2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号： １３３０１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2013～2015
課題番号： ２５４００１３２

研究課題名（和文）多変数超幾何関数の計算複素解析と数式処理を用いた公式の導出

研究課題名（英文）Computational Analysis for Hypergeometric Functions with some variables

研究代表者
小原　功任（OHARA, Katsuyoshi）

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号：００３１３６３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,700,000円

研究成果の概要（和文）：多変数超幾何関数について数式処理を利用して新しい公式を導出した。超幾何関数の有理変換公式、A-超幾何多項式の特殊値をグレブナー基底を使わずに高速に計算する手法の開発、パラメータ付きホロノミーD加群に対するアルゴリズム(b-関数)や、グロタンディーク留数の計算アルゴリズムなどの結果を得た。アルゴリズムは、数式処理システムRisa/Asir上にプログラムとして実装した。

研究成果の概要（英文）：We studied and introduced new formula for hypergeometric functions by using technique of computer algebra. Rational Transformation for hypergeometric functions, development of new method for exactly computing special values of A-hypergeometric polynomials without Groebner theory, an algorithm for computing b-functions on parametric D-modules, Grothendieck local residues in special case. We implemented our algorithms on Risa/Asir a computer algebra system.

研究分野： 複素解析

キーワード： 複素解析　超幾何関数　数式処理

１．研究開始当初の背景

ガウス超幾何関数はパラメータをもつ関数である。１９世紀初頭のガウスにはじまり、約２００年の研究の歴史がある。ガウス超幾何関数は、隣接関係式、クンマーの変換、ガウスの２次変換、グルサの３次変換、接続関係式など、さまざまな顕著な性質をもつ。その多数の公式(あるいは公式を導出できるという事実)から具体的に計算に使える関数(特殊関数)という性質があり、古典解析や物理学などで幅広く用いられている。また、ガウス超幾何関数のパラメータに特殊な関係を与えたり、特別な極限操作(合流操作) を繰り返すと、直交多項式が現れたり、ベッセル関数など有用な関数が現れたりもする。ガウス超幾何関数の拡張である多変数超幾何関数も具体的な計算に使える関数であり、さまざまな応用がある。例えば、多変数超幾何関数は代数幾何学における周期積分と深い関係があり、多変数超幾何関数で代数方程式の根を表示したり、代数曲線をパラメトライズしたり、尖点のまわりの様子を調べることができる。もしも多変数超幾何関数について関数等式などの基本的な公式がわかれば、個々の代数多様体の性質を調べる強力な道具になる。したがって多変数超幾何関数の性質を調べたり、ガウス超幾何関数と類似した公式を見つけることには価値がある。

ガウス超幾何関数では、２種類の異なる座標変換の結果が一致する現象が起こることがある。すなわち座標変換と初等関数で表される関数等式(変換公式)が成り立つ場合がある。変換公式は超幾何関数の大域的性質を表す重要な情報であり、超幾何関数の解析接続の様子を調べる方法のひとつでもある。また有名なガウスの２次変換公式は算術幾何平均・テータ関数・代数幾何学などと結び付いている。ところで超幾何関数の変換公式には、パラメータ組に自由度を含む場合と含まない場合があり、自由度を含む変換公式をパラメータつき変換公式と呼ぶことにする。パラメータつき変換公式は応用範囲が広いため古くから研究されており、一方の座標変換が恒等変換で他方が低次の変換の場合には体系的な研究もあるが(グルサ(1881))、一般の座標変換の場合はほとんど分かっていなかった。ところが最近になって、ガウス超幾何関数に新たなパラメータつき変換公式が発見された(Berndt・Bhargava・Garvan (1995))。この BBG 公式の特別な場合(ラマヌジャン３次変換公式)は、(拡張された)算術幾何平均とも関係がある(Borwein 兄弟(1991))。2007 年に小池・志賀は 3 項算術幾何平均の研究の副産物としてアペル２変数超幾何関数のパラメータなしの変換公式を発見した。申請者たちはこの結果に触発されて、アペル２変数超幾何関数やロリチェラ３変数超幾何関数のパラメータつき変換公式を見つけた。しかもその公式の系として、BBG 公式や、ガウス超幾何関数の新しい変換公式が導出されることをも示した。この事実は、ガウス超幾何関数よりも多変数超幾何関数の変換公式の方が本質的な結果であることを示している。変換公式の研究は、より一般に多変数超幾何関数と多項算術幾何平均・代数幾何学・テータ関数論との関係性を明らかにする手がかりにもなる。変換公式を与える座標変換から主変数を消去すると、代数方程式系が現れ、座標変換はこの代数多様体のパラメータ表示であると理解できる。申請者の事前の計算機実験では、関数等式と自由度を含むパラメータ組が与えられたとき、に関する差分方程式を利用して、逆に代数多様体を導出することができることが分かった。多変数の超幾何関数に、組織的にこの手法を応用することによって、全てのパラメータつき変換公式を導出できると考えられる。

