

Explanation of fracture phenomena by crack extension analysis using extended finite element method

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2018-12-21 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: Yatomi, Chikayoshi メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24517/00052968

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



**拡張有限要素法 (X-FEM) を用いた亀裂進展
解析による土木材料の破壊現象の解明**

1 6 3 6 0 2 2 6

平成 1 6 年度～平成 1 8 年度科学研究費補助金
(基盤研究 (B)) 研究成果報告書

平成 1 9 年 3 月

研究代表者 矢富盟祥

金沢大学・自然科学研究科・教授

金沢大学附属図書館



0800-04463-0

**拡張有限要素法（X-FEM）を用いた
亀裂進展解析による土木材料の破壊現象の解明**

<はしがき>

亀裂は、変位の不連続面であるが、通常の有限要素法では、要素内では変位は連続と仮定される。したがって有限要素法で亀裂を考慮する場合、その不連続面は、要素辺上に取りられるのが通常である。しかし、その場合、亀裂進展方向は、あらかじめ設定された要素辺の形状に沿う折れ曲りしか出来ないため、結果として非現実的な進展挙動をすることになる。これを避けるひとつの方法は、不連続面が進展するたびにその先端近傍要素をリメッシュする方法があるが、簡単な弾性体の場合でも解析が非常に面倒になり、弾塑性体の場合になると再分割前後の解の補正が難解なため実用上不可能となる。そこで、リメッシュを行わずとも、現実的な亀裂進展挙動を捉えることを可能とする目的で、最近になって、要素内部に変位の不連続面を組み込みことにより亀裂の任意方向進展が可能な新しい手法が活発に研究されるようになった。本研究では、特に等方線形弾性体内の亀裂進展を対象に考案された、不連続面を含む要素の全節点の未知変数として、通常の節点変位に変位不連続量に関連する自由度を付加し、要素内部に変位不連続面を組み込みこむことにより、リメッシュを行わずとも、現実的な亀裂進展挙動を捉えることが可能な新しく考案された拡張有限要素法 (eXtended-FEM, 以下X-FEMと略す) の手法を応用し、コンクリート、岩石、土質地盤など土木材料内の弾塑性体をも考慮した亀裂あるいは滑り面の進展解析を行いそれらの材料の破壊現象の解明を行う。

一方、従来から弾塑性体解析に汎用されていた陽解法増分法による有限要素法を用いた場合、ステップ数の増加と共に計算時間が膨大となり、しばしば解の誤差が非常に大きくなる。特に、亀裂やすべり面の生成・進展を追跡する場合、物体全体の挙動も不安定的となり、この単純な陽解法では、解析不可能となる。そこで計算時間が早く硬化・軟化状態にかかわらず解の絶対収束性が保証され精度の非常に良い解が得られるリターンマップ手法を用いた微小変形および有限変形の場合の陰解法による弾塑性体のX-FEM、特に土質の場合は土・水連成系のX-FEMの開発を行う。このような、リターンマップ手法を用いた陰解法による微小変形の弾塑性体の、X-FEM解析は国内外においても例が無い。

現実の破壊進展プロセスは、外荷重が大きくなると、局所的にせん断ひずみが増加し、せん断帯が発生・進展し、さらに外力が大き

くなると、ついには、そのせん断帯内の変位の連続性が破れ、変位の不連続面となって進展する現象となる。そこで、最近、不連続面の方向があらかじめ設定された要素の配置に限定されず、その進展方向が任意にとれるよう、要素内部に変位の不連続面を組み込んだ非適合要素を用いた種々の強不連続解析の研究が諸外国で盛んに研究され始めた。研究代表者らもこの強不連続解析およびその精度の検証などの研究を行ったが、この強不連続解析では、不連続面に沿う方向の応力が不連続面両側で常に同じになってしまう欠点を有していた。このことは、不連続面の進展方向の決定に大きな誤差を生む要因となる。一方、X-FEMでは、強不連続解析と異なり不連続面に沿う方向の応力が不連続面両側で異なる値が取れるため、せん断帯が発生・進展から、変位の不連続面となって進展する現象をより正確に捉える事が可能となる。

また、圧縮応力場にある亀裂の場合は、亀裂面上に摩擦力が発生するが、X-FEMでは、亀裂面を含む要素節点での等価節点力が陽に表わせないため、汎用されている等価節点力を用いる接触問題の解法は適用できない。そこで、本研究では、接触面を、表面力と不連続変位の関係が弾塑性体挙動すると仮定し、物体全体および接触面ともに、一貫してリターンマップ手法による陰解法解析を行う全く新しい解析手法を開発する

弾塑性体内のせん断帯の進展から亀裂ないし滑り面の発生・進展までの一連の進行性破壊のプロセスを解明する目的で、物体全体および接触面ともに、リターンマップを使用した陰解法による弾塑性体解析を行った要素内に変位不連続面を組み込んだ拡張有限要素法(X-FEM)を用いる手法は、国内外においても全く例がなく世界に先駆けた研究である

研究組織

研究代表者：矢富盟祥（金沢大学・自然科学研究科・教授）

交付決定額（配分額）

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
平成16年度	2,300,000	0	2,300,000
平成17年度	2,000,000	0	2,000,000
平成18年度	1,600,000	0	1,600,000
総計	5,900,000	0	5,900,000

研究発表

（1）学会誌等

- 1) Chikayoshi YATOMI, Yoichi SUZUKI: Crack extension behavior under the compressive loads using the maximum energy release rate criterion, Proceeding of the 1st international symposium of the Kanazawa university 21st-century COE program, pp. 80-84, (2003).
- 2) 矢富盟祥, 李 炳奇: X-FEMによるき裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 19-26, (2003).
- 3) 柳井 竜, 矢富盟祥: 相対不連続変位を付加自由度とした修正 X-FEM解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 117-122, (2003).
- 4) 柳井 竜, 矢富盟祥: 陰解法弾塑性計算アルゴリズムによる有限変形個/液連成有限要素法解析, 日本計算工学会論文集, Vol. 5, pp. 145-154, (2003).
- 5) 島袋 淳, 橋本堅一, 鱸 洋一, 矢富盟祥: 最大エネルギー解放率クライテリアを用いた界面き裂の進展特性, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 505-512, (2003).

- 6) 志比利秀, 亀井健史, 西開地一志, 矢富盟祥: 平面ひずみ非排水伸張試験を対象とした中間土の分岐解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 6, pp. 551-561, (2003).
- 7) 鱸洋一, 矢富盟祥: 陰解法弾塑性アルゴリズムを用いた圧縮荷重下に存在するき裂先端近傍応力場の有限要素解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 7, pp. 597-605, (2004).
- 8) 李 炳奇, 矢富盟祥, 圧縮荷重下における亀裂進展時のエネルギー解放率の X-FEM 解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 7, pp. 643-653, (2004).
- 9) 李 炳奇, 矢富盟祥: 陰解法リターンマップ手法を用いた圧縮荷重下における亀裂先端近傍応力場の弾塑性 X-FEM 解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 8, pp. 461-470, (2005)
- 10) 鱸 洋一, 矢富盟祥: 土/水連成陰解法計算アルゴリズムを用いたカクムレイ塑性体内き裂先端近傍応力場に有限要素解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol. 8, pp. 597- 506, (2005).
- 11) Chikayoshi Yatomi, and Bingqi Li, The Development of the Extended Finite Element Method targeting Disaster Prevention, as well as Earthquake and Slope Disintegration Prediction: in "Past and Future Environments of Pan-Japan Sea Region" Maruzen, Co., Ltd, pp. 338-352, (2006).

(2) 口頭発表

上記論文中, 4) および 11) を除き, すべて論文掲載には口頭発表が義務づけられたものである.

研究成果

本研究に関係する上記発表論文のうち, 3 篇を代表として, この製本の最後に掲載する.

目次

第1章 序論	1
第2章 破壊力学概説	4
2.1 緒言	4
2.2 Westergaardの応力関数を用いた亀裂先端近傍の理論解	5
2.2.1 二次元弾性理論	5
2.2.2 無限遠で一様引張応力を受ける亀裂先端近傍の理論解	7
2.3 亀裂先端近傍の応力の特異性と応力拡大係数	12
2.4 破壊規準と脆性破壊	14
2.5 エネルギー解放率の概略	22
2.6 J積分	24
2.7 地盤材料の破壊基準に関して	25
2.8 結言	28
参考文献	29
第3章 E積分公式	32
3.1 緒言	32
3.2 E積分	32
3.3 線形弾性体におけるE積分公式	36
3.4 E積分の物理的意味	37
3.5 圧縮荷重下におけるE積分	39
3.6 3種類のE積分数値解公式	43
3.7 結言	45
参考文献	46
第4章 弾塑性論および従来の陽解法弾塑性有限要素法解析	48
4.1 緒言	48
4.2 弾塑性論の基礎	48
4.2.1 境界値問題の境界条件と支配方程式	48
4.2.2 降伏条件	52
4.2.3 Continuum弾塑性係数 \mathbf{C}^p	54
4.2.4 弾塑性判定条件	56
4.2.5 von Mises弾塑性体モデルのContinuum弾塑性係数	58
4.2.6 Drucker-Prager弾塑性体モデルのContinuum弾塑性係数	59
4.3 非線形有限要素法の定式化	62

4. 4	非線形解析の計算法	64
4. 4. 1	増分法	65
4. 4. 2	反復法	66
4. 4. 3	混合法 (増分法と反復法の組合せ)	67
4. 5	弾塑性解析に混合法を用いた陽解法アルゴリズム	70
4. 5. 1	陽解法解析の応力増分とひずみ増分の関係	70
4. 5. 2	陽解法の Newton-Raphson 法を弾塑性体の有限要素解析へ適用	73
4. 6	結言	75
	参考文献	76
第5章 陰解法リターンマッピング手法を用いた弾塑性有限要素法解析		77
5. 1	緒言	77
5. 2	陰解法リターンマッピング手法	77
5. 2. 1	弾塑性解析への陰解法 Newton-Raphson 法の適用	78
5. 2. 2	陰解法リターンマッピングを用いた弾塑性解析	80
5. 2. 3	von Mises モデルの Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{C}}^{sp}$	82
5. 3	Drucker Prager 弾塑性モデルの Consistent 弾塑性係数	87
5. 3. 1	弾性試行応力計算	87
5. 3. 2	リターンマッピング計算	88
5. 3. 3	Consistent 弾塑性係数	92
5. 4	結言	98
	参考文献	99
第6章 拡張有限要素法 (X-FEM) による破壊解析の基礎		100
6. 1	緒言	100
6. 2	拡張有限要素法 (X-FEM) 基礎	100
6. 2. 1	従来の有限要素法と拡張有限要素法の違い	100
6. 2. 2	X-FEM の形状関数	103
6. 3	陰解法弾塑性解析を用いた拡張有限要素法の定式化	105
6. 3. 1	支配方程式と境界条件	105
6. 3. 2	X-FEM の弱形式化	106
6. 3. 3	不連続変位および X-FEM の定式化	107
6. 3. 4	要素剛性マトリクスの数値積分法	110
6. 4	亀裂面に摩擦力がある場合の拡張有限要素法解析	115
6. 4. 1	接触表面力と相対変位	115
6. 4. 2	弾完全塑性摩擦モデルの挙動	117
6. 4. 3	弾完全塑性体モデルの Continuum 弾塑性係数	118
6. 4. 4	“弾完全塑性”摩擦接触モデルの陰解法リターンマッピング	120

6. 5	結言	124
	参考文献	125
第7章	拡張有限要素法 (X-FEM) による弾性および弾塑性破壊解析の精度検証	127
7. 1	緒言	127
7. 2	引張荷重下にある線形等方弾性体の X-FEM の精度検証	127
7. 2. 1	引張荷重下にある線形等方弾性体の X-FEM 連立剛性方程式	128
7. 2. 2	精度検証解析	129
7. 2. 3	X-FEM 解析を用いた E 積分による亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析	132
7. 2. 3. 1	E 積分によるエネルギー解放率とその近似公式	132
7. 2. 3. 2	X-FEM 解析を用いたエネルギー解放率の解析	133
7. 3	摩擦力が存在する場合の X-FEM の精度検証	135
7. 3. 1	X-FEM 接触解析の増分線形連立剛性方程式	136
7. 3. 2	X-FEM 摩擦接触解析のアルゴリズム	136
7. 3. 3	X-FEM 解析モデル及び精度の検証	138
7. 3. 4	一軸圧縮荷重下にある摩擦力が存在する直進進展亀裂のエネルギー解放率	142
7. 3. 5	一軸圧縮荷重下にある摩擦力が存在する折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率	144
7. 3. 6	二軸一様圧縮荷重下にある摩擦力が存在する折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率	146
7. 4	亀裂面上に摩擦力が発生する場合の弾塑性体の X-FEM の精度検証	148
7. 4. 1	弾塑性体および摩擦接触問題の X-FEM 連立剛性方程式	148
7. 4. 2	陰解法による X-FEM 弾塑性解析アルゴリズム	149
7. 4. 3	弾塑性拡張有限要素法解析による亀裂先端近傍の応力解析	151
7. 4. 3. 1	亀裂先端近傍の応力計算方法	151
7. 4. 3. 2	無限長方形板中央に亀裂がある場合の弾性応力理論解	152
7. 4. 3. 3	弾性の場合における拡張有限要素法解析の精度検証	154
7. 4. 3. 4	弾塑性の場合における拡張有限要素法解析の精度検証	155
7. 5	結言	157
	参考文献	158
第8章	おわりに	159

第1章 序論

研究背景

破壊力学を用いた有限要素解析では、亀裂のような変位不連続面は、通常、要素の辺上に沿って要素節点を分離する事によって表現される。したがって、特別な場合を除き、亀裂の進展形状は、あらかじめ設定された要素の形状や配置に限定されたジグザグしたものとなる。また、この際、亀裂の進展形状を決定するためには、その方向を決定する破壊基準が必要である。例えば、汎用されている最大周応力破壊基準のように、亀裂先端近傍の応力が用いられた破壊基準を採用した場合、亀裂先端近傍の形状が要素の形状や配置に限定された実際現象と大きく異なるジグザグしたものであれば、その近傍の応力もまた実際現象と大きく異なり、結局得られた亀裂形状は全く信頼出来ないものとなる。この欠点を避けるため、まず考えられたのが、亀裂が微小進展するごとに、亀裂が出来るだけ多くの方向に進めるように、亀裂先端近傍要素を逐次リメッシュする方法が考案された。しかし、解析コードの煩雑化や計算コストの膨大化のみならず、物体が弾塑性体になれば、亀裂が進展した時、リメッシュ前後の同一点の応力の決定は不可能である。

このような背景の下で、近年、面倒な要素のリメッシュを避けるため、Simo ら¹⁾、Oliver²⁾ や Larsson ら³⁾ によって要素内に不連続な形状関数を用いる強不連続解析手法や有限被覆法⁴⁾ などが提案されている。この手法により荷重-荷重点変位関係などの解の要素依存性が大幅に軽減し、損傷モデルや弾塑性体などの亀裂進展解析が数多く報告されている。しかし、この手法では、不連続な形状関数の作成が非常に難しく、特に注意すべき事は、本手法で汎用されている階段関数から1次の三角形形状関数を引くことにより作成された不連続な形状関数を用いた強不連続解析手法では、不連続面両側の全ひずみ成分が常に同一となってしまう。実際には、特別な場合を除き、不連続面に沿う方向のひずみは異なったものになる。これが同一に限定される事は、亀裂の進展挙動を捉える上で致命的な欠点となる。この不連続面に沿う方向のひずみないし応力の違いが亀裂が直進しない現象の主な要因であるからである。また、別に提案されている強不連続解析では、亀裂先端を含む要素内で亀裂面以外の部分の変位までも不連続になるものが提案されている。なお、有限被覆法では、物理被覆に加え数学被覆を用いるなど解析理論の複雑さがある。

