

Mathematical analysis for nonlinear partial differential equations with singular solutions

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-11-01 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: Omata, Seiro メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24517/00052636

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



偏微分方程式の解に時間依存の 特異点が見れる諸問題の数理解析

課題番号：15340041

平成15年度～平成18年度科学研究費補助金（基盤研究B(2)）研究成果報告書

*平成18年度は継続研究に引き継がれました。

平成19年5月

研究代表者 小俣 正朗

(金沢大学 自然科学研究科 教授)

金沢大学附属図書館



0800-04412-6

は し が き

非線形偏微分方程式・変分問題で、解に特異点（不連続点、微分不可能な点など）が現れる問題は大変興味深い。標語的に言えば、グラフが「折れる」「切れる」などの特異集合を持つ関数が、微分方程式の解として考えられるようになった。さらに、このような特異集合がエネルギー集中などを起こして、解析の対象とすべきものであることが多い。このような集合の例として、自由境界、調和写像や液晶の defect、結晶のファセット、Ginzburg-Landau 問題の vortex などがある。

'80年代までは、このような分野の研究は楕円型方程式・変分問題が中心であったが、徐々にその興味の対象が放物型などの時間発展問題に移ってきている。しかしながら、正則性理論にたよる問題が多く見られ、これらの問題の放物型や双曲型への拡張は自然な流れでありながら難問となっている場合が多い。

本研究では、変分問題の解の「エネルギー密度が集中している、定義域よりも低い次元の集合」を特異点として捉え、対応する放物型、さらには双曲型の問題に対して解析を行った。目標は、

弱解などの適切な定義と解の構成、

特異点の次元推移の評価（幾何学的測度論の視点からの構造評価）

などを数値解析を交えて探ることであった。さらに、得られた知見を並列ソルバーなど

数値的方法論として蓄積（ライブラリ作成）

した。

本研究で取り扱う問題に現れる定常問題の汎関数は（例えば）、

$$I(u) = \int (F(\nabla u) + f_\varepsilon(u)) dx$$

の形式を持つもので代表される。ここで、 F は、 $F(\nabla u) = |\nabla u|^2$ 、 $F(\nabla u) = (\operatorname{div} u)^2$ 等である。後者は退化作用素を生じ、弾性体の振動、スメクティック液晶の数理に登場する。一方、第2項の $f_\varepsilon(u)$ は、

(1) n 重ポテンシャル井戸を持つ： $f_\varepsilon(u) = (1/\varepsilon) \sum_{i=1}^n |u - \omega_i|^2$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

(結晶成長モデルなどに出現) ($u : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$)

(2) $f_\varepsilon(u) = (1/\varepsilon)(|u|^2 - 1)^2$ で超伝導の相転移問題 ($u \in \mathbb{R}^2$) やネマチック液晶の解析 ($u \in \mathbb{R}^3$)、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の場合、球面への調和写像などを表す。

(3) f が集合 $\{u > 0\}$ の特性関数の場合 ($u \in \mathbb{R}$) : Caffarelli がジェットの研究で導入した自由境界問題となり、これらは「水面に浮かぶ泡」、「気水界面上の油滴のダイナミクス」などの発展的問題へと応用できることが分かってきた。また、一般の障害物問題などもこの範疇で研究を進めた。

従来から研究の進んでいる楕円型の場合、特異点が「線」や「面」になることが期待される。このような場合、幾何学的測度論を用いて、ハウスドルフ次元の決定、測度論的接

平面の存在証明などを経て特異集合自体の正則性を出すケースが多い。本研究ではこれらを放物型や双曲型の場合に拡張した。

方程式は

$$u_n = -\delta I(u) \quad (\text{波動型}), \quad u_t = -\delta I(u) \quad (\text{熱型})$$

となる。(δは第一変分を表す) 元の汎関数の特異性が高いと解析は非常に困難である。

これらの問題の代表的な例として、「気水界面上の油滴のダイナミクス」を見てみよう。これは、体積保存が non-local term を生み、解析自体が著しく困難である。油滴と界面の接触条件としてシャープな接触角を考えると方程式がデルタ測度 (ラドン測度なることを期待している) を含む。