２．研究の目的

本研究では、多変数超幾何関数の局所的性質(微分差分方程式)を利用して、多変数超幾何関数の満たす公式を導出することを目的とする。公式には様々なものが考えられる。例えば、関数等式とは２つの見掛けが異なる多変数解析関数の同一性を表す公式のことである。よく知られているように、２つの関数が同一であることを示すには、ある点での関数値と必要な階数の微分係数(初期値)が一致し、さらに満たすべき微分方程式系も一致すれば、微分方程式の解の一意性から２つの関数は一致する。しかも多変数超幾何関数は、パラメータまで含めて微分差分方程式系をもつため、関数の同一性をパラメータに関する差分方程式によっても示すことができる。多変数超幾何関数は線形微分差分方程式系の解になっているわけであるが、単独方程式と異なり方程式系の一致判定が一つの問題になる。一致判定するには、ひとつにはグレブナ基底理論からイデアルメンバーシップ問題に持ち込む方法が考えられるが、申請者たちの経験では計算量が大きすぎて計算を遂行できない。したがって本研究では多変数超幾何方程式系の性質を利用しながら数式処理的手法を駆使して計算を遂行するという方法をとる。以下では、関数等式を導出するときの計算の流れをおおまかに述べる。

(1) 超幾何微分差分方程式系のグレブナ基底を求める。方程式系を代数的に考えているわけである。ここでは自作の高性能な微分作用素環用グレブナエンジン yang を用いる。

(2) 多変数超幾何関数のパラメータを具体的に与え、元の方程式系から消去イデアル計算を行って、t に関する差分作用素を求める。

(3) 超幾何関数の満たす微分差分方程式系が

具体的に分かったので、そのグレブナ基底を求め、変数 t に関する１階線形差分方程式系(いわゆる差分 Pfaff 方程式) を得る。

差分方程式系の表現方法が一意になっているので、差分方程式系および初期値を比較し、関数が一致する条件(多変数代数方程式系)を求める。グレブナ基底理論を用いて代数方程式系を簡単化・準素イデアル分解して、代数多様体を求め、最後に有理座標表示を求める。

多変数超幾何関数のパラメータつき変換公式の意味付けについては、これまでほとんど研究されてこなかった。その理由は、座標変換のとりうる条件がどのようなものであるか手がかりが全くなかったためである。しかしながら多変数超幾何関数の変換公式とその導出の仕組みが解明されれば、そこから例えば小平邦彦以来の伝統を持つ K3 代数曲面の理論や、新世紀の特殊関数論とも呼ばれるパンルベ方程式論などへの応用が考えられる。また、多変数超幾何関数を使えば代数方程式の根を表示したり、代数曲線をパラメトライズしたり、尖点のまわりの様子を調べることができるが、パラメータつき変換公式のような大域的情報が得られることは、このような応用にも影響を与える。

なお本研究のうち計算の多くの部分で、微分差分作用素環のグレブナ基底理論を用いる。これらの計算は自作のソフトウェアで行う。申請者は過去に数学ソフトウェアを開発するプロジェクトの中核として働いており、本研究に関するソフトウェアの開発についても十分遂行可能である。また、このような具体的な問題への挑戦により、数式処理システムや数学ソフトウェア間の通信システムの発展といった、数学ソフトウェアへの波及効果が本研究の副産物となる。

３．研究の方法

パラメータが自由度を含むとき、座標変換がどのような条件を満たすのかを調べるのが目的である。パラメータが変数 t の一次式であり、その係数が有理数であると仮定すると(現在見つかっている変換等式は全てこの形である)、多変数超幾何関数に関する上昇作用素(または下降作用素、以下同じ)を繰り返し適用することで、変数 t に関する上昇作用素を得ることができる。この上昇作用素は、多変数超幾何関数の満たす微分差分方程式系のグレブナ基底を用いて計算することができる。このことから、t に関する差分 Pfaffian 方程式を得ることができるので、満たすべき関数等式の両辺について差分 Pfaffian 方程式を計算し、その係数を比較することで座標変換の表わす代数多様体を求めることができる。