一方、最近になって物理的意味が分かり易い線形弾性体の場合における簡便な手法として、拡張有限要素法 (X-FEM : eXtended Finite Element Method, 以下、しばしば拡張有限要素法のことを単にX-FEMと記す。) と呼ばれる解析手法が Belytschko ら⁵⁾ や Moes ら⁶⁾ によって提案されている。この手法は、亀裂などの変位の不連続面を有する要素に対して、その不連続量を単に要素節点に新たな自由度として付加することにより亀裂面の変位の不連続を表現できるようにしたものである。X-FEM は、未知量の増加により計算時間は多少増加するものの、従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく、比較的容易にプログラムを作成することが可能である。通常、X-FEM では、線形弾性体内の亀裂の先端近傍の解をより精度の良いものとするために、変位の不連続を表す自由度だけでなく、メッシュフリー法でも使用された亀裂先端近傍の応力の $-1/2$ 特異性をもつような変位分布の自由度をも節点に付加することを提案している。しかし、この付加自由度によつ

て、未知数が大幅に増加するだけでなく、物体が線形弾性体でなく、例えば、一般の非線形弾性体や弾塑性体の場合では、亀裂先端近傍の応力ないしひずみの特異性は、特別な場合を除き未知であるため、亀裂先端近傍が小規模降伏状態になるような場合を除き精度の向上は望めない。

本論文の研究内容

このような状況下において、本論文の研究目的が、地盤の地滑りなどの弾塑性体挙動する物体の破壊解析にあるため、本論文ではあえて、上記の応力の $-1/2$ 特異性を持つような変位分布の自由度を導入せず、強不連続解析の場合と同様に、変位の不連続量を表わす自由度のみを考慮し、亀裂先端を常に要素辺上に設定した簡便な X-FEM の手法を提案した。

まず、始めは、物体が線形弾性体である場合の本手法による X-FEM 解析を行なった。次に、周知のように、地盤の地滑り、コンクリートや岩盤などの破壊現象は、多くの場合、圧縮荷重下で生じる。その場合、亀裂面内では摩擦力が発生するため、亀裂面上に摩擦力が発生する問題への X-FEM 手法の解析を試みた。その手法では、D. Perić ら⁷⁾ が提案した、釣り合い式の弱形式中の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換えるペナルティ法に基づく摩擦モデルを採用した。そしてその解法には、以前から汎用されている陽解法増分法に比べて、最近、弾塑性解析手法として世界的に注目を浴びている増分・反復結合法であり、精度が良く計算時間も早い、ニュートン・ラフソン法を用いた陰解法リターンマップ手法⁸⁾による X-FEM 解析を行なった。

以上のように亀裂面に摩擦がある無しに関わらず、物体がひずみエネルギーを持つ弾性体（超弾性体）であれば、亀裂進展にともなって、ひずみエネルギーが物体から開放される。線形弾性体内に亀裂が存在する基本的な問題の場合には、亀裂が直進する場合に限って開放されるひずみエネルギーすなわちエネルギー解放率の理論解が求まっている。このエネルギー解放率を求めるための公式として、破壊力学では周知の 1968 年に、J. Rice と J. Eshelby によって提案された経路独立な積分である「J 積分」が著名である。しかし、この J 積分公式では、亀裂が直進する場合のみで、任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求める事は出来ない。一方、矢富⁹⁾ が 1983 年に Int. J. Solids and Structures に発表した「E 積分」を用いると経路独立に亀裂の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求める事ができる。また亀裂が直進する場合でも、E 積分による手法が J 積分を用いた場合よりエネルギー解放率が精度良く求まることが分かっている。したがって、この E 積分を利用して、折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めることにより、開発した X-FEM の精度の検証を行った。また亀裂面に沿う応力理論解の比較も行った。

最後に、亀裂面上に摩擦力が発生し、物体自身も弾塑性体の場合である場合への X-FEM の応用を試みた。物体が弾塑性体の場合への X-FEM 応用は、世界でも初めてのことであり、弾塑性体モデルには、比較的簡単な Drucker-Prager 弾塑性体モデルを仮定した。この弾塑性体の解法アルゴリズムも、前記した亀裂面上に摩擦力が発生する問題同様、ニュートン・ラフソン法を用いた陰解法リターンマップ手法による弾塑性解析を行なった。したがって、亀裂面上に発生する摩擦問題（接触問題）と物体の弾塑性問題が全く同一手法による連立増分・反復結合法となるため、アルゴリズムが非常に明瞭になる利点を有している。

しかしながら、弾塑性体内に亀裂がある場合の応力、ひずみなどの理論解は、モードⅢの特別な場合を除きほとんど得られていないのが現状である。ましてや、亀裂面上に摩擦力が発生する場合に解は皆無である。そこで、以前、著者ら¹⁰⁾が発表した、拡張有限要素法でなく、通常の有限要素法を使用し、しかし、弾塑性体解析には、陰解法リターンマップ手法を使用した亀裂先端近傍部の応力分布との比較検証を行った。

以上のような本 X-FEM の精度の検証を行なった結果、その精度が非常に高いものである事が確認できた。

本研究の意義

したがって、弾塑性体の要素内部に変位の不連続面を組み込んだ拡張有限要素法 (X-FEM) は、亀裂ないし滑り面の方向が任意に取れ、強不連続解析と異なり、不連続面に沿う方向の応力が不連続面両側で異なる値が取れるため、不連続面の進展挙動を、リメッシュすることなく正確に捉えることが可能になる。また物体全体および接触面ともにリターンマップを使用した陰解法による弾塑性計算を行うため、軟化、不安定状態になっても、精度の非常に良い亀裂ないし滑り面の生成・進展過程が追跡可能となる。したがって、本研究による解析手法は、種々の地盤材料の破壊現象解析のための非常に有用なものとなることがわかった。

参考文献

- 1) Simo, J.C., J. Oliver and F. Armero: An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent solids, *Computational Mech.*, 12, pp.277-296, 1993.
- 2) Oliver, J.: Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 39, pp.3601-3623, 1996.
- 3) Larsson, R. and K. Runesson: Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity, *J. of Eng. Mech.*, pp.402-411, 1996.
- 4) 浅井光輝, 寺田賢二郎: 有限被覆法による不連続面進展解析, *応用力学論文集*, Vol.6, pp.193-200, 2003.
- 5) Belytscheko, T and T. Black: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 45, pp.601-620, 1999.
- 6) Moes, N., J. Dolbow and T. Belytschko: A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, 46, pp.131-150, 1999.
- 7) Peri' c, D. and D.R.J Owen: Computational Model for 3-D Contact Problems With Friction Based on the Penalty Method, *Int.J. for Num. Meth. In Engng.*, Vol.35, pp.1289-1309, 1992.
- 8) Simo, J.C. and T.J.R. Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag., New York, 1998.
- 9) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, *Int.J.Solids.Structures*, Vol.19, No.2, pp.183-187, 1983.
- 10) 鱸 洋一, 矢富盟祥: 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた圧縮荷重下に存在するき裂先端近傍応力場の有限要素解析, *応用力学論文集*, Vol.7, pp.597-606, 2004.

第2章 破壊力学概説

2.1 諸言

1921年、グリフィス (Griffith¹⁾)は実際のガラスの引張り強度が、結晶学的に考えられる理論上の強度に比べ数桁小さいことを説明するため、ガラス内に多数の微小内部亀裂の存在を仮定し、強度の低下を亀裂先端近傍の応力集中が原因であると提案した。また、後に詳述するエネルギー解放率を用いて完全脆性材料内の亀裂の不安定伝播の説明を行なった。この約20年後、アメリカ合衆国における種々の大型構造物の破壊原因解明のため、グリフィス理論が再び脚光を浴びるようになった。

破壊力学において亀裂は、物体の境界や亀裂面上に力や強制変位が働いてない場合は、その存在する連続体内の亀裂の幅を数学的にゼロの曲面、すなわち2次元問題では単なる曲線とみなされ、その両側の面の相対変位もゼロであると仮定される。亀裂が存在すれば、その面で物理量は不連続となる。ミクロな視点からマクロな視点のすべての視点で対象とする物体を観察すれば、亀裂のない物体はないといえるであろう。物体内に亀裂が存在したとしても、それが大きくならなければ何も問題とはならない。しかし、種々の条件が変化すれば亀裂は大きくなる、すなわち進展である。そして、一般に、亀裂が大きくなればなるほど進展しやすい。進展が大きく進めば、物体の破壊へとつながる。

したがって、亀裂を有する物体にとって重要なことは、どの程度の大きさの亀裂が存在するかを把握すること、亀裂条件の変化により、その亀裂が進展するかしないかを判定すること、亀裂が進展しないように補修あるいは補強することの3点である。

亀裂の存在を把握、確認するためには非破壊検査の技術が駆使される。通常、亀裂は材料内部に存在し、表面から確認することは難しい。非破壊検査には、AE法、X線法、打音法など様々な方法があり、近年のこの技術の進歩には目を見張るものがある。換言すれば、非破壊検査技術の大いなる進歩によって、物体の亀裂の有無および進展が確認され、それらが物体に及ぼす影響を考慮するようになったと言ってもよい。

亀裂の有無が確認されれば、その亀裂が物体にとって重大な欠陥となり得るかの検討が必要となる。弾性体では、亀裂先端で応力や変位は特異性を示し、この特異性が亀裂進展を特徴付けており、降伏点強度を規準とする従来の材料力学では対処できない。そこで、発展してきた学問体系が、いわゆる亀裂進展の力学である破壊力学である。亀裂が進展するかしないかは、部材寸法、亀裂配置(亀裂長さや亀裂の相対的な位置関係)および荷重条件で定まる各種の破壊パラメータと、材料固有の物性値である破壊靱性値とを比較することによって判定できる。破壊パラメータが材料の破壊靱性値よりも大きければ亀裂は進展する。破壊パラメータ、破壊靱性値は破壊規準のとり方によって異なる。したがって、破壊力学は大きく分けて、破壊パラメータを求めることと、破壊靱性値を求めることの2つに分けられる。

亀裂の進展する可能性が大であると判定されれば、構造物を補修あるいは補強する必要がある。当然ながら補修効果を確認するためには、破壊力学を適用、応用しなければならない。破壊規準の代表的なパラメータとしては、応力拡大係数とエネルギー解放率が挙げられるが、前者は線形破壊力学を基礎としているため、線形弾性体のみを対象としているのに対して、後者は非線形の物質に対しても適用可能であり、前者より一般性がある。また、亀裂の進展挙動は折れ曲がって進展する可能性が高い。応力拡大係数では、モードⅠ(開き型)、モードⅡおよびモードⅢ(せん断型)のそれぞれの応力拡大係数を求めなければならないが、エネルギー解放率ではその区別なく亀裂進展の可能性を考察することができる。また、従来エネルギー解放率を求めるための経路独立積分であるJ積分は亀裂が直進する場合のエネルギー解放率しか求めることができなかつた。1983年にYatomi^{2),3)}によって考案されたE積分は、準静的な亀裂進展である限り、J積分とは異なり、非均質材料、非直線的な亀裂、任意方向に進展した瞬間時等の場合でも、複数の亀裂端を含む任意の経路で、経路独立な積分により、求めようとする進展亀裂先端が折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率を得ることができる。

以上のことを踏まえて、本章では、最初に線形破壊力学の基礎であるWestergaardの応力関数による理論解を導き、応力拡大係数について説明する。次に、種々の破壊規準について概説する。さらに、エネルギー解放率の概念についての説明を行ない、従来、エネルギー解放率を求めるためによく用いられているJ積分について概説する。

2. 2 Westergaardの応力関数を用いた亀裂先端近傍の理論解

本節では、後で拡張有限要素法解析の精度の検証にその一部の結果を利用するためもあり、Westergaard⁴⁾の応力関数を用いて無限遠で一様引張応力を受ける、無限版中央に亀裂が存在する場合の応力、変位の理論解を記述する。

2. 2. 1 二次元弾性理論

二次元微小変形を仮定した場合、ひずみを積分して変位 u, v を求めるための必要十分条件は、適合条件式と呼ばれ、

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial xy} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1)$$

であることが知られている⁵⁾。

また、等方・均質の弾性体の構成式により次式が与えられる。

$$\begin{aligned}
2G\varepsilon_x &= \frac{\bar{\kappa}+1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_y \\
2G\varepsilon_y &= \frac{\bar{\kappa}+1}{4}(\sigma_x + \sigma_y) - \sigma_x \\
2G\gamma_{xy} &= 2\tau_{xy}
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

ここで、 G はせん断弾性係数、 $\bar{\kappa}$ は

$$\bar{\kappa} = \begin{cases} 3-4\nu & \text{(平面ひずみ)} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{(平面応力)} \end{cases}$$

である。 ν はポアソン比である。今、 x, y の実関数 $U = U(x, y)$ を考え、

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial xy}
\tag{2.3}$$

なる2階の微分によって応力が得られるとき、実関数 U をAiryの応力関数と呼ぶ。式(2.3)と式(2.2)を適合条件式(2.1)に代入することによって、応力関数 U で書き直した適合条件は次のような重調和関数で表すことができる。

$$\Delta^2 U(x, y) = 0
\tag{2.4}$$

以上より、二次元の弾性論の解法は、すなわち重調和関数のうちから、境界条件を満たす応力関数 $U(x, y)$ を見出す問題に帰結する。

そこで、Goursat⁶⁾により求められた、Airyの応力関数の一般形は次式で与えられる。

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \left\{ \bar{z}\phi(z) + \int \psi(z) dz \right\}
\tag{2.5}$$

ここで、 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ は複数変数 z に関するGoursatの応力関数である。式(2.5)を式(2.3)に代入すると、次式が得られる^{7), 8)}。

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} &= \phi'(z) + \bar{\phi}'(z) = 2 \operatorname{Re} \phi'(z) \\
\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + i\tau_{xy} &= \bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

一方、Westergaard⁴⁾の応力関数 $Z_I(z)$ と $Z_{II}(z)$ は、Goursat の応力関数を用いてと次のような関係がある。

$$\begin{aligned} 2\phi(z) &= \tilde{Z}_I(z) - i\tilde{Z}_{II}(z) \\ 2\psi(z) &= \{\tilde{Z}_I(z) - zZ_I(z)\} + i\{\tilde{Z}_{II}(z) + zZ_{II}(z)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで、

$$Z_I(z) = \frac{d\tilde{Z}_I(z)}{dz}, \quad Z_{II}(z) = \frac{d\tilde{Z}_{II}(z)}{dz}$$

式(2.7)を式(2.6)に代入すれば、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' \\ \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' \\ -y \operatorname{Re} Z_I' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z_{II}' \\ -y \operatorname{Re} Z_{II}' \\ \operatorname{Re} Z_{II} - y \operatorname{Im} Z_{II}' \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