方程式は次のようになる：

$$\chi_{\{u>0\}} u_n = \Delta u + \delta_{\partial\{u>0\}} + \int (u u_n + |\nabla u|^2) dx$$

($\chi_{\{u>0\}}$ は集合 $\{u>0\}$ の特性関数、 $\delta_{\partial\{u>0\}}$ は集合 $\{u>0\}$ の境界 $\partial\{u>0\}$ 上にサポートを持つラドン測度、最後の積分はラクランジュ乗数にあたる。) この方程式のタイプを述べれば、**Non-local term**と**ラドン測度を外力に持つ退化双曲型方程式**となる。このような場合は、**離散勾配流法**は非常に有効であった。実際、近似弱解・弱解の構成、弱解のヘルダー連続性を導出するのにいくつかの問題で成功した。

これは数値解析法としても新たな方法になっている。実は上記のような問題は連立方程式に持ち込めないことが多い。ただ、最小化法 (**非線形最適化法**) は一般に計算時間がかかり、単独プロセッサの計算機では3次元の解析は苦しい。しかし、幸いなことに、この方法は**並列分散処理**と相性がよい。我々は汎用性の高い**分散並列処理系を構築**した。

離散勾配流法は次の時間差分・空間微分型汎関数：

$$J_n(u) := \int (1/h) |u - u_{n-1}|^2 dx + I(u) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{放物型を近似})$$

$$J_n(u) := \int (1/h^2) |u - 2u_{n-1} + u_{n-2}|^2 dx + I(u) \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{双曲型を近似})$$

の最小化問題を用いる方法である。これらの汎関数の minimizer たちを時間方向に補間 (コーシーの折れ線と階段関数で近似) したものが放物型や双曲型の近似解になり、この極限 ($h \rightarrow 0$) で真の弱解を構成することが基本的アイデアである。

解析的特徴は、時間ステップを固定して見ると、「各ステップの**より良い正則性**」、「ステップについての**大域的存在**」、「時刻無限大での**収束先の存在** (放物型タイプ用)」などの性質が期待できることにある。また、ステップ幅0の極限で、解の**正則性向上**が期待できる場合もある。

数値解析的には、複雑な非線形項を (例えば上記の「油滴の問題」では方程式にラドン測度がでるが、変分では特性関数ですむ) 含む問題に対して**アルゴリズムが単純化**される利点がある。これは、特に次の問題の取り扱いでは圧倒的に優れていることが分かってきた：

体積保存条件を満たす時間依存問題

双曲型障害物問題（退化双曲型）

双曲型自由境界問題（自由境界付き石鹸膜の振動・油滴の挙動）である。

後述の研究分担者から研究上の貴重なアドバイス、数学的知見での支援、プログラムの作成分担による支援を受けました。ここに深く感謝いたします。また、補助金の交付当事者の学術振興会および納税者の皆様、経費処理など繁雑な事務をこなして下さった金沢大学事務当局に心より御礼申し上げます。

平成19年5月14日

研究代表者 金沢大学自然科学研究科 教授

小俣 正朗

研 究 組 織

研究代表者： 小 俣 正 朗 (金沢大学 自然科学研究科 教授)
研究分担者： 宮 川 鉄 朗 (金沢大学 自然科学研究科 教授)
研究分担者： 神 保 秀 一 (北海道大学 理学系研究院 教授)
研究分担者： 菊 地 光 嗣 (静岡大学 工学部 教授)
研究分担者： 山 浦 義 彦 (日本大学 文理学部 准教授)
研究分担者： 木 村 正 人 (九州大学 数理科学研究所 准教授)
研究分担者： ヴァイスゲオグ (東京大学 数理科学研究科 准教授)

研究分担者： 後 藤 俊 一 (北海道教育大学 准教授)
研究分担者： 一 瀬 孝 (金沢大学 名誉教授)
研究分担者： 田 村 博 志 (金沢大学 自然科学研究科 教授)