本研究は多変数超幾何関数の問題であり、そもそも近似計算でなく完全に厳密な計算をするために超幾何関数が有効なのであるから、公式も近似として得るのではダメで、厳密に得る必要がある。このような厳密な計算を計算機の上で実行するために考えられたのが、数式処理・数式処理システムである。本研究でも数式処理的手法を用いる。

われわれのプランでは、計算の重要な部分に、微分差分作用素環でのグレブナ基底を用いる。本研究に対して数式処理的手法を用いるときの利点のひとつは、計算に用いる微分差分作用素環用グレブナエンジン yang をすでにもっていることである。このようなグレブナエンジンの開発競争が世界中で行われているが、yang は高速であり、他のグレブナエンジンとちがって差分作用素を扱える上に、微分差分作用素環の係数に有理式をとることができる(多くのグレブナエンジンは多項式しかとれない)。実はこの特長が本研究のプランの第２，第３ステップの計算を可能としている(一階化した方程式系の計算には有理関数係数が必要である)。

さらに既に述べたように、多変数超幾何関数の場合にはその微分(差分)方程式は連立系で与えられるため、微分方程式(差分方程式)の同一性判定に困難があり、これまで研究が進んでいなかった。申請者は、方程式系を一階化することによって、この困難を突破する方法を開発し、実際に計算機プログラムを作成している。これは巨大な計算でありプログラム開発には相当の技術が要求され、また微分差分作用素環のグレブナ基底に関する数学が必要である。これは申請者自身の開発した方法であって、申請者しかプログラムが作成できないものである。

さらに、アペル２変数超幾何関数およびロリチェラの３変数超幾何関数について、パラメータ a(t) の t に関する係数が比較的小さい場合に、導出される代数多様体をリストアップして表を作成する。その中で求まった代数多様体が有理的でない(例えば代数曲線の種数が 1 以上)のときに、変換公式にどのような意味があるのかを追求することも重要である。最近の研究では、有理的表示できない(と思われる)変換公式が相当程度存在すると考えられる。現在、オーストリアを中心に有理的でない代数曲線の radicalparametrization に関する研究が進められているが、多変数超幾何関数に関してはこのような一般論とは異なり、比較的簡単な表示が得られる可能性が高い。このような有理的でない代数多様体についても次年度以降に順次調べていく。

また、パラメータ a(t) の t に関する係数が大きい場合も順次調べていくが、この係数

が増大すると、数式処理的手法に由来する組み合わせ爆発(メモリ使用量の指数関数的増大)が問題になってくる。組み合わせ爆発を克服する方法はいくつか考えられるが、本研究では分散計算による方法を用いる。つまり、単独の計算機上で最初から最後まで問題を解くのではなく、複数の計算機上でプログラムを実行し、互いに通信しながら解答を得るということである。このようにプログラムを複数の計算機上に分割すると、その結果として一台辺りの計算機のメモリ使用量が減少することが期待されるのは当然であるが、計算機代数的手法の場合には、台数以上の効果を出す方法がある。実は数式処理システムは相当に複雑なソフトウェアであり、内部での計算の一貫性をたもつためのに、データがどんどん蓄積していく傾向にある(メモリ管理、ガーベージコレクションに関わる問題を含む)。一方、多くのアルゴリズムでは、アルゴリズムの各部分ではそれほどメモリ使用量は高くないので、アルゴリズムのうちメモリ使用量が高い部分を分離して他の計算機で計算し、その部分の計算が終了した後、メモリ使用量の高い部分を切り放すという手法がある。この手法はかなり乱暴な方法ではあるが、申請者はこの方法を用いた分散計算パッケージを開発済みでありに応用して成果を上げている。したがって、このように分散計算を用いて本研究を実行することは、申請者のこれまでの研究成果を援用でき、極めて現実的な方法である。本研究に関するソフトウェアの作成も、申請者のこれまでの経験から十分可能である。