ただし、 $Z_I(z)$, $\tilde{Z}_I(z)$, \dots などを Z_I , \tilde{Z}_I のように略記した。

2. 2. 2 無限遠で一様引張応力を受ける亀裂先端近傍の理論解

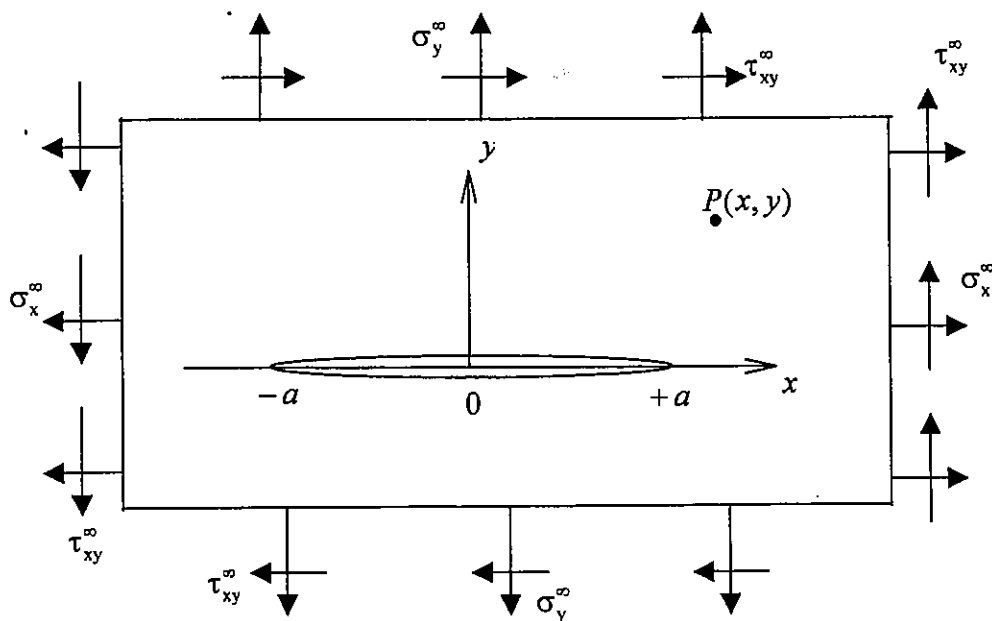


図 2.1 一様引張応力における亀裂を持つ無限板

図 2.1 に示すような中央に $2a$ の長さの亀裂を持つ無限板を考える。 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ は無限遠点での一様引張り応力である。今、平面ひずみ状態を仮定すると、亀裂先端近傍点 P の応力の理論解は Westergaard の応力関数を用いることにより求められる。今、Westergaard の応力関数は、次式のように示される。

$$\begin{cases} Z_I \\ Z_{II} \end{cases} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \begin{cases} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \end{cases} + i \begin{cases} 0 \\ \frac{(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)}{2} \end{cases} \quad (2.9)$$

式(2.9)の微分すると、次式が得られる。

$$\begin{cases} Z'_I \\ Z'_{II} \end{cases} = \frac{-a^2}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{cases} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \end{cases} \quad (2.10)$$

また、式(2.9)の積分は

$$\begin{cases} \tilde{Z}_I \\ \tilde{Z}_{II} \end{cases} = \sqrt{z^2 - a^2} \begin{cases} \sigma_y^\infty \\ \tau_{xy}^\infty \end{cases} + iz \begin{cases} 0 \\ \frac{(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)}{2} \end{cases} + Const. \quad (2.11)$$

である。

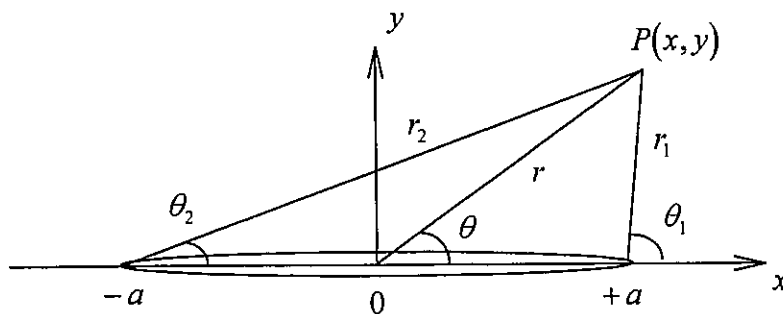


図 2.2 極座標系

Westergaard の応力関数の実部と虚部を求めるために、図 2.2 に示すように、角度 $\theta, \theta_1, \theta_2$ および長さ r, r_1, r_2 はそれぞれ亀裂中央、右端、左端での値である極座標 $(r_1, \theta_1), (r, \theta), (r_2, \theta_2)$ をとると、

$$z = re^{i\theta}, z - a = r_1 e^{i\theta_1}, z + a = r_2 e^{i\theta_2} \quad (2.12)$$

であるから, Z_I は

$$\begin{aligned}
 Z_I &= \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \sigma_y^\infty \\
 &= \frac{r e^{i\theta}}{\sqrt{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}}} \sigma_y^\infty \\
 &= \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sigma_y^\infty \left[\cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} + i \sin \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる. また, Z_{II} は,

$$\begin{aligned}
 Z_{II} &= \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \tau_{xy}^\infty + i \frac{(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)}{2} \\
 &= \frac{r e^{i\theta}}{\sqrt{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}}} \tau_{xy}^\infty + i \frac{(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)}{2} \\
 &= \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \tau_{xy}^\infty \left[\cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} + i \sin \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right] + i \frac{(\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty)}{2}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

となる. これらの微分は,

$$\begin{aligned}
 Z_I' &= \frac{-a^2}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_y^\infty \\
 &= \frac{-a^2}{(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2})^{\frac{3}{2}}} \sigma_y^\infty \\
 &= \frac{-a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \sigma_y^\infty \left[\cos \left\{ \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} - i \sin \left\{ \frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
Z'_{II} &= \frac{-a^2}{(z^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} \tau_{xy}^{\infty} \\
&= \frac{-a^2}{(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2})^{\frac{3}{2}}} \tau_{xy}^{\infty} \\
&= \frac{-a^2}{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}} \tau_{xy}^{\infty} \left[\cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} - i \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right]
\end{aligned} \tag{2.16}$$

積分は、次の通りである。

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_I &= \sigma_y^{\infty} \sqrt{z^2 - a^2} + Const. \\
&= \sigma_y^{\infty} \sqrt{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}} + Const. \\
&= \sigma_y^{\infty} \sqrt{r_1 r_2} \left\{ \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right\} + Const.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{II} &= \tau_{xy}^{\infty} \sqrt{z^2 - a^2} + i \frac{(\sigma_x^{\infty} - \sigma_y^{\infty})}{2} z + Const. \\
&= \tau_{xy}^{\infty} \sqrt{r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}} + i \frac{(\sigma_x^{\infty} - \sigma_y^{\infty})}{2} r e^{i\theta} + Const. \\
&= \tau_{xy}^{\infty} \sqrt{r_1 r_2} \left\{ \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right\} \\
&\quad + \frac{(\sigma_x^{\infty} - \sigma_y^{\infty})}{2} r (i \cos \theta - \sin \theta) + Const.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

従って、式(2.8)より応力は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z'_I + 2 \operatorname{Im} Z_{II} + y \operatorname{Re} Z'_{II} \\
&= \sigma_y^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \\
&\quad + \tau_{xy}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[2 \sin \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \\
&\quad + (\sigma_x^{\infty} - \sigma_y^{\infty})
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \operatorname{Re} Z_1 + y \operatorname{Im} Z_1' - y \operatorname{Re} Z_{\text{II}}' \\ &= \sigma_y^\infty \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right]\end{aligned}\quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}&+ \tau_{xy}^\infty \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z_1' + \operatorname{Re} Z_{\text{II}} - y \operatorname{Im} Z_{\text{II}}' \\ &= \sigma_y^\infty \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \\ &+ \tau_{xy}^\infty \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right]\end{aligned}\quad (2.21)$$

変位および回転は、次のように求められる。

$$\begin{aligned}2Gu &= \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \tilde{Z}_1 - y \operatorname{Im} Z_1 + \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \tilde{Z}_{\text{II}} + y \operatorname{Re} Z_{\text{II}} \\ &= \sigma_y^\infty \sqrt{r_1 r_2} \left[\frac{\kappa-1}{2} \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \frac{r^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right] \\ &+ \tau_{xy}^\infty \sqrt{r_1 r_2} \left[\frac{\kappa+1}{2} \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{r^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right] \\ &+ \frac{\kappa+1}{4} (\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) r \cos \theta + \text{Const.}\end{aligned}\quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}2Gv &= \frac{\kappa+1}{2} \operatorname{Im} \tilde{Z}_1 - y \operatorname{Re} Z_1 - \frac{\kappa-1}{2} \operatorname{Re} \tilde{Z}_{\text{II}} - y \operatorname{Im} Z_{\text{II}} \\ &= \sigma_y^\infty \sqrt{r_1 r_2} \left[\frac{\kappa+1}{2} \sin \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) - \frac{r^2}{r_1 r_2} \sin \theta \cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right] \\ &- \tau_{xy}^\infty \sqrt{r_1 r_2} \left[\frac{\kappa-1}{2} \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{r^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right] \\ &+ \frac{\kappa-3}{4} (\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty) r \sin \theta + \text{Const.}\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$\begin{aligned}2G\omega &= \frac{\kappa+1}{2} (\operatorname{Im} Z_1 - \operatorname{Re} Z_{\text{II}}) \\ &= \frac{\kappa+1}{2} \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[\sigma_y^\infty \sin \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} - \tau_{xy}^\infty \cos \left\{ \theta - \frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} \right\} \right]\end{aligned}\quad (2.24)$$

2. 3 亀裂先端近傍の応力の特異性と応力拡大係数

今、亀裂を有する線形等方弾性体を考えると、図 2.3 のように応力は亀裂先端において必ず特異となり、亀裂先端近傍の応力分布の漸近展開した第 1 項は常に次の形をしている。

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)] \quad (2.25)$$

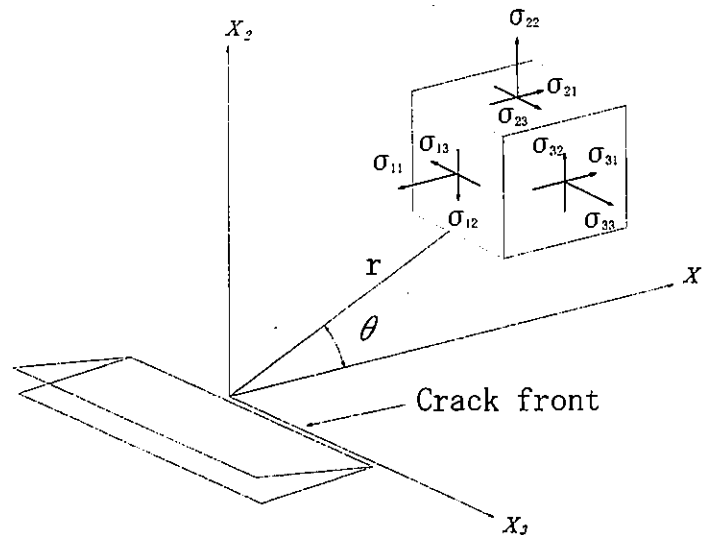


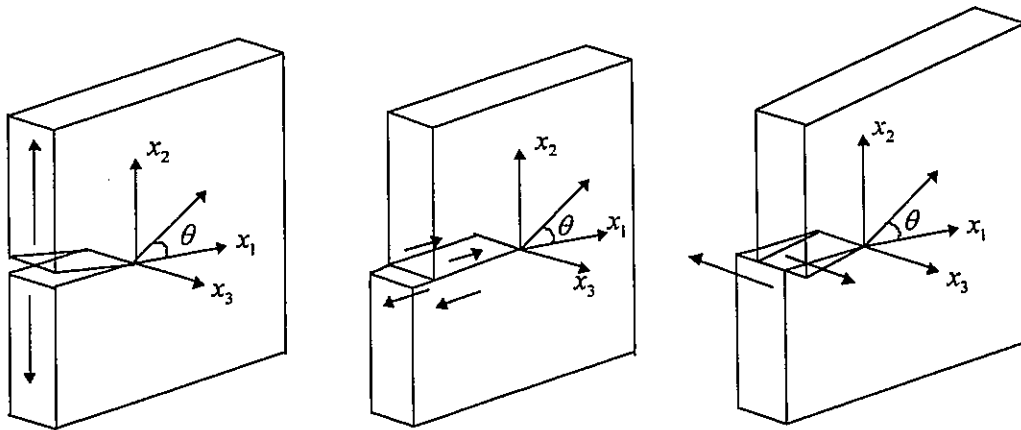
図 2.3 亀裂先端近傍での極座標

すなわち、亀裂先端からの距離 r が 0 に近づくに従い、応力は $r^{-1/2}$ に比例して無限大に発散する。また、応力場は、3つのモードの重ね合わせで表されており、図 2.4 のように、モード I, II, III はそれぞれ引張り、面内せん断、面外せん断を表している。関数 $f_{ij}(\theta)$ は与えられており、モード I, II, III に対して式(2.25)は次のように表される。

$$\text{モード I : } \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{cases} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\text{モード II : } \begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{cases} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\text{モード III : } \begin{cases} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{cases} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{cases} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (2.28)$$



Mode I
(Opening mode)

Mode II
(Sliding mode)

Mode III
(Tearing mode)

図 2.4 破壊モード

式(2.25)に現れる3つの係数 K_I , K_{II} , K_{III} は応力拡大係数(stress intensity factor)と呼ばれ、それぞれモードI, II, IIIに対する係数である。亀裂先端近傍の応力状態は応力拡大係数によって表わされ、異なる問題であっても、応力拡大係数の値が同じであれば、亀裂先端近傍の応力状態は等しい。この応力拡大係数は破壊力学パラメータとして広く用いられている。

応力拡大係数は、亀裂問題の解、すなわち線形弾性境界値問題の解として求まり、その値は荷重や、亀裂長さの関数となり、物体の幾何形状、境界条件、荷重条件等の影響をすべて含んだものとして得られる。

亀裂問題の解析方法としては、これまでに複素関数による手法、連続転位分布法、ローラン展開法、選点法、体積力法、有限要素法、境界要素法、簡易計算法など多くの手法が用いられ、様々な問題に対して応力拡大係数が求められている⁹⁾⁻¹³⁾。

2. 4 破壊規準と脆性破壊

前項に示したように、弾性体中の亀裂先端の応力場は特異性を有しており、その応力場は応力拡大係数によって表わされる。この弾性解によって脆性破壊などの物理現象を記述することができ、このことが破壊力学の有用性の要因となっている。また、単純には、弾性解による亀裂先端近傍の応力と実際の破壊現象を結びつけるものが破壊規準と呼ばれるものである。すなわち、亀裂を有する材料に荷重を加えていく場合、荷重、すなわち、亀裂先端近傍の応力がある限界値に達すると亀裂は進展を開始するが、その条件を与えるものが破壊規準である。以下、静止亀裂を持つ材料に荷重が衝撃的に働く場合や、亀裂が高速進展する場合などの動的破壊規準に関しては言及せず、準静的な場合の不安定亀裂進展のみを対象とする破壊規準に関して述べる。

脆性材料に対する破壊規準として最も古くから採用され、現在でも考え方の基本となっているのが Griffith 理論¹⁾である。それは亀裂が進展する際に解放されるエネルギーが、亀裂の新しい破面を形成するために必要なエネルギーの値に達したとき、亀裂が進展を開始するというものである。

