Development and evaluation of articulated curriculum based on mathematical activity

初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価

（課題番号11680182）

平成11～13年度科学研究費補助金（基盤研究Ｃ（２））

研究成果報告書

平成14年（2002年）３月

研究代表者
実
部・助教授）

平成１１～１３年度科学研究費補助金（基盤研究Ｃ（２））

研究成果報告書

初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価

（課題番号１１６８０１８２）

平成１４年（２００２年）３月

研究代表者

大　谷　　実

（金沢大学・教育学部・助教授）

はしがき

本報告書は，平成１１年度から１３年度において，日本学術振興会科学研究補助金（基盤研究Ｃ（２））の交付を受けて行った「初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価」の研究成果を報告するものである．

周知のように，平成１４年４月より小学校および中学校で新しい教育課程が実施される．算数・数学科の新しい教育課程は２つの特徴があるように思われる．１つは，学習内容が大幅に削減され，学校間の移行がなされたことであり，もう１つは，算数科の目標に「算数的活動」が，また中学校数学科では「数学的活動」が新たに登場したことである．これは，カリキュラムのいわば「両輪」における大きな変化である．

前者の学習内容の削減と移行に関して，学校間の接続性が今まで以上に重要な課題となってきており，多くの議論がなされている．しかしながら，後者の活動に関しては，学校間の接続性はほとんど議論がなされていないように思われる．その主たる原因は，「算数的活動」と「数学的活動」という用語の違いにあるように思われる．実際，活動に関する議論は，小学校および中学校の範囲内で個別に検討され，学校間の活動の接続性は視野の外に置かれている．用語の違いは教科目と学校段階の違いを反映してのことであろうが，本来，両者は全く異質のものとは考えにくい．本報告書は，小学校と中学校の数学的活動の接続性を理論的・実際的に検討し，新教育課程が内包する問題に対して一定の示唆を提供する．欧米諸国では，初等教育段階においても「数学的活動」という語が用いられており，わが国の「数学的考え方」なる用語と同じく，学校段階に関わらず使用することによって，首尾一貫した特徴付けがなされ，堅固な基礎が与えられると考え，本研究では「数学的活動」という語を用いている．

本報告書は３つの部分から構成されている．すなわち，「1. 研究成果」，「2. 論文集録」，そして「3. 実践記録」である．「研究成果」では，初等教育段階と前期中等教育段階における算数・数学科のカリキュラムを，数学的活動の接続性を視点として，理論的に位置づけ，実際の具体的単元（比例の単元）においてその接続性を検討した成果を示す．「論文集録」では，本研究に関して学会誌等で発表した研究成果の一部を再録する．本研究の実証的検討に際して，中村雅恵，漢野有美子両先生に御協力を賜った．本研究の成果は，両先生の授業実践なしでは得られなかった．ここに記して感謝を申し上げる．授業実践のデータの一部分は，「実践記録」に掲載している．

平成１４年３月

研究代表者　大谷　実

研 究 組 織

研究代表者　：　大　谷　　実（金沢大学教育学部助教授）

（研究協力者　：　中　村　雅　恵（石川県教育センター指導主事））
（研究協力者　：　漢　野　有美子（石川県河北郡宇ノ気中学校教諭））

交 付 決 定 額

平成１１年度	１，３００千円
平成１２年度	１，２００千円
平成１３年度	６００千円
合計	３，１００千円

研 究 発 表

（１）学会誌

大谷　実・中村雅恵，中学校との接続性を配慮した比例の学習指導：文化-歴史的活動理論に基づく教授実験のデザイン．*日本数学教育学会誌，算数教育*（投稿中）

大谷　実・中村雅恵，比例の指導における数表・グラフ・式のシンボル化過程：教授実験における教師と児童の談話の質的分析，*日本数学教育学会誌，算数教育*（投稿中）

（２）口頭発表

大谷　実・中村雅恵，数学的活動におけるシンボル化と談話の役割：小学校６年比例の教授実験，*日本数学教育学会第 33 回数学教育論文発表回論文集*，2000 年 11 月．

大谷　実・中村雅恵・漢野有美子，比例の指導におけるグラフのシンボル化と談話の機能：小学校と中学校の関数指導の接続性に向けて，*日本数学教育学会第 34 回数学教育論文発表回論文集*，2001 年 11 月．

（３）出版物

大谷　実，*学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成*，風間書房，2002 年 2 月 28 日．

大谷　実，算数科における領域間の横断的扱い，植田敦三（編），*算数科教育学*，協同出版（印刷中）．

目　次

第１部　研究成果

1．研究の目的・意義・方法

1．1．研究の目的

本研究は，算数・数学科のカリキュラム開発と評価に，「数学的活動」という新しい視点を組み入れることを意図している．本研究では，３年間という研究期間を考慮し，小学校高学年における算数教育と中学校低学年における数学教育に焦点をあてて，これらの学校段階間における接続性（アーティキュレーション）を，数学的活動という観点から打ち立てることを目的とする．

この目的に対して，本研究では，カリキュラム開発の３つの局面（意図された・実施された・達成されたカリキュラム）に対応して，次のような相互に関連する３つの達成目標を設定する．

(ア) 算数・数学科のカリキュラムを貫く原理としての数学的活動論を構想すること．

(イ) １つの単元について，小学校高学年と中学校低学年における授業計画を立てること．以上は，意図されたカリキュラムの局面に対応する．

(ウ) 実際の授業過程を分析することにより，達成されたカリキュラムを分析し，評価すること．これは，実施されたカリキュラムおよび達成されたカリキュラムに対応する．

なお，これら３つの目標は，それぞれが相互反映的に展開され，達成されてゆくと考えられる．

1．2．研究の意義

平成１４年４月より小学校および中学校で新しい教育課程が実施される．算数・数学科の新しい教育課程は２つの特徴があるように思われる．１つは，学習内容が大幅に削減され，学校間の移行がなされたことであり，もう１つは，算数科の目標に「算数的活動」が，また中学校数学科では「数学的活動」が新たに登場したことである．これは，カリキュラムのいわば「両輪」における大きな変化である．実際，数学は，内容と活動という２つの側面を持っている．

前者の学習内容の削減と移行に関して，学校間の接続性が今まで以上に重要な課題となってきており，多くの議論がなされている．しかしながら，後者の活動に関しては，学校間の接続性はこれまで明示的に議論されることが少なかった．数学が，内容と活動の両系統を有しているにも関わらず，新しい算数・数学科のカリキュラムの議論は，もっぱら内容の系統に終始している．

活動に関する接続性が検討されない原因の１つは，小学校の算数科では「算数的活動」，中学校の数学科では「数学的活動」と異なる用語を用いている点にあると思われる．このことにより，活動は，小学校および中学校の範囲内で個別に検討され，学校間の活動の接続性は視野の外に置かれることになっている．用語の違いは教科目と学校段階の違いを反映してのことであろうが，本来，両者は全く異質のものとは考えにくい．実際，小学校６年の３月までは算数的活動で翌４月からは全く異質の数学的活動が始まるわけではあるまい．欧米諸国では，初等教育段階においても「数学的活動」という語が用いられており，わが国の「数学的考え方」なる用語と同じく，学校段階に関わらず使用することによって，首尾一貫した特徴付けがなされ，堅固な基礎が与えられると考え，本研究では「数学的活動」という語を用いる．本研究は，小学校と中学校の数学的活動の接続性を理論的・実際的に検討し，新教育課程が内包する問題に対して一定の示唆を提供する意義を有している．

１．３．研究の方法

研究目的に示された３つの課題に対して，次のようにアプローチした．

（ア）の課題，すなわち，初等・中等教育を貫く数学的活動論を構想するとともに，数学的活動に基づくカリキュラム構成と評価指標の作成するために，先ず，種々の数学的活動のモデル論を総合的に検討し，数学的活動と呼ばれる複雑な思考活動の構造を明らかにする．その際，特に，オランダのフロイデンタール研究所が開発した「現実的数学教育」(Realistic Mathematics Education)と呼ばれるカリキュラムを文献学的に検討し，その特徴を明らかにする．現実的数学教育は，２種類の数学化（「水平的数学化」と「垂直的数学化」）と，ファン・ヒーレの「思考水準論」をカリキュラムの構成原理としている．ここで，水平的数学化とは，観察・実験・帰納的推論を通して，事象を厳密な数学的な手段によってアプローチしうるものに変形する活動を意味し，垂直的数学化とは，数学的な体系内で解法を形式化し一般化する活動を意味する．この内容は，「２．初等・中等教育段階における数学的活動の接続性と評価」で述べる．

（イ）の課題は，１つの単元について，小学校高学年と中学校低学年における授業計画を立てることである．この課題に関して，本研究では，金沢市内の公立小学校と中学校の算数・数学科の教師グループと協議し，関数の単元を素材として，小・中の接続性を視野に入れた数学的活動カリキュラムについて検討を行い，その具体案と評価基準の作成する．この内容は，「３．数学的活動カリキュラムの具体例：比例の単元」で述べ

る．

（ウ）の課題は，実際の授業過程を分析することにより，達成されたカリキュラムを分析し，評価することである．この課題に対して，本研究では，小学校算数と中学校数学における数学的活動の実際的態様と，それらの学校段階間での接続性を検討するために，平成１２年度と１３年度にわたり，縦断的調査研究を実施する．実際には，金沢市内の公立小学校第６学年の２クラスと公立中学校第２学年の１クラスを調査対象として設定し，当該のクラスで営まれる比例の授業を継続的に参与観察する．

調査方法としては，一方で，数学的活動における水平的数学化と垂直的数学化の態様を分析し，他方で，一人ひとりの児童・生徒の個別的作業や発話データから，彼らの思考水準を分析する．その際には，わが国の教室文化の特徴である一斉授業において社会的に組織される数学的活動の態様に着目する．特に，数学的活動に参加する上で，教師が提供する様々な支援形態と，児童に配分される役割や義務のパターンに着目する．

データ収集と分析の方法としては，授業の全般的相互行為が視野におさめられるよう，教室の後方に８ミリビデオを１台設置し，教師と児童の発問・応答過程を記録する．データ収集と分析は並行して行われるが，夏期休業中で集中的に実施し，当該の授業において特徴的な数学的活動と思考水準の発達過程についての分析を進めてゆく．各年度の終わりには，それぞれの学校段階での数学的活動にもとづくカリキュラムを評価する．この内容は，「第２部　論文集録」ならびに「第３部　実践記録」に所収されている．

２．初等・中等教育段階における数学的活動の接続性と評価

２．１．数学的活動と接続性

この課題に取り組む方法として，本論文では，数学教育の個別・具体的研究を取り上げ，そこにおいて用いられている数学的活動論を比較・対照することにより，それらに共通する意味内容を定めていくことにする．ただし，そうした個別・具体的研究では，「数学的活動」という用語が広範囲かつ多様な文脈において用いられていることが予想される．そこで，本論文では，従来の数学的活動論を一定の観点から系統的に整理することにより，その特徴を明らかにする．実際には，数学的活動に関する個別的研究を二つの系統，すなわち，数学的活動を「数学の歴史的系統発生」や「学校数学のカリキュラム」という長期的視野から検討し，それを「大局的視野」と呼ぶ．

大局的視野からみた数学的活動の特徴を検討する手だてとして，本論文では，数学的活動のモデル論を取り上げることにする．大局的，したがって，長期的で複雑な数学的活動を検討するには，それを理想化・抽象化・簡単化した，一定のモデルで検討することが理にかなっている．実際，数学的活動を重要な構成部分とする研究の多くは，様々なモデルを提示している．それらのモデルは，力点の置きかたや，付与するラベルにおいて多様であるが，その意味する内容を検討するとき，お互いに共通点を持っていることが示される．以下では，このことを確認する．ここでは先ず，数学的活動(Mathematical Activity)という用語を数学教育に取り入れたオランダ著名な数学者・数学史家のハンス・フロイデンタール(H. Freudenthal)の議論から始めることが，歴史的にも，また今日的にも適切であると考える．

数学といった場合，通常は完成した理論体系を意味する．これに対して，フロイデンタールは，数学を人間の活動であると見なす．彼は，主として数学の歴史的発展過程を分析し，活動としての数学の本質的特徴を示している．それによると，数学的活動の本質は**「数学化」**(mathematizing)[1]であるという．このことに関して，フロイデンタールは次のように述べている．

> 現実を数学的な手段によって組織化することは，今日，数学化と呼ばれている．…… 数学的経験が蓄積されると，今度は，それ自体が組織化されることになる．この目的に奉仕する手段は何か．もちろん，再び数学的な手段である．これが，数学それ自身の数学化の始まりとなる．(Freudenthal, 1973: 44)

[1] Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* D. Reidel.

ここから，数学化は，**数学的な手段によって組織化する活動**であることが分かる．こうした活動の具体的意味について，フロイデンタールは次のように述べている[2].

> 算術と幾何は，現実を数学化したところから生まれたものである．しかし，時期がたつと(少なくとも古代ギリシア以降は), 数学それ自体が数学化の対象となった．数学的素材を整理したり，再編成したり，定義を定理に変えたり，定理を定義に変えたり，さらには，より一般的なアプローチを探究し，それによって複数の定理を一つのものに統合し，その後は特殊化することにより，すべての事柄が導き出せるようにすることが，数学者にとって最も実り多い活動であった．生徒たちも，この実を味わう資格を持っていることは疑いのないことである．(Freudenthal, 1968: 6)

この文言から，数学化には二つの意味が含まれていることが分かる．一つは「現実の数学化」(mathematizing of reality)，そしてもう一つは「数学自身の数学化」(mathematizing of mathematics itself)である．また，「数学の数学化」には，さらに二つの側面があることも示唆される．一つは「素材を整理，再編成し，定義を定理に変えたり，定理を定義に変えたり」することである．これは，数学の命題群，すなわち命題の集合の論理的な繋がりを再組織化する活動であるといえる．このことの例として，フロイデンタールは，円錐曲線論と方程式論の次のような関係を挙げる．

> ギリシア人は，ある種の二次方程式が平面曲線として解釈できることを知っていた．それは，メナイキュモスによって，円錐の平面による切断面であるとされた．しかし，アポロニウスは，円錐曲線論から出発し，それらの方程式へたどり着いた．現代では形勢が再び逆転し，二次方程式から始めている．(Freudenthal, 1973: 45)

「数学の数学化」のもう一つの側面は，先の引用において，「もっと一般的なアプローチを探し，それによって幾つかの定理を一つに統合して，そのあとは特殊化によって全てが導きだせるようにすること」と述べられている部分である．これは，新しい観点により統合する活動と言える．「数学の数学化」のこの側面に関して，フロイデンタールは，物理学における次のような例をあげる．

> 力学の教科書を見ると，直行変換は固有値を用いないオイラー流のやり方で扱われているのに，対称変換は固有値を用いるラプラス流のやり方で扱われている．でも，これらは共に数学では邪魔者になって久しいのだ！(Freudenthal, 1973: 46)

こうした物理学における数学の応用例に見られるように，一度組織化された命題を，新しい統合概念によって再組織化することが，数学の特徴的な活動となっている．

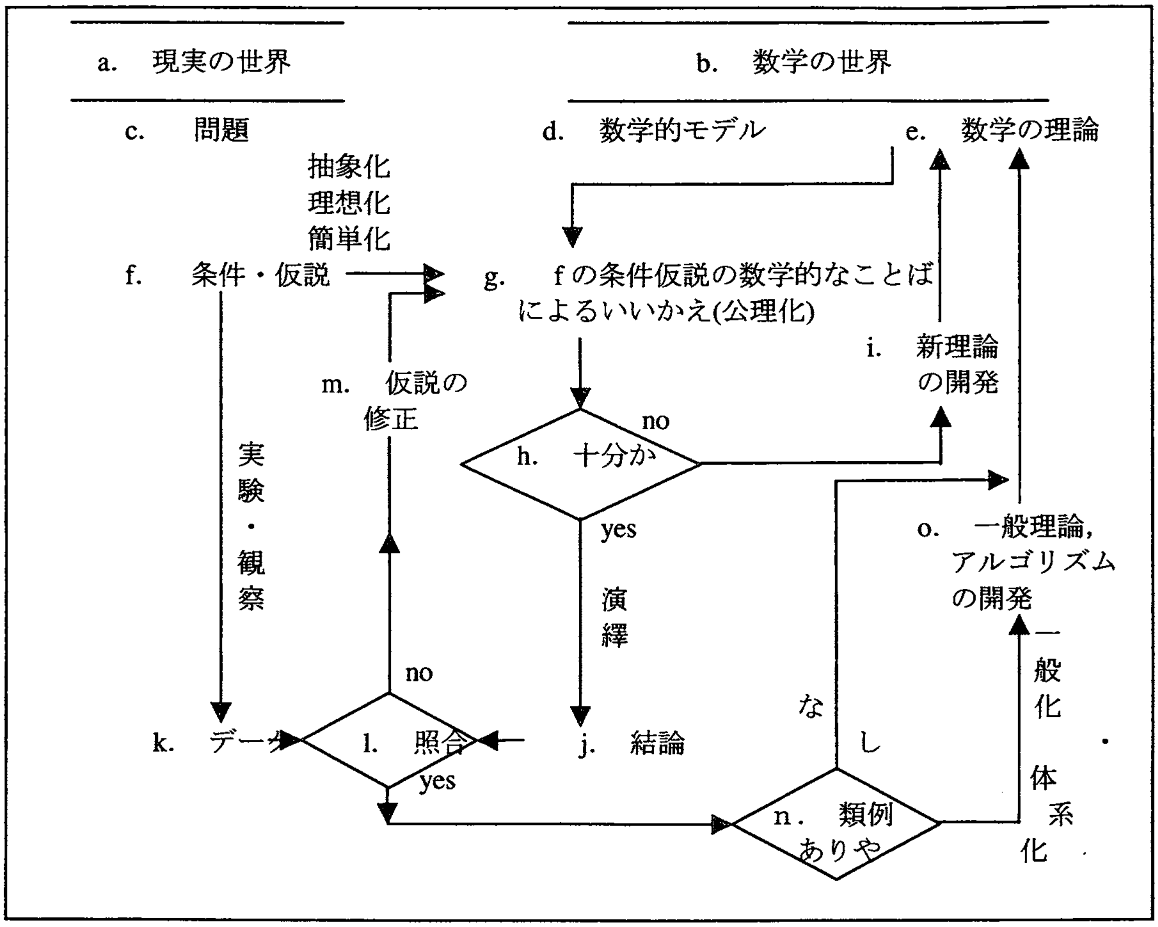
これまでの議論から，数学的活動は二種類の数学化からなっていることが示された．

---

[2] Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational studies in mathematics*, 1(1), 3-8.

それらは，数学的活動の本質的な側面，つまり数学的活動のモデルの主要な構成部分であると言えよう．以下では，数学的活動のこうした基本的側面を踏まえつつ，さらなる内部構造，その多様な側面を明らかにしてゆく．

本論では，数学的活動のより多様な側面を区別し，したがって，包括的な記述を与えているモデルを取り上げる．それは，島田(1977)により提出されたモデルである．島田は，数学的活動を次のようなモデル(この場合は，模式図)で表している[3].



数学的活動の模式図 (島田, 1977: 15)

ここで，このモデルに関する島田の(記号と矢線に沿った)説明を取り上げ，その意味を検討することにしたい．

> まずはじめに，a. **現実の世界**と b. **数学の世界**とがあり，現実の世界には，何らかの意味で c. **問題**があり，解決をせまっているとする．・・・c の問題に対しては，現実の世界の経験から，その f. **条件・仮説**を設定し，さらに数学の理論が適用可能になるように，条件・仮説を抽象化，理想化あるいは簡単化して，数学の

[3] 島田茂(編著), (1977). *算数・数学科のオープンエンド アプローチ*. みずうみ書房.

> ことばによってこれらを言い換える．・・・こうして，いわば活動者の得意の土俵に問題をひきずりこんで言い換えたのが，g．の**公理化**の段階である．（島田, 1977: 15）

この説明から，数学的活動の二つの特徴が示唆される．一つは，数学的活動は，現実世界の問題とそれに取り組む解決者とのセットとして捉えられることである．数学的活動では，次のような問題状況，すなわち「未解決の問題状況を，解決しなくてはならないという必要，あるいは，解決したいという希望はあるが，直ちに，そして，確実に解決を保証するような方法はもっていない人がいて，しかも解決への努力を払うという場面」(三輪, 1991a: 66)[4]が前提とされるのである．フロイデンタールの議論ではこうした点は明言されていないものの，数学的活動を人間の活動と見なすとき，それは必要不可欠な構成部分であると思われる．

島田の数学的活動のモデルのもう一つの特徴は，当面する問題状況において，そこで何が問題となるかを探り出し，適当な**条件や仮説**を設定し，問題を**数学的に確定する**ことである．現実世界の問題を解決しようとする際には，解決の鍵となる条件が曖昧であり，むしろ，そのほうが普通である．この意味で，解決のための必要かつ十分な条件が何であるかを決定することが重要となってくる．現実の問題を数学的に定式化する活動($f \to g$)，すなわち，現実の問題を数学の舞台にのせる活動は，その意味する内容を検討するとき，先のフロイデンタールの議論における「現実の数学化」に対応すると考えられる．島田のモデルは，現実の問題に，条件・仮説を設定し，それを理想化・抽象化・簡単化する活動を挙げている．したがって，それは，「現実の数学化」の具体的な構成要素を与えていると考えられる．

さて，現実の問題から条件・仮説を設定し，数学の問題が定式化されると，**数学の世界**の中で，次のような作業が続く．再び，島田の説明を引用する．

> gとして公理的なものがまとまれば，それから，現実世界についての命題と対応するgの中の命題が作れる．この後者の命題の真偽は，gの公理系からの演繹によってのみ決定される．この演繹にはgの公理系とともに，eの**数学の理論**が全面的に駆使される．しかし，それでもうまく演繹が進められない場合は，**新理論の開発**iに進むことが必要である．・・・演繹によって導いたj．**結論**は，これに対応して，aの現実の世界で経験的に収集したk．**データ**と，l．**照合**させられる．このとき，データと結論とが，f→gの際に認めた近似の範囲内で合えば，fの仮定は否定されず，一応そのまま保持される．もし，許される範囲を越えて食い違えば，fの仮定が誤りであるとして，m．**仮説の修正**ということになる．（島田, 1977: 16）

---

[4] 三輪辰郎 (1991a)．問題解決能力の育成．*数学教育の課題と展望* (pp. 63-81)．金子書房．

この説明から，数学的活動の二つの特徴が留意される．一つは，数学の世界と現実の世界の弁証法的関係，すなわち，両者が相互に依存し合うがゆえに，独自性を持っているという点である．一方の現実の世界では，実験や観察等により当該の問題に関する経験的データを収集し，他方の数学の世界では経験的な事実とは無関係に無定義用語と公理を出発点とする演繹論理で展開する．このように，現実の世界と数学の世界は固有の論理を持っている．しかしながら，二つの世界はそれぞれ固有の論理を持ちつつも，数学的活動において，相統一される．というのも，数学の世界における理論の演繹的構成は，現実世界との関わりにおいて本来の意味を持つからである．数学の理論を，経験的事実と無関係に無定義述語を用いて演繹論理で構成し，結論を導く過程を首尾一貫したものとするのは，演繹によって導いた数学的結論(理論値)と現実世界で経験的に収集したデータ(実験値)とが許容範囲を越えて食い違った場合に，**設定した条件・仮説にのみ責任を追わせる**ためなのである．「数学の中での論証の重要な意味の一つはここにあるといってよい．」(島田, ibid: 16)とあるように，数学における演繹は，経験世界との関わりにおいて，適切に位置づけられる．こうしたことから，われわれは，フロイデンタールによる二種類の数学化の内的な，しかも，本来的な関連性を知るのである．

数学的活動のもう一つの特徴は，活動の**継続性**である．それは，一度条件・仮説を設定し，数学的に定式化した問題から一定の数学的結果を得たとしても，それで活動が終了するわけではないということである．すなわち，設定された条件や仮説は，あくまで**仮のもの**であって，問題の重要性や事態の切迫度に照らして，再度定式化し直されるのである．ポパーがいうように，事柄の確実性は**状況の問題**であるといえる(Popper, 1979: 78)[5]．こうした再定式化は，数学的な結論と現実の問題との対照がなされ，数学的結論が現実の問題の解決として受け入れられるまで継続するのである．

しかしながら，数学的結論を受け入れた場合でも，活動はそれで停止するのではなく，さらなる発展的な活動が展開される．このことについて，島田は次のように述べている．

> この f. **条件，仮設**→g. **公理化**→j. **結論**→l. **照合**の過程で，最終段階が肯定的であれば，この g の公理系は，f に対する**数学的モデル**と呼ばれ，次の段階で n. **類例**の有無が検討される．・・・類例がいくつもある場合，その共通な特徴をとらえて，一般化し，より基本的な命題と副次的，ないし，従属的な命題とを区別して体系化を図る．こうして o. **一般理論**およびその理論による処理のための**アルゴリズム**の開発に進む．この段階では，一般理論に平行した記号法が開発され，演繹推理が，記号の配列の変形として進められるようアルゴリズムを開発する．

[5] Popper, K. R. (1979). *Objective knowledge*. Clarendon Press.

ここだけを見れば，数学は一種の**記号ゲーム**の外観を呈する．(島田, 1977: 16-17)

このように，数学的な結論が当初の問題の解決として受け入れられた際には，解決の際の方法，あるいは解決の結果を吟味することを通して，**一般化**が図られる．すなわち，当初の問題を足場として，豊かな内容へ高まり，問題の本質へ深まることは，数学にとって特徴的で教訓的な活動である．問題の解決において成功に導いたアイデアや解法を**一般化**したり，**体系化**したりする活動は，先のフロイデンタールの「数学の数学化」の一つの側面にあたる．さらに，島田は，「このように豊かになった b．数学の世界も，ある場合には，その**内部の統一**，**向上**を求めて a の世界の役割を果たすこともあり得る」(島田, 1977 :17, 強調は筆者)と述べているが，それは「数学の数学化」のもう一つの側面に対応している．

これまで見てきたように，島田による数学的活動のモデル(模式図)は，数学が創造される全体的過程の多様な側面が描きだされている．さらに，このモデルは，フロイデンタールの「数学化」の内的構造を理解する視点を与えるものであった．

さて，数学的活動のモデル論は，フロイデンタールや島田の他にも，多数見受けられる(例えば，Hiatt, 1987; Крыговская, 1988; Столяр, 1987; Walther, 1984)[6]．それらのモデルは，数学的活動に付与するラベルの名称や力点の置き方に違いはあるものの，その内容を検討するとき，実質的に島田のモデルの一部ないしは，その組み合わせとして含まれることが示される(大谷, 1987)[7]．しかし，このことは，他の数学的活動のモデル論が不十分であったり不完全であったりすることを意味するものではないと考える．というのも，ストリャール(А. Столяр)が指摘しているように，数学的活動論は，数学として何を重視するか，また教育-心理学的基礎としてどのような理論を採用するかに依って，様々なモデルが採用されるからである(Столяр, 1987: 53-55)[8]．従って，数学的活動論の検討において，単に数学的活動のモデルそれ自体を比較・検討するだけでは不十分であり，それらのモデル構成の背後にある教授論や心理学の理論的視野に照らして理解することが必要となってくる．以下では，数学的活動のモデル論を，教授論や心理学との関連性において検討を行う．

---

[6] Hiatt, A. (1987). Discovering mathematics. *Mathematics teacher*, 80(6), 476-478. Крыговская, С. (1988). Роль определения в математической деятельность учащихся. Математика в школе, 6, 66-70. Столяр, А. А. (1987). *Педагогика Математики*. Вышэиш. Школа. Walther, G. (1984). Mathematical activity in an educational context. In R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education* (Vol. 3, pp. 69-88). Unesco.

[7] 大谷実 (1987). *数学的活動に基づく教授・学習の基礎的研究*. 博士課程中間論文・筑波大学教育学研究科(未公刊).

[8] Столяр, А. А. (1987). *Педагогика Математики*. Вышэиш. Школа.