研 究 経 費

平成15年度	4,600,000円
平成16年度	3,000,000円
平成17年度	2,800,000円
平成18年度(新規)	4,500,000円

研 究 発 表

(1) 学会誌等

研究代表者 (小俣正朗)

- [1] S.Omata, H.Iwasaki, K.Nakane, X.Xiong and M.Sakuma *A numerical computation to the American option pricing via the discrete Morse flow*, **Theoretical and Applied Mechanics**, **52** 261-266(2003).
- [2] S.Omata *A numerical treatment of thin film motion with free boundary*, **Adv. Math. Sci. Appl.**, **14**, 1, 129-137(2004).
- [3] H.Iwasaki, K.Ohara, S.Omata and T.Zhou *Numerical computations for interfaces motion governed by triple potential well problem*, **Adv. Math. Sci. Appl.**, **14**, No.2 457-464(2004)
- [4] S.Omata *A wave equation in the curl-free space related to a smectics liquid crystal*, **Differential Integral Equations** **18** No.1 61--70(2005).
- [5] T.Yamazaki, S.Omata, H.Yoshiuchi, K.Ohara *Bubble Motion on water surface*, **Gakuto Intern. Ser. Math. Sci. Appl.** **23**, 209-216(2005).
- [6] T.Yamazaki, S.Omata, K.Svadlenka, K.Ohara *Construction of approximate solution to a hyperbolic free boundary problem with volume constraint and its numerical computation*, **Adv. Math. Sci. Appl.**, **16**, 1 57--67(2006).
- [7] H.Yoshiuchi, S.Omata, K.Svadlenka, K.Ohara *Numerical solution of film vibration with obstacle*, **Adv. Math. Sci. Appl.**, **16**, 1 33--43(2006).
- [8] K.Svadlenka, S.Omata *Construction of solutions to heat-type problems with volume constraint via the discrete Morse flow*, (to appear in **Funkcialaj Ekvacioj**)

研究分担者 (宮川鉄朗)

- [1] HeCheng, T.Miyakawa, *On two-dimensional Navier-Stokes flows with rotational symmetries*, **Funkcialaj Ekvacioj** **49**, 163--192(2006).
- [2] HeCheng, T.Miyakawa, *Nonstationary Navier-Stokes flows in a two-dimensional exterior domain with rotational symmetries*, **Indiana University Mathematics Journal** **55**, 1483--1555 (2006).
- [3] T.Miyakawa, *D'Alembert's paradox and the integrability of pressure for two-dimensional incompressible Euler flows in an exterior domain*, **Kyushu Journal of Mathematics** **60**, 345--361 (2006).

研究分担者 (神保秀一)

- [1] S.Jimbo, *Singular perturbation of domains and semilinear elliptic equations III*,
Hokkaido Math. J. **33**, 11-45 (2004).

プレプリント (投稿中)

- [1] K.Svadlenka, S.Omata *Construction of weak solution to hyperbolic problem with volume constraint*, Preprint(submitted to **Nonlinear Analysis**)
- [2] K.Ishii, S.Omata, *Approximation to the American option pricing via the discrete Morse semiflow*, Preprint, (submitted to **Asia Pacific Financial Markets**).

(2) 国際学会口頭発表 (代表者のみ)

- [1] Motion of bubble on water surface
in International Conference on Partial Differential Equations & Numerical Analysis
at Jinan, Shandong, China(Aug.18-23, 2004)
- [2] Bubble motion on water surface
Third Polish-Japanese Days
Mathematical Approach to Nonlinear Phenomena; Modelling, Analysis and Simulations
November 29 - December 3, 2004, Chiba University, Chiba, Japan
- [3] Numerical computations for American option pricing via the discrete Morse flow
Stochastic Control, Filtering and Mathematical Finance Dec. 18, 19 2004. at Osaka
- [4] On a hyperbolic free boundary problem First Slovak-Japan workshop on Computational
Mathematics September 9-13, 2006
- [5] Droplet motion with some contact angle
Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006
September 14-16, 2006 Department of Mathematics, FNSPE CTU in Prague &
Institute of Thermomechanics of the Czech Academy of Sciences