したがって、亀裂進展条件は次式のように表される。

$$G = G_c \quad (2.29)$$

ここで G はエネルギー解放率 (energy release rate) と呼ばれ、亀裂が単位面積進展したときに解放されるエネルギーであり、 G_c は破壊靱性値 (fracture toughness) と呼ばれ、亀裂面を単位面積形成するのに必要なエネルギーであり、材料によって決まる定数である。Griffith はこの理論により、ガラスのような脆性材料の破壊現象を説明した。

一方、亀裂先端近傍の応力分布に着目した破壊規準も考えられている。弾性体中の亀裂先端近傍の応力場から導かれる応力拡大係数 K を用いた破壊規準は

$$K = K_c \quad (2.30)$$

である。これは前述のごとく、部材や、亀裂の形状・寸法に関わらず、応力拡大係数が等しい場合は、亀裂先端近傍の応力分布は同じであり、それが限界値 K_c に達したときに破壊が生じることを示したものである。応力拡大係数の限界値 K_c も破壊靱性値と呼ばれている。エネルギー解放率と応力拡大係数はエネルギーバランスと、亀裂先端近傍の応力分布からそれぞれ別個に導いたものである。しかし、亀裂進展する際のエネルギーの解放量を応力拡大係数と、応力および変位の関係式を用いて計算することができ、 G と K は一対一に対応していることが明らかにされている。

亀裂進展の際に解放されるエネルギーは、例えばモード I では以下のように推察できる。

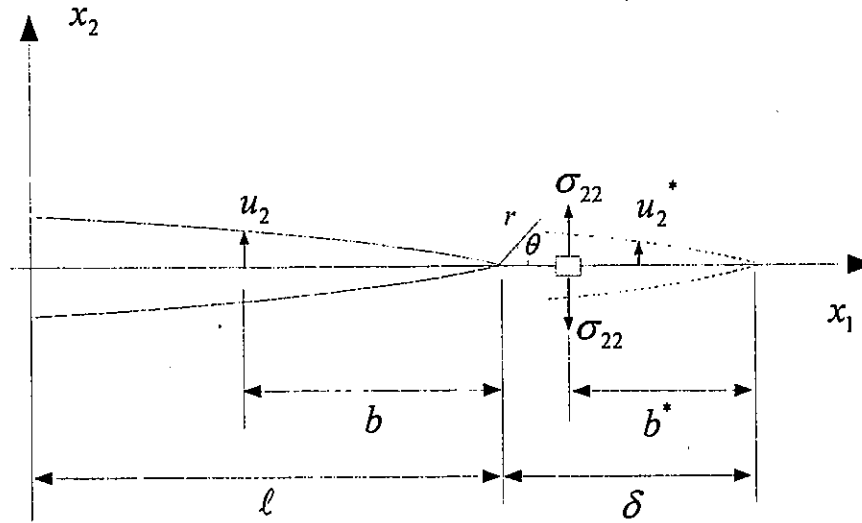


図 2.5 亀裂進展前の応力 σ_{22} と、亀裂進展後の開口変位 u_2^*

図 2.5 に示すように、この問題は x_1 軸に対して対称であり、垂直応力 σ_{22} が x_1 軸上の微小要素に現れる。そして、亀裂が δ だけ進展したとする。このとき、概念的には弾性体の $x_1 = l$ から $x_1 = l + \delta$ までの部分の x_1 軸に沿った切断を想定するが、切断による応力の解放はないものとし、また切断時において、図 2.5 の破線で示される長さ δ の部分が自由表面になるまで微小量ずつ、徐々に応力を減少させるものとする。このとき δ が $\delta \rightarrow 0$ で示されるような微小な量を仮定すると、変位 $u_2(b, \pi)$ を通じて作用した応力 $\sigma_{22}(\delta - b^*, 0)$ による、この仮定でなされた仕事が解放されたひずみエネルギーである。そのときの状態は

$$u_2 \rightarrow u_2^*, \quad b \rightarrow b^* \quad (2.31)$$

を満足することに対応している。したがって、亀裂の上下面でなされた仕事量は

$$G = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{1}{2} \sigma_{22}(\delta - b^*, 0) u_2(b, \pi) db \quad (2.32)$$

となる。(式(2.32)が動的な場合も含めて有効であることは Gurtin and Yatomi¹⁴⁾により証明されている。)これよりモード I のエネルギー解放率は次式で与えられる。

$$G = \frac{\bar{\kappa} + 1}{8G} K_I^2, \quad \text{ただし} \quad \bar{\kappa} = \begin{cases} (3 - \nu) / (1 + \nu) & (\text{平面応力}) \\ (3 - 4\nu) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (2.33)$$

あるいは

$$G = \frac{K_I^2}{E'}, \text{ ただし } E' = \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E / (1-\nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (2.34)$$

となる。ここで G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比、 E はヤング率である。

他のモードに対しても同様に求めることができ、エネルギー解放率は重ね合わせの原理により

$$G = \frac{1}{E'}(K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.35)$$

となる。

材料中の亀裂は荷重に対してモード I の変形に対応するような一定の方向に進んでいるとは限らない。また、構造部材中では直応力とせん断応力が同時に存在する応力場を亀裂が進展することも考えられる。

モード I の荷重下では、亀裂は元の亀裂面と同方向に進展するが、モード II の荷重が加わった混合モード荷重下では、亀裂進展方向は元の亀裂面の方向とは異なり、亀裂が折れ曲がって進展することは容易に推察できる。式(2.35)は、亀裂が元の亀裂面と同方向に進展する場合のみに適用される。混合モード荷重下における破壊規準に関しては長年に渡った議論があり、たとえば Karihaloo¹⁵⁾ により、その概要がまとめられている。これまでに提案されてきた、不安定亀裂進展開始や進展方向に関する破壊規準としては、

- 1) 最大周応力破壊規準(Maximum Stress Criterion) [$\sigma_{\theta \max}$] ¹⁶⁾
- 2) 最小ひずみエネルギー密度破壊規準(Minimum Strain Energy Density Criterion)¹⁷⁾
- 3) 最大 k_I 破壊規準(Maximum K_I Criterion)
- 4) 局所対称破壊規準(Criterion of Local Symmetry) [$k_{II} = 0$] ¹⁸⁾
- 5) 最大エネルギー解放率破壊規準(Maximum Energy Release Rate Criterion) [G_{\max}] ¹⁹⁾⁻²¹⁾

などがある。1), 2)は、亀裂折れ曲がり進展前の亀裂先端近傍の応力場に基づくものであり、これに対して 3), 4), 5)は、亀裂が折れ曲がって微小長さ進展した後の状態に基づく条件である。またそれを、折れ曲がり亀裂の長さをゼロとする極限をとった条件で与えられる。すなわち、図 2.6 に示すように、亀裂折れ曲がり進展前と後の応力拡大係数をそれぞれ K_I, K_{II} および k_I, k_{II} とすれば、3)は進展後の、亀裂先端の応力拡大係数 k_I が最大となる方向に亀裂は進展し $k_{I \max} = K_{Ic}$ 、4)は亀裂進展後、完全にモード I のみとなる $k_{II} = 0$ 方向へ進展する。5)は折れ曲がり瞬間時の G が最大となる方向に亀裂は進展し、 $G_{\max} = G_c$ という破壊条件である。結果として、亀裂進展前の K_I, K_{II} と微小長さ進展後の k_I, k_{II} との関係を求めることが必要となり、多くの解析がなされている。これらのうち最も正確であると思われるものは Hayashi and Nemat-Nasser の研究²²⁾ である。それらによれば、以下の関係にあると推察されている。

$$k_I = k_{I1}(\theta)K_I + k_{I11}(\theta)K_{II} \cong f^{I_{\theta\theta}}(\theta)K_I + f^{II_{\theta\theta}}(\theta)K_{II} \quad (2.36)$$

$$k_{II} = k_{21}(\theta)K_I + k_{211}(\theta)K_{II} \cong f^{I_{r\theta}}(\theta)K_I + f^{II_{r\theta}}(\theta)K_{II} \quad (2.37)$$

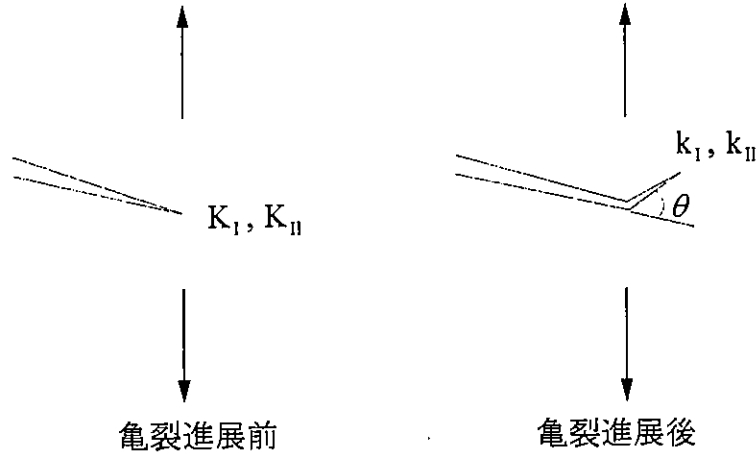


図 2.6 混合モード荷重下での、亀裂折れ曲がり進展

ここで $f_{ij}(\theta)$ は、亀裂先端近傍の応力場の式(2.25)に現れたものである。 $k_{ij}(\theta)$ と $f_{ij}(\theta)$ の差は θ が大きくなるに従って広がるが、その差は小さい。たとえば、 $k_{I1}(72^\circ)=0.540$ 、 $f^{I_{\theta\theta}}(72^\circ)=0.530$ である。

式(2.36)、式(2.37)により、破壊規準 3), 4), 5) および 1) によって予測される進展方向は、ほぼ等しいことを容易に導くことができる。上記破壊基準を使えば、単一モードの場合は、かなりのケースの亀裂進展の予測が可能となる。しかし、混合モード荷重下での、亀裂進展に関してはまだ、物体を特定しても、どのような破壊条件が有効かの議論は活発に研究されている。

上記の 1)~5) の破壊基準に関して、簡単な説明を記しておく。

1) 最大周応力破壊規準(Maximum Stress Criterion) [$\sigma_{\theta_{max}}$]

破壊力学における混合モード破壊規準は Erdogan and Sih¹⁶⁾ によって最初に議論された。この理論で、亀裂進展発生を支配するパラメータは、図 2.7 に示されるような、亀裂先端近傍の周応力 σ_θ である。

混合モード荷重状態での、亀裂先端近傍の応力状態は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &\cong \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I(3 - \cos\theta) \cos\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1) \sin\frac{\theta}{2} \right\} \\ \sigma_\theta &\cong \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I(1 + \cos\theta) \cos\frac{\theta}{2} - K_{II}3\sin\theta \cos\frac{\theta}{2} \right\} \\ \sigma_{r\theta} &\cong \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \left\{ K_I \sin\theta \cos\frac{\theta}{2} + K_{II}(3\cos\theta - 1) \cos\frac{\theta}{2} \right\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

最大周応力破壊規準は、亀裂の進展方向は最大引張り方向に垂直な方向に発生するとする破壊規準で、 $\sigma_{r\theta} = 0$ で与えられる θ_0 の方向に、亀裂は進展する。すなわち、対象とするモデルの K_I および K_{II} が解析的に得られれば次式を満足する θ_0 が得られる。

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (2.39)$$

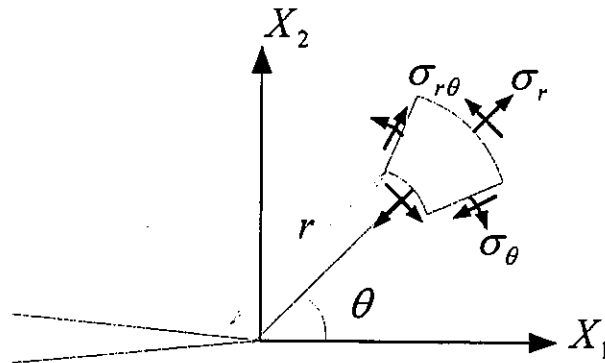


図 2.7 亀裂先端近傍での極座標と各応力

θ_0 が求めれば、次式のようにあらかじめ評価した応力拡大係数の次元をもつ破壊靱性値、たとえば、モード I における破壊靱性値 K_{Ic} と比較して、亀裂が進展開始するか否かを判断する。

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} \{K_I(1 + \cos \theta_0) + 3K_{II} \sin \theta_0\} \geq K_{Ic} \quad (2.40)$$

もし、モード I のみの载荷であれば、 $K_{II} = 0$ であるから

$$K_I \sin \theta_0 = 0 \therefore \theta_0 = 0^\circ \quad (2.41)$$

純せん断(モード II のみ)の载荷であれば、 $K_I = 0$ であるから

$$K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad \therefore \theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) \cong 70.5^\circ \quad (2.42)$$

となる。

2) 最小ひずみエネルギー密度破壊規準(Minimum Strain Energy Density Criterion)

亀裂先端近傍微小要素のもつひずみエネルギー密度の観点から、亀裂の発生条件を提案し

たのが Sih¹⁷⁾ による最小ひずみエネルギー密度破壊規準である。亀裂先端近傍の極座標表示による変位は

$$\begin{aligned} u_r &\cong \frac{\sqrt{r}}{4\sqrt{2\pi G}} \left[K_I \left\{ (2\kappa - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right\} - K_{II} \left\{ (2\kappa - 1) \sin \frac{\theta}{2} - 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right\} \right] \\ u_\theta &\cong \frac{\sqrt{r}}{4\sqrt{2\pi G}} \left[K_I \left\{ -(2\kappa + 1) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right\} - K_{II} \left\{ (2\kappa + 1) \cos \frac{\theta}{2} - 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.43)$$

で与えられる。亀裂先端近傍要素 $dA = r d\theta dr$ の 2 次元応力系でのひずみエネルギー密度は次式で表わされる。

$$dW = \frac{1}{2} \left\{ \sigma_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \sigma_\theta \left(\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + \sigma_{r\theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \right\} dA \quad (2.44)$$

式(2.38),(2.43)を式(2.44)に代入してまとめると,

$$\frac{dW}{dA} \cong \frac{1}{r} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2) \quad (2.45)$$

ここで、係数 a_{ij} ($i, j = 1, 2$) は次式で表わされる。

$$a_{11} = \frac{1}{16\pi G} (1 + \cos \theta)(\bar{\kappa} - \cos \theta) \quad (2.46)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\pi G} \sin \theta (2 \cos \theta - \bar{\kappa} + 1) \quad (2.47)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\pi G} \{ (\bar{\kappa} + 1)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - \bar{\kappa}) \} \quad (2.48)$$

これらは弾性係数 $\bar{\kappa}$ や G に依存する。このとき、亀裂先端近傍のエネルギー場を S によって表わし、ひずみエネルギー量とする。すなわち、

$$S = a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2 \quad (2.49)$$

である。この量は θ に依存し、亀裂先端近傍の局所的なエネルギー密度を記述する。最小ひ

ずみエネルギー密度破壊規準は、 S が最小となる方向 θ_0 に沿って、亀裂が進展するとし、 θ_0 による S が限界値 S_{cr} に達したとき、亀裂は進展開始する。すなわち

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0 \quad (2.50)$$

で得られる θ_0 を用いて

$$S = a_{11}K_I^2 + 2a_{12}K_I K_{II} + a_{22}K_{II}^2 \geq S_{cr} \quad (2.51)$$