2．2．数学化に基づく数学教育の類型化

ここでは，オランダの「フロイデンタール研究所」において議論されている，数学化を視点とした数学教育の類型論を取り上げる．先に取り上げたフロイデンタールに師事した数学教育研究者トレファースとゴーフリー(Treffers & Goffree)は，数学教育論を構築する際の組織化原理として数学化に着目している[9]．トレファースらは，二種類の数学化を基底として，数学教育論を比較・検討している．ここで，二種類の数学化とは，「水平的数学化」(horizontal mathematization)と「垂直的数学化」(vertical mathematization)と呼ばれるものである(Treffers, 1986: 70)[10]．ちなみに，「水平的数学化」と「垂直的数学化」は教育的な構成概念であり，数学的なものではない．実際，トレファースらがこうした数学化の区分を提唱した際に，フロイデンタールは，そのアイデアを受け入れることに抵抗を覚えたと述べている．というのも，フロイデンタールは，「水平的数学化」と「垂直的数学化」は明確に区別できないものであると考えたからであった．しかる後に，彼は，こうした区分が**数学教育のスタイル**を特徴づけるという意味において，それらを受け入れるようになったとされる(Freudenthal, 1991: 41-42)[11]．

トレファースらに従えば，「水平的数学化」は，「経験的方法・観察・実験・帰納的推論を通して，問題を，厳密な数学的な手段によってアプローチできるように変形すること」(Treffers, ibid: 71)を意味する．他方，「垂直的数学化」は，「水平的な数学化に続く数学的処理，問題の解決，解決の一般化，そしてさらなる形式化に関連する活動」(Treffers, ibid: 71)を意味する．これら二種類の数学化を厳密に峻別することができないとしつつも，トレファースらは，条件付きで，各々に含まれる活動項目を列挙している．

水平的数学化

- 帰納を通して規則性を発見すること．
- 問題を既知のモデルに変形すること．
- 一般的文脈の中から数学的要素を同定すること．

垂直的数学化

- 記号を用いること．
- 解法を一般化すること．
- 一般化されたものを形式化すること．
- 概念を正確に定義すること．
- アルゴリズムを構成すること．

---

9 Treffers, A., & Goffree, F. (1985). Rational analysis of realistic mathematics education. In *Proceedings of PME 9* (Vol. 2, pp. 97-123). Utrecht.

10 Treffers, A. (1987). *Three dimensions.* D. Reidel. ここで，vertical は，「鉛直」と訳されるが，ここでは物理的な意味合いを持っていないので，「垂直」と訳している．

11 Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers.

これらの項目を，先に取り上げた島田のモデルに照らして検討するとき，明らかに，「水平的数学化」は，現実の世界から数学の世界へ変換する「公理化」($f \rightarrow g$)の過程に対応し，「垂直的数学化」は，「数学の世界」内部における一連の過程に対応していると考えられる.

さて，トレファースらは，こうした二種類の数学化を視点として，様々な数学教育論を四つの様式(現実的(realistic)，構造主義的(structuralist)，経験主義的(empiricist)，そして機械論的(mechanistic))に分類する．それを図式的に表現すると下の表になる.

	水平的数学化	垂直的数学化
現実的	＋	＋
構造主義的	−	＋
経験主義的	＋	−
機械論的	−	−

この表で，記号＋(−)は，数学化の成分が強調される(されない)ことを意味する.

「現実的」数学教育論は，現実の状況を数学的な記述に変換する「水平的数学化」と，数学の体系内で処理し，一般的図式を構成する「垂直的数学化」の**両方**を含んでいる．ここでは，現実の状況は，数学的概念が生まれる源泉であり，かつそれが応用される領域でもあり，二重の役割を果たしている.

「構造主義的」数学教育論は，学問の構造あるいは体系を志向するもので，数学的活動は専ら「垂直的数学化」からなる．すなわち，数学の理論体系の構築や形式化が数学的活動の主目的となる．従って，「水平的数学化」は，既に形式化・体系化された理論を事後的に応用する際に現れる．すなわち，現実の状況は，数学の理論体系に具体的意味を与える**モデル**として機能するのみである．構造主義的数学教育論の典型的な例は，数学教育現代化期に脚光を浴びたツォルタン・ディーンズ(Z.　Dienes)の数学教育論である[12].

「経験主義的」数学教育論は，構造的数学教育論と正反対で，数学的活動として「水平的数学化」を強調するが，数学内部での理論的・体系的構造化を導く「垂直的数学化」を重視しないものである．これは，経験主義的・生活単元的な数学教育論である.

最後の**「機械論的」**数学教育論は，「水平的数学化」も「垂直的数学化」も十分には展開しないものである．数学的概念の源泉としての具体的現象を扱うことは稀であり，また，学んだ事柄の実際的応用にも関心が向けられない．むしろ，この立場は，数的事

[12] Dienes, Z.　P.　(1963).　*An experimental study of mathematics-learning*.　Hutchinson.

実や手続きの**盲目的な記憶**や**自動化**に多くの注意を払う．機械論的数学教育の例は，行動主義原理に基づく「個別処方教授」(Individually Prescribed Instruction)に見られる．そこでは，個々の孤立的で断片化されたステップを累積的に習得(マスター)することに主眼がおかれている[13].

ここで，四つ数学教育論の特色と相違点を，「**モデル**」という観点から意味付けることにより，先に取り上げた島田による数学的活動の模式図と関連づけることにしたい．一般に，数学的活動において，「モデル」という用語は二つの意味を持つ．一つは，現実世界の問題に関して設定した条件や仮説を数学の命題に翻訳したものであり，もう一つは，抽象的な理論を一段下の具体的な次元で表現したものである(島田, 1995: 17-18)[14].

現実的数学教育論は，現実の場面から探り出した条件や仮説を数学の舞台にのせる「水平的数学化」と，構成された数学的モデルを数学の世界の内部で系統化する「垂直的数学化」の両方を含んでいる．この場合のモデルは，現実の世界から数学の世界へ進む過程で構成されており，前者の意味となる．**経験主義的数学教育論**もまた，現実の問題から出発し，それを具体的に分析することを通して数学的表現と結びつけられる．しかし，数学内部での体系化や形式化がおろそかにされるため，構成されたモデルが数学の世界において何らかの「決定可能性」(島田, 1990: 44)を持っているかどうかの認識が希薄となってしまう[15].

他方，**構造主義的数学教育論**は，既成の数学的概念や関係をモデル化した具体的教具を用いるが，その際のモデルは「経験世界の事物による表現」であり，後者の意味にあたるものである．さらに，**機械論的数学教育論**は，予め想定された理論を擬似経験的に表現した問題から出発し，それに対する知識や手続きを示し，それらを定着するために練習問題による鍛練を行うものである．この立場は，構造主義と同じく，既に数学的に言い換えられた段階から始まり，得られた結果を現実と照合せず，類例を通して予定された一般化理論やアルゴリズムを図式化するものである．従って，ここで用いられるモデルは，後者の意味での「擬似モデル」となる．

四つの数学教育論の相違は，扱われる数学的モデルの相違，したがって，現実の世界と数学の世界の間の**関係の相違**であると考えられる．**現実的数学教育論**では，モデルが

[13] Erlwanger, S. H. (1974). *Case studies of children's conceptions of mathematics*. UMI.
[14] 島田茂 (編著), (1995). *算数・数学科のオープンエンド アプローチ*. 東洋館. 後者はさらに三タイプに分類される．それらは，(1)抽象的な公理系の無定義用語に解釈を与えて作った「表現モデル」，(2)現実についてのことばに抽象的な理論での意味を付した「擬似数学モデル」，(3)数学的な概念や関係と部分的に同型と見られる「経験世界の事物による表現」である(p. 18).
[15] 島田 茂 (1990). *教師のための問題集*. 共立出版.

現実と理論の橋渡しの役割を果たしている．しかしながら，**構造主義**と**経験主義**は，現実と理論の関係が曖昧となり，閉じた自己充足的な性格を帯びることとなる．かくして，経験主義と構造主義においては，活動の目的と手段が表裏一体化し，何らかの問題をその問題が埋め込まれている世界とは異なる世界のモデルを介して間接的に考察しているという意識が欠如してしまう．このことに関して，三輪(Miwa, 1987)は，与えられた文章題に対して正しい答えを導くことができる生徒でも，得られた答えは何ら現実的な意味を持たないと考えていることを明らかにしている[16]．このことは，問題を数学的に解決することが，現実の場面を理想化・単純化して，条件や仮説を設定した上で一定の判断をしていること，すなわち数学的モデルを用いて解決していることの認識が低いことを意味している．

これまでの議論から，二種類の数学化，すなわち「水平的数学化」と「垂直的数学化」は，数学教育論を類型化する大局的視点を与えていることが示された．また，数学教育論の諸類型の相違は，数学的活動においてモデルが果たす役割の相違であることも示された．ここで，数学教育の類型論から議論をさらに進め，教授・学習論もしくは学習指導論のレベルで数学的活動を検討している研究を取り上げ，その特徴を明らかにしていく．

２．３．数学的活動に基づく教授・学習論

数学的活動に基づく教授・学習論を，数学，教授学，そして心理学の組み合わせにおいて理論化する試みは，実のところ，そう多くはない[17]．ここでは，こうした意図が明確であるアブラム・ストリャール(A. A. Столяр)の研究を取り上げる．

ストリャールは，児童・生徒に数学的活動という一定の思考活動を発達させることを学校数学の目的であると見なし，数学的活動に基づく教授・学習論を構築する．先ず，彼は，数学的活動のモデル論を比較・検討し，実際の数学的活動の主要な側面を反映し，かつ，学校数学での学習指導に適用可能なものとして，三つの側面からなるモデルを採用する(Столяр, 1987: 55)[18]．

---

[16] Miwa, T. (1986). Mathematical model-making in problem solving. In J. P. Becker & T. Miwa (Eds.), *Proceedings of the U. S. -Japan seminar on mathematical problem solving* (pp. 401-418). Southern Illinois University.

[17] わが国におけるそうした研究として，例えば，次のものが挙げられる．杉山吉茂 (1986). *公理的方法に基づく算数・数学の学習指導.* 東洋館． 中原忠男 (1995). *算数・数学教育における構成的アプローチの研究.* 聖文社． 能田伸彦 (1991). *算数・数学科オープン アプローチによる指導の研究－授業の構成と評価*(改訂版). 東洋館． 平林一栄 (1987). *数学教育の活動主義的展開.* 東洋館.

[18] Столяр, A. A. (1987). *Педагогика математики.* Вышэйш. Школа.

1) 具体的状況の数学的記述，もしくは「経験的素材の数学化」(Математизац−ии Эмпирического Материала). 略してМЭМ.
2) 「数学的題材の論理的組織化」(Логическая Организация Матем−атического Материала). これは，1) の活動から得られたモデルを検討したり，理論(局所的・大局的)を構築したりすること．略してЛОММ.
3)「数学的理論の応用」(Применение Математической Теории). これは，2) の活動より得られた数学的モデルや理論を応用すること．略してПМТ.

このモデルは，その意味する内容を検討するとき，先の数学教育類型論における二種類の数学化，すなわち「水平的数学化」と「垂直的数学化」に対応することが分かる．実際，経験的素材の数学化(МЭМ)と数学的理論の応用(ПМТ)は「水平的数学化」に，そして，数学的題材の論理的組織化(ЛОММ)は「垂直的数学化」に，それぞれ対応している．これまで見てきたように，数学的活動のモデル論は，その付与するラベルこそ異なるものの，基本的に，数学的活動の同じ側面を含んでいることが分かる．

しかしながら，ストリャールの研究がそれまでの数学的活動論と異なる点は，数学的活動のモデルを，教授・学習の一般論である教授学の理論，さらには心理学理論と組み合わせている点にある．教授学の理論としては，ミハイル・マフムートフによる「問題解決的教授・学習論」(Проблемное Обучение: Махмутов, 1975)[19]が採用される．「問題解決的教授・学習論」は，教授・学習過程を問題状況の生起と克服の過程と見なすもので，実際には，三つの観点，すなわち「学習目的」，「既知の事柄と未知の事柄の関係」，そして「解決結果」によって特徴付けられる．かくして，先にあげた数学的活動の三つの側面に対応する問題状況は，次のようになる(表 1).

数学的活動の基本的側面	問題状況の基本的タイプ			
	目的	既知	未知	結果
経験的素材の数学化(МЭМ)	新しい概念の導入，理論的知識の拡張	数学的記述に該当する経験的素材	経験的素材の記述に必要な数学的言語と道具	新しい数学的知識
数学的素材の論理的組織化(ЛОММ)	知識の体系化	数学的素材	数学的素材の論理的組織化やモデル探究の方法	数学的知識の体系
数学的理論の応用(ПМТ)	新しい場面における知識の応用	経験的素材，数学的理論	新しい経験的素材への数学的理論の応用方法	数学的知識の転移

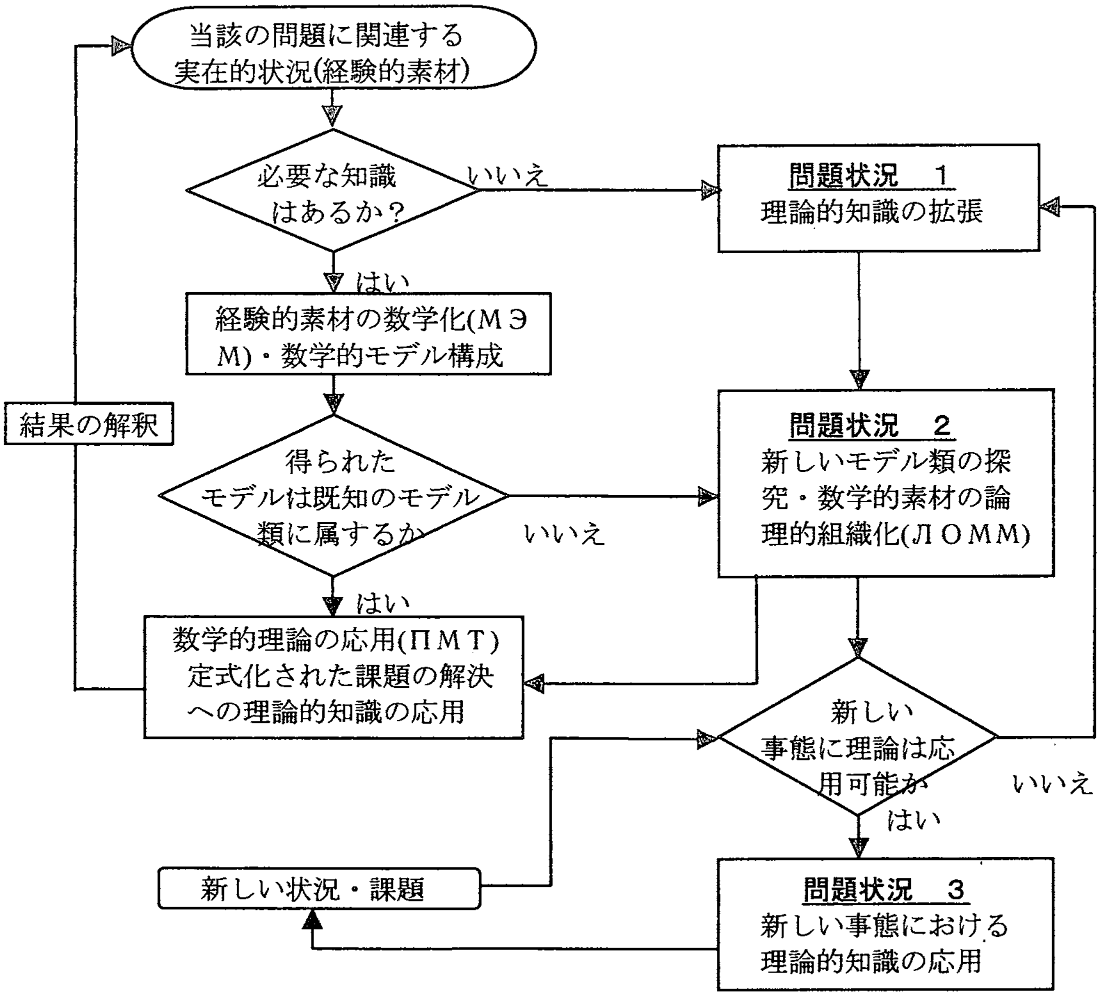
(表 1) 問題解決的教授・学習論に基づく数学的活動の側面 (Столяр, ibid: 63)

[19] Махмутов, М. И. (1975). Проблемное обучение. М. Педагогика.

さらに，問題状況に基づく数学的活動の教授・学習の一般的展開は，次頁のような模式図に示される流れをたどるものとなる．

ここで，ストリャールによる模式図の構成を検討すると，島田による模式図との関係が，二点示唆される．一つは，ストリャールの模式図は，島田の模式図を，単純化・簡略化することで，数学的活動に含まれる三つの側面(経験的素材の数学化，数学的素材の論理的組織化，数学的理論の応用)を際立たせ，焦点化している点である．もう一つは，ストリャールの模式図は，島田の模式図における「判断ボックス」を，教授学的に意味づけることにより，学習指導の問題，すなわち，「数学的活動に基づく教授・学習」(обучение матем-атической деятельность, Столяр, ibid: 63)の問題に発展させていることである．

これまでみてきたように，ストリャールの研究の特徴は，数学的活動論と教授・学習理論を組み合わせ，「数学的活動に基づく教授・学習」の一般的図式を提示している点にみられる．さらに，ストリャールは，数学論と教授論からなる「数学的活動に基づく教授・学習論」に，発達心理学の理論を組み込み，児童・生徒の発達水準に照らした数学的活動論を定式化しようとしている．そこで，次に，「数学的活動に基づく教授・学習論」の心理学的基礎を取り上げ，その特徴を検討する．



数学的活動の問題解決的教授・学習の一般的な模式図(Столяр, ibid: 62)

2．4．数学的活動に基づく教授・学習の心理学的基礎

数学的活動に基づく教授・学習を支える心理学理論として，ストリャールは，当時まだ広く知られていなかったオランダの数学教育者ファン・ヒーレ夫妻(van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof)の「思考水準論」(Theory of level of thinking: van Hiele, 1986)に着目する[20]．それは，ゲシュタルト心理学に依拠する理論であり，それに従えば，数学的活動は，長期的なスパンで子どもの思考水準が上昇する(すなわち新しい構造を洞察する)ことであると見なされる．思考水準は，実際には５つあり，それらは初等教育段階から高等教育段階にまで関わり，数学的活動の大局的本性を示唆している．

[20] ヒーレ夫妻の思考水準論は，旧ソ連の数学教育研究者によって注目され，この理論に照らした大規模な調査研究が組織され，それに基づき，幾何カリキュラムの一部(初等中等教育の前期)が改革された．この成果が後に欧米に広まり，結果として世界的な注目を集める理論となった．Пышкало, А. М. (1965). *Геометрия в I–IV класса*. Просвещение.　Wirszup, I. (1976, August). Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry. Papers from a research workshop (pp. 75-97).

思考水準は，学習される内容の一般性，抽象性および論理的構造をも含む複合的概念である．ファン・ヒーレ夫妻は，中等学校における幾何教授の経験を通じて，幾何の認識には5つの思考水準(第０～第４水準)があることを発見した[21]．

第０水準(基底水準，視覚的水準) 最も低いこの水準では，図形は「全体として」(as a whole)認識され，その外形によって認識される．この水準にいる子どもは，図形の名前を知っており，視覚に基づいて，それらの弁別を誤りなく行うことができる．しかし，この水準では，ひし形を平行四辺形として，また正方形を長方形として見なすことはできない．

第１水準(記述的水準) この水準では，それまで全体として知覚されていた形の分析が行われ，図形に潜んでいる性質が認識される，すなわち，新しい**構造**が**洞察**される．この水準において，図形は性質を運搬するものとして機能し，性質によって図形の識別がなされる．しかし，図形の性質は経験的な方法によって確立されており，まだ論理的に整理されてはいない．実際，図形は単に性質を用いて記述されているだけで，定義されてはいないからである．

第２水準(局所的演繹の水準) この水準では，図形の性質間の，そして図形間の論理的関係が打ち立てられる．その際には，図形がもつ諸性質の中から特定のものが，その図形を定義する性質として採用され，残りのものは論理的方法により確立される．この水準では，局所的な範囲において，**未分化**ながら演繹推論(例えば，正方形はひし形で，ひし形は平行四辺形だから，正方形は平行四辺形である)を行うことができる．しかし，ここでの演繹的推論は未分化であるが故に，それ自体は意識の対象にはならない．

第３水準(形式論理の水準) この水準では，演繹法の意味が大域的に理解される．すなわち，理論全体を構成し，発展させる方法として演繹法を理解する．ここでは，経験的事実とは無関係に，無定義用語と公理を出発点とする演繹論理により理論全体が構成されること，そして，その数学的方法としての「論証」の意味(例えば「間接証明法」)が理解できる．ただし，この水準での公理化は，いわゆる「意味内容のある」もの，すなわち，一定の具体的解釈に基づく公理化である．

第４水準(論理法則の本性の水準) 最も高いこの水準では，論理の本性が認識される．ここでは，対象の具体的性質や対象間の関係の具体的な意味を捨象して，理論を展開することができる．これは，**数学者の認識の水準**であり，学校数学ではほとんど達成されない．

---

[21] van Hiele, P. M. (1984). Child's thought and geometry. In *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierr M. van Hiele*(pp. 243-252). Brooklyn College.

ここで，思考水準論の基本的な特徴を挙げる．先ず，より高い思考水準への発達は，生物学的な成熟としてではなく学習過程として進行する(van Hiele, 1959: 50)[22]．すなわち，適切な教育により，ある水準から次の水準への移行を促進することが可能となる．但し，ある水準から他の水準へ，中間の水準を飛び越して移行することはできない．というのも，思考水準論は，より高い水準の要素が一つ下の水準で**未分化**ながら含まれており，それが**顕在化**(洞察)されることで高い水準へと移行するよう構成されているからである．さらに，各思考水準には，専門的な，そして論理的な用語からなる**固有の言語**があり，水準の移行の際にはその言語が拡大する．従って，異なる水準にある人は実質的に異なった言語を運用するため，お互いに理解し合うことはできない．以上が，思考水準論の基本的な特徴である．

さて，ファン・ヒーレの思考水準論は，ストリャールの数学的活動論とどのように関係しているだろうか．ストリャールによれば，思考水準論は，子どもの現下の数学的活動の水準を示すとともに，潜在的に発達可能な数学的活動の水準，すなわち学習指導によって子どもが移行可能な水準を示すものであるとする(Столяр, 1986: 56-57)．かくして，数学的活動に基づく学習指導は，ある思考水準から次の思考水準への移行を促進することであると位置付けられる．両者の関係は，次のような図式により表される．

第４水準：論理法則の本性の水準
↑ 数学的理論の形式論理的組織化
第３水準：形式論理の水準
↑ 数学的命題の大域的論理的組織化
第２水準：局所的演繹の水準
↑ 数学的素材の局所的論理的組織化
第１水準：記述的水準
↑ 経験的素材の数学的記述
第０水準：視覚的水準

思考水準と数学的活動に基づく学習指導との関係

こうした図式の具体的意味を示すために，次に，ストリャールによる事例(Столяр, 1985)[23]を取り上げる．

[22] van Hiele, P. M. (1959). *Development and learning process*. Groningen.

[23] Столяр, А. А. (1985). Вопросы теории в курсе методики преподавания математики. *Современные проблемы методики преподавания математики*. Просвещение.

図1の図形(経験的素材)が与えられている．観察や測定に基づき，その図形に見いだされる性質を記述するという課題が提起される．生徒は，見いだされた性質を，数学の言語を用いて表現する．

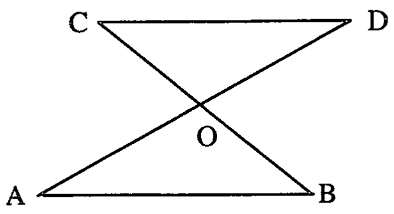


図1

p_1 : $AD \cap BC = O$, p_2 : $BO = OC$, p_3 : $AO = OD$, p_4 : $AB = CD$

p_5 : $\triangle AOB = \triangle COD$, p_6 : $\angle ABC = \angle BCD$,

p_7 : $\angle ABC$ と $\angle BCD$ は錯角をなす，p_8 : $CD \parallel AB$

数学的言語によって表現された図形の性質(p_1 から p_8)は，数学的素材であり，それらは，性質の集合であるので，集合の表記を用いて，次のように表される．

$$P = \{p_1, p_2, p_3, \cdots, p_8\}$$

ここで，P は，単なる性質の列挙であり，まだ構造を持ってはいない．そこで，次のような問題が提起される．「これらの命題の正しさは，すべて経験的あるいは実験的な方法によって検証される必要があるだろうか」(Столяр, ibid: 62)．もし，そうした必要がなければ，われわれは，経験的に検証する無駄をできる限り省くことができる．これは，経験的方法により確立された性質の集合 P の中から，いくつかの性質(しかも必要最小限の数)を取り出し，残りのすべての性質を論理的に導くという問題である．

この問題の解決には，命題の集合 P に含まれる命題間の論理的な関連を探究することが必要となる．ストリャールは，こうした探究を「論理的実験」(логические эксп－еримент, Столяр, 1985: 62)と呼ぶ．こうした「論理的実験」は，反例の可能性を検討することによって行われる．試みに，命題 p_1 を取り上げる．このとき，p_2 は p_1 から導かれないことがわかる．実際，p_1 は正しい(真である)が p_2 は正しくない(偽である)モデル，すなわち，反例を構成できる(図2)．

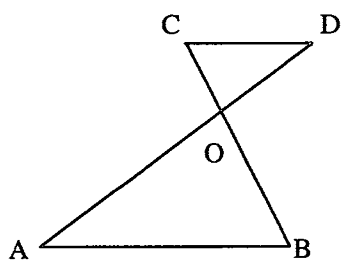


図　2

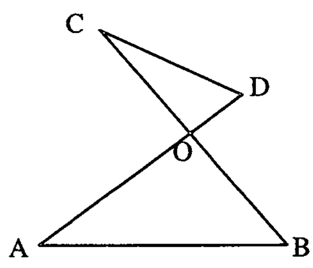


図　3

このような反例から，p_2 は p_1 から導かれないことが分かったので，出発的となる(根元的)命題として，両方が採用される．こうした「論理的実験」をさらに進めると，p_1 と p_2

から p_3 は導かれないことがわかる．実際，p_1 と p_2 は真だが p_3 は偽であるモデルを構成できるからである(図 3)．しかしながら，p_1, p_2, p_3 は共に成り立つが，他の性質は成り立たないようなモデルは構成できない．このことは，p_1，p_2，p_3 が成り立てば，他の性質は必然的に成り立つことを意味する．そこで，これら三つの命題を出発点(根元)とした場合に，他の命題が実際にどのように導かれるかを検討すると，命題の集合 P に関して，次のような構造(図 4)が得られる．

こうした「論理的実験」に関連して，異なる性質の組み合わせを出発点として採用することが出来ないかという問題も生ずる．いろいろと実験を行った結果，(p_1, p_4, p_8)，(p_1, p_5)の 2 組みが出発点となることがわかる．これらに対応する命題の構造は，図 5, 図 6 にそれぞれ示される．

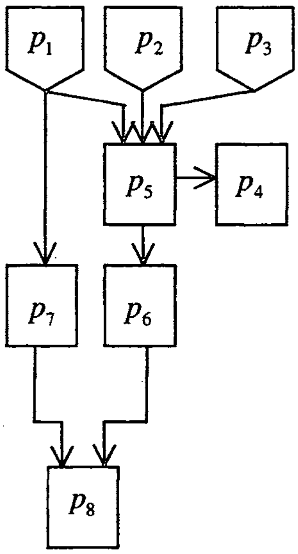


図 4

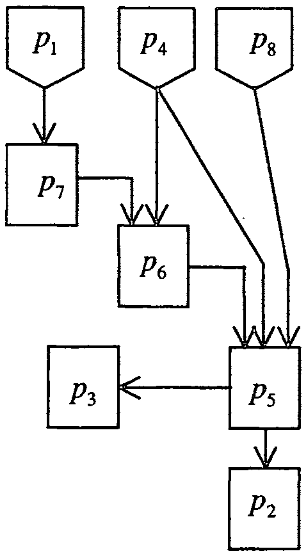


図 5

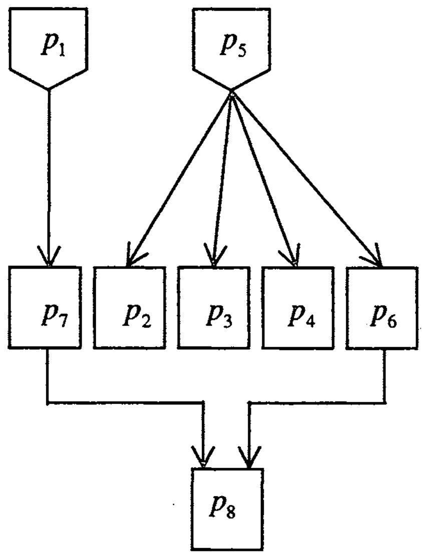


図 6

命題の集合 P に複数の論理的構造が得られた後，次のような活動が展開される．それは，図 1 において頂点 A と頂点 C を結び，新たに辺 AC が付け加えられる(図 7)．そして，この拡張された図形において見いだされる性質(例えば，同側内角とその和の値)が加えられ，結果として集合 P も拡張される(それを P' とする)．この拡張された集合 P' において，再び「論理的実験」が行われる．その際には，既に P において得られた理論構造に基づき，P' の論理的組織化がなされる．こうした活動はさらに展開し，最終的には，平行四辺形(ABCD)が構成され(図 8)，その性質の集合が論理的に組織化され，出発点となる複数の命題の組に応じて，平行四辺形の定義が定められる(Столяр, 1985:

65).

