていることを確認できる．

5.7　第 5 章のまとめ

L 状態 N 近傍セルオートマトンの状態遷移関数を同定する第 4 章の分割統治法を一般化しサブ問題をさらに分割する方法を説明した．この分割統治法の一般化では，最大 $m = L^N$ 個のサブ問題が生成されることとなり，解くべき最適化問題の数は増えたが，全体的な計算負荷は $O(L^{3N})$ と $O(L^{2N})$ から $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{U}^{(p)})$，$\boldsymbol{B}^{(k_1)}(\boldsymbol{U}^{(p)}), \ldots, \boldsymbol{B}^{(k_p)}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ と $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{U}^{(p)})$ の $O(L^{3N-2p})$, $O(16pL^N\{L^{N-p}(N-p+1)+2\})$ と $O(L^{2N-p})$ へ軽減させることが可能となった．さらに，m 個のサブ問題の制約条件は可能領域を有し，必ず可解であることが明らかになった．この結果と，状態遷移関数の統合を考えることで 3 章の同定問題が必ず可解であることも分かった．

これらの結果を数値例を用いて確認した．

第 6 章

結論

本論文では，l_1 ノルム最適化問題に基づくセルオートマトンモデルの同定法を提案し，この同定法の課題である計算量の低減を分割統治法により解決した．第 3 章では，セルオートマトンモデルを表す状態遷移関数を定義し，これを求めるための同定問題を l_1 ノルム最適化問題に基づき定式化した．第 4 章では，l_1 ノルム最適化に分割統治法を適用することで同定手法の課題であった計算負荷の軽減を可能とした．第 5 章では，第 4 章の分割統治法の考え方を一般化し，サブ問題へ分割統治を再帰的に適用する方法を示し，これにより，計算負荷がさらに軽減可能であることを示した．さらに，分割統治法の考え方を一般化したことで，第 3 章で示した同定問題が必ず可解であることを明らかにした．ただし，提案した手法は最適化問題の目的関数が係数ベクトルの l_0 ノルムではなく，l_1 ノルムであり，疎（スパース）である係数ベクトルを得た後，係数ベクトルを用いて最小被覆問題を解くことで，状態遷移関数の簡略化を実現している．しかし簡略化された状態遷移関数が，l_0 ノルムを最小化関数としたときに直接得られるものであるかの比較は行えていない．したがって，本手法の解が l_0 ノルムを最小化関数としたときの解との比較，また等しくなるための条件等の考察が今後の課題である．

本研究に関する著者の発表論文

査読付き論文

1. 山本　倖大，山本　茂: l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデル同定法，計測自動制御学会論文集，Vol. 52, No. 9, pp. 459–466, 2016

国際学会発表

1. K. Yamamoto and S. Yamamoto: Derivation of a Cellular Automaton Model Based on a Binary Decision Diagram and Shannon's Expansion, *Proceedings of SICE 2014*, pp. 1581–1584, September 12th, 2014, Sapporo, Japan.
2. K. Yamamoto and S. Yamamoto: Reducing the Computational Cost in L1-Norm Optimization for Cellular Automaton Model Identification, *Proceedings of SICE 2017*, pp. 1018–1021, September 21th, 2017, Kanazawa, Japan.

参考文献

[1] J. L. Schiff, セルオートマトン, 共立出版, 2011.

[2] 加藤，光成，築山，セルオートマトン法 —複雑系の自己組織化と超並列処理 —，森北出版，1998.

[3] 上村，大平, “集団追跡と逃避”，日本物理学会誌，Vol. 66, No. 3，pp. 205–208, 2011.

[4] A. Kamimura, S. Matsumoto, N. Ito, and T. Ohira, “Chase and Escape in Groups”, *Cellular Automata*, Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, Vol. 6350, pp. 570–579, 2010.

[5] K. Nishinari and D. Takahashi, “A family of multi-value cellular automaton model for traffic flow”, arXiv:nlin/0002007, 2000.

[6] K. Nishinari and D. Takahashi, “A New Deterministic CA model for traffic flow with multiple states”, *J. Phys. A.*, Vol. 32, pp. 93–93, 1999.

[7] 広田，高橋，差分と超離散，共立出版，2003.