を亀裂の進展開始の条件とする。 S_{cr} はエネルギー解放率の次元をもつ破壊靱性値であるが、応力拡大係数との関係を用いて

$$S_{cr} = \frac{(\bar{k} - 1)K_{Ic}}{8G} \quad (2.52)$$

などの値が用いられる。しかしながら、このエネルギー密度の物理的意味は明瞭でないこと、またなぜ、それが最小の方向に亀裂が進むのかも不明確であり、この基準はほとんど使用されていない。

3) 最大 k_I 破壊規準(Maximum K_I Criterion)

微小な折れ曲がり亀裂を仮定し、その先端でのモード I の応力拡大係数 k_I が最大となる方向 θ_0 に亀裂が進展するという破壊規準を最大 k_I 破壊規準という。この破壊規準は 4) の局所対称破壊規準($K_{II} = 0$ 破壊規準)と本質的には等価であり、4)の方が一般的によく使われているので、詳細は 4)で述べる。

4) 局所対称破壊規準(Criterion of Local Symmetry) [$K_{II} = 0$]

応力拡大係数を破壊規準パラメータとした微小な折れ曲がり亀裂を仮定した破壊規準に $K_{II} = 0$ 破壊規準がある¹⁸⁾。この破壊規準は局所対称破壊規準とも呼ばれ、摂動法 (perturbation procedure) と組み合わせられてよく用いられ、主亀裂からの亀裂の進展開始において、折れ曲がり角度は小さく、その後、亀裂進展経路は折れ曲がり角をもたず、ある曲率をもってなだらかに曲がって進展するという破壊規準である。この破壊規準では、亀裂先端の微小部分では新たな発生亀裂は、もとの亀裂面に対して対称に発生すると考えているので、亀裂進展条件としては

$$k_{II} = 0 \quad (2.53)$$

$$k_I \geq K_{Ic} \quad (2.54)$$

となる。一般的に混合モード下での、亀裂進展を考えるとときは明らかに、亀裂の折れ曲がりを確認できるが、亀裂進展経路を区分的にとらえると近似的に曲線で表わせるため、この破壊規準を有用と考える報告も多い^{23),24)}。

5) 最大エネルギー解放率破壊規準(Maximum Energy Release Rate Criterion) [G_{max}]

線形等方弾性体の場合、エネルギー解放率は応力拡大係数と関係付けられることは、すでに述べた。すなわち、モード I, II の混合モードの場合、

$$G = \frac{1}{E'} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (2.55)$$

で示される。しかし、このエネルギー解放率は、亀裂が直進する、すなわち主亀裂と同方向に進展する場合に有効な式である。混合モードにおいては一般的に、亀裂は折れ曲がって進展するので、亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を考えなければならない^{19),25)26)}。この場合エネルギー解放率は、亀裂折れ曲がり角度 θ の関数となり

$$G(\theta) = \frac{1}{E'} \{ \bar{K}_I^2(\theta) + \bar{K}_{II}^2(\theta) \} \quad (2.56)$$

である。ここで $\bar{K}_I(\theta)$ と $\bar{K}_{II}(\theta)$ は、 θ 方向に折れ曲がった瞬間時の、それぞれモード I およびモード II の応力拡大係数である。すなわち、長さ Δl である微小な折れ曲がり亀裂を考え、その亀裂先端での応力拡大係数 $k_I(\Delta l, \theta)$ 、 $k_{II}(\Delta l, \theta)$ を用いて、

$$\bar{K}_I(\theta) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} k_I(\Delta l, \theta), \quad \bar{K}_{II}(\theta) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} k_{II}(\Delta l, \theta) \quad (2.57)$$

で表わされる量である。

最大エネルギー解放率破壊規準は、この $G(\theta)$ の最大となる方向 θ_0 に亀裂が進展し、その値がエネルギー解放率の次元で得られた破壊靱性値 G_c を越えると、亀裂が進展開始すると考える破壊規準である。すなわち

$$G(\theta_0) \geq G_c \quad (2.58)$$

である。この破壊規準を使用するために、亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求め

る必要がある。しかし、モードⅢの特別な場合を除いて、その厳密な理論解は現在まで知られていない。

この破壊規準を使用した文献として Hussain らの研究¹⁹⁾がよく引用される。これは、亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率が、亀裂進展前の状態の応力拡大係数で陽な形で得られているため、他の破壊規準と比較しやすいためと考えられる。しかし、得られたエネルギー解放率はモードⅠの場合でも、 $|\theta| > \pi/2$ では他の研究の結果と大きく異なっているなど、解の信頼性に問題を残している。また、他の研究においても、最終的には数値解析以外には解くことのできない積分方程式になり、精度の高い数値解析法が必要となる。したがって、亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の理論解については、未解決な部分が多くある。

混合モード下でのエネルギー解放率の理論解析には、上記のように問題を残しているが、破壊規準としては、応力拡大係数による破壊規準が異方性材料では限界があるという見方もあり²⁷⁾、また、非線形材料や有限変形を考慮する必要がある場合は、もはや応力拡大係数の意味が失われる、したがって、非線形有限変形の場合でも有効なE積分を用いた最大エネルギー解放率破壊規準の今後の応用が期待されている。

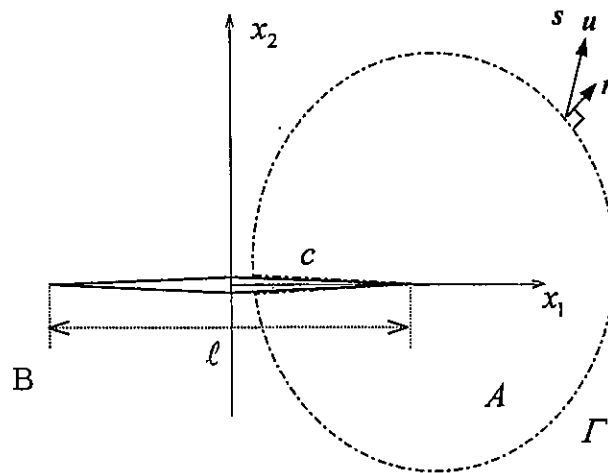


図 2.8 2次元超弾性体内を準静的に進展している亀裂

2. 5 エネルギー解放率の概略²⁸⁾

図 2.8 のように 2次元超弾性体 B 中を準静的に進展している亀裂のエネルギー解放率は、物体力を無視すると、一般に、物体が有限で境界で与えられた表面力が、亀裂長さ l に無関係な場合に限ってポテンシャルエネルギー Π の変化率：

$$G = -\frac{\partial \Pi}{\partial l} \quad (2.59)$$

あるいは、亀裂先端を囲む領域 A 内でのエネルギー変化率のつり合い量：

$$G = \int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} ds - \frac{\partial}{\partial \ell} \int_A w dA \quad (2.60)$$

として定義される。ここで、 Γ は進展亀裂先端を含む閉領域 A の境界である。 \mathbf{s} 、 \mathbf{u} は Γ の表面力、変位であり、 w はひずみエネルギー密度である。ただし、式(2.59)では、境界の荷重が一定である場合のみ有効であるのに対し、式(2.60)では、領域 A は物体内に任意にとれ、境界の荷重が一定である必要はない。

1950年代後半より、このエネルギー解放率を求める積分公式が次々と発表された。その代表的なものを式のみ年代順に並べると、次のようになる。

$$G = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{C_{int}} \mathbf{s}(x, t_0) \cdot \mathbf{u}(x, t) ds_x \quad \text{Bueckner(1958)}$$

$$G = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t_0} \int_{C_{int}} \mathbf{s}(x, t_0) \cdot \mathbf{u}(x - \ell(t), t_0) ds_x \quad \text{Irwin (1959)}$$

$$G = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad \text{Sanders (1960)}$$

$$G = \int_{\Gamma} (w dx_2 - \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} ds) \equiv J_x \quad \text{Rice (1967)}$$

$$G = - \int_{C_t} \mathbf{s}(x, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(x, t) ds_x \quad \text{Achenbach(1970)}$$

$$G = \int_{\Gamma+C} (w n_k - s_i u_{i,k}) ds + \int_A (\rho \ddot{u}_i - b_i) u_{i,k} dA \equiv \hat{J} \quad \text{Kishimoto, Aoki and Sakata(1980)}$$

$$G = \int_{\Gamma} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta ds \equiv E \quad \text{Yatomi (1983)}$$

$$G = \int_{\Gamma+C} [(w + k)n_k - s_i u_{i,k}] ds + \int_{A-A_c} [\rho \ddot{u}_i u_{i,k} - \rho \dot{u}_i \dot{u}_{i,k} + \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} - w_{,k}] dA \equiv T^* \quad \text{Athuri, Nishioka and Nagasaki(1984)}$$

ここで、 C は A 内の亀裂上下面の境界であり、 A_ϵ は亀裂先端近傍の微小領域、 k は運動エネルギー密度である。

上の公式を積分領域の違いから分類すると、次のようになる²⁹⁾。

Buecker, Irwin あるいは Achenbach の公式は、亀裂面上の線積分のみで求まり、理論解析上もっとも便利である。これらはすべて線形物質のみに対して有効であり、非線形物質に対する亀裂面上の線積分のみで求まる公式は、いまだ解明されていない。

Rice(あるいは Eshelby)の J 積分^{30),31)}、共役型の Sanders の公式³²⁾、矢富の E 積分³³⁾は、亀裂先端を囲む任意の経路積分で求まり、亀裂先端近傍を避けて積分でき、数値解析に有用である。

岸本、青木らの \hat{J} 積分³⁴⁾、西岡、Atluri らの T^* 積分³⁵⁾は、亀裂先端を囲む面積分を必要とする。ただし厳密には、この公式によると積分経路の一部分の極限操作を必要とする。(物体の境界の極限操作を用いて定義されているものもある。)

この他にも、単軸荷重 - 荷重点変位曲線より求める Rice の公式³⁶⁾があり、実験上有用であり種々の簡便公式³⁷⁾が考えられている。

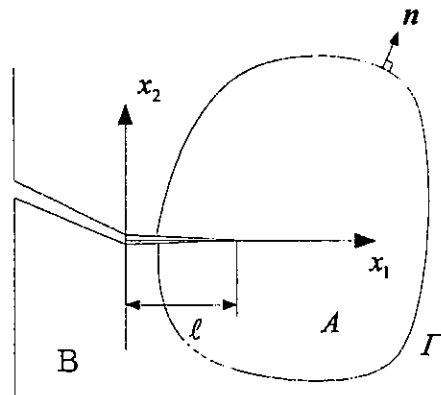


図 2.9 亀裂と J 積分の積分経路

2. 6 J 積分

図 2.9 に示されるような有限変形する均質な 2 次元非線形超弾性体 B 内に長さ l の直線亀裂がある場合を考える。亀裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域を A 、その境界を Γ とする。ただし、含まれる亀裂は A 内では曲がっていないものとする。場の量 $\Phi(x_1, x_2, l)$ において変数変換 $x_1 = \xi + l$ を行った量を $\bar{\Phi}(\xi, x_2, l)$ とおく。そのとき

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial l} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \quad (2.61)$$

となることに注意する。これよりひずみエネルギー密度 w は $1/r$ の特異性をもつことから

$\partial/\partial l$ は $1/r^2$ の特異性を持ち可積分とならないが、 $\partial\bar{w}/\partial l$ は $1/r$ の特異性のままであり可積分である。式(2.82)より

$$\frac{d}{d\ell} \int_A w dA = \int_A \frac{\partial \bar{w}}{\partial l} dA - \int_{\Gamma} w dx_2 \quad (2.62)$$

が成立することが証明できる²⁰⁾。このとき式(2.62)は

$$G(l, \alpha) = \int_{\Gamma} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial l} ds - \int_A \frac{\partial \bar{w}}{\partial l} dA + \int_{\Gamma} (w dx_2 - \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} ds) \quad (2.63)$$

となり、第1項と第2項には発散定理が使えて¹⁹⁾

$$G(l, \alpha) = \int_{\Gamma} (w dx_2 - \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} ds) \equiv J(l, \alpha) \quad (2.64)$$

を得る。上式が均質非線形物質の場合の経路独立なエネルギー解放率を求める積分公式で J 積分といわれる。したがって、 J 積分値はエネルギー解放率を与え、例えば、モード I で等方線形弾性体の場合は、式(2.34)と一致する。さらに J 積分値は、領域 A が直線亀裂先端を含む限り、経路 Γ によらないことは容易に示される。 J の値が積分経路によらないこと、また非線形弾性体の場合でも経路独立であることが、弾塑性破壊力学において J 積分がよく利用されている理由の一つである。しかし、 J 積分は非線形弾性体、または全ひずみ塑性理論を念頭に導入されたものであり、実際の塑性挙動を、よりよく表現しているとされる増分理論による弾塑性体への拡張利用は注意を要する。例えば、理想塑性体中の静止亀裂の場合、式(2.64)の w を全仕事と定義したとしても、 J の値はエネルギー解放率の物理的意味を持たないし、亀裂が準静的に定常進展する場合は w の特異性のオーダーが $1/r$ 以下となり、 J の値はゼロとなり破壊力学パラメータとしての意味を失う。

2. 7 地盤材料の破壊基準に関して

前節で、今まで知られている種々の破壊基準を述べた。しかしながら、これらの破壊基準は、線形ないし非線形弾性体の脆性破壊に関する破壊基準である。一方、本研究での主目的は地盤の破壊解析であり、地盤は弾性体と仮定される場合も多々あるが、斜面の地滑り現象などの解析を行なうためには、地盤を弾塑性体とみなす必要性が高い。

しかし、弾塑性体に対する亀裂の破壊基準は、ほとんど未解決状態に近いのが現状である。特に金属の弾塑性体内の亀裂の不安定破壊条件として使用されている破壊パラメータ-

は、亀裂開口変位(COD: Crack opening modul,), 亀裂開口角(crack opening modulus)などがある。CODは、亀裂のどの位置の開口変位をとるのかということ、および測定方法に関する問題があり不完全な条件である。亀裂開口角とは、亀裂微小進展量に対する亀裂開口変位の微小増分の比である。これを使用する条件も測定が難しく不完全である。

前節で述べた「最大周応力破壊基準」は、岩石などの脆性破壊基準に用いられる「最大引っ張り応力条件」と等価的(厳密には等価ではないがここでは割愛する。)であるから、亀裂面に関して垂直な引っ張り荷重のみの場合には有力な条件であろう。しかし、一般には、亀裂面にせん断応力も加わるのが普通である。実は、驚くべき事実がある。地盤材料である土を対象とした「土質力学」には、破壊という用語はしばしば現れるが、亀裂を問題とする破壊力学は一切考究されていないのである。

地盤の破壊と言う用語は、例えば3軸圧縮試験中、増やしていった最大主応力ないし軸差応力が一定になった状態をさすのであって、それまでに供試体内に発生した滑り線、すなわち亀裂の発生進展とは無関係に定義された用語である。