４．研究成果

本課題の研究目的は、多変数超幾何関数について、数式処理を利用して新しい公式を導出することである。また、どのような場合に公式が存在するのか、理論的にも解明していく。特に、多変数超幾何関数の局所的性質(微分方程式・差分方程式) を利用して、公式の組織的探索を行う。また、数式処理システム上に専用のソフトウェアを実装することで行う。さらに先の目標は、より一般の多変数超幾何関数の新しい公式の発見である。より一般の多変数超幾何関数やホロノミック関数についてもアペル・ロリチェラと同様の公式が成立することが期待でき、それらを系統的に理解していくのも長期的な目標である。

数式処理システム Risa/Asir 上において探索用のプログラムを作成し、また高速化を進めた。このプログラムは、与えられた自由変数をパラメータに線形に含む超幾何微分差分方程式の組について、(1)そのグレブナー基底と差分パッフィアン方程式を導出する、(2)差分パッフィアンの比較から自由変数を消去し、多項式イデアルをみつける、(3)多項式イデアルの準素イデアル分解を通して、変換公式と同値な代数多様体を得る、という手順を自動的に実行するものである。現在、知られているアペル２変数超幾何関数のパラメータつき変換公式については、この手順で同値な代数曲面を得ることができることが確認できる。またガウス超幾何関数については、空間代数曲線が得られるのであるが、有理変換公式が存在する場合には自然に平面有理曲線に帰着させることができ、有理曲線のパラメータ付けを通して有理変換公式そのものを得ることができることを示した。また、この結果については研究集会で発表を行った。また、特にガウス超幾何関数について詳しく調べ、有理変換公式に現れる有理数の分母が 4 までの場合の公式を全て調べあげた。この結果について、研究集会で発表を行った。また、本研究課題を遂行する上で開発した数式処理プログラムや並列化手法の派生として、計算代数統計における最尤推定問題および期待値決定問題(多変数超幾何関数が現れる)についても結果を得た。特に A-超幾何多項式の特殊値をグレブナー基底を使わずに高速に計算する手法も新たに開発した。この結果についても研究集会や日本数学会年会で研究発表を行った。

また、超幾何関数を記述する場となる、ホロノミーD 加群に対するアルゴリズム、特にパラメータ付きの場合における b-関数の決定や、特別な場合におけるグロタンディーク留数の決定に関するアルゴリズムが得られ、これらについても日本数学会や研究集会で研究発表を行った。また、これらについては、数式処理システム Risa/Asir 上にプログラムの実装を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　8 件）

① M. Z. Almuzakki, K. Ohara: Computing general error locator polynomial of 3-error-correcting BCH codes via syndrome varieties using minimal polynomial, Recent development in computational science 6 (2015), 80--85. 査読有

② T. Koyama, H. Nakayama, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama: Software Packages for Holonomic Gradient Method, The proceedings of ICMS 2014, Lecture Notes in Computer Science 8592, 706--712, Springer, 2014. 査読有

③ K. Ohara, S. Tajima, A. Terui: Developing linear algebra packages on Risa/Asir for eigenproblems, The proceedings of ICMS 2014, Lecture Notes in

Computer Science 8592, 321--324, Springer, 2014. 査読有

④ S. Tajima, K. Ohara, A. Terui: An extension and efficient calculation of the Horner's rule, The proceedings of ICMS 2014, Lecture Notes in Computer Science 8592, 346--351, Springer, 2014. 査読有

〔学会発表〕(計 17 件)

①高山信毅，小原功任，差分方程式による A-超幾何多項式の計算，日本数学会 2015 年度秋季総合分科会，京都産業大学(京都府京都市)，2015 年 9 月 13 日

②小原功任，隣接関係式の方法と超幾何関数の有理変換，琉球超幾何セミナー，琉球大学(沖縄県中頭郡)，2015 年 2 月 12 日

③T. Koyama, H. Nakayama, K. Ohara, T. Sei, N. Takayama Software Packages for Holonomic Gradient Method, The 4th International Congress on Mathematical Software，漢陽大学校(韓国ソウル市)，2014 年 8 月 06 日

④小原功任，超幾何関数の有理変換公式について，オホーツク特殊関数セミナー，北見工業大学(北海道北見市)，2014 年 2 月 18 日

〔その他〕
ホームページ等
http://air.s.kanazawa-u.ac.jp/~ohara/index-j.html

6．研究組織
(1)研究代表者
小原 功任 (OHARA, Katsuyoshi)
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：00313635