[8] 志田，高橋，“あるパターン方程式のダイナミクス”，数理解析研究所講究録, Vol. 1221, pp. 166–179, 2001.

[9] F. C. Richards, T. P. Meyerb, and N. H. Packard, “Extracting cellular automaton rules directly from experimental data”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 45, pp. 189–202, 1990.

[10] A. Adamatzky, “Identification of Cellular Automata”, *Encyclopedia of Complexity and Systems and Science*, Springer New York, pp. 4739–4751, 2009.

[11] K. Maeda and C. Sakama, “Identifying Cellular Automata Rules”, *Journal of Cellular Automata*, Vol. 2, pp. 1–20, 2007.

[12] X. Sun, P. L. Rosin, and R. R. Martin, “fast rule identification and neighborhood selection for cellular automata”, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, Vol. 41, No. 3. pp. 749–760, 2011.

[13] Y. Ichise and Y. Ishida, “Reverse engineering of spatial patterns in cellular automata”, *Artificial Life and Robotics*, Vol. 13, pp. 172–175, 2008.

[14] Y. Todo and T. Mitsui, “A Learning Multiple-Valued Logic Network Using Genetic Algorithm/L’, *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, Vol. 10, No. 2, pp. 565–574, 2014.

[15] K. Yamamoto and S. Yamamoto, “Derivation of a Max-plus Equation Based on a Binary Decision Diagram and Shannon’s Expansion”, *Proceedings of SICE Annual Conference 2014*, frBT3.6, Hokkaido, 2014.

[16] 山本，山本，“二分決定グラフと max-plus 代数方程式に基づくセルオートマトンモデル同定法の一考察”，第 58 回システム制御情報学会研究発表講演会，346-7, 京都，2014.

[17] 松井，山本，山本，“ロトカボルテラ方程式系の離散ダイナミクスを表現するオートマトンモデルの同定法”，第 2 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム，PS-34, 東京，2015.

[18] 山本，山本，“l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデルの同定法”，計測自動制御学会論文集，Vol. 52, No. 9, pp. 459–466, 2016.

[19] 山本，山本，“l_1 ノルム最適化に基づくセルオートマトンモデル同定手法に関する考察”，第 27 回自律分散システム・シンポジウム，1A2-2, pp. 53–56, 東京, 2015.

[20] K. Yamamoto and S. Yamamoto, “Reducing the Computational Cost in L1-Norm Optimization for Cellular Automaton Model Identification”, *Proceedings of SICE 2017*, pp. 1018–1021, September 21th 2017, Kanazawa, Japan.

[21] A. Y. Yang, Z. Zhou, A. Ganesh, S. S. Sastry, and Y. Ma, “Fast l_1-Minimization Algorithms For Robust Face Recognition”, *IEEE Trans. on Image Processing*, Vol. 22, No. 8, pp. 3234–3246, 2013.

[22] M. Nagahara and C. F. Martin, “L1 Control Theoretic Smoothing Splines”, *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 21, No. 11, pp. 1394–1397, 2014.

[23] 石川，丸田，足立，“l_1 最適化を用いた循環構造を有するシステムのモデリング”, 計測自動制御学会論文集，Vol. 49, No. 6, pp. 655–657, 2013.

[24] 藤本，丸田，杉江，“ノンパラメトリック区分的アフィンモデルの l_1 最適化に基づく単純化”, システム制御情報学会論文誌，Vol. 27, No. 4, pp. 141–148, 2014.

[25] M. Nagahara, D. E. Quevedo, and J. Ostergaard, “Sparse Packetized Predictive Control for Networked Control Over Erasure Channels”, *IEEE trans. on Aut. Cont.*, Vol. 59, No. 7, pp. 1899–1905, 2014.

[26] S. Yamamoto, “A Model-Free Predictive Control Method by l_1-Minimization”, *Proc. of the 10th Asian Control Conference 2015*, pp. 164–169, 2015.

[27] M. Grant, S. Boyd, and Y. Ye: CVX: Matlab software for disciplined convex programming, “cvxr.com”

[28] MOSEK ApS: The MOSEK optimization toolbox for MATLAB manual, Version 7.1, “http://docs.mosek.com/7.1/toolbox.pdf”