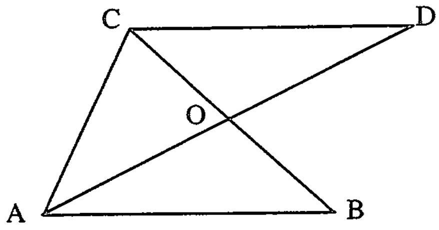


図 7

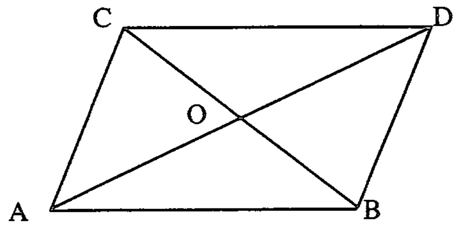


図 8

先の理論的図式とここでの事例より，「数学的活動に基づく教授・学習」は，次のように定式化される．先ず，与えられた経験的題材(上の事例では視覚的図形)を，観察・実験・測定という経験的方法によって検討し，見いだされた性質を数学の言語で記述することで，数学的素材の有限集合 $P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$ が得られる．こうした経験的素材の数学的記述(M∋M)は，ファン・ヒーレの第０水準(視覚的水準)から第１水準(記述的水準)への移行を意味する．この命題の集合 P は，まだ構造を持っていない，つまり，論理的に整理(系統化)されていないものであった．そこで，この集合 P の最小の部分集合 A で，$\Gamma, A \rightarrow p_i, 1 \leq i \leq n$ なるものを選び出すという問題が提起される．ここで Γ は，すでに真であると見なされた命題の体系[24]である．この問題は，Γ と A から，P の残りすべての命題が導かれるように，A を決定することである．ここで，A は，P の集合の根元的性質であり，いわゆる公理に相等する．この問題を解決することで，命題の集合 P は構造 $(P, \Rightarrow)$，すなわち命題のネットワークを構成することになり，P は小さな理論，つまり局所的理論として Γ に組み込まれる．こうした数学的命題の論理的組織化を続けることによって，命題の体系 Γ は次第に拡大し，一つの理論体系となる．こうした活動，すなわち，命題の集合に論理的構造を入れ，命題間の関係網を構成する活動(ЛOMM)は，ファン・ヒーレの第１水準(記述的水準)から第２水準(局所的演繹の水準)へと上昇する活動を意味する．これまで見てきたように，ストリャールの「数学的活動に基づく教授・学習論」は，ファン・ヒーレの思考水準の移行を促進しようとするための理論枠組みであると言える．

ここで，これまでの議論を整理する．本小節では，大局的視野からみた数学的活動論を検討した．大局的な数学的活動の特徴を検討する手だてとして，本論文では，数学的活動のモデル論を取り上げた．まず，「数学的活動」という用語を数学教育に取り入れたハンス・フロイデンタールのモデルを検討し，数学的活動の本質が「数学化」，すな

[24] ここでは，公理，既に証明された定理，定義により真である命題．

わち，数学的な手段によって組織化する活動であること，そして，「数学化」は，「現実の数学化」と「数学自身の数学化」という二つの側面からなっていることが示された．

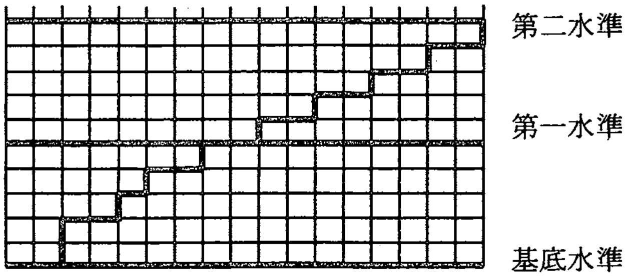
こうした数学的活動の基本的な側面を踏まえつつも，その内部構造をさらに明らかにするために，本論文では，数学的活動のより多様な側面を区別し，包括的な記述を与えている島田のモデルを取り上げ，その特徴を検討した．その結果，数学的活動は，**数学的モデル構成による現実世界と数学の世界の相互作用**として定式化された．すなわち，数学的活動とは，**現実世界における未解決の問題状況に対して，適宜条件や仮説を設定し，簡潔で御しやすい数学の問題として定式化することにより数学の舞台にのせ，数学的方法を用いて演繹処理し，得られた数学的結果を当該の問題の解決に資すること**であると見なされた．

次に，本論文では，数学的活動を実際の教育の文脈において具体化する研究を取り上げた．ここでは，数学教育の大局的な類型論から次第に局所的な学習指導論へと議論を展開していった．

前者の類型論では，「フロイデンタール研究所」で進められている研究を取り上げた．そこでは，「水平的数学化」と「垂直的数学化」という二種類の数学化を視点とした四つの数学教育論の類型が比較検討され，それらの中で，「現実的数学教育論」と呼ばれる類型が，数学的活動を実現する上で，模範的なものとして推奨されていた．しかし，「現実的数学教育論」の具体的な姿，すなわち，実際のカリキュラムの領域や系統を二つの数学化を視点として，どのように組み立てるかという問題となると，まだ大雑把な枠組みに止まっているように思われる．というのも，「現実的数学教育論」は，上で取り上げたファン・ヒーレの「思考水準論」を基礎としており，初等教育段階から高等教育段階にまで関わり，従って，数学的活動の大局的本性を反映しているが故に，上記のような問題を抱えることになる．

後者の学習指導論では，ストリャールの「数学的活動に基づく教授・学習論」を取り上げた．そこでは，数学的活動のモデルを，教授学の理論と心理学の理論に組み入れる試みがなされていた．しかしながら，ストリャールの理論枠組みも，「思考水準論」に依拠しているため，具体的な学習指導の展開を示唆するような議論は，なされないままとなっている．実際，上で提示した事例は，その内容を検討するとき，二つの思考水準を上昇することを意味しており，実際の学習指導過程の記述とは，到底考えられない．すなわち，その事例は，凡そ数カ月にわたる長期的な学習指導の過程を，合理的に再構成したものであると思われる．

今日，「フロイデンタール研究所」は，「現実的数学教育論」を発展させる上で，「思考水準論」を大枠として受け入れながらも，その理論的な粗さを修正し，より局所的なレベル，すなわち小規模な単元を扱う**授業レベル**に適合するよう改良を試みている(Gravemeijer, 1994; Treffers, 1987)[25]．そのことは，次のような図により表現されている．



大局的な思考水準を埋める局所的水準での数学化の網目(Treffers, 1987: 248)[26]

この図式において，次の二点が留意される．一つは，「現実的数学教育論」は，大局的で巨視的な水準(macro-level)，すなわちヒァン・ヒーレの思考水準の間に，局所的で微視的な水準(micro-level)での数学化の網目を組み入れていこうとしていることである．ここで，網目の横糸は「水平的数学化」を意味し，縦糸は「垂直的数学化」を意味する．こうした二種類の数学化を連続的に展開することを通して，巨視的な思考水準間の隔たりを埋め合わせようとする．トレファースは，微氏的な数学化の連続を，「漸進的数学化」(progressive mathematising: Treffers, ibid: 248)と呼ぶ．

大局的な思考水準を埋め合わせるもう一つの鍵となる観点は，社会・文化的側面である．そこでは，数学としての真正な文脈(現象学的に分析された状況: Gravemeijer, ibid: 90)に子どもを招き入れると共に，豊かな発想をもつ子どもの意味の構成と，数学文化の代表者である教師の提供する範例(paradigm)，図的，モデル，そして記号という「文化的増幅装置」(cultural amplifier: Treffers, ibid: 251)が相互作用することを通じて，思考水準が徐々に上昇していくよう，単元計画を試みている．「現実的数学教育論」は，こうした文化的増幅装置を，学習の初期の時点から積極的に取り入れることを推奨する．その理由は，こうした文化的増幅装置は，「垂直的数学化」に関わる構成部分であり，それを積極的に導入することにより，思考水準の隔たりを橋渡しする(bridging the level difference by vertical instruments: Treffers, ibid: 248)，つまり，基底水準での直観的で，インフォーマルで，具体的文脈に根ざした操作と，第二水準での形式的で，体系的な思考

[25] Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. CD-β Press. Treffers, A. (1987). *Three dimensions*. D. Reidel.

[26] 原図では，思考水準は，水準 1，2，3 となっている．尚，三つの水準が挙げられているのは，これが，初等教育段階を視野にいれているからである．

水準との隔たりを埋め合わせる手助けになると考えるからである．

その後 RME は，新しい展開を見せている(Gravemeijer et al. , 2000)．それは 3 点あるように思われる．第 1 点は，思考水準の移行のために 4 つのレベルを設けていることである．第 2 点は，児童がレベル 2 とレベル 3 の間で，児童によるモデルの自己発展を期待することである．そして，第 3 点は，シンボル化に着目し，それらが教室において社会的に共有されたとみなされるフォーマルな知識の構成の機会とみなすことである．

ここで，第 1 の点について，若干説明をしたい．レベル 1 は「状況的レベル」(situational level)と呼ばれ，現実感（リアリティ）のある状況で，具体的な問題が具体的に解かれる場面である．レベル 2 は「参照レベル」(referential level)と呼ばれ，子どものインフォーマルな方法にもとづく状況のモデル構成がなされる．参照という語の含みは，作られたモデルが具体的な場面や状況を参照するということである．このモデルが具体から切り離され，一般的なものに洗練される段階が文字通り「一般的レベル」(general level)と呼ばれるレベル 3 である．このレベルでは，モデルそれ自体が対象化され推論の道具となる．ちなみに，レベル 2 のモデルを「モデル-オブ」(正式には「状況のモデル」(model of situation)，レベル 3 のモデルをモデル-フォア(正式には「標準を指向したモデル」(model for standard)といい，このレベル 2 とレベル 3 の間のモデルの自己発達によって，標準的で公的な数学の知識へと近づく．そして，最後のレベル 4 では，「形式的レベル」(formal level)と呼ばれ，フォーマルな数学的知識やシンボルが形成される．これら 4 つのレベルを，グレーブマイヤーらは，2 階建てバスの乗客数を求める場面が，バスと乗客の簡単な絵により表現され(レベル 1)，次には 2 本の棒に玉を通した教具で表現され(レベル 2)，それが非標準的な数の式で表現され(レベル 3)，最後には慣習的で標準的な式で表現されるような例で説明する(Gravemeijer et al. , 2000)．

こうした RME 理論は，先に挙げた算数的活動の問題について示唆を与えるように思われる．第 1 に，数学的活動を 2 つの数学化の次元から構造的に捉えている．第 2 に，児童・生徒の思考について，いくつかのレベルを設けることにより，数学的活動の質的高まりを議論しようとしている．第 3 に，数学的構造の現象学的な分析によって，数学的な考えによって組織化される具体的な問題状況から学習をスタートする．

しかしながら，RME は 2 つの問題点を持っているように思われる．第 1 に，インフォーマルな個人的知識とフォーマルな社会的知識がいかに結びつくか，その際にシンボルがどのような役割を担うかの説明が明確ではない．RME では，具体的場面からモデルを構成し，それを自己発展させ，やがてフォーマルな知識と結びつく可能性を想定し

ている．しかし，レベル3からレベル4へ移行，すなわち，モデルからシンボルへの転換には大きな壁があるように思われる．児童が自己発展させたモデルはその性格上私的な本性を持ち，教師が提供する慣習的な性格を持つシンボルとは連続性を持つとは限らない．なぜならば，自己発展したモデルは児童の問題解決の道具として機能し，教師が導入したシンボルは公的な表示機能という異なる機能を持っているからである．この意味で，モデルとシンボルの2つの異種機能が併存することになるが，それらがどのような関係にあるかについては説明がなされない．また，先の2階建てバスの例においては，「モデル」という語の使用は適切であろうが，比例の学習の場合にはやや難があるように思われる．例えば，伴って変わる2変量の関係を表現し，それが自己発展してグラフになるとは期待しにくい．なぜならば，グラフは，本来空間的・図形的でない数量を，位置や曲線として表した特異な表現だからである．

第2に，RMEが設定する4つのレベルは，学習者個人の思考の抽象化・一般化のレベル，すなわち，個人の「行為」の発達を記述しているものである．従って，教師や他の児童との社会的相互作用がレベルの上昇とどのように関係するかが明確ではない．こうした問題の原因は，RMEが依拠する理論的立場，すなわち，「社会的構成主義」(Social Constructivism: Cobb et al., 1993) にあると考えられる．この立場は，教室における数学的活動を対人的相互作用のレベルで分析する社会学的視野と，個人レベルで分析する心理学的視野を適宜取り合わせるものである．この立場は，学際的な理論とは言えても，決して整合的な理論とは言えないとする批判 (Waschescio, 1998) がある．その主たる問題は，教室における数学的活動を社会学と心理学の2つの「要素」に人為的に還元し個別に記述するのみで，両者の関連性を説明しない点にある．

これに対して，文化-歴史理論は，人が心的道具を取り込む過程を次のように説明する．道具 (刺激対象) は外部に存在して対人的結びつきを構成し，その後に個人の心的道具となる．すなわち，道具がシンボルとして機能する前に，表現や伝達という社会的な機能を果たすとする．

３．数学的活動カリキュラムの具体例：比例を素材として

３．１．文化-歴史的活動理論

文化-歴史的活動理論は，元来「文化-歴史的発達論」と称され，今日では「活動理論」とも呼ばれている (Выготский, 1982)[1]. 文化-歴史理論における活動の特徴は3点あるように思われる (大谷, 2002).

第1に，活動という場合，それは質的側面を指す．活動の語感には「活発に動き回る」ということが想起されるが，活動理論では，量的な強さでなく，質，特に動機 (モチーフ) がその指標となる[2]. 第2に，活動は文化的な営みである．特に，活動には，歴史的に蓄積された，当該の文化に固有の「文化的道具」(cultural tool) が使用される．そして，第3に，活動は社会的に構成(social formation)される．それは，新参者が，能力に長けた人の導きと支援のもとで当該の文化的実践に見習い的に参加しながら，活動の動機，すなわち，質的に固有な活動の構造を知り，文化的道具の使用に堪能となっていく過程である．活動理論は，大人等との協働的な取り組みを「活動」とみなし，個人が行うことを「行為」(action)と呼び区別する．かくして，複数の人々からなるシステムとしての活動の中に行為が構成部分として含まれ，他者との協働を通して，個の行為が文化的道具により「媒介された行為」(mediated-action)となる過程を発達と見なす．協働的活動では，個が独力で可能なこと以上の質的に新しい高まりが生まれ，その中で個の行為が質的に発達する状況，すなわち，「発達の最近接領域」が構成される．

ここで，第2と第3の特徴について若干補足説明をする．というのは，「道具」や「媒介された行為」という考えは，算数・数学教育研究では，まだ馴染みが薄いと思われるからである．

道具に関しては，ヴィゴツキーの「道具的方法」(Выготский, 1982: 104)という考えにより説明される．それは，何らかの刺激に対して反応する際に，それを直接的にではなく，人工的で補助的な媒介刺激 (それを「心的道具」と呼ぶ) を意図的に創造し，間接的に反応することを指す．心的道具の例として，言語，代数記号，図式，図表などがあげられる．ヴィゴツキーは，ケーラーが類人猿の実験から子どもの思考を類推することに異議を唱える．類人猿も子どもも，手の届かない棚の上にある食べ物を取る課題を道具 (椅子と棒) を使って解決するが，子どもはことばも用いる．「ことばを補助として意図的な計画を立てつつ，道具として手近にある物だけを用いるだけではなく，課題の解決や将来の行為の計画を立てる上で有用となる対象を探索，準備することで，子ど

もは極めて広い範囲の操作を遂行することができるのである.」(Выготский, 1984: 24). このように，子どものことば行為は問題解決の単なる付随現象ではなく，問題を分析し計画し解決する本質的道具となっている. これは，行為がことばによって媒介されていることの例である. この論文で，ヴィゴツキーは，心的道具をシンボルとも呼んでおり，今日では，そう呼ばれることが多い. 例えば，ネミロフスキィーらは，「その場に存在しないものを存在せしめ，それを用いて物事をなす空間を創造すること」(Nemirovsky & Monk, 2000: 177) を「シンボル化」(symbolizing)と呼んでいる. 心的道具よりもシンボルという語を用いるのは，人間固有の心的世界で知的対象を「再現」(represent)する機能を強調するためであろう.

3. 2. 文化-歴史的活動理論に基づく比例

文化-歴史理論の視点から比例を検討することは，(ア) 動機，(イ) 文化的道具，そして，(ウ) 教師が子どもを導く過程を明確にすることである(大谷・中村, 2000).

(ア) 比例，一般に関数は，次のような動機に支えられた，知ることの数学的方法である. それは，「われわれが制御したいが，直接には接近しにくい事象があるとき，この事象が，接近可能で，制御しやすい事象のいくつかによって定まってくることがわかれば，その難しい方の事象も制御できる」(島田, 1990: 30)というものである. これは，問題場面を所与のものとみなさず，数量の変動の法則性をつかんで，それを問題解決に利用しようという積極的な立場である.

関数の積極的な利用という立場から，次の2点が重要となってくる (三輪, 1974). 一つは「投影」，すなわち，ある事象を別の事象によって見ることにより対象の考察を容易にすることであり，もう一つは「働き」，すなわち，関数がどんな性質を持ちどんな構造を保つかを考察することである. これは，対応や変化の法則性をつかむこと，すなわち伴って変わる量において不変のものを見いだし，それを利用することである[3].

(イ) 関数を視点として実際の問題解決をおこなう際には，種々のデータを組織的に分析することになるが，それをうまく扱う文化的道具が数表・グラフ・式である. 実際，伴って変わる数量(例えば，異なる時刻に生起する現象)を直接比較することはできない. これは，媒介的道具によって再現可能となる. 数表・グラフ・式などの道具は，束の間の現象を定常的に存在させ，それを対象として操作する手段を与える.

数表は，実験により組織的に収集したデータをうまく配列したり，独立変数を組織的に変えた場合の従属変数の値の集合を規則的に配列したりする道具である. 本来，測定

行為の結果得られた既知のデータを見やすく整理する目的で構成された数表が，ある程度縮約され，シンボル化されると，具体的な状況において適切な行為を示唆する．すなわち，数表は，まだ手元にない未知の新しい値を予測したり得たりするための予備的行為を示唆するものとして機能する．

グラフは，2変量の間の関係を平面上に図形的に表したものである．それは，本来空間的・図形的でない数量を，位置や曲線として表現した視覚的シンボルである．グラフは，伴って変化する現象を時間を超越した全体として一つの曲線上に共存させる．それは，数表で上下に配置されている2変量を分離する一方で，それらを一つの対(x, y)とみなし，離散的に並置されてきた対全体を一つの集合とみなし，その集合全体において成り立つ質的傾向性，しかも連続量における傾向性を視覚的に際立たせる道具である．数表においては複雑であった比例関係は，グラフ化すると直線という最も単純で知覚されやすい図形で表現され，その傾きによって依存関係の程度や強さが表される．比例のグラフがシンボルになると，座標平面上にプロットされた実験データに比例の関係を当てはめてパラメータを推定したり，現象を意味づけ予想したりする上で威力を発揮する．

式はデータの全体的傾向性を数で表し，従属変数が独立変数によって決定される仕組みそれ自体を直接表現するものである．式を用いることは，比例を関数として，すなわち2変数間の一意対応と考えていくことを意味する．式は，伴って変わる2変数の全体において成り立つ一般的な数量関係の構造そのものを簡潔・明瞭に表現する．比例の式では，「円周＝円周率×直径」，「道のり＝速さ×時間」等の具体的な数量間の関係ではなく，それらに共通する一般的な構造を表すものとなる．式をシンボルとして扱うようになると，問題場面の根底に横たわる本質的な仕組みを顕在化することができる．操作・変形した式の形から比例であると判断したり，比例の性質 (和を保存する等) にもとづき現象を説明することができる．例えば，円周は直径に比例し，比例する2量は和を保存するから，円周はそれに内接する2つの円周の和に等しいことがわかる．また，同一変量に比例する2量が与えられたとき，それらの和が (そして差も) 比例することもわかる．こうしたことは，式によって明瞭に扱える．かくして，式は行為や意味のシステムが縮約された塊であり,シンボルの語源 (sum-ballen 束ねる(combine)) に最も合致している．

(ウ) について検討するためには，その前段階として，小学校と中学校における接続性を具体的に検討しておくことが必要であるので，後に節を設けることにする．

３．３．小学校と中学校の接続性

比例に関して学習内容の接続性を検討する際に，小学校全体におけるつながりを検討することの重要性は論を待たない．実際，比例はその用語も含めて6年で正式に学習されるが，その基本的な考えは，かけ算の学習から暗黙的に用いられており，小数・分数の乗・除の立式における考え方の基礎になり，単位当たりの大きさ，割合，比，面積や体積，公式等においても意識されうる．本稿では，その研究課題に鑑み，小学校6年と中学校1年の間の接続性に焦点を当てることにする．

小学校では，正の有理数の範囲で，比例の一般的な諸性質を見出すことが主要な学習内容となっている．そこでは，伴って変わる数量を具体的に検討した後に整理された数表を取り上げ，それを用いて内比により，すなわち，「x の値が2倍，3倍，・・・になると，それにともなって y の値も2倍，3倍，・・・になる」により比例を定式化する．その後，グラフが取り上げられる．従前は式も扱われたが，今後は明示的には学習指導されないことになっている．この意味で，小学校では，数表を通した比例の学習が中心となるように思われる．

中学校の比例の学習指導では，数表の重要性は軽減され，それに代わり式が優勢となる．実際，比例は式によって再定義される．比例を定義するというのはこの段階では言い過ぎかもしれず，むしろ比例の色々な性質を知ったうえで，最も特徴的な性質によってそれを「代表する」と言う方が適切かもしれない．小学校で計算操作であった式が，中学校では比例の諸性質の中で際立ち，性質の集合の「ラベル」となる．ここでの学習は，式に基づいて数表の仕組みが説明され，グラフが作成され，比例関係を式に表すことや，与えられた式に対応するグラフを選ぶことが課題とされる．このように，中学校の比例では，式が優位となり，式を組織化原理として単元全体が組み立てられる(大谷・中村・漢野, 2001).

小学校と中学校の比例の意味の違いは，内比に基づく定式化から外比に基づく定義への見方の変更を含意する．その1つの理由として，小学校で外比を扱うことが難しいことが考えられる．しかし，より本質的な理由は，中学校では扱う数範囲を負の数も含めた有理数全体にまで拡張するからである (島田, 1990). 正負の有理数全体において内比で比例を定義しようとすると，その表現は，この段階の生徒にとって極めて冗長で複雑なものとなるが，式で表せば簡潔で明瞭なものとなる．さらに，式を用いることは，比例を関数として，すなわち，「一方が○倍になると他方も○倍になる」ということから，「一方を決めれば他方は一意に決まる」という関数の世界に入っていく真正な機会と考

えられる．さらに，式を扱うことは，伴って変わる2変数の全体において成り立つ一般的な数量関係を一つの対象として考えることを意味する．小学校での比例の性質は，データを操作する一般的な規則であり，動的なものである．しかし，式$y=ax$となると，それは，すべての対(x, ax)からなる集合を表す静的な対象，しかも具体的な数量間の関係ではなく，それらに共通する一般的な構造を表すものとなる．この段階で，「比例$y=ax$は，・・・」という主語として式の表現が使用可能となる．

比例，一般に関数の考えは，「事象を1つの系と見る」(三輪，1974)こと，すなわち，数量の変動の個々の場面でなく，数量の変動を全体としてとらえること，個別の数値について考えるのではなく，それを連続的に変化するものとみなし，変化する数量全体において成り立つ不変的で一般的な性質を見出し，それを用いて問題の解決にあたることを目指している．比例関係にある具体的な現象を種々の一般的諸性質によって考察すること，すなわち種々の性質として比例をとらえること，主としてそれを数表において明示化・顕在化することが，小学校の課題であると思われる．

小学校で学ぶ比例の性質は，一般的諸性質の集合体を成している．それらの性質は，みな等価なものであり，明確な秩序を持ってはいない．もちろん，児童は比例の性質を適宜使いながら問題を解決しているが，それらの性質間の関連性をはっきりと自覚しているわけではない．比例の諸性質の関係を顕在化・明示化すること，特に，式を中心として秩序付けることが，中学校での課題であると考えられる．これは，ヒーレの言葉を借りるなら，式が比例の一つの「属性」(properties) から属性の集合を代表する「特性」(character) になることであると特徴付けることができる (van Hiele, 1986: 64)．しかし，その際には，負の数への拡張，内比から外比への観点の変更，また，操作手続きから対象へ転換を伴い，「方法の対象化」という言葉では捉えられない複雑な過程が含まれている．

3．4．小学校における教授実験のデザイン

（1）談話による表記の機能的転回

教授実験のデザインは，児童が，数学文化を代表する教師の導きと支援のもとで授業に参加しながら，活動の動機 (関数の考え) を知り，文化的道具 (数表・グラフ・式) の使用に堪能となっていく過程を組織化することである．そのためには，次の2つのことが計画されなくてはならない．

第1に，関数の考えが際立つような問題状況を設定すること．第2に，それを解決す

るための道具として数表・グラフ・式を学習指導の早い段階から社会的相互作用において登場させることである.

第1点は，数学的考え方である関数の考えを活動に埋めこむことである．これは，単に，伴って変わる2量を前提とすることではない．関数の考えである「投影」と「働き」の意味が真に理解されるには，多くの数量が関係を持っている実際の複雑な事象から，重要な2変数を抽出し，他の変数は一定に保つ抽象化・単純化の過程を必要とする状況に活動を埋めこむ必要があろう.

第2点は，児童の自己発展的モデルからは期待できにくい関数の文化的道具を自然な形で彼らに提示することである．そのために，本稿では，社会的表記の多元的機能および談話の一般化の機能を手がかりとする．実際には，数表およびグラフの「統計的表記」を教師と児童の社会的相互作用の基盤として持ち込み，談話を通して意味の一般化と転換をはかることで，「関数的なシンボル」となるように導く.

比例を学習する以前，児童は，具体的現象についてのデータが与えられると，統計的な表や折れ線グラフを作成することができる．しかし，それらはまだ本来の意味で比例の道具として機能してはいない．実際，それらは質的には関数的というよりもむしろ統計的なものであり，機能的には結果を記録したり他者に示したりするための社会的機能を果たす.

比例の授業で，教師は，統計的表記の社会的機能を利用し，より高い課題を要求しつつ，教室の中で児童が表記を使って考え，説明するよう導きながら，関数的道具となるよう関わってゆく．例えば，数表であれば，データを左から右に順に見るのではなく，間をとびこえたり間を補間して見ること，また，グラフであれば，点の間を折れ線で結ぶのではなく，直線上に並んでいることがわかったからその間を線で結ぶようになることがこれに当たる．これは，単に個別の数値について考えるのではなく，それをいろいろに変化するものとみなし，変化する数量全体において成り立つ一般的諸性質を見出すこと，すなわち「系としての見方」をすることに他ならない.

統計的表記から関数的シンボルへと意味と機能を転回するために，教師による談話の組織化が必要とされる．それは，2点ある.