金属の破壊試験のように、金属供試体中に亀裂を作り、それに荷重をかけて、亀裂の進展現象を観察するのと同じように、土供試体の中に亀裂を作って、1軸ないし3軸圧縮試験をするような試験は一切といってよいほど行なわれていない。土質力学では、モール・クーロンの破壊基準という用語が汎用されている。しかし、この破壊も、前節で述べた供試体内の滑り線・亀裂の進展条件ではない。供試体内の外部から荷重与えた時、ある応力が一定となった時の関係から求める下記のような応力関係の条件である。

$$\tau = c + \sigma \tan(\phi) \quad (2.65)$$

ここで、 τ は、上記の意味での破壊時のせん断応力、 c は粘着力、また ϕ は内部摩擦角と呼ばれている。また、モール・クーロンの破壊基準には、破壊の方向は、最大圧縮応力方向から、 $\pi/4 - \tan(\phi/2)$ となるという破壊進展方向に関する結果までである。このため、破壊力学での亀裂の破壊基準としばしば混同される。そのため、このモール・クーロンの破壊基準に関して、もう少し詳しく述べる。この基準は、最初は、クーロンが岩石の(マクロな)破壊基準として発表したものである。彼は、岩石は、ある多軸応力状態において、 μ を摩擦係数とすると、その面にかかるせん断応力が最大、つまり下の式の値が最大になる面に亀裂面が発生すると仮定した。

$$|\tau| - \mu\sigma \quad (2.66)$$

これを、主応力を使って解くと、最大、最小圧縮応力からなる主応力面に2本の直線が書ける。また、この時の亀裂面の方向は、 $\mu = \tan(\phi)$ とおくと、上記の $\pi/4 - \tan(\phi/2)$ が求められる。この時の上式の最大値 c を、内部せん断強度、土質では、粘着力と呼ぶ。ま

た、 μ は、実際に亀裂面がある時の摩擦係数ではないから、内部摩擦係数と呼ばれる。ここまで、一切、破壊力学の意味での亀裂の考えは使われていない。後に、破壊力学の元祖と言われるグリフィス(Griffith)が、上記のことを、線形等方弾性体の無限版中にある扁平な楕円形の亀裂の理論解を使って、扁平な楕円亀裂に沿う周方向の引っ張り応力が最大になる時は、楕円の傾きが、最大圧縮応力方向から $\pi/4 - \tan(\phi/2)$ の方向の時であり、その時の応力関係は、近似的に式(2.65)の場合であることを証明した。これを、修正グリフィス理論と言われている。ところが、図 2.10 にあるように扁平な楕円亀裂に沿う周方向の引っ張り応力が最大になる時の条件式は式(2.66)であり、その時の楕円亀裂の傾きは、最大圧縮応力方向から $\pi/4 - \tan(\phi/2)$ であるが、周方向の引っ張り応力が最大になる場所は、楕円の頂点から、少し最大圧縮応力側に移動した位置にあり、そこから引っ張り応力によって亀裂が発生したと考えるなら、楕円亀裂から発生する亀裂の進展方向は、楕円亀裂の主軸方向ではなく、主軸方向から、最大圧縮応力側に傾く事になる。つまり、修正グリフィス理論によって証明されたモール・クーロンの破壊基準は、亀裂は元の亀裂の方向ではなく、岩石などの多くの扁平楕円亀裂ではなく幅の無い亀裂における多くの実験でも立証されたが、最終的に最大圧縮応力方向に傾いて進展する。後でも話に出てくるが、このような亀裂のことをウイング亀裂という。

では、一体、どんな破壊基準の下で、圧縮荷重下にある、岩盤も含め土質材料では、斜め方向に真っ直ぐに亀裂が進展するのであろうか？ 破壊力学用語で言えば、モードIIの状態にあるせん断亀裂が、どんな破壊基準によりモードIIのまま元の方向に進展するのであろうか？ 地震学でも同様に重要な問題となっている。地震時に活断層がなぜ元の方向に進展伝播するのであろうか？ 一見当たり前のような現象だが、このような基本的問題に関して、破壊力学においても現在未解決問題なのである。

さらに、式(2.65)にあるモール・クーロンの破壊基準のように地盤材料では、有効過剰間隙水圧 p をまず与え、土を塑性化した後、この p 一定面を π 面とよび、この後、この面上に沿って、種々の比例負荷を与えた場合の π 面上での破壊面がよく議論されている。この時の破壊基準もモール・クーロンの破壊基準と同じく、 p 一定から、供試体の特定の応力を π 面上に沿って増加させたせん断試験を行った時、増加させた応力が一定となった時の値を、増加さず応力を変えていき、それを結んで作成した応力関係の条件である。注意すべきは、通常、この破壊面にいたる以前に、供試体内には亀裂面がすでに発生している。この π 面上の破壊面の数は、数多く発表されている。どれが正しいかなどの議論も未だ絶えない。しかしそれは、当然のことであり、同じ土であっても、この場合の破壊面は、供試体の大きさ、形状によって、亀裂の発生の仕方が変化することからも必然的な結果である。亀裂の発生条件は、供試体の大きさや形状とは全く無関係な条件である。また、この破壊面は、一般には比例負荷に限られた状態で生成される条件である。比例負荷という条件を無くせば、このような破壊面は存在しないであろう。物体の荷重を増やして行った時、亀裂面先端の特定な点の応力は比例負荷ではない。このことから、地盤内の亀裂の進展

条件にこのような応力の関係からなる破壊条件を安易に使うことには注意を要する。

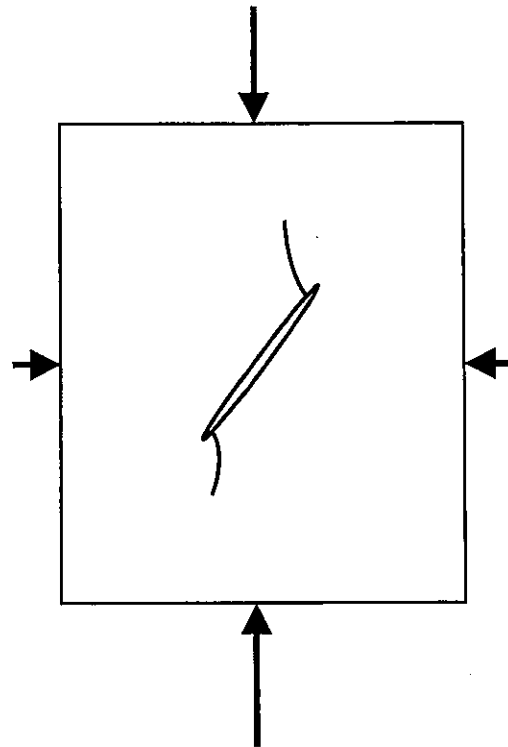


図 2.10 楕円亀裂から発生する亀裂

一方、地盤の地滑り現象などは、弾塑性体である地盤内の典型的な亀裂(滑り面)の進展現象である。破壊力学の範疇にある破壊現象なのである。したがって、地滑り現象など進展現象の解明には、「破壊力学」での意味での破壊の研究が必要不可欠なのである。土供試体の中に亀裂を作って、1軸ないし3軸圧縮試験などを行うことによって、亀裂進展条件に必要な破壊靱性値、また、どのような方向に亀裂が進展するのかの破壊力学での意味の破壊基準の研究が必要なのである。

本論文の題名は「地盤の破壊解析」であるが、実験事実に基づいた破壊基準が、上記したように現状では皆無であるため、実際現象を解明できる亀裂の進展解析は、今後の課題とした理由である。

2. 8 結言

本章では、破壊力学で用いられている基本的なパラメータおよび破壊規準について概説した。地盤、コンクリート、岩盤などの場合は非線形性のみならず非均質性が著しく、そ

これらの破壊挙動を解明するうえで連続体力学に基礎を置く破壊力学を適用することは非常に有効である。破壊力学の分野で汎用されている破壊力学パラメータである応力拡大係数 K 値は、線形等方弾性体において定義されているため、上記のような非線形物質には適さない。非線形弾性体の場合にはエネルギー解放率が有効である。そのため、エネルギー解放率を求める積分公式は多数提案されているが、現在、もっとも多く汎用されている経路独立積分に J 積分がある。しかしながら、 J 積分では、その定義から積分経路内で、亀裂は直線的に進展する場合に限定されていること、亀裂先端を複数含むと合計された値を求めてしまうなど多くの制約がある。

それに対して、本研究において使用する E 積分では、積分経路内に非均質性、複数亀裂などがあっても経路独立であり、折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めることができるなど数多くの有用性がある。 E 積分については次章で概説する。最後に、地盤材料である土を対象とした「土質力学」には、破壊という用語はしばしば現れるが、亀裂を問題とする破壊力学は一切考究されていないこと。この実例として、土質力学では、モール・クーロンの破壊基準という用語が汎用されているが、この破壊基準も、亀裂進展の破壊力学的意味の破壊基準とは異なり。供試体内の外部から荷重与えた時、ある応力が一定となった時の関係から求める応力関係の条件ですぎないことなどを詳細に説明した。地滑り現象のような地盤の破壊現象の解明には、亀裂進展現象を究明する「破壊力学」の意味での「破壊基準」の確立が急務である。

参考文献

- 1) Griffith, A. A. : The phenomena of rupture and flow in solids, Phil. Trans. Roy. Soc. of London, A221, pp.163~197, 1921.
- 2) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int.J.Solids Structures, Vol.19, No.2, pp.183~187, 1983.
- 3) 矢富盟祥 : エネルギー解放率の新公式とその応用—多軸荷重の場合の簡便式—, 材料, Vol. 35, No.394, pp.767~771, 1986.
- 4) Westergaard, H.M., Trans.ASME, J.Appl.Mech., A66, pp.49, 1939.
- 5) 鷲津久一郎, エネルギー原理入門, コンピュータによる構造工学講座 I-3 B, 培風館, 1970.
- 6) 岡村弘之 : 線形破壊力学入門, 培風館, 1993.
- 7) Muskhelishvili, N.I., Some Basic Problems of the Theory of Elasticity, 4th ed., Noordhoff, 1963.
- 8) 森口繁一, 二次元弾性論, 現代応用数学講座, 第2巻, 岩波書店, 1957.
- 9) 石田誠 : 亀裂の弾性解析と応力拡大係数, 培風館, 1976.
- 10) Fracture Toughness Testing and Its Application, ASTM, STP381, 1965.
- 11) Tada, H., Paris, P.C. and Irwin, G. R. : The Stress Analysis of Crack Handbook, Del Research Corporation, Hellertown, Pa., 1973.

- 12) Rooke, D. P. and Cartwright, D. J. : Stress Intensity Factors, London Her Majesty's Stationery Office, 1974.
- 13) Editor-in-chief Murakami, Y. : Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, Vol.1 & 2, 1987, Vol.3, 1992.
- 14) Gurtin, M. E. and Yatomi, C. : On the energy release rate in elastodynamic crack propagation, Arc. Rational Mech. Anal. , Vol.74, pp.231~247, 1980.
- 15) Karihaloo, B. L. : On crack kinking and curving, Mechanics and Materials, Vol.1, pp.189~201, 1982.
- 16) Erdogan, F. and Sih, G. C. : On crack extension in plates under plane loading and transverse shear, J. Basic Eng., ASME, Vol.85, p.519, 1963.
- 17) Sih, G. C. : Strain energy density factor applied to mixed mode crack problem, Int. J. Fract., Vol.10, No.3, pp.305~321, 1974.
- 18) Gol'dstein, R. V. and Salganik, R. L. : Brittle fracture of solids with arbitrary cracks, Int. J. Fract., Vol.10, No.4, pp.507~523, 1974.
- 19) Hussain, M. A., Pu, S. L. and Underwood, J. : Strain energy release rate for a crack under combined Mode I and Mode II, ASTM STP560, p.2, 1974.
- 20) Wu, C. H. : Fracture under combined loads by maximum energy release rate criterion, J. Appl. Mech., Vol. 45, pp.553~558, 1978.
- 21) Gupta, G. D. : Strain energy release rate for mixed mode crack problem, ASME paper No.76-WA/PVP-7, 1976.
- 22) Hayashi, K. and Nemat-Nasser, S. : Energy release rate and crack kinking under combined loading, J. Appl. Mech., Vol. 48, pp.520~524, 1981.
- 23) Cotterell, B. and Rice, J. R. : Slightly curved or kinked cracks, Int. J. Fract. Vol.16, No.2, pp.155~169, 1980.
- 24) Karihaloo, B. L., Keer, L. M., Nemat-Nasser, S. and Oranratnachai, A. : Approximate description of crack kinking and curving, J. Appl. Mech., Vol.48, pp.515~519, 1981.
- 25) Wu, C. H. : Maximum-energy-release-rate criterion applied to a tension-compression specimen with crack, J. Elasticity, Vol. 8, No.3, pp. 235~257, 1978.
- 26) 影山和郎, 岡村弘之 : 引張りと面内せん断を受ける無限小屈折き裂の弾性解析と最大エネルギー解放率破壊条件, 日本機械学会論文集, Vol.48, No.430, A, pp.783~790, 1982.
- 27) Gao, H. and Chiu, C. : Slightly curved or kinked cracks anisotropic elastic solids, Int. J. Solids Structures, Vol.29, pp.947~972, 1992.
- 28) 矢富盟祥 : 破壊力学の理論的諸問題, 研究集会「破壊力学の基礎理論」資料, 1987.
- 29) 矢富盟祥 : エネルギー解放率の新公式とその応用—多軸荷重の場合の簡便式—, 材料, Vol. 35, No.394, pp.767~771, 1986.
- 30) Orowan, E. : Fracture and strength of solids, Reports on the Progress in Physics, 12, pp.

185~232, 1949.

- 31) Eshelby, J. D. : The continuum theory of lattice defect, vol.III, pp.79~144, Academic Press, New York, 1956.
- 32) Sanders, J. L. : On the Griffith-Irwin fracture theory , J. Appl. Mech., Vol. 27, pp.352~353, 1960.
- 33) Yatomi, C. :The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, Int.J.Solids Structures, Vol.19, No.2, pp.183~187, 1983.
- 34) 岸本喜久雄, 青木繁, 坂田勝 : 亀裂の進展挙動を記述するための破壊力学パラメータについて, 日本機械学会論文集, Vol.46, No.410, A, pp.1049~1061, 1980.
- 35) Atluri, S. N., Nishioka, T. and Nakagaki, M. : Incremental path-independent integrals in inelastic and dynamic fracture mechanics, Eng. Frac. Mech., Vol.20, No.2, pp.209~244, 1984.
- 36) Rice, J. R. : Fracture, Vol. II, Chap.3, Academic Press, pp.191-311, 1968.
- 37) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, J. G. : Some further results of J-integral analysis and estimate, ASTM STP 536, pp. 231~245, 1973.