第1に，比例の表現「xの値が2倍，3倍，・・・になると，それにともなってyの値も2倍，3倍，・・・になる」は算数科において著しく長く論理的にも複雑な表現で，そこには省略された言いまわしが含まれている．また，比例のグラフには専門用語「原点を通る直線」が含まれている．従って，教師は，児童が数学の公的・慣習的表現を知

り，それを使っていくよう支援する必要がある．

第 2 に，比例の学習指導は，「系としての見方」を目指すが，児童の説明は当人によくわかる個別・具体的な文脈にもとづくものであり，一般性に欠ける．そこで，教師は，教室全体で理解可能な一般的な仕組みを説明するよう談話を組織化しなければならない．かくして，教師による談話の組織を通じて,統計的表記から，専門用語を含み，系としての見方を反映する関数的グラフへと意味を変更することがシンボル化の過程となる．本研究では，シンボル化の過程は，仮説的に次の 4 段階よりなると考える．

数表のシンボル化

(a) データを整理した個別・具体的な数表

↓ (統計的表記)

(b) 数表の中に見える断片的な仕組み

↓

(c) 比例の性質を表す一般的な仕組み

↓ (関数的数表，系としての見方)

(d) 比例を操作するツールとしての数表

グラフのシンボル化

(a) 断片的なデータを表すグラフ

↓ (統計的表記)

(b) 個別のデータの配列上に見える直線

↓

(c) 比例の性質を表す直線

↓ (関数的グラフ，系としての見方)

(d) 比例を操作するツールとしてのグラフ

式のシンボル化

(a) 具体的な x の値から y の値を求める計算

↓ (計算手順の表記)

(b) y を求めるための公式

↓ (言葉を用いた式)

(c) 比例の性質を表す式

↓ (関数のシンボル)

(d) 操作するツールとしての式

(a)では，リアルな問題場面からスタートし，関数の考えにもとづき比例の問題の解決を試みる段階であり，既に知っている数学的表記を用いて解法を説明する．(b)では，社会的機能としての表記に支えられながら教師と相互作用し，次第に解決の背後にある比例の一般的な仕組みに目が向く．(c)では，表記の中から比例の一般的な仕組みが明示化され，表記は比例の性質を持ったものとなる．最後の(d)では，表記は比例のシンボルとなり，表記を扱うことで比例を操作することができるようになる．

シンボル化の鍵となるのは(b)から(c)への移行である．児童にとってこの移行は，教師の想像以上に困難である．実際，具体的な数値が求められて現実の問題が解決してしまったなら，それ以上の目的意識を持つことは難しい．(b)から(c)へと進むためには，問題の解法の背後にある一般的な仕組みを話題とし，構造を明らかにするような課題や談話を教師の側で組織しなければならない．

以上のことから，教師と児童の社会的相互作用の基盤を確立し，児童の側の個別・具体的な意味の一般化を談話を通じて導き，統計的表記を関数的シンボルに転換することが単元計画の鍵になると考える．

本教授実験では，5 次 12 時限からなる指導計画を組み立て，延べ 8 つの課題の解決を通して学習が進められた．

次	指導項目	課題
1	**YをXで判断すること** ① 水の量を時間ではかること ② 身の回りから例を考えること	I II
2	**数表から比例の性質を見いだすこと** ③ 増える数が決まっていること ④ xが○倍になるとyも○倍になること ⑤ xが1のときのyの値が決まった数であること ⑥ $x1+x2$ が $y1+y2$ に対応すること	III IV V
3	**グラフから比例の特徴をつかむこと** ⑦ 比例をグラフで表すこと ⑧ グラフの特徴を見いだすこと ⑨ グラフから比例を判断すること	VI
4	**比例を式で表すこと** ⑩ 表から式を考えること ⑪ 式とグラフを関連づけること	VII VIII
5	**まとめ** ⑫ 式を視点として比例の性質を見直すこと	

この単元構成は，一見すると，式を指導する点を除いて，従前の比例の単元構成と同じであるように思われる．しかし，小学校での従前の指導を受けた生徒が中学校で比例を学習する際に大きな困難を覚えることを指摘している (漢野, 2000)．それは，多数の生徒が，比例を「一方が増せば他方も増す」と漠然と理解しており，比例の性質を挙げる生徒の大多数は「x が○倍になれば，y も○倍になる」と内比で考え，式すなわち外比により比例が定義されると，大多数が困難を覚える．さらに，式 $y = ax$ の「決まった数」a は，x が 1 のときの y の値であると考えている．こうしたことは，従前の比例の指導が十分にはなされていないことを示唆する．本教授実験では，中学校との接続性を配慮し，次の点を強調することが，従前および現在の指導に対する改善になると考える．このことを，単元構成に照らして議論する．

第 1 次では，関数の考えである「投影と働き」を強調した．中学校において一意対応という関数の考えへ次第に発展するためにも，比例の学習指導において，「変われば変わる」という単純な見方を超えて，「投影」という積極的な見方をいっそう取り入れていく必要があると考える．「変われば変わる」から「決まれば決まる」へと移行する基礎的で操作的な経験が小学校の比例指導において組織される必要があろう．

第 2 次は，数表において，比例の基本的性質，すなわち「働き」を明示化する．それは，「系としての見方」を強調することに他ならない．「x が○倍になれば，y も○倍になる」という性質について，「x の値は何でもよい」こと，また，「○倍も整数倍だけでなく分数倍でもよい」こと，さらには，「x の和が y の和に対応する」という一般的な性質を数表の中に見いだす経験も不足しているように思われる．また，児童は，比例を自明のこととみなし深く考えようとせず，「帰一法」[4)]で代用することもできるため，比例の一般的性質を意識的に学んでいない可能性がある．児童の中には，数表において x が 1 のときの y の値のみに注目し，任意の x とそれに対応する y の値の比を考えない者も見られる．本教授実験で，投影の考えを強調することで，外比の関係について一般的に考えるよう誘おうとしている．

第 3 次は，数表で強調した「系としての見方」が一層明確にされる．数表では，離散的なデータしか扱い得ず，ともすると，個別的な部分に目が行きがちであるが，グラフはデータ全体において成り立つ質的傾向性，しかも連続量における傾向性を視覚的に際立たせる．そのためには，点の間を折れ線で結ぶという統計的な扱いを越えて，直線上に並んでいることがわかったからその間を折れ線で結ぶという関数的な扱いをするようにしなければならない．さらに，本教授実験は，投影の考えによって，グラフを点の

集合としてのみならず，一意対応としても見ることを奨励する．

第4次は，式のシンボル化を目指すものである．数表・内比・操作が優勢となる小学校の経験と式・外比・対象（構造）を中心とする中学校の経験との接続のためにも，外比で数量関係を考える素地的経験を取り扱うことが必要であると思われる．式によって比例をとらえること，すなわち，数量関係それ自体を対象化しそれを扱うことは中学校での課題であるが，比例の性質の1つとして，式を操作的に扱う経験が小学校において必要であり，また中学校の学習のための重要な役割を担っていると思われる．

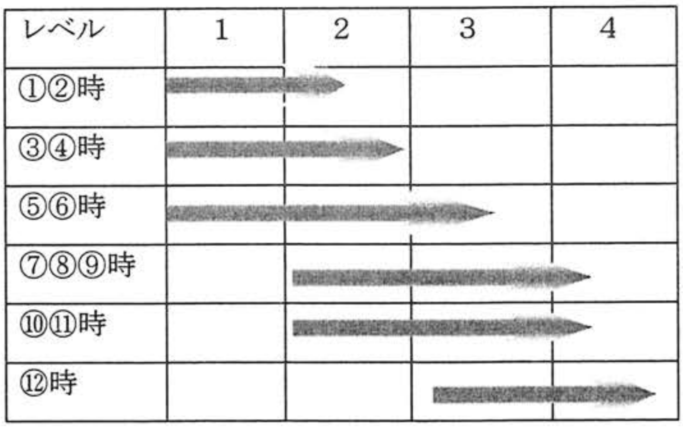
児童は，数表やグラフの学習において，計算を適宜使いながら問題を解決している．しかし，それを一般的な決まりとして意識的に使用しているわけではない．それを意識化し，数表やグラフにおいて利用されていることを手続きとして明示化しておくことが，中学校での式による比例の特徴付けの前提条件に必要であると考える．実際，式を比例の性質として意識的に使用する経験がなければ，中学校においてそれを対象として扱うことは困難であると考える．意識的に行った経験がないことを話題として，しかも，定義特性，前提，主語として取り上げることは，生徒に理解をもたらすことはできず，彼らを機械的な暗記に導くことになる．

本単元の基本的な特徴は，3点ある．

第1に，関数の考えの動機である「投影と働き」を単元全体に埋めこむ．第2に，現実味のあるリアルな問題から始まり，徐々に抽象度のレベルを挙げてゆく．第3に，やがて比例のシンボルとなるべき数表，グラフ，式を早い時期から児童にわかる形で導入し，意味を拡張・転換するよう談話を組織化する．

こうした考え方から，本教授実験では，4つのレベルに分けて単元を組み立てた．

最初のレベル1は，リアルな問題場面からスタートし，関数の考えにもとづき解決を試みる．レベル2は，統計的な表記に表して問題を解説する．レベル3は，社会的機能としての表記から思考機能としてのシンボルへの漸次の転回を図る．このことに関して，第2次では数表が，第3次ではグラフが，そして第4次では式が，表示機能からシンボル機能へと転回するように指導を計画する．特に，第2次は，数表のシンボル化のみならず，第3，第4次におけるグラフや式のシンボル化のための基礎であり，個々の特徴と異同についての「メタ表現的知識」(Gravemeijer et al. ,2000) の発達を誘うことを期待している．最後のレベル4は，児童が数表・グラフ・式を比例のシンボルとして使用することをめざす．4つのレベルからなる単元構成を図示すると次のようになる．



投影と働きを強調した第 1 次では，「何か測りにくいもの y を別のもの x に置き換えて測る」という関数の考えを強調し，それを矢印で表現した．第 2 次以降では，y と x が比例関係にあることをもう一つの矢印を用いて表した．

使われた矢印

$x \rightarrow y$　(伴って変わる)

$x \Rightarrow y$　(比例する)

第 2 次に関しては，次の点に留意した．比例の学習に入る児童は，数表それ自体について統計的な知識を持っている．しかしながら，児童は，問題場面の個別・具体的データが与えられても，それらを敢えて数表に表そうとはしない．数表を用いなくても，問題場面に照らしたインフォーマルな推論によって問題を解決できるからである．児童にとって，数表は，問題を解決するために利用するものというよりも，むしろ，何かを調べたり実験したりして得られたデータを結果として整理して記録するためのものである．よって，教師は，データを系統的に整理し，それを使って考えていくような若干高い課題を提示しつつ，数表の背後にある一般的な仕組みに児童の目が向くよう談話をデザインした．

第 3 次グラフのシンボル化では，次のような配慮をした．児童は，問題場面の個別・具体的データが与えられると，それらを折れ線グラフに表すことができる．しかし，数表と同じく，グラフに表さなくても問題を解決できる．ましてや，グラフは，その内容が非常に抽象的であるため，図的表示の背後にある数量関係を説明することは難しい (Sfard & Kieran, 2001)．そこで，教師は，数量関係を図的性質と関係させて考えるような問題場面を設定することが必要と考え，前単元で既習の拡大図と縮図を取り上げた．

第 4 次と第 5 次 では，式を取り上げた．そこでは，単に，式を導くだけでなく，比例の性質として式を活用すること期待した．以下では，実際の単元計画を示す。

３．５．中学校における教授実験のデザイン

（１）小学校の比例から中学校の比例へ

小学校の比例は，正の有理数の範囲で，主として，数表で表されたデータにより具体的な現象を考察し，比例の一般的な諸性質を見出すことが主要な学習内容となっている．また，グラフや式で比例の性質を見出すこともなされるが，数表に比べて軽く扱われる場合が多い．

比例の基本的性質，すなわち，ある値が何倍かになればそれに関連する値もまた同じ倍になることは，直感的に受け入れられることである．例えば，鉛筆が2本で50円のとき6本の値段は3倍の150円になる．また，個別の数値が与えられた割合の問題では，いわゆる「帰一法」による乗除計算により答えが出せるので，比例の考えで問題を解決する必要性を感じない．例えば，「小麦粉15kgの値段が4850円のとき，12kgの値段は幾らか.」という問題は，1kgの値段は$\frac{4850}{15}$円より，12kgの値段は$\frac{4850}{15}\times 12$円という計算で答えを出すことができる．このように「帰一法」で答えを出せる小学校の児童は，この問題を比例の考え，すなわち，「小麦粉の重さが$\frac{12}{15}$倍になれば，値段も$\frac{12}{15}$倍になるから，$4850\times\frac{12}{15}$円である」として答えを求めようとはしない．このように，小学校の児童は，比例を自明のこととみなし深く考えようとせず，「帰一法」で代用することもできるため，その一般的性質を意識的に学んでいない可能性がある．

比例の学習指導においては，いわゆる「系としての見方」，すなわち，単に個別の数値について考えるのではなく，それを連続的に変化するものとみなし，変化する数量全体において成り立つ一般的諸性質を見出し，それを用いて問題の解決にあたることを目指している．比例関係にある具体的な現象を種々の一般的諸性質によって考察すること，すなわち種々の性質として比例をとらえることを，ここでは「第1水準」と呼ぶことにする．ちなみに，この水準の前に，いわば出発点をなす「第0（基底）水準」と呼ばれるものがある．これは，先に述べた「ある値が何倍かになれば，それに関連する値もまた同じ倍になること」を個別・具体的な数値に対して直感的・無自覚的に操作している水準であり，それを一般的な性質として自覚することが第1水準の達成であり，その達成が小学校の課題である．

以上のことに関して，中学校の比例指導は，第1水準に続く第2水準の達成を目指すと考えることは理にかなっている．では，第2水準をどのように考えればよいか，また

その達成のために，実際の指導においてどのような点に留意する必要があるのか.

第1水準において，比例は，種々の一般的諸性質の集合体であった.それらの性質は，みな等価なものであり，明確な秩序を持ってはいない．もちろん，生徒は，小学校での比例の学習を通してその性質をいろいろと知っており，それらを適宜使いながら問題を解決している．従って，比例の諸性質は生徒にとって無関連の集まりではないのであるが，それらの関連性がはっきりと自覚されているわけではない．すなわち，第1水準にいる生徒は，必然的な関係を知った上で比例の性質を意識的に使用しているわけではない．比例の諸性質間の関係を秩序つけること，それが第2水準の達成を意味する.

より低い水準で無自覚的に行っていることや既に持っていることに気づくことが，次のより高い水準へ移行することであり，学習指導はその移行を支援することを目指す.行った経験がなく，持ってもいないことを教えることは，結局，生徒に理解をもたらすことはできず，彼らを機械的な暗記に導くのである．何かに気づくためには，気づかれる対象の芽を自分の内に持っていなければならないのである.やがて気づかれるそうした対象は，無自覚的「操作」として経験されている.「操作の自覚化」，これが，ある水準から次の水準への移行を特徴づけることであり，それを実現する手立てが，言葉（談話・言語）であると考えられる．なぜならば，言葉を用いて明示化することは，何かの対象を言語的に存在させることだからである.

本教授実験では，第1水準にいる生徒を第2水準へ引き上げることを目的に授業をデザインする．第2水準では，比例の諸性質の関係を明確にすること，これは，比例の性質間の関係を秩序付けることであり，より数学的には，比例を定義し，それに基づき他の性質を意味付けることである．但し，比例を定義するというのはこの段階では言い過ぎかもしれず，むしろ比例の色々な性質を知ったうえで，最も特徴的な性質によってそれを「代表する」と言う方が適切かもしれない.

第2水準への移行は極めて複雑な過程で，授業のデザインに際していくつか留意すべき点がある.

第1に，小学校で比例を学んでいるとはいえ，生徒が第1水準に達していない恐れがある.比例を「一方が増せば他方も増す」という漠然と理解していることも予想される.従って，中学校での比例の指導では，先ず第1水準の達成を確認することが必要である.この水準に達していないと，中学校での指導は意味をなさない.

第2に，第2水準では，比例は式$y=ax$によって定義（代表）される．このことに関して，小学校では，「一方が○倍になると他方も○倍になる」という性質が優勢であっ

た．別な言い方をすれば，小学校では内比に基づき比例が特徴つけられ，中学校では外比に基づき定義される．かくして，中学校での指導では，小学校の説明を転換しつつ，比例を定義しなくてはならない．その理由はいくつもある．1つは，小学校で外比を扱うことが難しいことがあげられる．しかし，より本質的な要因は，中学校では扱う数範囲を負の有理数にまで拡張するからである．正負の有理数において内比で比例を定義しようとすると，その表現は（少なくとも，$f(kx)=kf(x)$（kは有理数)という数学的記号法を使わないこの段階の生徒にとっては）極めて冗長で複雑なものとなるが，式$y=ax$で表せば簡潔で明瞭なものとなる．さらに留意すべきことは，式を用いることは，比例を関数として，すなわち「2変数間の一意対応」と考えて行こうとするものである．すなわち，「一方が○倍になると他方も○倍になる」ということから，「一方を決めれば必ず他方も決まる」という関数の世界に入っていく最初の機会と考えるのである．これは，式$y=ax$を$x \to y=ax$という対応の見方をすることに他ならない．

第3に，式$y=ax$を扱うことは，伴って変わる2変数の**全体**において成り立つ**一般的な数量関係**を一つの**対象**として考えることである．小学校での比例の性質は，「一方の値△が○倍になると他方の値▽も○倍になる」に代表されるように，専ら個別的なデータを操作する規則であり，動的なものであった．しかし，式$y=ax$となるとそれは，全ての(x, ax)の対からなる集合を表す静的な対象となる．また，それは，「円周＝円周率×直径」，「道のり＝速さ×時間」等の具体的な関係ではなく，それらに共通する数量間の関係の一般的な構造を表すものでもある．かくして，式を扱う際には，個別・具体的な演算操作から一般的な静的対象への転換を必要とする．式は，計算の具体的な手続きに基づくことはいうまでもないが，決してその延長線上に位置するものではないのである．操作手続として理解しているものを何かの物のように扱うこと（具象化(reification)）は，教師には自然で容易であっても，生徒にとっては不自然で難しいことであると思われる．

式が操作から対象になることは，式の果たす役割それ自体が変化することである．それは，式と，比例の他の性質との関わりが明らかになることである．実際には，$f(kx)=kf(x)$は結合則$a(kx)=k(ax)$によって，$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$は分配則$a(x_1+x_2)=ax_1+ax_2$によって，そして，$\dfrac{f(x)}{x}=a$は式変形によって$f(x)=ax$との関係が打ち立てられる．このことにより，計算の操作であった式が比例の諸性質の中で際立つとともに，比例の諸性質を代表するもの，すなわち，性質の集合の「ラベル（名前)」

となる．かくして，比例の性質の 1 要素，しかも相対的にそれほど目立たない要素であった操作の式が，性質の代表になる．これは，認識における大きな発展である．

第 4 に，言語の問題がある．筆者が依拠する「思考水準論」は，各水準には固有の言葉が存在し，異なる水準にいる者は互いに相手の話すことを理解できないことに着目する．「y は x に比例する」という表現と，「比例 $y = ax$」という表現では，ともに「比例」という用語を用いるが，それらの意味内容は，前者が操作を表し，後者は対象を表す．これらの用語法は，前者が，対象がもつ性質，すなわち述語であり，後者が，対象の存在を述べる主語である点で異なっている．ところで，小学校においても式 $y =$(決まった数)$\times x$ がとりあげられるが，この場合は数量関係の一般的構造というよりは，どちらかというと操作手続きを表している．従って，第 1 水準にいる生徒は，「比例 $y = ax$ は，・・・」という用語法を理解できない．第 2 水準以上の言語を自由に話せる中学校の教師の話す言語が，第 1 水準の生徒の話す言語としばしば食い違っている点に一層注意を向けなくてはならない．

以上のような留意点に鑑みると，比例の諸性質の中で，式 $y = ax$ に着目し，それによって比例を代表し，それに基づいて問題を解決できるようになるには，いきなり $y = ax$ で比例を定義するわけにはいかず，教師の側からの教育的配慮が必要であると思われる．しかしながら，これまでの中学校での比例指導をみるとき，具体的な場面での個別的な数値計算ができることに安堵し，小学校での脆弱な知識に無頓着のまま一般的な式 $y = ax$ を性急に導入し，不自然な仕方で座標を教えた後に，それを直ぐに使用してグラフを書いたり，抽象的な問題(関数としての一意対応の原理を用いる第 2 水準での問題)を解決したりすることを期待していたのではないだろうか．すなわち，教師は第 2 水準へ移行するための教育的な手立てを抜きにして，一気に水準を飛び上がるよう生徒に要求していなかっであろうか．負の数への拡張，内比から外比への変更，また，操作手続きから対象への移行，用語法の変更は，徐々にしかも入念に段階を追って進められなければならない．

これまで検討してきたことから，中学校での比例の指導では，次の諸点に留意する必要がある．

1. 第 1 水準が達成されていることを確認すること．
2. 既に得ている比例の性質を足場とし，数表を中心として数範囲を拡張すること．
   これは，数学における形式不易の原理であるが，それを操作として経験をさせてお

く.

3. 拡張された数範囲で比例の諸性質の関係を言語を用いて明示化し，比例が式で代表だれる一つの「対象」になるとともに，外比に基づく一意対応として形式化できること.「比例」という用語の新しい使い方を（対象であり一意対応でもあること）知らせること.

4. 式を対象として操作する経験を積むとともに，関数の一意対応の考えで問題を解決すること.

本教授実験では，これらの留意点に対応し，第1から第4までの4つの段階を順に踏んで第2水準へ至るよう単元計画をたてた.

第1段階（情報）　生徒は，教師から示された課題により，これから学習しようとする単元が比例であることを知る．ここで，教師は，「関数の考え」，すなわち「y を x でみること」を強調するとともに生徒から小学校で学習した比例の具体的性質を数表・グラフ・式で確認する．この情報の段階は，生徒に対して彼らが活動する文脈を与えるとともに，彼らが小学校で学んだ比例について知っている事柄を教師の側で確認することを目的とする．この活動を通して，生徒は，正の有理数の範囲での比例の性質を，操作ならびに操作を表す言葉で確認する.

第2段階（導かれた方向付け）　負の数に拡張した課題で，比例の性質をふんだんに使うような導きをする．ここでは変域を負の数に広げることで負の数の範囲で比例の性質が成り立つことをみていく．次に，正の数・負の数を合わせた全体で比例の一般的な性質をみる．この活動を通して，生徒は，正負の有理数の範囲での比例の性質を，操作ならびに操作を表す言葉の両方で確認するとともに，外比に基づく計算操作としての式表現 $y=ax$ が，内比に基づく文章表現に比べて，比例関係を簡潔で明瞭に言い表すものとなっていることを導き，次の段階で比例を考える際に，式を使うことが便利であることを示唆する.

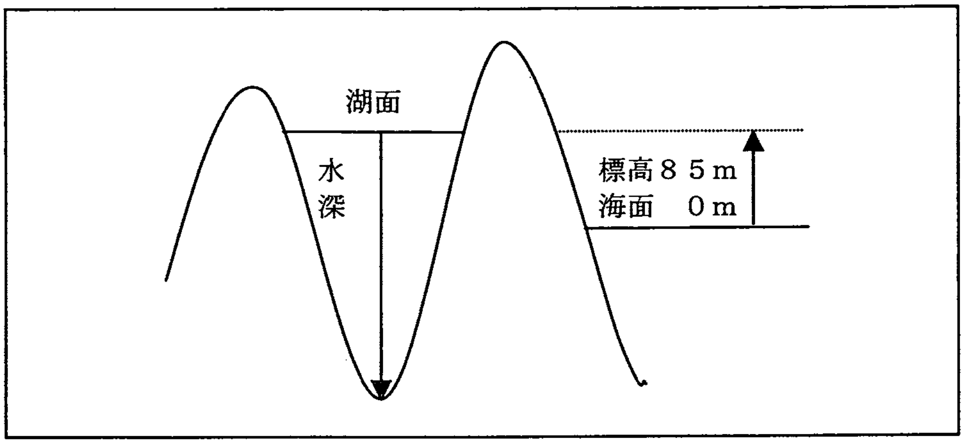
第3段階（明示化）　今まで使っていた比例の諸性質が，式 $y=ax$ に結び付けられ，式が操作から数量関係の構造をあらわす対象となる．そのために，操作としての式表現 $y=ax$ を多用する機会と，比例の性質について，式を用いて説明

する機会を設ける．この活動を通して，式と比例の他の性質との関わりが部分的に明らかになり，操作としての式表現 $y=ax$ は比例の諸性質の中で一層際立つようになり，比例の諸性質を代表するものとなる．このことにより，比例の諸性質が式 $y=ax$ を中心として統合された関係のシステム，すなわちシンボルとなる．教師は，この議論の中で，関数で使われる慣用的な用語が（特に「比例」の用語や式 $y=ax$ を対象，すなわち，主語として，また一意対応の一般的な仕組み $x \to y=ax$ として）用いられるよう指導する．

第４段階（自由な方向付け）　生徒は，比例を前提とした問題を式と一意対応の考えを用いて解決したり，式を手がかりとして問題場面が比例かどうかを判断する．かくして，比例の式はシンボルからシグナルへと変わる．

素材について（東京書籍の新教科書 43 頁，啓林館の新教科書 49 頁[どちらも正・負の数の章末]を参考にした.）

地図を見ると，たとえば，琵琶湖には，$\dfrac{\text{標高}}{\text{水深}}$ を示す $\dfrac{85}{-104}$ の数の組がかかれている．



授業においては，湖面が上がっていく場面，湖面が下がっていく場面を取り上げ，海面を基準としたときの標高を考えていく．すなわち，湖面が海面より８５ｍ高ければ標高＋８５ｍ，湖面が海面より３ｍ低ければ標高－３ｍのように負の数で表わされる．

（２）比例単元指導計画

以下では，中学校での比例の指導案を示す。

学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など
[課題１]お風呂に水を入れるようにたのまれました。ちょうどよい水の深さにしたい。浴室へ何度も足を運ばないようにするにはどうしたらよいでしょうか。 ・ 何分かたってから見に行く。 ・ 15 分位。 ＜そう考えられる理由は何か？＞ ・水を入れる時間によって水の深さが変わるから。 ちょうどよい水の量を時間で見ることができるんだね。 ＜知りたい量(y)をそれに伴って変わる他の量(x)で測れないかなあ。身の回りで探してみよう。＞ ・ 紙の枚数・クギの本数を重さで測る。 ・ 1 個 100 円のプリンで，買った個数と値段。 ・ 進む距離をガソリンの量で測る。 はかるもの x ⇨ 知りたい量 y	・ この課題では関数の考えを支えている動機をつかむ。それは，未知の量 y を求めるにあたって，手近かな量 x でみることによって，この 2 つの量の間の関係を利用して y を求めようとすることである。 ・ ここではお風呂に水を入れることを取り上げた。時間の経過に伴って水の深さが変わるとともに，水を入れ始めてからの時間を決めると深さが決まることに着目する。これより，浴槽に入れたい水の深さを時間を決めることで置き換えることができると考える。 ・ 水の深さが時間に伴って変わるという言い方を知らせる。 ・ 知りたい量 y を伴って変わる他の量 x を手がかりにして知ろうとすることで関数への関心・意欲をもたせてこの単元の動機付けとしたい。 ・ x ⇨ y この矢印が伴なって変わる x，y の間の関係を表す。

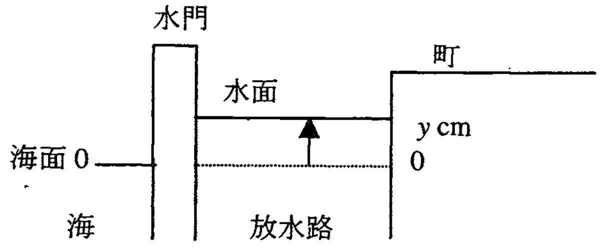
学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など

学習活動・予想される生徒の反応など

②

［課題 2］私たちの町に有名な河北潟がある。その潟から海までに放水路がある。ある日，台風による連続的な長雨で，この放水路の水面は上がり始めた。役場の職員は警戒水位を調べるのに水面が海面と同じ位置になったときから水面の上がる様子を調べだして表にまとめた。

　この数表から，x 時間(分)後の水面の位置 y(cm)はわかるだろうか。



時間(分)	0	1	2	3	4	5
水面の位置(ｃｍ)	0	2	4	6	8	10

$\boxed{x\text{ 分後}} \Longrightarrow \boxed{\text{水面の位置 } y\text{ cm}}$ はわかる？

- 1 分たつごとに 2 cm ずつ水面の位置が上がっている。
- 時間が 1 分から 3 分に 3 倍になると，水面の位置も 2 cm から 6 cm と 3 倍になっている。
- 水面の位置が 2 の倍数になっている。
- 1 分あたり 2 cm だから，求める時間をかける。
  $y=2\times3=6$，$y=2\times4=8$，$y=2\times5=10$，……
- 時間の 2 倍が水面の位置になっている。
  $y=3\times2=6$, $y=4\times2=8$, $y=5\times2=10$，……