第 3 章 E 積分公式

3. 1 緒言

本章では、本研究における X-FEM 解析の精度検証においてエネルギー解放率を求めるために用いる E 積分について説明する。E 積分は 1983 年に Yatomi¹⁾ によって提案された経路独立な積分である。従来、エネルギー解放率を求める積分としては、前章で述べた J 積分がある。J 積分は、非線形材料に対しても利用できる経路独立な積分ではあるが、積分経路内にひずみの不連続面や他の静止亀裂先端が含まれる場合には経路独立性が成り立たない。また、J 積分では亀裂が直進進展することが仮定されといるため、亀裂が折れ曲がる瞬間時のエネルギー解放率を求めるには、折れ曲がった後の直線的亀裂進展を考え、その長さを変えた解析を行ない、得られたエネルギー解放率から亀裂進展長さを 0 にする操作をする必要がある。このとき積分経路内の進展亀裂は直進部分のみとなっていなければならないことから、有限要素解析を行なう上で応力や変位に誤差の多い亀裂先端部分で積分経路をとらなければならない。したがって、J 積分を用いて亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を精度よく求めることはかなり困難である。

J 積分に対して、本章で説明する E 積分は、準静的に進展する亀裂である限り、積分経路内にひずみの不連続面や他の静止亀裂先端が存在したり、材料が不均質であっても、亀裂進展前と進展後の応力解析を行なう必要があるが、全く任意の積分経路で亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めることができる。

E 積分は当初、亀裂面に表面力が作用しない場合に亀裂が折れ曲がり進展する際のエネルギー解放率を求める経路独立積分として提案された。その後、亀裂面に摩擦力などの表面力が作用し、モード I およびモード II の圧縮混合モード下の場合でも亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率が求められるように改良されている^{2),3)}。

3. 2 E 積分

本章の E 積分に関しては、有限変形する非線形弾性体に対し確立された理論公式であるため、議論に一般性をもたす意味で、本章だけは有限変形論を使用して議論する。本章の物理量の意味は付録 A を参照すること。図 3.1 のような有限変形する 2 次元非均質、非線形超弾性体 B 内を準静的に進展している亀裂を考える。ただし、図 3.1 のように、非均質性が界面や静止亀裂による場合は、その基準系での界面および静止亀裂は時間的に移動しないものとする。

いま、亀裂の一端を含む基準系に固定された正則な閉領域を A 、その境界を Γ とする。 B 内の亀裂長さを l とし、亀裂は l と独立な β ($0 \leq \beta \leq \alpha$) をパラメータとした物体 B の境界上

で与えられた公称表面力 \hat{s} あるいは変位 \hat{u} により進展しているとする。たとえば単軸集中荷重 P が荷重制御で単調増加するように与えられた場合 $\beta = P$ とおける。(l と β はどちらも時間 t の増加関数であるが、一般に l と β は関数関係でなくても良い。すなわち l と β は独立であることに注意する。) そのとき物体内では、付録 A 中にある第 1 種の Piola-Kirchhoff 応力 S ($s = Sn$; n は単位法線ベクトル), 変位 u , 変位勾配 $H (= \nabla u)$, 単位体積当りのひずみエネルギー w (以下、ひずみエネルギー密度と呼ぶ。) などの場の量 $\Phi(X, l, \beta)$ が、亀裂先端を除いた位置 X , 各 l, β に対して定義される。物体が非均質な超弾性体とすると

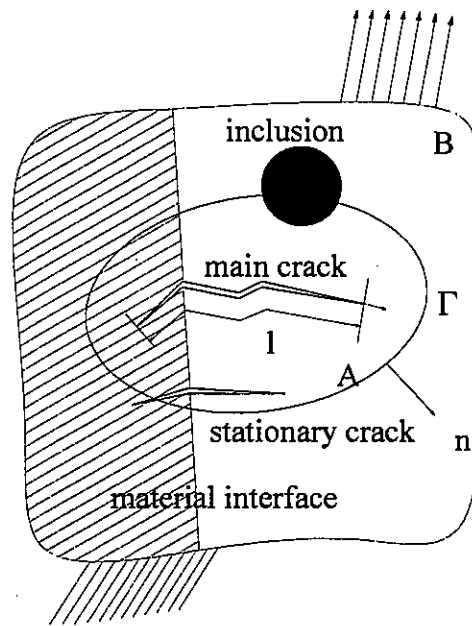


図 3.1 準静的に進展している亀裂

$$S = \frac{\partial w(H, X)}{\partial H} \quad (3.1)$$

である。物体力のない準静的な場合を考えると、つり合い式は、

$$Div S = 0 \quad (3.2)$$

のようになり、亀裂を除いた箇所で成立している。

そこで、静止亀裂先端の 1 つが進展している場合は、 Γ 上からの外部仕事率のすべてが、 A 内のひずみエネルギーの変化率にならず、その一部が、亀裂進展のために消費されたと考える。この亀裂が単位面積(2次元の場合は単位長さ)進展するために消費されたエネルギーが、いわゆるエネルギー解放率 G であるから、

$$G(l, \alpha) = \int_{\Gamma} \mathbf{s}(l, \alpha) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(l, \alpha)}{\partial l} ds - \frac{\partial}{\partial l} \int_A \mathbf{w}(l, \alpha) dA \quad (3.3)$$

としてエネルギー解放率を定義できる。ここで、各変数は基準系の位置 \mathbf{X} の関数でもあるが、記述を簡単にするため省略した。以下同様の記号、また誤解のおそれが無い場合、全ての変数をも省略する。亀裂が折れ曲がる瞬間時のエネルギー解放率の場合は、 l による偏微分は右微分係数 ($l \rightarrow 0^+$) で定義される。 G の値は領域 A が亀裂先端を含む限り (進展亀裂端を含まなければ、静止亀裂端や界面を含んでいても、発散定理が使えて式(3.3)の G の値はゼロであるから) その形、大きさによらないのは明らかである。

式(3.3)を直接数値積分で評価すると、亀裂先端周辺領域の \mathbf{w} に関する面積分を必要とするため、精度の点でも、扱い易さの点でも不利である。したがってこの式を経路積分に変形することを考える。式(3.3)を経路積分に変形するとき、発散定理がうまく使えるような $\Phi(\mathbf{x}, l, \beta)$ 空間での積分でひずみエネルギー密度 \mathbf{w} を定義する必要がある。すなわち

$$\mathbf{w}(l, \alpha) = \int_0^\alpha \mathbf{S}(l, \beta) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}(l, \beta)}{\partial \beta} d\beta \quad (3.4)$$

ととればよいことが分かる。ここで記号が複雑になるのをさけるため物理量 $\Phi(\mathbf{x}, l, \beta)$ を単に $\Phi(l, \beta)$ と記した。そのとき、つり合い式および発散定理を使えば

$$\int_A \mathbf{w} dA = \int_A \int_0^\alpha \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \beta} d\beta dA = \int_{\Gamma} \int_0^\alpha \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} d\beta ds \quad (3.5)$$

が成立し、これを式(3.3)に代入すると

$$G(l, \alpha) = \int_{\Gamma} \int_0^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta ds \equiv E(l, \alpha) \quad (3.6)$$

が得られる。上式が非均質、非線形物質にも適用可能な経路独立なエネルギー解放率を求める積分公式で E 積分といわれる¹⁾。

連続体力学において重要な基本法則の1つに客観性の原理⁴⁾(principle of objectivity)がある。客観性の原理とは、異なる運動をしている観測者にとって、構成式は変わらないということに要請するものである。言い換えれば、構成式は剛体運動に依存しないということである。これは直感的には当然のことであるように思えるが、有限変形論が盛んに用いられ始めた初期の頃、多くの間違った有限変形の構成式が用いられた。それは有限変形の構

成式を考える際、単純に微小変形の構成式における応力、ひずみ等を有限変形論の対応する量で置き換えたことに原因があり、剛体運動によって構成式の形が変わってしまうような現実には存在しえない構成式を作り出した。客観性の原理は有限変形の構成式を考える際の指導原理となるものである。この客観性の原理についての詳細は文献⁴⁾を参照して頂きたい。 $x(X,t)$ と剛体運動だけ異なる運動 $x^*(X,t)$ は、次のような関係にある。

$$x^* = Q(t)x(X,t) + c(t) \quad (3.7)$$

ここに、 $c(t)$ は剛体移動を表わすベクトルであり、 $Q(t)$ は剛体回転を表す直交テンソルである。これらの2つの運動に対応してスカラー φ, φ^* 、ベクトル v, v^* 、および2階のテンソル T, T^* を考える。これらが次式を満たすとき、それらの量に客観性があるという。

$$\varphi^*(\cdot, t) = \varphi(\cdot, t) \quad (3.8)$$

$$v^*(\cdot, t) = Q(t)v(\cdot, t) \quad (3.9)$$

$$T^*(\cdot, t) = Q(t)T(\cdot, t)Q^T(t) \quad (3.10)$$

すなわち、客観性のある量とは元の運動に剛体運動を加えたとき、その変化の仕方は剛体運動によるものだけになる量のことである。

破壊力学パラメータを求める積分公式は構成式ではないが、観測者の見方に依存しては物理的意味がなくなるので、当然、客観性が成立しなければならないものである。そこで、E積分公式の客観性についての証明を記述しておく⁵⁾。

有限変形する超弾性体中を進展している亀裂のエネルギー解放率を与えるE積分公式(3.6)において次のことを考える。

今、式(3.7)のような剛体運動 x^* および x が与えられたと考える。そのとき公称表面力 s は、その定義より

$$s^* = Qs \quad (3.11)$$

のように、客観性のある量とみなされる。

このとき、物質点 X の時刻 $t=0$ から $t=t$ までの変位ベクトル u は、 $u = x - X$ で表わされる。この関係を式(3.6)に代入し、式(3.7)を使うと、

$$\begin{aligned}
E^* &= \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{s}^*}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \ell} - \frac{\partial \mathbf{s}^*}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \beta} \right) d\beta ds \\
&= \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left\{ \frac{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{s})}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{c})}{\partial \ell} - \frac{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{s})}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial (\mathbf{Q}\mathbf{x}+\mathbf{c})}{\partial \beta} \right\} d\beta ds
\end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{Q}(\ell)$ 、 $\mathbf{c}(\ell)$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
E^* &= \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left\{ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial (\mathbf{x}+\mathbf{Q}^T\mathbf{c})}{\partial \ell} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial (\mathbf{x}+\mathbf{Q}^T\mathbf{c})}{\partial \beta} \right\} d\beta ds \\
&= E + \frac{\partial (\mathbf{Q}^T\mathbf{c})}{\partial \ell} \cdot \int_{\Gamma} \mathbf{s} ds - \mathbf{Q}^T\mathbf{c} \cdot \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} d\beta ds \\
&= E + \frac{\partial (\mathbf{Q}^T\mathbf{c})}{\partial \ell} \cdot \int_{\Gamma} \mathbf{s} ds - \mathbf{Q}^T\mathbf{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \ell} \int_0^{\alpha} \left(\int_{\Gamma} \mathbf{s} ds \right) d\beta \\
&= E
\end{aligned} \tag{3.12}$$

ここで、つりあい式(3.2)が成立しているので、 $\int_{\Gamma} \mathbf{s} ds = \mathbf{0}$ を使った。よって、 E 積分値は客観性のある量であることがわかる。

3. 3 線形弾性体におけるE積分公式

以下、微小変形理論に限定し、ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ が応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の $1/m$ 次同次型、すなわち任意の $k > 0$ に対して、

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(k\boldsymbol{\sigma}) = \underline{k}^{\frac{1}{m}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{3.13}$$

が成立する場合を考える⁶⁾。このとき、 \underline{k} を上記の亀裂長さ ℓ と独立なパラメータ β と考え、表面応力ベクトルが

$$\mathbf{s} = \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0(\mathbf{x}, \ell) \tag{3.14}$$

と表せる場合を考える。このとき、

$$\boldsymbol{\sigma} = \beta \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0(\mathbf{x}, \ell) \tag{3.15}$$

と表現でき、式(3.7)より

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \beta^{\frac{1}{m}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\mathbf{x}, \ell) \quad (3.16)$$

となり、上式を積分して($\beta=0$ のとき $\mathbf{u}=0$ とすると)

$$\mathbf{u} = \beta^{\frac{1}{m}} \hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \ell) \quad (3.17)$$

を得る。式(3.13)と式(3.17)を式(3.6)に代入して、 β に関して積分すると

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} \left(\frac{m}{m+1} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{1}{m+1} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (3.18)$$

となり、 β に関する積分が不用な表現を得る。特に、線形弾性体の場合は式(3.18)で $m=1$ を代入することにより

$$E(\ell, \alpha) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (3.19)$$

となり、Sandersの共役型の積分公式⁷⁾と同一になる。

3. 4 E積分の物理的意味

ここで $\alpha_0 \geq \alpha \geq 0$ の間、亀裂長さは一定値 ℓ_0 のまま、滑らかな関数関係 $\alpha = \hat{\alpha}(\ell)$ で進展した場合を考える⁸⁾。この状況下では、式(3.6)は

$$E(\ell, \alpha) = \frac{d}{d\ell} \int_{\Gamma} \left(\int_{\gamma} \mathbf{s} \cdot d\mathbf{u} \right) ds \quad (3.20)$$

と変形される¹⁾。ここで $d\mathbf{u} = (\partial \mathbf{u}(\lambda, \beta) / \partial \lambda) d\lambda + (\partial \mathbf{u}(\lambda, \beta) / \partial \beta) d\beta$ は、図3.2に示すような区分的に滑らかな閉じた経路である。「式(3.20)は $(\ell_0, 0)$ から出発し、 (ℓ, α) になるまでに解放されたエネルギーは、 ℓ を一定に保ち α を0にする除荷過程を含めた1サイクル上での応力ベクトルがなした仕事(図3.3)に等しい」という準静的な場合の、明解なエネルギー解放率の物理的解釈を与えている。

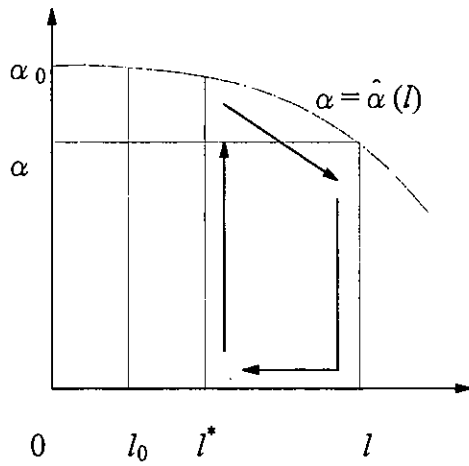


図 3.2 (l, α)空間内での区分的に滑らかな閉じた経路

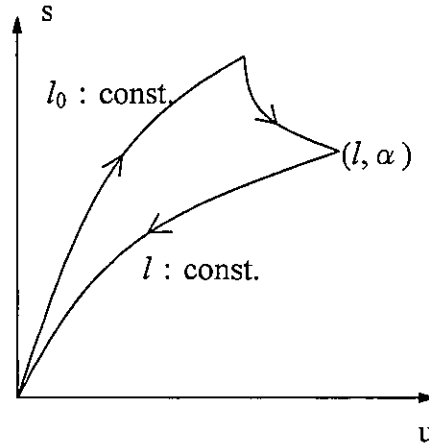


図 3.3 1 サイクル内の表面力による仕事

いま、 A を有限な物体 B 全体にとり、 \mathbf{m} を単位ベクトルとしたとき、境界で

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{s} &= \hat{P}(\mathbf{x}, \beta, \ell) \mathbf{m} \\ \hat{\delta}(\mathbf{x}, \beta, \ell) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

のように与えられた場合を考えると、式(3.20)は

$$E(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma} \int_0^{\alpha} \left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \hat{\delta}}{\partial \ell} - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial \hat{\delta}}{\partial \beta} \right) d\beta ds \quad (3.22)$$

となる。ここで \hat{P} は ℓ に無関係に与えられた(荷重制御)とし、 $\bar{P} = \hat{P}(\mathbf{x}, \beta)$ 、 $P = \hat{P}(\mathbf{x}, \alpha)$ とおく。そのとき、もし各 $\mathbf{x} \in \Gamma$ に対し、逆関数 $\hat{\beta} = \hat{P}^{-1}$ が存在したとすると $\hat{\delta}$ の変数 β は \bar{P} に置き換えることができ、 $\tilde{\delta}(\bar{P}, \ell) := \hat{\delta}(\mathbf{x}, \hat{\beta}(\bar{P}, \mathbf{x}), \ell)$ と略記すると式(3.22)は

$$E(\ell, P) = \int_{\Gamma} \int_0^P \left(\frac{\partial \tilde{\delta}(P, \ell)}{\partial \ell} \right) d\bar{P} ds \quad (3.23)$$

となる。上式は、 Γ 上の積分を除けば Rice⁹⁾ の荷重-荷重点変位曲線でのポテンシャルエネルギー変化率を表した式である。式(3.21)で「 \mathbf{u} と \mathbf{s} 」「 δ と P 」をそれぞれ入れ換えて式(3.22)以後と同様な議論により

$$E(\ell, \delta) = - \int_{\Gamma} \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial \tilde{P}(\tilde{\delta}, \ell)}{\partial \ell} \right) d\tilde{\delta} ds \quad (3.24)$$

が得られる. 式(3.23)あるいは, 式(3.24)による方法, すなわち, E 積分によりエネルギー解放率を求める方法は, 境界の荷重-荷重点変位関係さえ分かれば値が求まるので, 構成式が未知の場合, 特に実験においてその値を求めようとする場合に有利である. しかし, これらの評価式を用いる場合は, 亀裂長さを変化させるか, 異なる亀裂長さをもつ数個の供試体を必要とする¹⁰⁾. そこで, 種々の制限はあるが, 亀裂長さを変えることなく, 一つの荷重-荷重点変位曲線からエネルギー解放率が評価できる簡便評価式が⁹⁾提案されている.