<x に対して y を求める仕方を矢印や言葉で表そう。>

3倍　＋　4倍　+1　+1　2倍

x(分)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y(ｃｍ)	0	2	4	6	8	10	12	14	16

×2

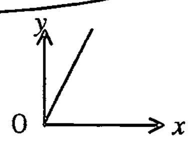
+2　+2　2倍　3倍　＋　4倍

比例　$x \Longrightarrow y$

x が 2 倍 3 倍…になると y も 2 倍 3 倍…になる関係

<グラフをかいてみよう>

・０を通る直線



指導上の留意点など

- 自然現象から（バネの伸びのような）関数関係（因果関係）を見出すのは複雑であるから，かなり理想化した場面とし，比例として考えやすいようにする。
- 地図をみると海面を基準０として山の高さや湖の湖面の高さを標高として表記している。これをもとに正の数から負の数へ拡張できる題材を持ち込んだ。この課題は，湖面が一定の割合で上がっていくことがわかれば時間をもとに湖面の位置を知ることができる。このような関係を小学校で比例として学習していることから，小学校での比例の具体的性質を引き出していく。
- 海面を基準０として，放水路の水面の位置が一定の割合で上がっていくときの時間とその時間に対応する水面の位置を表で与える。
- 前の時間では知りたい量を時間で測ることを学習しているので，この課題２でも「時間⇒水面の位置」という関数の動機を強調する。
- この表をもとに，同じ数ずつ増える，倍々関係にある比例の意味や比例では２つの数量の対応している値の商が決まった数になることなど小学校での比例の具体的性質を引き出す。
- x に対して y を求める仕方を他のデータで確かめたり未知の値を予測することで，思考の対象が現実の事象から表のしくみへと転換される。さらに，その方法を決まりとして言葉や記号で表現する。
- 連続量であるから，小数倍，分数倍もとりあげる。
- x を時間(分)，y を水面の位置としてを求める計算式を引き出し，具体的な数値を重ねたあとで，一般的な決まりとして，式 $y=$(決まった)$\times x$ として定式化する。
- 小学校での比例の定義を確認し，中学校では，ここからがスタートであることを知らせる。「帰一法」と比例の方法の違いも確認したい。
- $x \Longrightarrow y$ の矢印で x，y の比例関係を表す。
- グラフがかけるかどうかみる。

学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など

③

[課題 3] 課題 2 において，3 時間前の放水路の水面の位置はわかるか。

・わかるよ。課題 2 では，y は 2 ずつ増えていたので，今度は 2 ずつ減らして考えればよい。だから 6m 下。
・3 時間前は，−3 時間後と考えて，$y=2\times(-3)=-6$

＜では 2 時間前，4 時間前の，放水路の水面の位置はわかるか（表を負の数に広げる）＞
・2 時間前は −4m，4 時間前は −8m

＜負の数の範囲で x が 2 倍，3 倍…になると y も 2 倍 3 倍…になるという比例の性質はこの表でいえるだろうか。＞
・いえるかな。

3 倍
2 倍　2 倍

x (時間)	−4	−3	−2	−1
y (c m)	−8	−6	−4	−2

×2

2 倍　2 倍
3 倍

・ x が 2 倍，3 倍…になると y も 2 倍 3 倍…になるので比例だ。
・ $y=(-3)\times 2=-6$
・ $y=(-4)\times 2=-8$

$x \Rightarrow y$
比例

[(課題 2)と(課題 3)の合体]

3 倍　−1 倍　3 倍
2 倍　2 倍　2 倍

x (時間)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (c m)	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8

×2

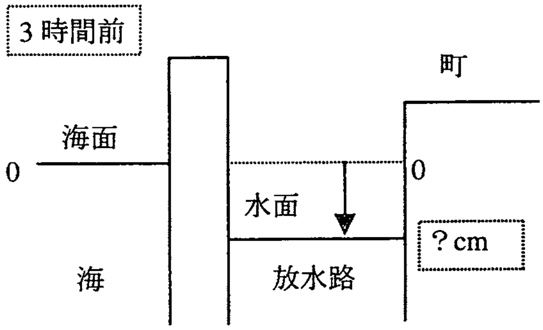
2 倍　2 倍　2 倍
3 倍　−1 倍　3 倍

比例　$x \Rightarrow y$
式　$y=2x$　で表される関係

＜負の数の範囲のグラフはかけるだろうか。＞

x (時間)	−4	−3	−2	−1	0
y (c m)	−8	−6	−4	−2	0

・ かけるかな。



・ 課題 2（正の範囲）で扱った表，式，グラフを提示し，課題 3 へとつなげる。
・ 既習事項の正・負の数より 2 時間後は＋2 時間後とすると，3 時間前は −3 時間後と考えられる。同様に，2m 下は −2m となることを確認する。
・ 負の数に変域を広げた表をつくり，課題 2 と同様に表を横にみたり，縦にみたりする。
・ 比例の性質の中で小学校での定義「x が 2 倍，3 倍…なると y も 2 倍 3 倍…になる。」を負の数で具体的に見る。たとえば，x が −1 から −2 の 2 倍になったとき，y は −2 から −4 の 2 倍になるなど。

・ 式については $y=2\times(-3)=-6$，$y=2\times(-4)=-8$ など，具体的に y を求める計算式を引き出す。縦の見方を強調する。ここで y を求めるとき
・ 正の数の範囲の表と負の数の範囲の表を合体させる。表全体で小学校の定義を見る。例えば，x が −1 倍になると y も −1 倍になるなどをみる。

このように負の数と正の数の間をまたいで小学校の定義をみる中で生徒たちは小学校の定義が不便でややこしく感じるようになる。
・ 0 については小学校の定義が成り立たないことに気づかせたい。

・ 比例を式で定義する。式そのものが関係を表している。

・ 課題 2 では正の数の範囲で 0 からの右上がりの直線をかいたので，それと関連させながら負の数の範囲のグラフを考えさせる。次の時間へつなげたい。

学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など

学習活動・予想される生徒の反応など

④

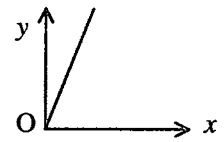
[課題 4] 先の課題の放水路の時間とそれに伴なって変わる水面の位置の変化をグラフに表してみよう。

x (時間)	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y (c m)	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8

＜正の数の部分は[課題 2]で前にグラフをかいたね。では，負の数の[課題 3]をグラフに表したい。どのようになるか？＞

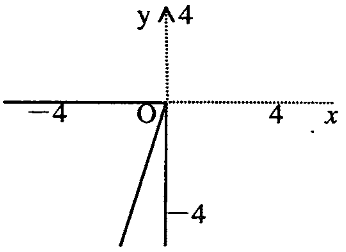
[課題 2]では

x (時間)	0	1	2	3	4	5
y (c m)	0	2	4	6	8	10



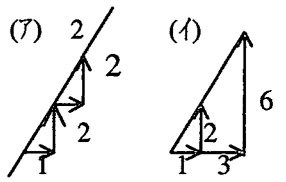
[課題 3]

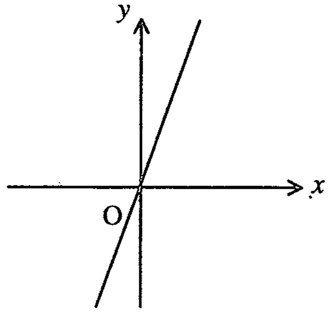
x (時間)	−4	−3	−2	−1	0
y (c m)	−8	−6	−4	−2	0



＜[課題 2]のグラフと[課題 3]のグラフは合体し，1 本の直線になるだろうか？＞

・なる，増える割合が同じ
・なるのかな





(ウ) 式 $y=2x$

・右下がりのグラフもあるのかな？

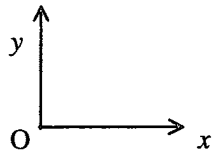
[まとめ]

[問題] $x=3$ のとき， $y=2\times\underline{3}=6$
$x=5$ のとき， $y=2\times\underline{3}=6$ であった。
$x=3+5$ のとき， y は？

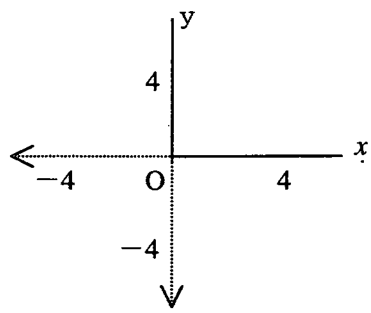
・ $y=2\times(\underline{3+5})=6+10$

指導上の留意点など

・[課題 2]のグラフ



・ [課題 3]のグラフグラフは，[課題 2]のグラフから予想させたい。x の目盛り，y の目盛りを負の数に拡張する必要があることから，下の図のような x の数直線，y の数直線になる。



・ 正の数の範囲のグラフと負の数のを範囲のグラフが O を境としてつながった 1 本の直線になることを比例の性質と結び付けていく。
(ア) x が 1 ずつ増えると y は 2 増える
(イ) x が 2 倍，3 倍…になると y も 2 倍，3 倍…になる
(ウ) 式は $y=2x$
・ この(ア) (イ) (ウ)の性質が正の数・負の数をまたいでいえることをみることで，1 つの直線でかる。
・ 比例の式（中学校の定義）と倍々関係（小学校の定義）がグラフを通じて結びつく。
・ 式が比例の性質の中で際立つ。

まとめ：表もグラフも正の数と負の数が合体し 1 つのものになった。そしてこの関係は式 $y=2x$ で表すことができる。

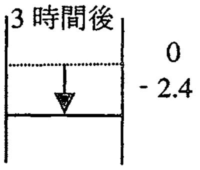
・ $f(x_1+x_2)=f(x_1+x_2)$ が成り立つことをいう。この関係がどこでも成り立つことを式 $y=2x$ を使って具体的数値で言えるようにする。

学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など

⑤

[課題 5] 晴天が続き貯水槽の水面は低くなっていった。役場は，取水制限を発令するために，水位の変化を測定した。次の表は，海面を基準とした時の時間（x 時間）と水面の位置（ycm）を示したものである。これは比例か？

x(時間)	0	1	2	3
y(cm)	0	−0.8	−1.6	−2.4



- 比例かな。でも，x が 1 増えるごとに，y は 0.8 ずつ減っている。
- 比例ではない。

＜表を負の数の変域にも広げよう＞

x(時間)	−3	−2	−1	0	1	2	3
y(cm)	2.4	1.6	0.8	0	−0.8	−1.6	−2.4

×−0.8

＜比例のときいえていた性質はいえないかな？＞
- x が 2 倍,3 倍，…になると y も 2 倍,3 倍，…になる。
- x に−0.8 をかけると y がでる。
- 式は y＝−0.8 x

  y＝(−0.8)× 2 ＝−1.6,
  y＝(−0.8)× 3 ＝−2.4
  y＝(−0.8)×(−1)＝0.8
  y＝(−0.8)×(−2)＝1.6

  変わらない数　変わる数

比例定数

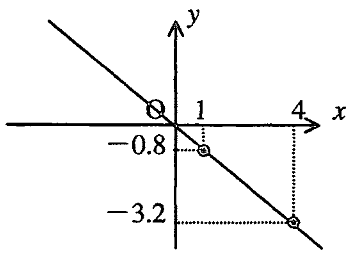
比例 x ⇒ y
式 $y=-0.8x$　−0.8 は比例定数

＜課題 2 での放水路の問題の比例定数は何か？＞
- 式　$y=2x$ より比例定数は 2 です。

＜この課題 4 のグラフはどうなるだろう？＞

x(時間)	−3	−2	−1	0	1	2	3
y(cm)	2.4	1.6	0.8	0	−0.8	−1.6	−2.4

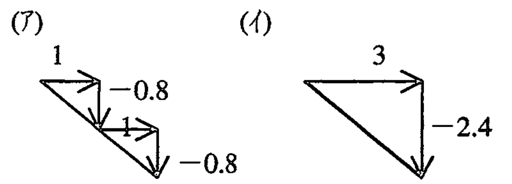
$y=-0.8x$

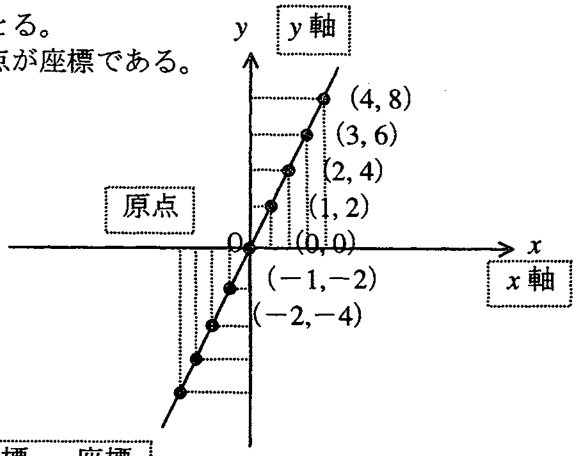
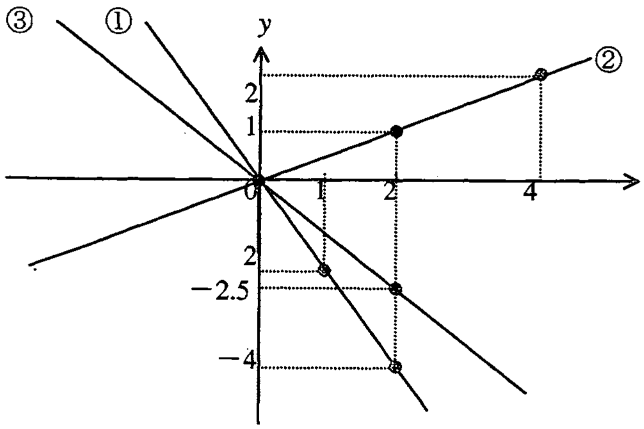


- 比例定数を負の数に拡張するため，水面が一定の割合で減る場面を設定する。
- 表は正の数の場合から出し，3 時間後，4 時間後のときの水面の位置を生徒に質問しながら表をつくっていく。
- さらに負の数の変域にも表を広げていく。
- 時間（x）は増えるが水面の位置は減っていくことから比例かどうか迷う生徒がいると思われる。しかし，今までみてきた比例の具体的性質がいえるかどうかを考えることで，この場合も比例であること明らかになる。
- 「x が 2 倍,3 倍,……になると y も 2 倍,3 倍,……になる」がいえることで比例であることは納得できると思われる。
- 式は $y=-0.8x$ になる。具体的に x に数値を 2, 3,−1 などを代入してみていく。
- ここで,「変わる数」と「変わらない数」を取り上げ,「変わらない数」を比例定数と名付ける。
- 比例の式を比例定数も文字で示し，y＝a x とする。
- 課題 2 の表や，式 $y=2x$ を示す。

比例 x ⇒ y
式 $y=ax$　a は比例定数

- 課題 2 において $y=2x$ のグラフを 0 を通る直線としてかいている。この場合のグラフは，右下がりになるが，0 を通る直線であること，次の (ｱ), (ｲ)を確認したい。



学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など
⑥ [課題 6] y＝２ x で表される関係について次の表の空欄をうめ，そのグラフをかいてみよう。 <table><tr><td>x</td><td>−4</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table> $y=2\times(-4)=-8$, $y=2\times(-3)=-6$・・・と表をうめる。 <table><tr><td>x</td><td>−4</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>y</td><td>−8</td><td>−6</td><td>−4</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr></table> 点をとる。 この点が座標である。  座標 x 座標　y 座標 (2,　4) $y=2x$ は原点を通る直線	・　式を利用して $y=2\times(-4)=-8$，・・・というように y を計算で求めていき，表の空欄をうめる。 ・　座標を導入する。 ・　この表をもとにグラフ用紙に点を取らせ，この点が（1, 2），（2, 4）という表し方をする座標としての見方をする。つまり，２つの数を対とした順序のついた１つのもの（x, y）とみなすのである。 ・　$y=2x$ に基づいて (0.5, 1)，(−1.2, −2.4) などの小数の座標をとることで，これらの点の集まりが１つの直線になることをみる。 $y=2\times0.5=1$ $y=2\times(-1.2)=-2.4$ ・・・ ・　x 軸，y 軸，座標軸，原点，x 座標，y 座標の用語を説明する。
[問題１]　次のグラフをかきなさい。 ①　$y=-2x$　　②　$y=\frac{1}{2}x$　　③　$y=-1.25x$  	・　この問題では，式を利用していくつか座標をグラフ用紙にとって比例のグラフをかかせる。 ・　比例のグラフは原点を通る直線なので，原点に点をとり，原点以外の点を式 $y=-2x$ の x に数を代入していくつかの座標をとり，これらの点をつなぐことで比例のグラフがかけると考えられる。 $y=-2\times1=-2$ $y=-2\times2=-4$ ・・・

学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など

学習活動・予想される生徒の反応など

⑦

[課題] 台風の長雨のとき，隣町の役場は人数が足りず，この町のような詳しい計測ができなかった。
この放水路において，時間と水面の位置は比例の関係にあることはわかっているが，他に5時間後の水面の位置が7.5 cmであることしかわかっていない。
このとき，x時間後の水面の位置y cmは予想できるだろうか。（例えば7時間後，8時間後や3時間前などの水面の位置）

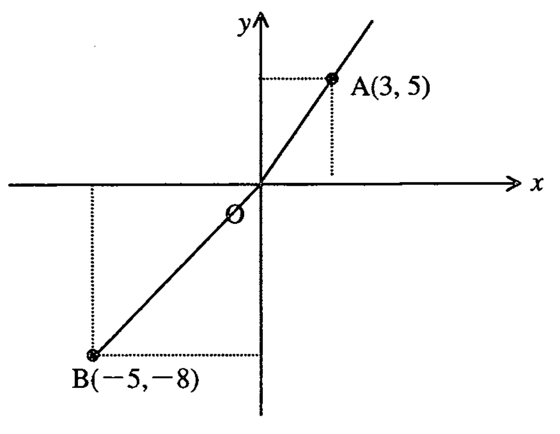
- できると思う。
- xが5のときyが7.5より，$7.5 \div 5 = 1.5$
  $y = 1.5x$の関係が成り立つ。

x	-3	5	7	8
y	？	7.5	？	？

⇩ 1.5倍

- 7時間後は$x = 7$として$y = 1.5x$に代入して，
  $y = 1.5 \times 7 = 10.5$　　10.5cm
- 3時間前は$x = -3$として，
  $y = 1.5 \times (-3) = 4.5$　　-4.5cm

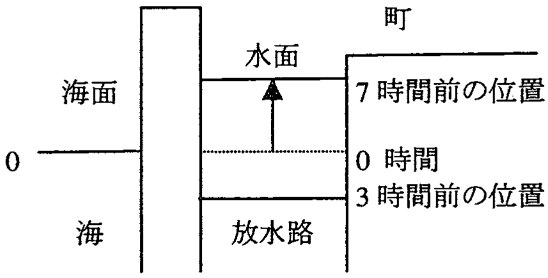
[問題] これは比例のグラフか？



- 比例のグラフだ。この2点を結ぶ直線は原点を通るから。
- この直線は原点を通るけど，原点で折れ曲がっているようにみえる。
- 直線の式はどうなるのかなあ。

指導上の留意点など

- お風呂の水ならあふれてもたいしたことはないが，放水路の水があふれたら大変なことになるので，何とかこの放水路の水面の位置の変化を知る必要がある，ということで関数の動機を強調する。
- 比例を前提として，ただ一組の(x, y)から全体の表を想定できる比例のしくみに気づかせる。



- 表を縦にみて$7.5 \div 5 = 1.5$, yはxの1.5倍と考えて，式$y = 1.5x$を導く。この式さえあれば，どんなxの値であっても，yを求めることができる。（式のよさ）
- 比例のグラフならば原点を通る直線になるということで判断できるが，この直線は原点を通っているが，まっすぐの直線ではない。そこで，原点を境として右の直線の式と左の直線の式を書き表し，比例定数が同じであれば1本のまっすぐの線で，比例定数がそれぞれ違えば折れ線ということで比例のグラフでないことを判断する。

右側の直線　$y = \frac{5}{3}x$　　比例定数 1.66…

右側の直線　$y = \frac{8}{5}x$　　比例定数 1.6

- 比例定数がわずかに違い，一致しないのでこのグラフは比例のグラフではないと判断できる。

学習活動・予想される生徒の反応など	指導上の留意点など

学習活動・予想される生徒の反応など

⑧

[課題７] 台風の長雨のとき，隣町の役場の人も放水路の時間と海面を基準とした水面の位置の詳しい計測をした。しかし、その計測したデータをよごしてしまった。

この放水路において，時間と水面の位置は比例の関係にあることはわかっている。

x 時間[redacted]	5	6	7	8	[redacted]
y c[redacted]	7.5	[redacted]			16.5

このとき，x 時間後の水面の位置 y cm は予想できるだろうか。

- 予想できると思う。
- x が5のとき y が7.5より，$7.5\div5=1.5$
  x が１のとき y が1.5だから、x が７のときは 1.5×7 で、y の値がわかる。
- 直線の式はどうなるのかなあ。 $y=1.5x$

x	・−3	5	6	7	8
y	?	7.5	?	?	?

⇩ $\times1.5$

<7時間後の水面の位置は？>

- 7時間後は $x=7$ として $y=1.5x$ に代入して，
  $y=1.5\times7=10.5$ 　　10.5cm

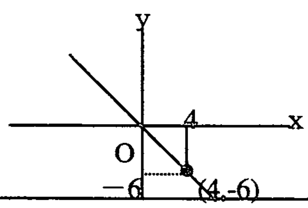
<３時間前の水面の位置は？>

- $x=-3$ として $y=1.5x$ に代入して，
  $y=1.5\times(-3)=-4.5$ 　　-4.5 ｃｍ

<水面の位置が 1.8 ｍになるのは何時間後か？>

$y=1.5x$ でｙ＝１８０を代入して
１８０＝1.5χ
χ＝１２０ 　　１２０時間 　（5日後）

[問題] この直線上に点（－５,７）はあるか？



指導上の留意点など

- お風呂の水ならあふれてもたいしたことはないが，放水路の水があふれたら大変なことになるので，何とかこの放水路の水面の位置の変化を知る必要がある,ということで関数の動機を強調する。

比例を前提として，ただ一組の（x, y）から全体の表を想定できる比例のしくみに気づかせる。比例定数 a が定まり、一意対応ということから、すべての χ に対応するｙの値を求めていく。

- 生徒が「何を根拠として」説明するのかに留意する。
- 具体な場面や具体的な数量の cm や時間を強調するだけでなく、比例の仕組みに基づく説明、その中で式に基づく説明をさせたい。
- 表を縦にみて $7.5\div5=1.5$, y は x の 1.5 倍と考えて，式 $y=1.5x$ を導く。この式さえあれば，どんな x の値であっても，y を求めることができる。（式のよさ）
- 求めたいｙの値に対応する χ の値を、式ｙ＝ａχ を使って求める。
- 時間があれば、グラフの問題を扱いたい。
  式 $y=-\dfrac{3}{2}x$ から点（－５,７）を通るか考えさせたい。

学習活動・予想される生徒の反応	指導上の留意点

⑨

[問題1]比例の関係にあるものはどれですか。
(1) 秒速５０ｍで走る電車がx秒間に進む距離はｙｍ。
(2) 500円で、１本７０円の鉛筆をx本買ったときの残金はｙ円。

・(1)は$y=50x$になるから比例だ。
(3) は$y=500-70x$で式が比例の式と少し違う。

[問題2]12時と１時の間で、時計が止まってしまった。長針と短針の角度は２８６°であった。止まった時刻を求めなさい。

＜長針と短針の角度が 286° になる時計の図をかいてみよう＞
12時からx分間に長針が動いた角度y_1、12時からx分間に短針が動いた角度y_2とする

＜長針と短針の動きをみていこう。＞
長針は、60分で360°、短針は、60分で30°動く

＜長針と短針の角度は時間x（分）に比例するか？＞
・ 比例すると思う。

＜この問題の時刻を求めよう＞
（長針） $y_1=6x$　　（短針） $y_2=0.5x$
長針と短針が動いた角度の差が 286° だから、
$y_1-y_2=286$ で $6x-0.5x=286$

$$5.5x=286$$
$$x=52$$

だから、12時52分である。

指導上の留意点

・ 式によって比例かどうかが見分けられるようにする。生徒によっては１秒で５０ｍ、２秒で１００ｍ・・・というように倍々で考えて比例であると考える生徒がいると考えられるが、そういうことを考えなくても、$y=50x$という式が成り立つことで、比例であることを判断させたい。

・ 時計の図を書いて問題の意味をつかむ。（どこが 286° かを理解させる）
・長針、短針の動きから、角度ｙを時間x（分）ではかればよいことに気づかせる。

$$x \Rightarrow y$$

この矢印の仕組み（x, ｙの関係）を考えさせる。
・わかりにくいようなら表をヒントとして使う。表で書けば下図のようになる。

x分	0	10	20	30	40	50	60
y_1°	0	60	120	180	240	300	360

x分	0	10	20	30	40	50	60
y_2°	0	5	10	15	20	25	30

・ 12時x分とそのとき長針が動いた角度y_1と短針が動いた角度y_2は、比例関係にあることに気づかせる。
・ 式を作って求めたほうが計算で明確に求められることに気づかせたい。
・ 比例する量の差（y_1-y_2）もまた比例する量であることを示したい。
$y=5.5x$になる。（$y=y_1-y_2$）

x分	0	10	20	30	40	50	60
y°	0	55	110	165	220	275	300

引用・参考文献

Cobb, P. et al. , (1993). Theoretical orientation. In Wood, T. et al. , (Eds.). *Rethinking elementary school mathematics* (pp. 21-32). VA: NCTM.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

漢野有美子 (2000). *関数の概念形成過程における思考水準に関する実証的研究.* 修士論文(未公刊). 金沢大学教育学研究科.

三輪辰郎 (1974). 関数的思考. 中島・大野(編). *数学と思考* (pp. 210-225). 第一法規.

文部省 (1999). *小学校学習学習指導要領解説 算数編.* 東洋館出版社.

Nemirovsky, R. , Monk, S. (2000). "If you look at it the other way…". In P. Cobb et al. (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 177-221). NJ: LEA.

大谷 実 (2002). *学校数学の一斉授業における数学的活動の社会的構成.* 風間書房.

大谷 実・中村雅恵 (2000). 数学的活動におけるシンボル化と談話の役割. *第33回数学教育論文発表会論文集* (pp. 101-106). 日本数学教育学会.

大谷 実・中村雅恵・漢野有美子 (2001). 比例の学習指導におけるグラフのシンボル化と談話の機能. *第34回数学教育論文発表会論文集* (pp. 151-156). 日本数学教育学会.

佐藤隆夫 (2000). 精神物理的測定法. 繁桝算男(編). *心理測定法* (pp. 72-79). 放送大学.

島田 茂 (1990). *教師のための問題集.* 共立出版.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction.* Dordrecht: D. Reidel.

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education.* Orland, FL: Academic Press.

van Oers, B. (2000). The appropriation of mathematical symbols. In P. Cobb et al. (Eds.). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 133-176). NJ: LEA.

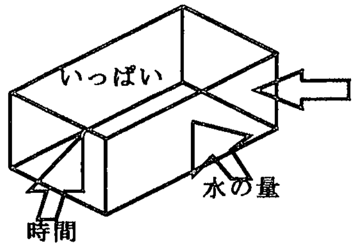
Выготский, Л. С. (1982). *Вопросы теории и истории психологии.* Педагогика.

Выготский Л. С. (1984). Орудие и зн-ак в развитии ребенка. *Собрание сочинений, 6* (с. 5-90). М. Педаг-огика.

第３部　実践記録

1．比例単元学習指導案

比例単元　学習指導案（総時数　12時限）

学習事項	算数的活動	指導の意図
1．AをBで判断すること (2) ・水の量を時間ではかること (1-1)	課題Ⅰ 空のプールに水をいっぱいに入れたい。 水道の栓を開いてきた。　いっぱいになったら止めに行きたいが・・ いついっぱいになるのだろう。 ・今からだと明日までかかる ・止めに行く時刻がわかればいいのに ・しょっちゅう見に行くしかない ・時間を決めて見に行けば見当がつくよ 例えば1時間でどれだけたまるかわかれば いっぱいになる時刻がわかるんじゃないかな  水の量は深さで 見ることができる いっぱいになったことを 時間で見ることができる ＜どうして時間で見られるの？＞ 時間がたてば水の量（深さ）も増えるから 時間と水の量（深さ）は関係があるから 時間　水の量 深さ　　ともなって変わる のしくみがわかればいいな	＜数学的（算数的）活動を支える理論＞ 数学的（算数的）活動を、数学化の過程－すなわち、数学的な動機のもとで、その目的のためにしくみを見出し、それをシンボル化していく過程－と、とらえる。 その際、子どもが現実の問題を解決しようとしたときに用いる個別的でインフォーマルな表記を数学的社会的に洗練されたシンボルに変換していく場面では、どんなシンボルを用いてどんな談話をデザインすることによってそのシンボル化が可能になっていくのかを明らかにすることは重要である。ここでは、RME理論の4つのレベルにならい、その場面＜レベル3＞に焦点を当てて、指導の意図を述べていきたい。 ＜本単元の概要＞ 未知の量Yを求めるために、伴って変わる量Xを手がかりにしていこうとする大きなテーマの中で、比例を取り上げ、そのしくみを徐々に明らかにしていく。 ＜課題①の位置づけ＞ この課題では、関数の考えを支えている動機をつかむ。すなわち、未知の量Yを求めるにあたって、わかりやすい量Xを見ることによって、その関係を利用してYを求めようとすることである。 この場合は、プールが水でいっぱいになったということを何によってはかればよいかを考えることによって、ともなって変わるものがあること、伴って変わるしくみを考えないとYを求めることができないことに気づくであろう。 そして、この単元を通してXとYの関係をはっきりさせようとしていることをつかませる。 さらに 時間　水の量 深さ といった表し方、「伴って変わる」といった言い方で整理する。この矢印は、数学的な機能をもつものではないが、動機を象徴する記号であり、これからどんなことをしていくのかを理解するための比喩的なものである。

・伴って変わる二つの数量を身の回りから見つけること
(1-2)

課題Ⅱ
知りたい量を（Y）
「ともなって変わる」
別のもので（X）
はかれないかな

X $\not\rightleftarrows$ Y

＜身の回りで探してみよう＞

・歩いた距離を時間ではかる 時間がたてば、距離が増える	時間 $\not\rightleftarrows$	歩いたきょり
・ろうそくの残りの長さを時間ではかる 時間がたてば、残りは少ない	時間 $\not\rightleftarrows$	残りの長さ
・電話料金を時間ではかる 時間がたてば、料金は増える	時間 $\not\rightleftarrows$	料金
・ねん土の体積を重さではかる 重ければ、ねん土は大きい	重さ $\not\rightleftarrows$	体積
・紙の枚数を重さではかる 重ければ、紙は多い	重さ $\not\rightleftarrows$	紙の枚数
・たまごの大きさを重さではかる 重ければ、たまごは大きい	重さ $\not\rightleftarrows$	卵の大きさ
・ロープの長さを重さではかる 重ければ、ロープは長い	重さ $\not\rightleftarrows$	ロープの長さ
・重さをばねの長さではかる 長いと、そのものの重さは重い	バネの長さ $\not\rightleftarrows$	重さ
・紙の枚数を厚さではかる 厚いと紙は多い	厚さ $\not\rightleftarrows$	紙の枚数

けっこうたくさんある
ろうそくは時間がたつと少なくなるのが他のとは違う
役に立ちそうな組み合わせがある
本当にわかるのか不思議なものがある
実際にやってみたいのもある
意味はわかるけどできそうにないのがある
いろんな変わり方があるようだ

X $\not\rightleftarrows$ Y　のしくみをはっきりさせていこう

＜課題②の位置づけ＞
知りたい量Yを伴って変わる別の量 X を手がかりにして知ろうとするこの単元を貫くテーマに直接取り組ませることで、本単元への関心意欲を持たせる。X $\not\rightleftarrows$ Yの意識づけが強いほど、単元を通しての学習の道筋が見えてくる。そのことが、数学的活動をふりかえる視点となる。
また、ここで表現された項目は、後で比例の理解を深めるための素材となり、学習に広がりを持たせることができる。課外に時間を設けて実際に実験・測定してみるのもよいと思われる。

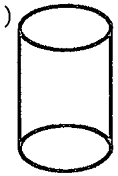
＜レベル２の場面＞
ここでは身の回りの事象を関係づけて見ようとする態度を養うものであるから、X $\not\rightleftarrows$ Yのしくみを詳しく調べるというより、子どものことばで表されたものをそのまま「〇〇を□□ではかる」「なぜなら□□が増えれば〇〇が増える（減る）から」などといった定型の文にしてみることで整理していく。

2．比例に着目し、表をもとにその性質を見つける（4）

・比例では増える数が決まっていること（2-1）

課題Ⅲ

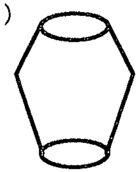
（あ）



水を x dl 入れたときの

深さを知りたい

（い）



＜深さがわかるのはどちらかな？＞

・（あ）ならわかる
・（あ）は下から上まで同じ太さだけれど、（い）は太さがちがうから
・太さがちがうと、同じだけ水を入れても横に広がったりして深さがあまり上がらなかったりするから

（あ）のデータ

xdl	1	2	3	4
cm	4	8	12	16

（い）のデータ

1	2	3	4	5
4	6	7.5	9.5	12.5

＜どうして（あ）がわかると思うの？＞

（あ）
・1 dlにつき深さは4㎝ずつ増えている
・深さが4の段になっている
・増え方にきまりがありそうだ

（い）
・だんだん増え方が減っていく

水の量 x dl	1	2	3	4	5
深さ y cm	4	8	12	16	20

+4 +4 +4 +4 →決まっている

・増える数が決まっているから x dlの深さはわかる

・増える数が決まっていないから x dlの深さはわからない

↓

＜例えば8 dl入れたら、深さは？＞

4ずつ増やしていったら、8 dlのときは32㎝になる
4の段の8番目は32になる
8は1の8倍だから、4も8倍する

増え方が決まっていると、水の量で深さがわかる
深さは水の量に比例している

＜課題③の位置づけ＞

二次では、比例の性質を例題を通して順次明らかにしていく。この課題では、伴って変わる2量の関係の中から、比例の関係を見ていく。

表は、（あ）（い）のそれぞれのデータとして提示する。これらのデータを比較することによって（あ）がきちんとした関係であることをつかむことができるだろう。きちんとした関係というのは、子どもにとっては「4ずつ増える」ということである。そのようなしくみをもっていれば水の量をもとに深さが求められることが明らかになる。このようなしくみを「比例」と呼び、比例についてくわしくみていこうとする方向を示す。

＜シンボル化とその談話＞

二次では、「表がシンボルとなる」ことによって比例の理解が進む。

データを整理して表したものとしての表 ⟷ それを使って考える道具としての表

この時間はレベル2の場面が中心である。子どもたちのことばに沿って解決がなされ、特に数学的なことばや概念を持ち込むことがないからである。シンボルとしてのことばは「比例」という用語を知らせることだけである。

子どもたちは（あ）の形なら水の量から深さを得られるだろうと考える。そこで両者の形のちがいはデータにどのように表れるかを見るため、データが示され、表によって表される。

この時点から表そのものと取り組むことになる。つまり思考の対象が、現実の問題からしくみへと転換される。ここでの表は、子どもたちの予想（（あ）の方が深さがわかる）をいっそうはっきりさせるためにデータを整理して表したものという役目を果たす。

レベル3は、子どもたちが（あ）のデータが「4ずつ増えている」あるいは「増え方にきまりがある」ことに気がついたときである。教師は表を使って見つけたきまりを説明するように指示することによってその特徴を位置づける。このことによって表が思考の道具として働きはじめるシンボル化のきっかけをつかむ。

このとき「比例」という用語を使用するが、子どもにとっては自分の捉えた範囲での比例の理解であり、今後そのしくみを見ていくのだという見通しをもつ。

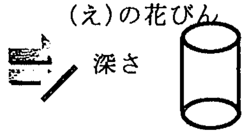
レベル3での重要な活動として、きまりとして位置づけられたものを使ってみようとする場面を用意することである。自分が見つけたきまりを手がかりにすれば水の量から深さがわかることを試してみることで、次へのステップとなる。この場では表をさまざまな観点で見る子が出てくる。自分なりのしくみの理解に基づいた解決となる。表をシンボルとするためには、表を使って考える場を設け、表の中にしくみを見ることが重要である。

しかし、「増える数が決まっている」というしくみは、yの変化に着目したもので、そのしくみによって「水の量から深さ」を求めることにあまり貢献していないことに今後触れていかなければならない。

・ｘが○倍になるとｙも○倍になること
(2-2)

課題Ⅳ
水を３ dl 入れたら
深さが4.5cmになった。このことから
15dl 入れたときの深さが
求められるか？

(え)の花びん

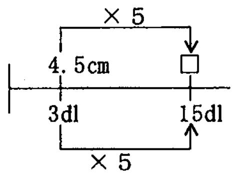


考え①

4.5×５＝22.5

15dl は３ dl の５倍だから
深さも５倍した

×５
３：4.5＝15：□
×５



表で説明すると？

水の量 dl	3	15
深さ cm	4.5	22.5

＜（あ）の表でも言えるのかな＞

×４，1/4
×３，1/3
×５，1/5
×1.5

水の量ｘ dl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
深さ　ｙ cm	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

×1.5
×５，1/5
×３，1/3
×４，1/4

５倍だけじゃなくても、分数でも、小数でも
１からじゃなくても、どこからでもきまりは成り立つ

比例にはきまりがある

・一方（ｘ）が○倍になればもう一方（ｙ）も○倍になる

＜課題④の位置づけ＞

ここでは、ただ１組のデータから表を想定できる比例のしくみに気づかせる

前時までに比例の性質として「増える数が決まっている」こと等、それぞれのきまりに従って比例を捉えている。その際の子どもたちは、おおむねｙの変化ばかりを意識しｘとの関わりがうすいと思われる。この課題に取り組むことによって、ｘの変化とｙの変化をさらに関係づけたい。

＜シンボル化とその談話＞

子どもたちは、口で言った考えが表の何を見たからなのか、を表の中に位置づけて説明することができないことが多い。表に矢印などを入れて説明することによって、表によって考えることができるようになる。このことは教師が意図して行う必要があると思われる。

この課題の解答として２通りの方法が考えられる。子どもたちの解答の中にある比例の性質を引き出して表すことがレベル２の教師の役割である。

考え①では、「水の量が５倍であれば深さも５倍になる」という性質を子どもたちが見つけていることを明らかにする。このことを一般的な性質として「ｘが○倍になるとｙも○倍になる」という言い換えを吟味していく。

この言い換えについては、いくつかの留意点がある。

・いろいろな水の量や深さをまとめてｘやｙという文字で表すこと
・５倍に限らず２倍でも３倍でも言えるとき「・・・」で表すこと
・どの組の間にも言えること

これらのことをふまえた上で最終的に教科書に記述されているような

> ２つの量ｘとｙがあり、ｘの値が２倍３倍・・・になると、それにともなってｙの値も２倍３倍・・・になるとき、「ｙはｘに比例する」といいます。

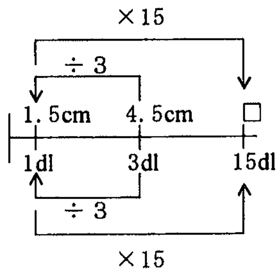
の理解となる。このことは、暗黙の了解のようになりやすく、子どもたちは当たり前といった顔をするが、表に矢印などで表現させるとｘが１からの矢印しかなかったり、よく確かめず矢印はとなりへいっているのに２倍３倍と倍率が増えていったりする。案外わかっていないものである。

その際には、課題③（あ）の表でもその性質は説明できるのかを問い、（あ）の表を見直すことで、表が一層シンボルとして位置付き、表による比例の理解が進む。

またここでの数直線は、子どもの考えをわかりやすく説明するために使われるが、数直線で表したことが、表の中に数直線のしくみと同じこととして見えてくることをこの単元ではめざしている。また、２量の関係を表す矢印を子どもたちと共有し、１つのシンボルとして使っていくようにする。

・ｘが１のときのｙの値が決まった数であること
(2-3)

考え②
4.5÷３＝1.5
1.5×15＝22.5
１ dl あたりの深さを出すために
３でわった
1.5cmというのは１ dl 入れたときの深さだ
15dl はそれを15倍すると出る



表で説明すると？

dl	1	3	15
cm	1.5	4.5	22.5

いったんもどって
15に進む

＜何かいいことあるの？＞

１ dl あたりの数を出しておけば15dl 以外のｘ dl のときの深さがすぐ出せるので便利
1.5がもとになって、あとはかけるだけで深さが出るから
もし14dl のときを求めるとしたら、３でわってもわりきれなかったりする
1.5はもとの数なんだ

dl	3	15
cm	4.5	22.5

＜（あ）の表も同じしくみか
確かめよう＞

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

すべての
の中に×４が
ある

もとの数
ｘが１のときのｙの数
１あたりの数
増える数

ｘが１のときのｙの値は決まっていて、その数をもとにすれば
ｘがどんなときでもかんたんにｙを求めることができる

＜課題④に対する後半＞
前時では、課題④に対する考えの１つを、きまりとして確認した。本時は考え②をきまりへと導くと同時に、ｘが１のときのｙの値というものに価値を見いだすようにする。

＜シンボル化とその談話＞

考え②において4.5÷３をしたのは、１ dl あたりの深さ（つまり前時で言うと「増える数」）を出していることや、それを出すことによって15dl 以外の水の量であっても適用できることを引き出す。

１あたりの深さを表す数
ｙ1　ｙ2

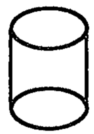
ｘがｙになるために
何倍すればいいかという
割合を表す数（ｙ÷ｘが一定）　ｘ　ｙ

レベル３では、子どもたちが１あたりの深さを求めようとして行った4.5÷３という計算の意味を変換することによってなされる。
これは、今まで横の変化でとらえていたｘやｙをたての割合として見ることになり、かなりの抵抗が予想される。1.5がｘ→ｙの割合になっていることを表の上で確かめることによって変換のきっかけにしたい。「1.5は表の中ではどこに表れるのかな？」「１カ所だけかな」などと問いながら、表をたてに見るとすべての矢印の中に「×1.5」が見えてくるようにするのである。

・x_1+x_2がy_1+y_2に対応していること
(2-4)

課題Ⅴ
ある容器に水を
2.5dl入れたら、深さは３cm
6.5dl入れたら、7.8cmだった。
もし、９ dl入れたら、
深さは？

９ dl　深さ



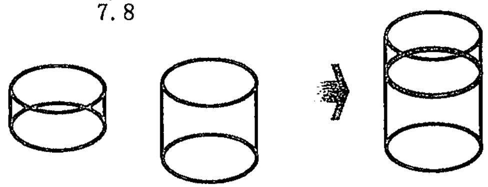
考え①
３÷2.5＝1.2
(7.8÷6.5＝1.2)
1.2×９＝10.8cm

考え②
３＋7.8＝10.8cm

たし算でできる？

＜３＋7.8で求められるわけを考えよう＞

$\underbrace{2.5\times1.2}_{3}+\underbrace{6.5\times1.2}_{7.8}=(2.5+6.5)\times1.2$



水の量(dl)	1	2.5	6.5	9
深さ　(cm)		3	7.8	

３は2.5の1.2倍だし、7.8も6.5の1.2倍だから、足したものは1.2倍

$\frac{2.5}{3}+\frac{6.5}{7.8}=\frac{9}{10.8}$

＜（あ）の表でも試してみよう＞　→課題③（あ）のデータ

$\frac{1}{4}+\frac{3}{12}=\frac{4}{16}$　　$\frac{7}{28}-\frac{5}{20}=\frac{2}{8}$

たし算ができた　　ひき算でもできる

比例では、２組の数をそれぞれたした数でも比例の関係はくずれない

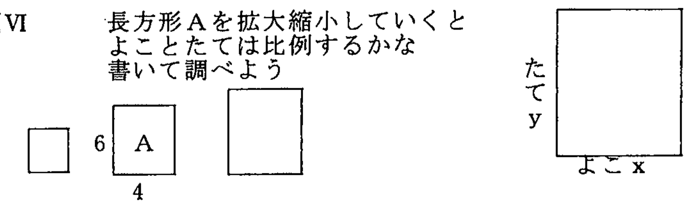
＜課題⑤の位置づけ＞
　未知の量Ｙを求めるための比例の性質として、ｘ1＋ｘ2に対応するｙ1＋ｙ2がやはり比例の関係にあることを学習する。これは、どのｘの値にも対応するｙの値が存在し、表でいうと「たてに輪切りにしても」ｘｙの各組が独立して存在することを端的に表している。１あたりの量として考えられた定数を、ｘ　ｙのしくみの数として置き換えたことがここでよりはっきりとするはずである。

＜シンボル化とその談話＞
　この課題に対しては、２通りの方法が考えられる。それぞれの背後にある比例の性質を明らかにしたい。考え①では、１組のｘｙの値から１あたりの深さ（→決まった数）を求めることができることを使った考えであることを確認する。これがレベル２である。
　考え②は子どもの中から出ない可能性が高い。その場合は教師が「こんな解き方はいいと思う？」と投げかける。
　子どもたちは３＋7.8で求められそうなことは感覚的にはわかるがそれを説明することは難しいと思われる。
　「この容器の形が同じ太さのものであるから」
　「2.5＋6.5＝９だから」
というくらいと思われるが、もとになっている比例の性質（ｘの増えた分とと同じだけｙも増える、ｘとｙの増える割合が同じ・・等）を探るように働きかけたい。
　レベル３への移行は、比例の表をもとにx_1+x_2がy_1+y_2に対応していることが他の組の値でもいえるかどうかを調べることによって行う。それは１組１組のすべてのｘ　ｙの中に決まった数1.2が存在することを確かめることとなる。

3．比例をグラフに表しその特徴をつかむ
(3)

・グラフから比例の性質の特徴を見ること
(3-1)

課題Ⅵ　長方形Aを拡大縮小していくと
よことたては比例するかな
書いて調べよう

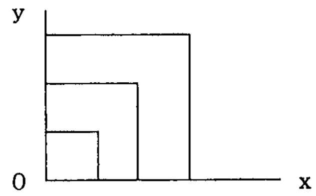


表では

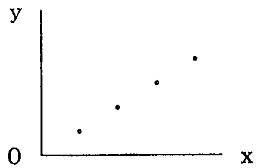
よこ　x	2	4	6
たて　y	3	6	9

よことたては比例する

図では

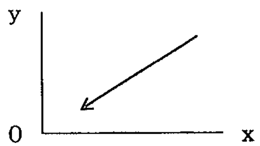


＜どんなグラフになるのかな＞



これで完成かな
点の間にまだとれる点があるよ
x＝1のとき　yは？
x＝3のとき　yは？

つないだらまっすぐになる
つないでもいいのかな



伸ばすと0の点にぶつかる
x＝0のとき　yは0になる？
拡大図は対角線の方向に
大きくなっていく

対角線をもとにすれば
どんな拡大図・縮図でもたてとよこの長さがすぐにわかる

長方形Aを拡大縮小したとき、よことたての長さは比例する
拡大図縮図のよことたてのグラフは、長方形の対角線と同じ直線になる

＜課題⑥の位置づけ＞

大きく捉えると関係をグラフでとらえようとする態度の育成を意識している。

比例の性質は、表で見るよりグラフで表すことによっていっそうはっきりする。表は、xyの値を1点1点羅列的に表しているのに比べ、グラフでは連続性がはっきりと打ち出されている。比例という関係そのものを視覚的に捉えることができる。表では裏に隠れていたしくみが、グラフではそのまま表に現れたものといえる。図形的な処理ができることから比例の理解をさらに深めることができる。

子どもたちは4学年において折れ線グラフをかく経験をしている。従ってグラフをかくことについては、それほどの抵抗はないと思われる。ここではグラフを完成させていくことにより、今までわかってきた比例の性質がどのように表されているのかを理解していく。

子どもたちが比例のしくみをグラフで見ようとするきっかけとして、長方形の拡大・縮小を題材とした。このことによって、グラフの図形的な見方を暗示し、比例が直線（対角線）で表されることがイメージされると考えた。

なお、x＝0のときy＝0になることは、ここではっきりする。

＜シンボル化とその談話＞

これまでかいてきた折れ線グラフの要領で、（x，y）の点をグラフ上にとる。点が並んだ状態で「グラフは完成か」子どもにたずねる。すると子どもたちは、「点をつないだらいけないのか」あるいは「まだ点はかけるよ」と言うだろう。その言葉を受けて、＜点をつないでいいの？＞＜線を延ばしていいの？＞と問いを広げていく。

そうして点と点の間にも無数の点があることに気づき、それらがxとyの割合をきっちり守っていることや、やがて0の点へとおよぶことをわかっていく。点をつなぐ、というより点を増やしていけばつながる、というイメージをもたせたい。

＜レベル3の場面＞

グラフを完成させた本時から次時にかけては、かいたグラフをもとにして考察することとなる。比例のグラフが0点を通る直線になるらしいことを見つけたことを手がかりにして、直線になることと決まった数との関係を把握する場面をレベル3の場面とする。

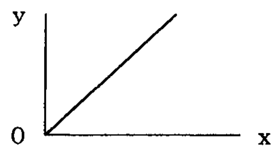
レベル2でのグラフ		レベル3でのグラフ
比例のデータを表現するグラフ	⇔	X ≒ Yが見えるグラフ

・グラフの特徴を見る
(3-2)

＜比例はみんなこんな直線のグラフになるのかな＞

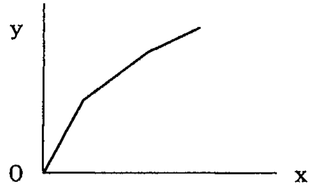
課題③（あ）のグラフ

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

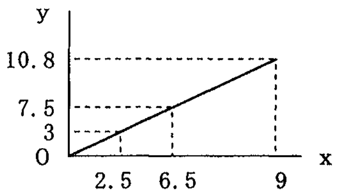


課題③（い）のグラフ

x	1	2	3	4	5
y	4	6	7.5	9.5	12.5



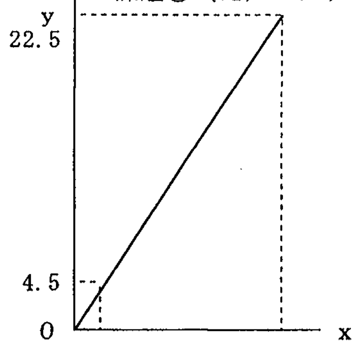
課題⑤（お）のグラフ



x	2.5	6.5	9
y	3	7.8	10.8

比例のグラフは直線になる
びっくり
どうしてだろう

課題④（え）のグラフ



x	3	15
y	4.5	22.5

比例のグラフは、みんな直線になる

＜活動の位置づけ＞
前段階では長方形の拡大・縮小という１つの事象を通して比例をグラフに表した。その結果１本の直線となったが、このことは比例するｘｙすべてに言えることなのかを検証するのがこの活動である。
これまでに扱ったデータをもとにグラフをかき、それが直線になるかどうかを調べることにより、直線と決まった数とのつながりをはっきりさせる。
なお、子どもたちにとってグラフを書くという経験は、そう多くはない。５年のときに出てくるグラフは、帯グラフや円グラフである。ｘｙ軸に点をとることにとまどう子どももいると思われる。対角線のイメージを大切にしながら、グラフのしくみを理解できるようにしたい。

＜シンボル化とその談話＞
表によって整理されたデータはグラフに表される。ここでのグラフは実際のデータを表現するものとしてのグラフである。これらのグラフを談話の対象にし、比例の性質がどのように表され、新たにどんな性質が見えてくるかを明らかにする。いくつかの比例の表をグラフに表したとき、０点を通る直線になるというそれらの共通点が見えてくるはずである。
「０点を通る」ということばは、子どものことばではない。子どもだと「０点に向かう」あるいは「０点から出ている」となる。０点が話題になったとき、教師は「通る」という言い方を知らせる必要がある。

レベル２でのグラフ

長方形を拡大縮小したら、頂点は対角線上に並ぶ

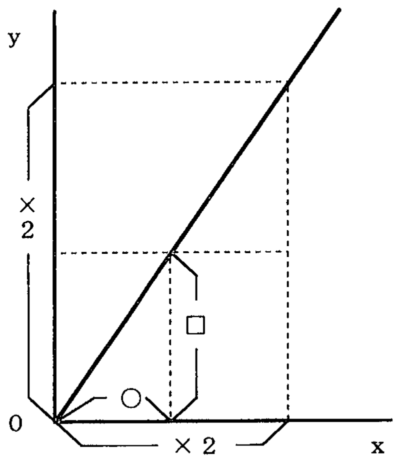
⇔

レベル３でのグラフ

比例しているｘとｙはグラフに表すと直線になる

・比例のグラフが直線になるわけを考える
(3-3)

＜比例のグラフが直線になるのはなぜだろう＞
（あ）のグラフで考えてみよう



xが1のときyが4で
xがもう1増えたら
yも4増えて、その繰り返しだから

○と□の割合が
ずっと同じだから

xが2倍になれば
yも2倍になるから

↓
とすれば、0点に向かっていってしまう

＜本当に0点に向かっているのだろうか＞
（あ）の表で考えてみよう

0.1	0.125	0.25	0.5
0.4	0.5	1	2

← 戻る

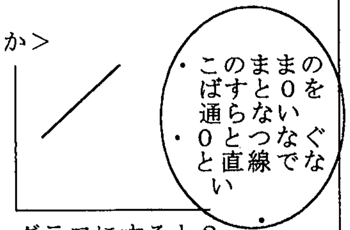
x	1
y	4

xが0のとき、yは0になる
例えばそれは、花びんに水を1滴も入れなかったら、（つまりxが0 dl）水の深さはない（つまり、yも0）と言える
xが1から0に近づいていく間も、比例のきまりに合わせて減っている

＜次の（う）のxとyは比例しているだろうか＞

x	1	2	3	4	5
y	6	8	10	12	14

比例のきまりにはまらないから
比例していないようだが、・・でも？



グラフにすると？

比例のグラフは決まった数があるので、0点を通る右上がりの直線となる
グラフに表すと比例かどうかがすぐにわかる

＜活動の位置づけ＞
このようにして、比例のグラフが直線になることがわかってきたが、子どもたちの感覚では、「何となく当たり前」として受け入れられ、0点を通ることも、必ずとは思っていない。0を通る直線であればそれは比例を表しているのだと考えるようになるためには、「書いてみたら直線になった」という認識ではなく、比例が直線でなければならないわけを考え、直線に意味を持たせることが必要である。

＜シンボル化とその談話＞
調査したデータを数学的に処理すること、それが数学的な調査活動である。それぞれのデータを表に整理しグラフに表す。表からでも比例かどうかを判別することはできるが、グラフによって判別することができればグラフはシンボルとなる。
これにはまず「比例のグラフはどんなグラフだ、と言えばいいのだろう」と、問いかけて、「直線のグラフ」「0点を通るグラフ」という言葉を選ぶ場面をつくる。

レベル2でのグラフ		レベル3でのグラフ
比例をグラフで表すと0点を通る直線になった	⇔	グラフが0を通る直線であれば比例である

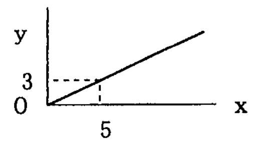
レベル3へのきっかけは、比例のグラフがなぜ直線になるのかを問いかけることでつかみたい。その際、課題③（い）のデータをグラフにしたものとの比較を通して、直線になるということは「増える数」「増える割合」が決まっているからであることを引き出し、このことをグラフで視覚的に説明する。「決まった数」と直線とのつながりがはっきりする。
これによってグラフの線が意味をもち、結果としてのグラフから手段としてのグラフへと働きを変えることができると思われる。
このようにしてグラフを読みそれを解釈することにより比例がいっそうはっきりとらえられるようになり、一目で比例がわかるグラフのよさにも気づくであろう。
また、（う）のデータを扱うことには価値がある。表で見えている部分が同じ数だけ増えていることは、（い）のデータよりはるかに比例に似ている。子どもたちは表から得られたきまりをもとにして、これが比例でないことを述べるだろう。しかし、最後に納得するのはグラフにしたときである。グラフのよさが際立つ場面である。

4．比例を式で表すこと（2）

・表から式を考えること
(4-1)

課題Ⅶ
（か）の表を完成させよう（ｘとｙは比例）

x dl	0	4	5	6.2	9	14
y cm	あ	い	3	う	え	お



あ・・・比例の場合は０になる

い

4÷5=0.8
3×0.8=2.4

3÷5=0.6
4×0.6=2.4

この考え方でう〜えも考えてみよう

う

6.2÷5=1.24
3×1.24
=3.72

(3÷5=0.6)
6.2×0.6
=3.72

え

9÷5=1.8
3×1.8=5.4

(3÷5=0.6)
9×0.6=5.4

3+2.4=5.4

＜考えを公式にしてみよう＞

ｘが５からどれだけ変化したか割合を求める
その割合を３にかけて求めるｙを出す
ｘが○倍になればｙも○倍になるという考え

ｙ÷ｘをして決まった数を出す
ｘに決まった数をかけて求めるｙを出す

求めるｙに対応するｘになるように、データを組み合わせる
それぞれのｙの数を足したり引いたりして求めるｙを出す

（イ）
ｙ＝３×ｘの変化の割合

（ロ）
ｙ＝ｘ×0.6
決まった数

（ハ）
ｙ＝y1+y2

＜ｘが14dl のときのｙを公式を使って求めてみよう＞

お

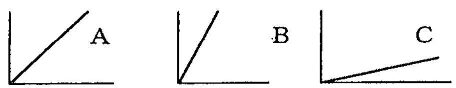
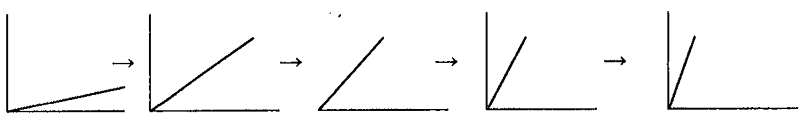
14÷5=2.8
3×2.8=8.4

(3÷5=0.6)
14×0.6=8.4

3+3+2.4
=8.4

＜課題⑦の位置づけ＞
この課題では、これまで明らかにしてきた比例の性質を用いてＹの値を求めようとするときの公式を考える。子どもたちにとって公式というのはことばで表された求める目的をもった式である。
比例の性質を端的に表しているものとして式を見ることができるようにする。

＜レベル３＞
ｘをもとにしてｙを求めようと子どもたちは考える。その考えを明らかにするのが、レベル２の場面である。レベル３は、その考えをことばの式（公式）へと書き換えられないかと働きかけることによって移行する。
できた式は機能するかどうかをｘ＝14によって確かめてみる。そのときにどの公式が使いやすいかあるいは比例の代表としてふさわしいかを考えてみる。
（イ）の式はｘの変化を１回１回計算しなくてはならず困難。（ハ）の式は求めるｙに対応するｘの値がうまく合成できれば簡単だが、ｘの値が小数になったりするとたちまちデータ不足となる。
その点（ロ）の式は、決まった数さえわかれば、ｘのどんな値にもすぐ対応できる。したがって（ロ）の式は比例の代表として認められることとなるだろう。
さらに、これまで学習してきた、（あ）（え）（お）の表について、式に表すことで、「決まった数」がそれぞれの表を代表する数であり、式を決めていることの理解が深まるであろう。

・式とグラフを関係づけること (4-2)	課題Ⅷ (1) y＝0.5×x (2) y＝1.5×x (3) y＝1×x  式はどのグラフ？ どのグラフも比例のグラフだ グラフの線の上がり方がちがうけど0を通る直線 式も決まった数がちがうけれど、全部比例の式だ 決まった数と上がり方を比べればわかるのかな Aのグラフは真ん中（45°）に上がっているからxとyも同じ式ということかな Bは上がり方が少ないということは、xが1増えてもyはちょっとしか増えない、ということだから決まった数が小さい方がBということかな (1) 0, 1, 2, 3 / 0, 0.5, 1.0, 1.5 (2) 0, 1, 2, 3 / 0, 1.5, 3.0, 4.5 (3) 0, 1, 2, 3 / 0, 1, 2, 3 ＜グラフの上がり方は決まった数を見ればいい？＞ 試してみよう  0.5 → 1 → 1.5 → 2 → 2.5 決まった数 決まった数が大きくなると坂が急になる 決まった数は坂のかたむきを表している なぜなら、決まった数はもともと増える数だから 決まった数が大きいほど増え方も大きいから ＜y＝2／3×xのグラフはどこに入る？＞ **比例のグラフでは、決まった数が大きいほど急な直線になる**	＜課題⑧の位置づけ＞ この課題自体がすでにレベル3の状況である。現実的な世界を取捨し、式とグラフをはじめから扱っている。これまで別々に学習してきたが、かけ算で表される比例の式と0を通る直線で表されるグラフを結びつけようとするのが本時である。 ＜レベル4の場面＞ 決まった数は増える数である、という意識が子どもたちにあれば、そのことを利用して直感的に予想を立てることができるだろう。そして、＜式の何とグラフの何が関係していそうか？＞と問うことで、決まった数と傾きの関係へと推論することができる。そのことを実験的にグラフを書いてみることで、確信を深めることになる。このことによって、3つの例にとどまらず、決まった数はグラフの傾きを表すものとして認識させるものとする。その上で、決まった数によってグラフ⇔式の行き来ができるようになることを試みたい。 ＜単元の終わり＞ 本時の次、単元の最終時にはこの単元を振り返る時間を設けたい。そこでは、「YをXで見る」という考えについてわかったことや、思ったことを振り返り表現する。そのことを通してこの考えを学習してよかったという思いをもたせたい。 算数を学ぶということは、ものの見方の一つを知ると同時に具体的なものから抽象的なしくみやきまりを引き出してそれを役立てていくプロセスを身につけることである。そのことを、子どもたちと確認したい。子どものことばの中に、「きまりが式やグラフになったのがすごいと思った」「きまりを考えれば他のものからそれを判断できることがおもしろいと思った」「答えを出すだけでなく、しくみを見つけておくと役に立つと思った」などを期待したい。 また、これまで学習してきた公式を、比例の目で見直すことを試みたい。例えば、長方形の面積を出す公式は「たて×よこ」であるが、たてを変えないで（決まった数として）横をx、面積をy、とすれば、比例の式となり、横と面積は比例していることを表していることを子どもたちに見せたい。

(1)

0	1	2	3
0	0.5	1.0	1.5

(2)

0	1	2	3
0	1.5	3.0	4.5

(3)

0	1	2	3
0	1	2	3

2．実施の概要

教授実験は、金沢市内の市立小学校６年生２学級72名の児童を対象に行った。

実施期間は、平成12年９月28日（木）から11月１日（水）までの約１か月間である。この期間の直前には連合体育大会（９月27日）があり、期間中には創立記念行事（９月18日）と連合音楽会（10月31日）があった。また、週に一度の英語活動とも重なったため、授業が延期されたりして12時限の予定の学習であったが、約１か月に及んだ。さらに、校内の行事としてこの直後にマラソン大会が控えていて、（11月１日：実際はその日は雨天のため授業となった）それに向けての長休みのマラソン練習期間でもあったため、そのための時間短縮の日も少しあった。授業時数については、計画では全12時限であったが、１組で14時限、２組で13時限の実施となった。これは、二次中１時の授業内容をより丁寧に行う必要を感じたたため２組ともに１時限ずつ延長したこと、１組におけるもう１時限の延長は、二次中４時の談話が「１あたりの数」の話題にもどり、二次中３時の内容を確認するものとなったからである。授業日程は次の通りである。

授業日程

月日	曜	限	６年１組	限	６年２組
9／28	木			5	1－1
10／2	月	2	1－1	4	1－2
3	火	5	1－2		
4	水	5	2－1	3	2－1
10	火	5	2－1後半		
11	水	5	2－2	3	2－1後半
12	木	3	2－3	5	2－2
16	月	2	2－4	4	2－3
17	火			3	2－4
19	木	3	2－4後半	5	3－1
23	月	2	3－1	4	3－2
24	火	5	3－2	3	3－3
25	水	2	3－3	3	4－1
26	木	3	4－1	5	4－2
30	月	2	4－2	4	5－1
11／1	水	5	5－1		

担任は２人とも当該小学校には古い方である。児童には昨年度からの担任だが、毎年学級編成をしているため、２年間の持ち上がりは学級の半数の児童である。筆者は、昨年度、Ｔ・Ｔのための加配教員として、同児童の算数を２学級とも担当していた。従って、児童にとって筆者は「よく知っている算数の先生」である。ただ、今回は教授実験ということで、ある目的を持っているため、昨年度とは少し授業の進め方を意識的に変えたこともあり、児童にとっては少しとまどいもあったかと思われる。

児童は比較的まじめで、今回も落ち着いて授業に臨んだ。ビデオカメラやＭＤ、さらに授業観察者の存在で、やや緊張したスタートであったが、少しずつ慣れてきた。しかし事前に児童には、この授業では言葉のデータを主に取るから、思ったことを口に出してくれるようお願いしてあったのだが、それほどたくさんの児童の声を聞くことはできなかったように思われる。それでも教師がたずねたことについてはそれぞれ真剣に考え、意見として口に出せない児童でも、「わかる」「わからない」あるいは「賛成」「疑問」等をその表情やうなづきなどで表現してくれたおかげで、教師はそれらの反応を手がかりにして、授業を進めていくことができた。

１学級に２名の抽出児については、各担任と相談の上決定した。条件としては、物怖じせずに比較的よくしゃべる児童、つぶやきの多い児童、算数の内容を考えることが苦痛でない児童、等とデータを取りやすい児童に決めた。本教授実験においての抽出児の意味は、個人の考えの追跡調査ではなく、教室全体の話し合いの動向をつかむ上での代表発話として考えた。実際１つの学級では、これら２名の抽出児の発言やつぶやきが他の児童の思考を代表し、授業の流れを作っていく働きをした。もう一方の学級では、抽出児２名があまり目立たず、したがって教室の話し合いの主導権はもっぱら教師にあるといった状態であったが、後半になって抽出児以外の何人かの児童の発話が多くなり、学級全体の話し合いがそれらの声を核にしてまとまっていったように思われた。

授業全体の流れを見ると、行きつ戻りつしながらも、少しずつレベルの上昇が見られたように思われる。しかしある学級ではすぐに明らかにされたことが、もう一つの学級ではなかなかはっきりしなかったり、またある学級で出てきた言葉がもう一つの学級では出てこなかったりしたため、それに対応してそれぞれの談話の構成が部分的に変化した。授業の全体の流れをまとめると次のようになる。

授業概要

授業	6年1組（総時数14時限）		6年2組（総時数13時限）	
1－1	10/2 2限	プールの水をいっぱいにするのに時間を関係づけて調べようとする発想がすでに子どもたちの中にあったため割とX⇄Yはスムーズに受け入れられた。	9/28 5限	プールの水の量を時間で置き換えることについて考えX⇄Yと表す。イメージをつかむのに時間がかかった。
1－2	10/3 5限	身の回りからX⇄Yを探す活動。多数の事例が出てきた。「1あたり量」で考えるものはすべて当てはまる、といった風潮あり。しかし、何を何で置き換えるのかが、あいまいである。例えば時間と距離だったら時間は手近なもの、距離は測るに難しいもの、という感覚が薄そうだ。	10/2 4限	身の回りからX⇄Yを探す活動をする。班で相談して、1つ以上は発表できた。ビルの高さを階数で測る、等あり。 なんとなくX⇄Yの意味はわかったらしいが、そんなことをする必要がなぜあるのか、求めたいYがそんなにあるものなのか、といった表情である。
2－1	10/4 5限	X⇄Yが言えるための花びんをイメージし、形と変化の様子の関係を捉えることが難しかった。花びんにどれだけか水を入れたとき、深さはわかるか？という意味が通じなくて、測らないとわからない、と考える子が多かった。	10/4 3限	X⇄Yが言えるためには、花びんの形に条件があることを見つけることができ、（あ）のような花びんであれば、水の量と深さがきちんとした関係であることをイメージすることができた。 x yを組にしたデータをランダムに提示したが、子どもたちは1 dl あたりの4㎝という数字が何倍かになっていることを見つけた。このことを不完全ながらきまりとして位置づけた。
2－1 後半	10/10 5限	（あ）の花びんにもし8 dl の水を入れたら深さはわかるか？という問いに対して、6種類の解法が発表された。いったん言葉と式で表してから、それらを矢印を使って表にまとめることによって、表を思考の道具としようとした。書かせてみると難しそうであった。それは矢印で表すことに慣れていなかったこともそうだが、まだきまりについての理解が不十分であることが大きい。繰り返してきまりを確立していく必要がある。	10/11 3限	（あ）の花びんに8 dl の水を入れたときの深さを求めるのに、前時のきまりにもとづいて1通りだけの考え（1 dl あたり4㎝の8倍）で、全員が納得してしまい、その他の考えはなかった。表に矢印を書いてこのきまりを説明し、（あ）のような関係を「比例」とした。まだ、表をもとにして考えようという意識がうすいので、表をじっくり見て考える場を設ける必要がある。

2－2	10/11 5限	の矢印と、比例の用語を導入。3 dl で4.5cmの花びんに、15dl の水を入れたときの深さを求める課題④に取り組んだ。解法は２つ。そのうち１つの考えを追究した。子どもたちはｘが○倍になるとｙも○倍になることを、無造作に理解しているので、そのことを表の上で、一般化しようとした。 子どもにしてみれば当たり前のことを聞かれているような気がしたらしい、なかなか意味が通じなかったが 小数倍に目が向いたときに、驚きがあったようだ。	10/12 5限	の矢印を導入。課題④の解法の１つ目を追究した。ここでもｘが○倍になるとｙも○倍になる、ということが当たり前すぎて、一般化しようとする意識にならなかった。前時のきまりでは、ｘが１から○倍されたときのことしか言っていないことを指摘し、どこからでも逆方向でも、小数倍でも矢印が存在することを確認した。
2－3	10/12 3限	課題④に対する２つ目の考え（1dl あたりの深さを求めてから15倍する方法）について、検討した。この方法のよさについて問いかけると、何人かの子によってすぐに１あたりの数はｘが何であっても対応できることが発見された。そのことを任意のｘを想定することで、全体に納得された。「問題を出してみればいい」「このことは(あ)の表でも証明できる」という言葉が聞かれた。きまり②として、「もとの数があればｘがどんな数でもｙが出せる」が確認された。「もとの数」は子どもたちが名付けた。	10/16 4限	課題④に対する２つ目の考えを明らかにした後、前回の５倍５倍の考え方と今回の考え方を比べて、面倒そうだが何かいいところはあるのかと問いかけた。子どもたちはしばらく考え、やがて数人の手が上がり始める。1dl あたりの数を出しておけば、どんなｘにも対応できることを言い、それをｘが４のときで確かめた。きまり②ができた。この数を子どもたちは「きまり数」と名付けた。(あ)の表に戻り、(あ)のきまり数４が、表の中にどれだけ見えるかを探した。隣のクラスで47こ見つかったという話をすると、やはりそれだけ見つけることができた。(え)の表にきまり数は見えないかとたずねてみたら、見えると答えた子が数人見られた。
2－4	10/16 2限	前時に出た「もとの数」が(あ)の表ではどのように表れているのかを確かめた。その結果、４が47こ見えてきたことから、もとの数には、１あたりの数・増える数の他に「ｘとｙの割合」のような意味があることをまとめた。しかしこの意味の違いについては、あまり理解されなかったようだ。また、(あ)の表では見えていても、(え)の表にもどってもとの数が見えるかをたずねたときは見えてこなかったらしい。	10/17 3限	課題⑤(お)の花びんに取り組んだ。ほとんどの子が１あたりの数(きまり数)を求めて、それを９倍して解答していた。２つのデータをそれぞれ使ってきまり数を出す式が発表された。教師が y1+y2をして見せて、こんなことしてもいいと思う？とたずねたら、驚いた様子だったが、やがていいんじゃないかと、(あ)の表に戻って考えだした。たし算ばかりでなくひき算もできると知ってきまり③となった。わけについては時間がなくたずねることはできなかった。
2－4 後半	10/19 3限	課題⑤(お)の花びんに取り組んだ。データが小数になると、今までそれなりにわかっていたつもりの比例もとまどうことが多かった。もとの数を出して、それを求めるｘにかけるという方法は、確実になってきた。そのことを確認する一方でｘ1+x2=x3のとき y3=y1+y2で求められることについて追究した。(あ)の表でそれが言えるかを具体的に確かめた後、さらになぜそんなことが言えるのだろう？と問いかけた。図では説明できるが、それ以上の説明はできなかった。教師がｘとｙの		

		間にある矢印について触れ、割合が同じであること、結合法則のしくみについて具体物で説明した。		
3－1	10/23 2限	長方形Ａを拡大・縮小したとき、よこｘとたてｙは比例するだろう、という見通しのもとに、作図しながら表を作成し、比例を図形的に見ていこうとした。はじめは辺の長さを計算で出し、１組ずつの頂点としてとらえていたが、「対角線」を書けば、無数の同じ形の長方形が求められる、というある子の発見にグラフのイメージまでに至った。しかし、０点に近づくと思考は混乱するようだ。	10/19 5限	長方形Ａの拡大図・縮図の作成に取り組み、よこｘとたてｙの比例関係を表やグラフに表そうとした。ところが、拡大図や縮図を書くことが意外に手間取り、たてよこを１㎝ずつ増やして書く子も多く、拡大縮小の学習をもう少し想起させる導入があればよかったと思われた。しかし、表のデータが増えていくにしたがって、理解も進み各自のプリントに書かれた頂点が直線に見えてきたようである。
3－2	10/24 5限	比例のグラフは対角線であるというイメージをより一般的な言い方にするため、既習の花びん(あ)～(お)についてもグラフに書いてみることにした。ところが子どもたちにとっては、ｘｙ軸に合わせて点を取るという作業に手間取り、グラフを書くだけで終わってしまった。比例のグラフが直線になることを確かめようとして行っている作業なのに「(お)がまっすぐにならないのは比例じゃない」などと意識が逆になっている子も見られた。対角線のイメージが強かった、とも言えるのだが。	10/23 4限	比例のグラフはみんな前時のようなグラフになるのかどうかを調べるため、今までの(あ)(え)(お)のデータをグラフの表してみた。その結果、比例の関係にあるグラフはそれぞれの点が直線上に並ぶということがわかった。０点については、しかしまだはっきりしない。ここでのグラフに書くという作業は、けっこう時間がかかった。座標上に点を取るということが、子どもにとって難しいものであることがわかった。
3－3	10/25 5限	前時に書いたグラフを比べて比例のグラフはどんなグラフと言えばよいか、について話し合った。予想では「直線」という言葉しか出てこないだろうと思われたが、直線10人に対して、対角線7人、ななめ6人、まっすぐ5人とそれぞれに思いがあるようであった。比例のグラフは右上がりの直線、という言葉でまとめられた。０点については、今度は(あ)の花びんの例を使ってアプローチした。水が入らなければ、深さもあり得ない、という理解で、０点をスタートとすることに決まった。ここで花びん(う)を登場させた。(う)のデータは一次関数 $y=2x+4$ である。比例しているかどうかを判断させたところ、これまでのきまりを使って比例でないことを説明することができたが、何かひっかかる数字の並び方に対して、グラフで表したとき、グラフが鮮やかにその疑問に答えてくれたことで、グラフのよさが浮き彫りになったように思う。	10/24 3限	比例のグラフが０の点へ向かうものであることを、(あ)の表をもとにして考えた。さらに、比例のグラフがなぜ直線になるのだろう？とたずねてみたところ「きまり数があるから、その分ずつ増えているから」「同じ数の繰り返しだから」「ｘが２倍になるとｙも２倍になるから」などといった意見が聞かれた。また、以前比例かどうか問いかけたままになっていた(う)の花びんを、もう一度判断させた。以前は迷う子が多かったが、ここではしっかりと比例ではないことを言うことができた。そしてグラフに表すことによって、迷ったのはなぜかということもわかり、グラフによって比例かどうかが一目で分かる、ということが印象づけられた。

4－1	10/26 3限	(か)の表を完成させようという課題⑦に取り組んだ。この表は具体的な事象を説明することなく、ｘとｙが比例している、という認識だけを示した。どの子もｘが１のときのｙの値を求めようとするが、小数になるとそれだけでどちらをどちらでわればいいのか、判断できなくなる。そのため、考える時間が長くかかってしまった。隣同士の相談を促すと、それによって理解が進んだようだ。もとの数をどのように求めればいいかを納得するのにさらに時間がかかった。しかし、それだけに、もとの数を求めようとする意識が強く、またこれまで強調してきたこともあり、公式を作ろうとしたときには、「ｙ＝もとの数×ｘ」以外の式は姿を消していた。(か)の表をｙ＝0.6×ｘとしたことから、同様に(あ)(え)(お)も式に表した。	10/25 3限	課題⑦(か)の表に取り組んだ。１あたりの数(きまり数)を出そうとする意識が強く、ほとんどの子がきまり数を出して、それに該当のｘをかけてｙを求めていた。したがって、公式にしようと促すと、迷いもせず「ｙ＝きまり数×ｘ」と、答えるにいたった。これは、これまでの学習の中で、きまり数を強調してきたこと、Ｘ≒Ｙへの動機づけを繰り返してきたことなどが働いたものであろうと思われる。この後、この式を使って任意のｘに対応するｙの値を求める練習をした。また(あ)(え)(お)の表に対しても、式を与えることができた。
4－2	10/30 2限	３つの式と３つのグラフを結びつけるという課題⑧に取り組んだ。子どもたちのほとんどが予想を立てることができ、表を書いて考える子は見られなかった。もとの数とグラフの角度との間に関係があることを直ちに理解したようだ。(この関係が比例ではないか、と後で書いてきた子もいた) 実際にもとの数を0.5ずつ増やしてグラフを書き、確かめることができた。グラフも簡単に書けることも知った。	10/26 5限	３つの式と３つのグラフを結びつけるという課題⑧に取り組んだ。式のきまり数がグラフの角度を決めているのではないか、という推論に基づき予想を立てた。そしてこの考えが正しいかどうかを、実際にきまり数を0.5ずつ増やして、グラフを書いてみて調べた。このときには、比例のグラフが０点を通る直線であることを利用して、１点が分かれば簡単に書けることを知る。そうして、確かにきまり数が大きくなると、グラフの角度(傾き)が大きくなることを確認したのである。ためしにｙ＝2/3×ｘのグラフが、どのグラフの間に入るかとたずねると、さすがに分数と見ただけで難しそうな顔をした子が多かったが、周りの子と相談をさせたところ、理解できたらしく、話し合いのころにはほとんどの子が発言者にうなづいていた。分数も式やグラフの仲間として考えられたことが驚きだった子もいて、感想にも書かれていた。
5－1	11/1 5限	比例の式がかけ算で表されたことをもとにして、これまで子どもたちが学習してきた公式を、比例の目で見直してみた。このことは子どもたちにとっては新鮮だったらしく、世界が広がったようだ。長方形の面積の公式について考えたとき、子どもから「体積は？」という問いが出された。直方体の体積＝縦×横×高さのうち、縦×横を底面積とまとめれば、比例の式となる。このことはこれから学習する立体の体積を出すときの大きな土台になるだろうと思われる。	10/30 4限	比例の式がかけ算で表されたことをもとにして、これまで子どもたちが学習してきた公式を、比例の目で見直してみた。また、Ｘ≒Ｙについて、≒のきまりについて、比例の表・グラフ・式について、そして教師が子どもとのやりとりによって、解答の奥にある考えをしぼっていく授業の方法について、感想をまとめるよう求めた。

３．授業のプロトコルデータ

ここでは，小学校の授業のプロトコルデータを示す。小学校での教授実験では，総計２７授業時間のプロトコルを作成した。ここでは，１クラス（6年１組）の第１次のものを例として掲載する。

① 10月2日（月） 1－1

0001 T ：さあ、えーと、じゃあ、えー、今日は最初なので、これから 1 ヶ月だいたいどんな勉強していくのかなーって、いうような話をします。で、いきなりですが、みなさんの知恵をちょっと（　）。えー、まず、みなさん夏の間、えー、プールがお世話になりましたね。もうプールは入りませんよね。<短>さあ、そのプールが今日の話題です。えー、実は、プールの水が抜けてしまいました。<短>抜けてしまいました。空っぽになりました。だれかのしわざです。で、えー、その空っぽのプールに水を入れたい（と思います。入れたい）。ね。いっぱいに。で、プールの栓、栓っていうか、水道の栓あるよね。あれをこう抜いた。さあ、今あけたとすると、この水いっぱいになるまでずっーと見ていなくちゃならないかって言うと、どう？

0002 C ：1 分間にどれくらいはい（　）

0003 T ：ずっとその水いっぱい、いっぱいになったら止めたいわけやね。いっぱいなるまでずっとこうやってみていなくちゃいけないかっていうことなんやけど。

0004 越田 ：あふれた（　）

0005 T ：あふれたらあふれたで、そりゃちょっと考えん（なん)。そやけど、いっぱいになった瞬間に、あの、止めたい。

0006 Cn ：瞬間？

0007 T ：瞬間。

0008 石橋 ：まずは 1 分間にどんだけはいるか。

0009 T ：うーん。

0010 C ：1 分じゃ短い。

0011 T ：うーん。

0012 寺東 ：5 分か 10 分ぐらい、えっとそれでどんだけ入るか、さえ分かれば。

0013 石橋 ：プールにどんだけの水が入るか。

0014 T ：うーん。ちょっといろいろ思ったことしゃべってみてくれる。

0015 Cn ：（　）

0016 T ：〔板書しながら〕まず水をいっぱいにしたい。ね、さあ、みんないつ止めに行けばいいかなってこと考えるんでしょ。ね、ずっと見てるの（ひどい）もんね。

0017 寺東 ：どれだけ水が入るかと、1 分間ぐらいに水のはいる量。

0018 T ：〔板書しながら〕どれだけ水が入るか、これはプールの中に全部で？プールの中にどれだけ水が入るかが分かれば。

0019 寺東 ：5 分間で、／5 分間で／、どれだけ（　）

0020 越田 ：／〇〇分で〇 1 入るか。

0021 T ：〔板書しながら〕〇〇分で〇 1 入るか？が分かったら、いつ止めに行くか分かるね。

0022 寺東 ：もう 1 つの方法やったら、プールの深さと何分間でどれくらい、どれくらい（進むか)。

0023 T ：ほい、ほい。〔板書しながら〕プールの深さがどれだけか。
<7 秒>どれだけか。で、なんだっけ、これが（　）

0024 C ：〇〇分で

0025 T ：〇〇分で

0026 C ：何ｃｍか

0027 T ：〇〇分で

0028 C ：ｃｍや

0029 C ：ｃｍや

0030 T ：ｃｍか。〇〇ｃｍ入るか、入るか。

0031 寺東 ：入るか。

0032 T ：が分／かればいいよ／。

0033 寺東 ：／何ｃｍ高くなるか。

0034 T ：うん、(ていうことなんやけど)、ちょっともう（ちょい）くわしく。どうしてこれが分かったら出せるのかね。たとえば（どうだ)、たとえばこんなときに、こんな（　）
<12 秒>ちょっと待ってね。今何が問題になっているか分かる？わかるね。分かるときはうな

ずく、ね。はい、そしたら。今こう２通り、何かみんなの中からアイデアがでたよって（　　　）はい、この１つ目のこれ、これをもう少し詳しく見ていこう（ってことだね）うん。＜短＞まずじゃあほんなら、プールの中に水どんだけはいることにする？

0035　C　：40 l。
0036　T　：はい 40 l。で、えー1 分間に何 1 入ることにする？
0037　C　：1
0038　C　：（　　　）
0039　T　：1 l ？
0040　寺東　：1 分間で 1 l ／（　　　）／
0041　石橋　：／少ねー。
〔ざわめいている〕
＜12 秒＞
0042　C　：そしたら 5 l。
0043　T　：1 分間で 5 l にする？うん。だいたいこれ 40 l（少なくないか）？
0044　C　：40
0045　C　：(4 c m)
0046　C　：400 l
0047　T　：400 l にするか？いくらなんでも。
0048　C　：どんなにでっかいプールねんて。
＜10 秒＞
0049　T　：だってね、ちょっと待って。400 l でっかーと思うん（だろうけど）1mのね、あのね、この 1 立方メートル、あれが 1000 l やよ。
0050　C　：小さ。
0051　C　：小さい。
0052　C　：小さ。
0053　C　：小さい。
0054　T　：〔笑い〕
0055　C　：すげっ小さい。
0056　T　：すげー小さいでしょ。みんな（　　　）
0057　T　：だから、せめてこの、これぐらいは絶対あると思うよ。
0058　C n　：〔数人〕4000？
0059　C　：（　　　）
0060　T　：4mって（　　　）
0061　C　：（1 l のコーラ 4000 本　　　）
0062　T　：ね、はい、まあいい。今えっと、考えないからね。さあ、そしたらもしこうだとするとどんなふうに考えられるの？
0063　C　：うーん
0064　T　：3 つ（　　　）なんだから、0 分後って言えるんだよね。
0065　越田　：5 l いくつぶんか。
0066　T　：式とかある？
0067　C　：え？
0068　T　：式とかある？
0069　C n　：ある。
0070　C n　：〔数人〕4000÷5
0071　T　：はいそうすると、800 とでて、これは何を表しているかといったら？
0072　C n　：〔数人〕分。
0073　T　：800 分でじゃあいっぱいになるよ。800 分後に止めに行けばいいよ、っていう話なんだね。うーん。じゃあこの考えで良さそうだ。じゃあ次。この考えは？
＜6 秒＞じゃあプールの深さがどれだけでいきますか。
0074　C　：1.5
0075　T　：それは（　　　）
0076　C　：1.25
0077　C n　：〔数人〕1.5
0078　T　：1.／5？／
0079　C　：／2
0080　C　：／5
0081　T　：5？1.5 ならちょっとおぼれる人出てくるんじゃないか？
0082　C　：1.2
0083　C　：1.4

0084 T : 1.2mやね。うん、で、1分間で何m入ることにする？

0085 C : 3ｃｍ

0086 C : 1ｃｍ

0087 Ｃｎ : 〔数人〕10ｃｍ

0088 T : 1分間で10ｃｍ

0089 寺東 : 10ｃｍ

0090 C : 多すぎ。

0091 C : えー。

0092 石橋 : 12分。

0093 寺東 : 12？

0094 T : そしたらどうなる？

0095 C : えっと

0096 C : 2m

0097 C : (　　)

0098 T : (12) 分間で入っちゃうの？

0099 寺東 : うん

0100 C : ちっちゃい。

0101 C : じゃあ上とあわんよ。

0102 C : ちっちゃい。

0103 石橋 : 上にあわせれば？

0104 T : どっから12分がでてきたの？どっから12がでてきたの？

0105 Ｃｎ : 〔2人ほど〕120÷10

0106 石橋 : 120m＝120ｃｍ

0107 C : 120ｃｍ

0108 T : あー、なるほどね。1.2mは120ｃｍだよ。はい、うん。それ÷10だから／12になる／んじゃないか。

0109 C : ／12になる。

0110 T : 妙に（ちっちゃいプールやね）はい、これ、こう考えていくと、ま、たとえば、だから、うん、12分後に止めに行けばいいよってことだね。わかった。じゃあ、2つ考え方があって、ね、どちらもみなさんは、ずっーとその水面を見つめていないわけやね。

0111 C : うん。

0112 T : うん、よし、じゃあここまでのことをちょっとまとめてみよう。みんなの頭の中で起こったことをまとめるよ。ね、そうすると、みなさんは本当ならば、水を、水の量やね、水がいっぱいになったよっていうことをずっーと見ているはずだったのに、みなさんは賢いので、それを何かに置き換えてみた。

0113 石橋 : 置き換えてみた？

0114 T : うん。何かに置き換えてみた。＜短＞何に置き換えたんだろうね？

0115 C : 時間。

＜7秒＞

0116 T : 時間、だと思う人。

0117 C : 〔1人挙手〕

0118 T : 1人。あとは？でもみんな水見てなかったでしょ？水をずっと見てなかったでしょ？じゃあ、うん、代わりに何を見たの？

0119 石橋 : あー、そういう意味か。時間。

0120 T : 時間でいい？＜短＞時間だと思う人。

0121 Ｃｎ : 〔大多数挙手〕

0122 石橋 : (時間に任せといた。)

0123 T : うん、そうだよね。うん、じゃあ時間つったら、あの、難しいかもしれんけど、時間を見たわけだね。水の量を見る代わりに時計を見たわけ。時計に置き換えたわけね。ね。ね。っていうことは、これってすごいことだよね。＜短＞水の量を、ずーっと見てるんじゃなくって、それを時計に置き換えて見た。＜短＞時間に置き換えてみた。っていう知恵をみなさんは、ね、もってたわけや。こういう、話を、今から12時間みんなは勉強するんだよ。いい？ね、じゃあ、もう1つ。よいしょ。さあ。ここにね、カードがあります。さあ、何枚あるのっていうんだけど、これをぜーんぶ数えるのは大変だ。全部数えなくって何かほかのものでこれが何枚あるかなー、ぜひ見当つかないか、なっていうことね。そしたら、さあどうや？

0124 Ｃｎ : 〔2人挙手〕

0125 T : うん、2人手挙がったけどもうちょっと（考えてみて)。
＜12秒＞ちょっと隣同士2、3分、はい。

〔話し合い中〕

＜1分＞
0126 T ：さあどうかな、さあどうかな。
0127 Cn ：〔数人挙手〕
0128 T ：はい、えーと、じゃあ若森さん。
0129 若森 ：えっとまず、その紙の1枚か何枚（でもいいですが)、薄さ、あの縦の高さの薄さをはかってそれから、あー、その高さ、全部の高さをはかってから、あの、その高さ÷1枚の厚さをやればでると思います。
0130 T ：うん、わかった？
〔うなずいている〕
0131 T ：同じこと考えたよっていう人。
0132 Cn ：〔数人挙手〕
0133 T ：じゃあ若森さんはこの紙の枚数を何に置き換えた？
0134 C ：厚さ。
0135 T ：厚さ。
0136 C ：長さ。
0137 T ：長さ。
0138 C ：長さ？
0139 T ：真、長さやね。厚さ、長さ、高さ、ね。みんな、ま、ここの部分ね、ここの部分ね、ね。
0140 石橋 ：1枚と考えんと10枚の高さ。
0141 T ：1枚でもでないことはないが、大変な数字になるね。だから若森さんはうまいこといって何枚かの、ね、何枚かの厚さ、ねえ、はい、それを、えっと、それの（　　）に書くと、紙の枚数を、えー厚さ。
0142 C ：最終的には（　　）。
0143 T ：最終的には？いや、そんなことないかもしれんよ。きちんとやれば、(　　）かもしれんよ。ね、うん。きちんとできればね。さあー、じゃあ厚さがでたけども、もしかしてまだほかに考えた人いる？
0144 Cn ：〔数人挙手〕
0145 T ：ほーん。いるぞー。じゃあこの紙の枚数を、えっと、えー、ほんじゃあ鬼原さん。
0146 鬼原 ：あってるかわかんないけど、重さでもできると思います。
0147 T ：重さっていってるんだけど、(　　）？一緒？じゃあ川渕さん続き、重さ（　　）。
0148 川渕 ：えっと、まず1枚の紙の重さをはかって／、その後全部の重さ／をはかって、そのあとその1枚の重さからその最後の全部の重さを書けて、でそれをかけた数で最終的にでた重さを枚数に表していけばできるかもしれない。
0149 古田 ：／はかれるわけねーじゃん。
0150 石橋 ：説明はわからんかったけど、できることはできると思う。
0151 寺東 ：ねえねえ、川渕の（やったら　　）
0152 T ：じゃあその重さについて、(　　）もう少し説明しよう。
0153 寺東 ：川渕さんのやったらちがうんやけど。
0154 T ：川渕さんはこの1枚の重さをはかれば枚数が分かるんじゃないかっていうんだね、ね。どうや？えっとほかに（　　）出しとったね。佐川さん。(　　）
0155 佐川 ：わたしは、えっと（　　）なんだけど、それを1枚じゃなくって、10枚とか／（　　）／にして、で例えば10枚が何gかっていうのをはかって、で、全体の（重さ）をはかって(　　）
0156 T ：／はあー、10枚。
0157 T ：えっと、ほかにちょっとじゃあ（　　）。えっと、同じこと言おうとして手挙げた人いるかな？じゃあ、越田さん、はい。
0158 越田 ：ぼくもえっと、紙の枚数と、10枚くらいの重さ、をはかってから、えっと、全体の重さをはかって、全体の重さ÷をしてでた数が（　　）。
0159 T ：重さでどうもはかれそうだなって思った。なーんとなく、ね。はい、いくよー。ていうことは、さっきは紙の枚数を重さではかれるんじゃないかなって話をしたんだけど、今日はやっぱりこの紙の枚数を重さに置き換えて厚さをっていうことなんですね。ここまで話分かった？わかる？じゃあどうして水の量が時間ではかれたり、紙の枚数や厚さが重さではかれてしまうのかな？
＜8秒＞
0160 寺東 ：計算じゃなくて比でも分かるんじゃない？
0161 T ：ほんとに？比？
0162 C ：2つの関わり合いがあるから。
0163 T ：はい、2つの関わり合いがあるから。
0164 石橋 ：全部1をもとにして。時間も厚さも。
0165 T ：うーん。全部1をもとにしているから、関わり合いがあるから。
0166 越田 ：多分同じようなことで、多分。ケーキの値段がどうのこうのとか。

0167　T　：値段？例えば？

0168　越田　：ケーキが1個安くて100円だったとか、それが2個200円というので。

0169　T　：何だって？ケーキが1個100円だったら？

0170　越田　：2個で200円だから、ケーキ数がお金にかわってるわけよ。

0171　T　：ほう、そう考えていい？なるほどー。ちょっと待って。ケーキの数がお金にかわった。こうか？そうか、そういうことっていっぱいあるね。

0172　寺東　：逆でもいいよ。ケーキ1個でお金が300円あたりに何個とか。

0173　T　：お金を出すのにケーキの数で考えることができる。

0174　越田　：100円もってけばケーキが買える。

0175　寺東　：やっぱり1をもとにしているよ。ケーキも。

0176　T　：例えば、今日なんかいいことしたんで、おこづかいがあたったわよ、おこづかい800円っていったらもしかしたら大判焼き10個分じゃないかっていう。〔笑い〕はい、つまりどういうことや？これがこれではかれてしまうっていうのは関係があるから。例えば、時間が増えると水の量も同じように増える。そういう関係があるか数学ができるんだよね。

0177　C　：どっちかが増えればどっちかが増える。

0178　T　：どっちかが増えればどっちかが増える。<短>こういうような勉強をこれからします。それでこの次、明日、もし遠足がなければ。遠足があればあさって。今みたいにみんなの身の回りで何かはかりたいものがあって。でもそれがなかなかちょっと難しいぞ。じゃまくさいぞ。はかれんぞ。みたいなものがあったら、それを何か別のものにおきかえてはかれるんじゃないかなっていうものを探してみようかなっていう。<短>今なんか思いつく人いる？さっきのケーキみたいな。<短>すぐにはわかんないかな？　<8秒>いる？うん。じゃあね、うん、いいよ。これ明日考えるから。例えばさ、先生もなんかいつも不思議だなーって思ってるんだけど、これあんまり真剣にきかんでいいよ。あのー、例えば、あそこの星まで、どんだけありますって距離が出てるでしょー、辞典とかに。何で分かるんだよー、そんなもん。まさか巻き尺もって誰かが星まで行ってはかってきたわけじゃないでしょー。ね。だから何かに置き換えてるんでしょ、きっと、あれ。何かに置き換えているから、そういうことが巻き尺とかもって行かなくてもわかるんよ。なんだろね。それはちょっとわかんないね。

0179　越田　：光の輝きとか。

0180　T　：うん、そうですね。なるほどね。きっとこれを考えたらいろんなものいっぱいあるかもしれん。何かはかりにくい何かを別の何かではかってみようということですね。

0181　C　：例えて言う？

0182　T　：そう。例えばを今度考えてみる。じゃあちょっとノート見てみて。今日の話分かったかなあ？それからこういう勉強をしてるんだよってこと。　<8秒>はい、じゃあ、あと5分ぐらいかな？今日の勉強したことの感想文でもいいし分かったこと書いてください。書いてまとめて出してください。

<5分12秒>

0183　T　：ハーイ、そろそろストップ。2つほどちょっとはっきりさせたいことがあるんです。いいかな？さっきケーキの数をお金で調べるよ、それからお金をケーキの数で調べるよっていうんだけど、どっちのことを知る方が難しい？みんなとしては

0184　C　：お金からケーキを調べること。

0185　寺東　：1個のケーキいくらか分かれば。

0186　T　：ケーキの数出す方が難しいか、お金の方が難しいか。

0187　寺東　：どっちもおなじ。

0188　T　：同じくらいか。

0189　C　：かわらん。

0190　T　：かわらん。そうか。はい、わかりました。はい、一件落着。やっぱどっちかの矢印にしたいなっていったんだけどさ。あきらめます。もう1つ。さっき古田さん1枚の紙の重さはって言ったとき、そんなもん分かるわけないって言ったけど、

0191　寺東　：軽すぎて？

0192　T　：その気持わからんでもないん。だけどさ、分かるらしいんだよ、これが。

0193　越田　：それ紙じゃなくて、鉄板プレートの枚数だったら分かるよ。

0194　T　：あー、そうね。それくらいだったらね。薄い薄いほんとにね、金箔みたいなね、あれってわかるんだよね。だからほんとにね、わからんってものもあるかもしれないけど、紙の重さって結構（　　）らしいね。<短>はい、ノート今日集めていい？だめ？<短>今日は最初だからだめって言うのも許されるよ。じゃあもうちょっと待つよ。明日でもいいし。今日か明日か決めるよ。今日出していい人。

0195　Cn　：〔13人挙手〕

0196　T　：じゃあ明日。

0197　Cn　：〔多数挙手〕

0198　T　：ってことは、まだ書くことがあるってことだね。今日考えるっていう。<短>じゃあ終わりましょうか。<10秒>はい。

② 10月3日（火）　1－2

0001　T　：はい、えー、今日は、せっかくの遠足が雨のため、でも多分あさっては、（ぎんぎらぎんの晴れに　　）。えーとしばらくなかったので

<短>

0002　石橋　：にたとえる。

0003　T　：見覚えはないですか？

0004　Ｃｎ　：〔数人〕あります。

0005　石橋　：お金がある。ケーキが。

0006　T　：なに？どんなことやった？どんなことやった？

0007　Ｃｎ　：〔多数挙手〕

0008　T　：えー、すげーぜ。ほんとに（　　）。えーと、本藤さん。

0009　本藤　：えっとー、なんかこのくらいの厚みの紙がたくさんあって、それを 1 枚ずつ数えるのは面倒くさいから、何かもっと早く数えられる方法をみんなん考えたいです。

0010　T　：あ、なるほど。（　　）ね。ほかにある？じゃあ肥川さん。

0011　肥川　：さっき先生が言っていたんだけどー、それではかりにくいものは、あのなんか、ノートになんか、なんか書いて、今の時間に発表っていうか何か（　　）。

0012　T　：はい、そうですね。よく覚えていました。うん。はかりにくいもの。ね。何かはかれる方法ね。えー、川淵さん。

0013　川淵　：いや、紙とちがって、（　）ケーキ 1 個とお金でも同じ。

0014　T　：はいい、そうね。じゃあその紙と、紙の枚数っていうのは、これはどっちがいいんだー？<短>こっちだって思う方の手を挙げてよ。せーのー、はい。

0015　Ｃｎ　：〔右手挙手多数〕

0016　石橋　：左側が厚さや。確か、厚さと重さ。

0017　T　：こっちが紙の枚数だったよね。

0018　石橋　：はい。

0019　T　：はい、うん。じゃあこっちはなんなの？

0020　石橋　：厚さ、重さ。

0021　T　：厚さとか重さだったんだね。はい、よーく覚えているね。今日は、じゃあね、それ、もっとほかにないかーていうことを考えようっていっとったね。で、こっちがなんかちょっと、はかるの難しいんだけど、なんか、みたいの、ね。で、こっちが、何かちょっとはかるの難しいんだけど、何か知りたいもの、ね。えーっと、これをｙと、右（　　）知りたいものｙ。はい、知りたいｙ。で、えーっとそれを知るために、それを知るために何をはかればいい？これを直接はかるんじゃなくて。何かに置き換えてはかるといったときのこのはかるもの。実際にはかるもの、これ何と何にしたい？<短>はい、これをｘとします。ね、これを今日はみんなに何かないかなって考えて（もらいます）。ほんでね、これだけみんな前の時間のこと覚えているので、あの一、もうちょっと思いださんなんかなーって思ってたんだけども、そんじゃー、うーんと、今のそれをちょっと当てはめてやってみるよ。まずこっち側にこの聞きたのが、2 の倍数でした。それを厚さではかれるよ。という話でしたよね。そしたら、どうして紙の枚数が厚さではかれるかっていうの。どうして？

<短>1つ。何かこっちとこっちは何か関係があるっていうような、ね。まあ、おおざっぱに言えば、厚さが厚くなると紙の枚数も増えているはずだっていうのがあるわけね。だからそういう何か関係があるようでないと考えられないよね。こっち知りたくならんでもいいんだけども、こっちはこれと何か関係のある何かを探してこないといけないから、ここがちょっと難しいよ。で、えー、今日、これは一人一人考える？それとも 2 組さんはグループで相談した・・。

0022　C　：グループで？

0023　T　：グループがいいかな？うん、じゃあ、グループで、とりあえず 1 つ以上。そしてたくさん書ければいくらでもいいけど。1 枚につき 1 個。こういうでっかい矢印ばんと書いて、こんな、こんな書き方してくれる？で、えーっと、自分がこんなん、こんなんじゃないかなって思ったのを土曜日みんなにこんなんどうやーって言ってみて、それでみんなそれいける、いけるっていうことだったら書いてみて。ほんならグループってことは、どういうグループになっているの？

0024　T　：1 班。

0025　Ｃｎ　：〔数人挙手〕

0026　T　：おお、縦か。じゃあ縦てっていうんは困るんで、〔指を指しながら〕ここはこの 3 人、ここは 4 人でしょ。<短>そっち横ずらっといく？じゃそこ 4 人。（　　）。よし。はい。じゃあそんな感じで。　〔紙配布〕はいじゃあしばらく。そうねえ。（　　）。でっかく書いてくださいね。

〔グループで話し合い中〕
<7分50秒>
0027　C　：先生、何分まで？
0028　C　：15分まで。
0029　C　：20分まで。
0030　T　：とりあえずもう3分くらい待って。
〔グループで話し合い中〕
<4分>
0031　T　：(まだ時間ほしい人)
0032　Cn　：〔数人挙手〕
0033　T　：じゃああと2分。
<2分30秒>
〔紙の回収を始める〕
<1分>
0034　T　：はい、では、(　　)。こんなにたくさん出るとは思わなかったからねえ。はい、それではね(　　　)。みんながどんなのを考えたのか見せてみようと思う。もしも質問とかあったらどんどん言ってね。では。<短>はい。<13秒>はい、ちょっと読むよ。アルコールのへり方。
0035　C　：量じゃないか。
0036　T　：アルコールランプのついている時間。へり方って言うと
0037　Cn　：〔　　〕量や！
0038　C　：絶対量や量や！へる量や。
0039　T　：量？なるほど。量と書きたいが、量と書きたいが、えーっと、へった量。それは量を時間で置き換えてはかれるよっていうことやね。よしOK。これちなみに誰考えた？そこか。
0040　Cn　：〔考えた班の2人〕(　　　)
0041　T　：はい、これもなんとなく。<短>ドライアイスがとける量を時間ではかる。OK。よし。<6秒>うん？何か矢印矢印って名前が(　　　)
0042　Cn　：〔多数　ざわざわしている。〕
0043　T　：地球の周りを知りたい。そのために縮尺ではかる。
0044　越田　：メンバーまで書いてある。
0045　C　：(　　)
0046　石橋　：周りを縮尺で？
0047　T　：地球の周りはかるの。
0048　C　：地図かいてなかった。
0049　T　：縮尺、地図が必要(　　　)。
<短>
0050　Cn　：〔数人〕地球儀
0051　T　：うん、ま、地図っちゅうんは地球儀の（ことやね)。
0052　C　：(縮尺って)
0053　C　：(　　)
0054　T　：これって単位なんなの？地球の周りだったらkmかな？
0055　C　：1対
0056　T　：これは何に置き換え（たと考えればいい？)
0057　C　：縮尺（ってちがうんじゃー)
<6秒>
0058　T　：地図の上の長さっていう意味かな。それでいい？
0059　C　：難しい。
0060　T　：地図上での長さ。(　　　)
0061　C　：(　　)
0062　T　：そういうことにしておこう。はい。地図の上での長さ、におきかえる。そうだよね。地球を自分で、あのー、巻き尺持ってはかるわけにはいかないもんね。<短>これは見やすいぞ。
0063　Cn　：〔ざわざわしている〕
<8秒>
0064　T　：お金を知りたい。何のお金かって言うと、電気とか水道代だって。うんうん、それが時間できまるよ。
0065　石橋　：1時間で何円か。2時間で何円か。
0066　T　：時間が分かればお金も自然にきまってくるぞ。
<10秒>はい。
0067　C　：(　　)

0068 T ：雲が来る時間。遠足の日らしいね。これ。雲の動き。動いた距離ね。雲が来る時間を知りたい。そうする雲が動いた距離／と比べ／れば距離だからこれはmだって何百mだってそうやろうね。

0069 石橋 ：／長さ。

0070 C ：mm

0071 T ：時間を距離ではかりましょうっていうことだね。<短>はい。

0072 寺東 ：速さ変わったら？

0073 T ：うん？

0074 寺東 ：速さ変わったら？

0075 T ：速さ変わったらどうしてくれる。

0076 石橋 ：ま変わるやろ。

0077 T ：変わらないって考えるわけね。ね。変わらないと考えたときに、この時間が雲の動きで分かるわけね。分かりそうだよと思う人。

0078 Cn ：〔数人挙手〕

0079 C ：〔挙手した子が〕あれ？あれ？

0080 T ：わからんがでないか。

0081 Cn ：〔多数挙手〕

0082 T ：あはは一、そうなの、ふーん。はい、じゃあこれはならんかもしれない。わからん（ ）。やっぱし（分かったって ）。

0083 C ：パート2？

0084 T ：パート2？これはこれでおなじ人がやったの？

0085 C ：ちがうんじゃ。

0086 T ：ちがうんか。あー、ちょっとちがうね。はい、距離をはかりたい。ね。それを巻き尺持って走るんじゃなくて、時間、そこまでどんだけかかったか時間に置き換えてはかれるよ。これどう？<10秒>はい、えー、矢印がすごい（でかい)。よし。

0087 C ：（ ）

0088 T ：えっと、脈拍数やね。1時間の脈拍を知りたい。そしたら、10秒の脈拍の数で分かるよ。これいいか？1時間ずっと数えなくってもということなんだね。

0089 C ：660

0090 石橋 ：速さ変わったらどうするん？これも。

0091 T ：速さ変わるん？途中で走ったりとか？少し。

0092 Cn ：〔ざわざわしている〕

0093 T ：はい、えー、紙の枚数を長さではかる。<短>この長さどこの長さかな？

0094 Cn ：〔数人〕厚さ。

0095 C ：厚さのやつ言葉考えただけやん。

0096 T ：厚さを言葉変えたら長さになるよってことなんかな。そうか。はい。あれ？まだ、ちょっと待って、えー、出てない班。<短>なんちゅう（ ）や、これ。

0097 Cn ：〔笑い〕

0098 T ：電池の消費量は時間で分かるよ。

0099 石橋 ：あとゲームボーイは何時間で切れるか。あれ、けど、何で減ったって分かるん？1時間どうやって調べるん？

0090 T ：うーん。

0091 寺東 ：（ ）

0092 T ：どうやって調べるか、こっちがか？

0093 石橋 ：そう。

0094 T ：そう小っちゃいことは（ ）。も、もこういうことがはかれたら、これはこれで分かるってね。

0095 C ：消費量って（ ）。

0096 T ：電池の消費量。電池か？この電池が、この電池がどんだけ消費されてるかってことだね。みかけではわからんけど、時間ではかれるよって。おーう、これ考えたのは？<短>なーんか似たのばっかしやし、ちょっと変わったのは、<10秒>お、なんか、こんなような。これどこや？またそこか。

0097 寺東 ：〔笑い〕

0098 T ：そこすごい（ ）。

0099 C ：またか。

0100 寺東 ：（ ）

0101 T ：ばね。ばね。

0102 C ：ばね。

0103 石橋 ：これ、ていうか教科書にのっとったような気がするよ。

0104 C ：教科書にのっとった。

0105 T ：じゃあそれをうまく使ったっていうこと。のびた長さ、ばねがのびた長さは、ばねを引っぱる力で／（　　）／。
0106 石橋 ：／重さでいいんじゃない？
0107 T ：力っちゅうのはｇか？
0108 C ：重さとか
0109 石橋 ：ｇでいいんじゃない？
0110 T ：そんだけの重さで引っぱったと考えるっていうんやから、うん、ｇね。はい。じゃあ（　　）、ね、はい。＜短＞これおもしろいけど。
0111 寺東 ：(まじでびびった)
0112 Ｃｎ ：〔ざわざわしている〕
0113 T ：どうせあとでまた、あー、でてくるからね。えっと、時間ねあんまりない。　＜短＞電気代と時間。ここと一緒。
0114 寺東 ：ぜんぶ（　　）ば？
0115 T ：時間分かるとお金の量分かる。
＜6秒＞
0116 T ：先生が感激したのは
＜短＞
0117 C ：感激？
0118 T ：ばしっ。＜短＞海の水の量を量るのに知りたい。それを水の重さではかる。
0119 C ：無理や。
0120 Ｃｎ ：〔数人〕無理や。
0121 T ：無理かもしれんけど、一応水の量が重さになっとる（んね)。＜短＞電気代が多いね。ここのなんか。
0122 C ：(なやんどる)
0123 C ：(減ってるけいと増えてるけいや。)
0124 T ：お母さんに言われんように（　　）。長いことテレビ見とったら、電気代が上がる（　　）。
0125 C ：ゲーム代で。
0126 T ：ゲーム代か？じゃあちょっと待って。あとほんなら、また、あの、紹介する（んだ）けど、これを全部みんな一応納得したんだよね。
0127 C ：はい。
0128 T ：何でみんな納得したかというと、えっとこれ、例えば、これ。時間が増えると、距離もそれにつられてっていうか同じように増えていくから距離を時間に置き換えれるよっていうのに（　　）。じゃあ、ほかみんなそうなんだね。＜短＞さあそしたら実験できそうなのあるかい？
0129 Ｃｎ ：〔ざわざわしている〕
0130 T ：電気料くらいならできそう。脈拍できそう。ばねできそう。アルコールできそう。
0131 C ：電池。
0132 C ：ドライアイス。
0133 T ：電池できそう？
0134 Ｃｎ ：〔数人〕ドライアイス。
0135 T ：電池、これもできるか／も（　　）／実際やりましょうになるんだけど、あとで、また余裕があれば。
0136 寺東 ：／先生、残りのやつ
0137 寺東 ：先生、残ったのも同じようなやつ同じところにはってみれば？
0138 T ：あ、そうか。というそんだけの時間もないんで、じゃあこれ、みんなほんなら知りたいものを何かほかのものではかるっていうのは、だいたいこんなようなことだっていうのは分かったかな？はい、そしたらほんとにじゃあはかろうと、それで出そうと思ったときには、もうちょっとくわしくその中身を調べないとわかんないんじゃ（ない）？だって単位ちがうし、ね。
0139 C ：数直線。
0140 T ：時間か距離になるっていう。1時間を、1時間がそのまま例えば1ｋｍになる限らないわけでしょ。だからこの間にはもう少し考えないといけない、ね、きまりみたいなものがね、多分あるよ。うん。時間変身するための何か条件、法則があるんだよね。それをこの次から勉強していこうと思います。
0141 C ：今日の動きはどうなるの？
0142 T ：今日の動き？（今日の動き　）いいんじゃない？（　　）結構いけるんじゃない？ね。はい、さ、ということなんですが、今日はノート集めたい。はい。
0143 寺東 ：何も書いてない。
0144 T ：今から書くの。(必死で)＜15秒＞3分ほど。＜20秒＞分かったことでもいいし、感想、思ったことでもいいし。＜3分＞ひとまずあいさつをします。えーと、あいさつが終わったら書けた、出せる人から（出してください)。はい、どーぞ。

日本学術振興会・科学研究費補助金（基盤研究Ｃ（２））研究成果報告書

初等・中等教育段階の接続性を持つ数学的活動カリキュラムの開発と評価

平成１４年３月３１日発行
研究代表者　大　谷　　実

金沢大学教育学部数学教室
〒920-1192　石川県金沢市角間町
Tel : 076－264－5502
Email : mohtani@kenroku.kanazawa-u.ac.jp
印刷所　（株）山越