3. 5 圧縮荷重下におけるE積分 3)

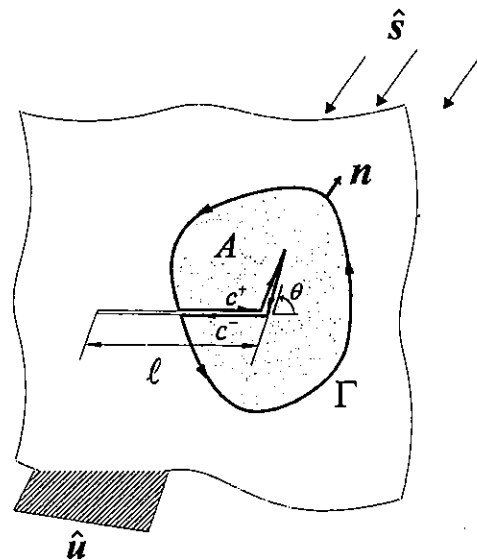


図 3.4 圧縮荷重下で準静的に進展する亀裂

引張荷重下でよくみられる開口型の亀裂の場合, 亀裂面は自由表面となり表面力が働かないために, E 積分などの経路独立積分でエネルギー解放率を求める際に, 亀裂面上の積分は必要なくなる. 圧縮荷重下での亀裂は閉じて接触し, 亀裂面上の接線方向表面力が限界摩擦力以上となる条件を満たせば, 摩擦力を受けながら滑り進展する. その亀裂面上に摩擦力が働くことにより, エネルギー解放率を求める際に, 亀裂面上の積分も必要となるので注意が必要である.

図 3.4 のように, 超弾性体 B に公称表面力 \hat{s} や変位 \hat{u} による“外荷重”が与えられ, その中に存在する亀裂が閉じており, 亀裂面上に摩擦力が発生しているとき, 外荷重 (\hat{s} , \hat{u}) の

増加に伴い一般には折れ曲がり進展している亀裂を考える。以後、亀裂面が閉じているような外荷重(\hat{s} , \hat{u})を便宜上、圧縮荷重と呼ぶ。

このとき圧縮荷重下で、亀裂が準静的に進展している場合のエネルギー解放率は、亀裂面を積分範囲に含んだ形で

$$G(\ell, \alpha) = \int_{\Gamma \cup C^+} \mathbf{s}(\ell, \alpha) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\ell, \alpha)}{\partial \ell} ds - \frac{\partial}{\partial \ell} \int_A w(\ell, \alpha) da \quad (3.25)$$

で定義される。 ℓ は基準系での、亀裂長さであり $\partial/\partial\ell$ は右微分係数をとる。 α は荷重履歴パラメータ β ($0 \leq \beta \leq \alpha$)が最終荷重状態であることを表わす。 A は物体内にある進展亀裂先端を含む基準系での任意の閉領域である。 C^+ は A 内の亀裂上下面であり、 Γ は A の境界である。 \mathbf{s} は Γ と C^+ 上の公称表面力であり、 \mathbf{u} は変位である。圧縮荷重下でも、ひずみエネルギー密度 w は第1種 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} 、変位勾配 \mathbf{H} 、荷重履歴パラメータ β を用いて、

$$w(\ell, \alpha) = \int_0^\alpha \mathbf{S}(\ell, \beta) \cdot \frac{\partial \mathbf{H}(\ell, \beta)}{\partial \beta} d\beta \quad (3.4 \cdot \text{前出})$$

で定義されるが、ここでは、亀裂面上に摩擦力が存在するため、超弾性体であってもひずみエネルギー密度は一般に外荷重の載荷履歴によって異なる値をとる (ℓ, α) の関数となるので注意が必要である。式(3.25)は領域 A 内に進展亀裂先端を含まなければ、つり合い式

$$\text{Div } \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (3.2 \cdot \text{前出})$$

と、超弾性体であるから

$$\mathbf{S} = \frac{\partial w(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \quad (3.1 \cdot \text{前出})$$

より

$$\frac{\partial w}{\partial \ell} = \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \ell} \quad (3.26)$$

であることを考慮し、発散定理を使えばゼロとなるので、式(3.1)の経路独立性は自明である。(このとき、積分経路には、亀裂面 C^+ を含んでいることに注意。)

式(3.25)の右辺第2項中のひずみエネルギーの積分項は

$$\int_A w da = \int_A \int_0^\alpha \mathbf{S} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \beta} d\beta da = \int_{\Gamma \cup C^+} \int_0^\alpha \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} d\beta da \quad (3.27)$$

のように変形できるので、これを式(3.25)に代入すると

$$G(l, \alpha) = \int_{\Gamma_{UC^\pm}} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} ds - \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_{\Gamma_{UC^\pm}} \int_0^\alpha \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} d\beta ds \right) \equiv E(l, \alpha) \quad (3.28)$$

となる。ここで式(3.28)を変形すると

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma_{UC^\pm}} \int_0^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta ds \quad (3.29)$$

が得られる。上式右辺は Betti の Reciprocal Theorem(相反作用の定理)の表現と同様な形をしている(ただし、式(3.29)の E 積分公式は一般に非線形でも有効である)ので、式(3.29)を相反作用型 E 積分公式(E-integral of the reciprocal type)と呼ぶ。

さらに、式(3.29)を変形すると次式を得る。

$$E(l, \alpha) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_{\Gamma_{UC^\pm}} \int_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{u} d\beta ds \right) - \int_{\Gamma_{UC^\pm}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \mathbf{u} ds \quad (3.30)$$

ここで式(3.30)の右辺第 1 項の括弧内に発散定理を使うと

$$\int_{\Gamma_{UC^\pm}} \int_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{u} d\beta ds = \int_A \int_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{H} d\beta dA \quad (3.31)$$

となり

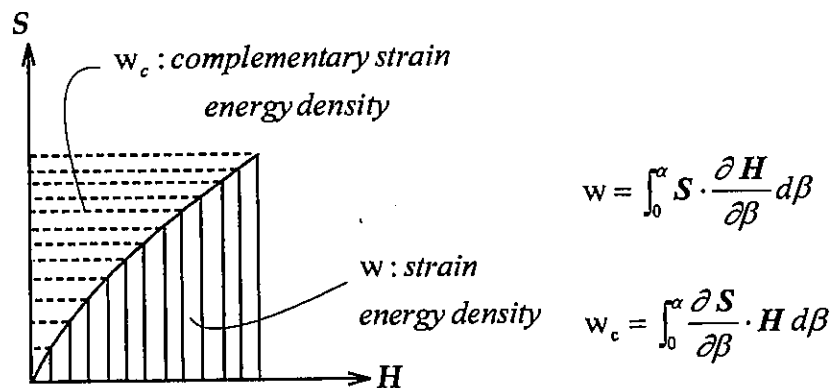


図 3.5 ひずみエネルギー密度と補ひずみエネルギー密度

$$w_c(\ell, \alpha) = \int_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{H} \, d\beta \quad (3.32)$$

であるから、式(3.30)は補ひずみエネルギー密度(complementary strain energy density, 図 3.2 参照)を用いたエネルギー解放率の定義式になっている。そこで経路独立な(2次元の場合)線積分公式である式(3.28)を ひずみエネルギー型 E 積分公式(E-integral of the strain energy type)と呼ぶ。式(3.30)を 補ひずみエネルギー型 E 積分公式(E-integral of the complementary strain energy type)と呼ぶ。

ひずみエネルギー型 E 積分公式(3.28)(または定義式(3.25))より物体境界および、亀裂面上で

$$\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} = 0 \quad (3.33)$$

の場合のエネルギー解放率は、物体全体のひずみエネルギーの減少率に等しいことが分かる。また、物体境界では ℓ に無関係な外荷重が与えられ、亀裂面上では ℓ に無関係な摩擦力が発生し、結局全境界上で

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.34)$$

が満たされている場合のエネルギー解放率は、式(3.30)より、物体全体の補ひずみエネルギーの増加率に等しいことが分かる。

線形超弾性体の場合で、変形が微小の場合に限定された場合(以下、微小変形線形弾性体という)では、外荷重が比例負荷で与えられると、 ℓ を固定したとき、物体内部の表面力 \mathbf{s} も比例負荷となり

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\ell, \beta) = \beta \bar{\mathbf{s}}(\ell) \\ \mathbf{u}(\ell, \beta) = \beta \bar{\mathbf{u}}(\ell) \end{cases} \quad \text{on } \Gamma \quad (3.35)$$

とおくことができる。また、進展亀裂面上の表面力 \mathbf{s} も同様に

$$\begin{cases} \mathbf{s}(\ell, \beta) = \beta \tilde{\mathbf{s}}(\ell) \\ \mathbf{u}(\ell, \beta) = \beta \tilde{\mathbf{u}}(\ell) \end{cases} \quad \text{on } C^\pm \quad (3.36)$$

とおくことができ、これを式(3.28)に代入すると、荷重履歴パラメータ β による項は積分で

き，ひずみエネルギー型 E 積分公式は

$$E(\ell) = \int_{\Gamma \cup C^+} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} ds - \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\int_{\Gamma \cup C^+} \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} ds \right) \quad (3.37)$$

となる．式(3.29)に代入すると，相反作用型 E 積分公式は

$$E(\ell) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma \cup C^+} \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (3.38)$$

となる．式(3.30)に代入すると，補ひずみエネルギー型 E 積分公式は

$$E(\ell) = \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\int_{\Gamma \cup C^+} \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} ds \right) - \int_{\Gamma \cup C^+} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} ds \quad (3.39)$$

となる．以上が微小変形線形弾性体に，比例負荷で圧縮荷重が載荷された場合のエネルギー解放率を求める E 積分公式である．

ここで式(3.28)から式(3.29)，また式(3.29)から式(3.30)を導く際に，境界 $\Gamma \cup C^+$ による積分と，亀裂長さによる偏微分の入れ替えを行ったが，進展亀裂面上に摩擦力などの表面力が作用する場合には，亀裂長さの変化につれて，その境界 C^+ の大きさが変化する．その場合，理論的には三者とも同一の値となることが容易に証明できるが，数値解析する際には，補ひずみエネルギー型 E 積分公式(3.30)および(3.39)が最も精度が良いことが推察できる．(付録 B に，その簡単な証明)

3. 6 3 種類の E 積分数値解公式²⁾

前節で，圧縮荷重下での進展亀裂面上に，表面力が作用するような場合でも適用可能なひずみエネルギー型，相反作用型，補ひずみエネルギー型なる 3 種類の E 積分公式を示した．それらを拡張有限要素(X-FEM)解析に適用することを考え，次式のように差分近似を行う．その際，亀裂長さ ℓ による偏微分項は 2 点差分近似することにより，荷重積分は前ステップと現ステップの平均値にあたる台形公式を使用することにより，また経路積分は，表面力と変位をそれぞれ離散化した等価節点表面力 \mathbf{s}_i と節点変位 \mathbf{u}_i を，積分経路上の全節点で和をとることにより求める．

ひずみエネルギー型 E 積分公式は

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma_{UC}^+} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} ds - \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_{\Gamma_{UC}^+} \int_0^\alpha \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} d\beta ds \right) \quad (3.28 \cdot \text{前出})$$

で定義されているが、これを数値解公式に変形すると

$$E = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{s}_i(l) \cdot \frac{\mathbf{u}_i(l+\Delta l) - \mathbf{u}_i(l)}{\Delta l} \right] - \sum_{\beta=1}^\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta l} \left[\frac{\mathbf{s}_i^\beta(l+\Delta l) + \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l+\Delta l)}{2} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^\beta(l+\Delta l) - \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l+\Delta l)}{\Delta \beta} - \frac{\mathbf{s}_i^\beta(l) + \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l)}{2} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^\beta(l) - \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l)}{\Delta \beta} \right] \Delta \beta \quad (3.40)$$

となる。ここで、 n は積分経路上の全節点数、 α は全荷重ステップ数を表わす。相反作用型E積分公式は

$$E(l, \alpha) = \int_{\Gamma_{UC}^+} \int_0^\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta} \right) d\beta ds \quad (3.29 \cdot \text{前出})$$

で定義されているが、これを数値解公式に変形すると

$$E = \sum_{\beta=1}^\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta l} \left[\frac{\mathbf{s}_i^\beta(l) - \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l)}{\Delta \beta} \cdot \frac{\{\mathbf{u}_i^\beta(l+\Delta l) + \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l+\Delta l)\} - \{\mathbf{u}_i^\beta(l) + \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l)\}}{2\Delta l} - \frac{\{\mathbf{s}_i^\beta(l+\Delta l) + \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l+\Delta l)\} - \{\mathbf{s}_i^\beta(l) + \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l)\}}{2\Delta l} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^\beta(l) - \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l)}{\Delta \beta} \right] \Delta \beta \quad (3.41)$$

となる。

同様に、補ひずみエネルギー型E積分公式は

$$E(l, \alpha) = \frac{\partial}{\partial l} \left(\int_{\Gamma_{UC}^+} \int_0^\alpha \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \beta} \cdot \mathbf{u} d\beta ds \right) - \int_{\Gamma_{UC}^+} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial l} \cdot \mathbf{u} ds \quad (3.30 \cdot \text{前出})$$

であるので、その数値解公式に変形すると、

$$E = \sum_{\beta=1}^\alpha \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta l} \left[\frac{\mathbf{s}_i^\beta(l+\Delta l) - \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l+\Delta l)}{\Delta \beta} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^\beta(l+\Delta l) + \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l+\Delta l)}{2} - \frac{\mathbf{s}_i^\beta(l) - \mathbf{s}_i^{\beta-1}(l)}{\Delta \beta} \cdot \frac{\mathbf{u}_i^\beta(l) + \mathbf{u}_i^{\beta-1}(l)}{2} \right] \Delta \beta - \sum_{i=1}^n \left[\frac{\mathbf{s}_i(l+\Delta l) - \mathbf{s}_i(l)}{\Delta l} \cdot \mathbf{u}_i(l) \right]$$

(3.42)

となる。

また、微小変形線形弾性体に、比例負荷で圧縮荷重が載荷された場合のエネルギー解放率を求める E 積分公式である式(3.19), (3.20), (3.21)は次のように変形される。

ひずみエネルギー型 E 積分公式

$$E(\ell) = \int_{\Gamma_{UC^+}} \mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} ds - \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\int_{\Gamma_{UC^+}} \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} ds \right) \quad (3.37 \cdot \text{前出})$$

は、数値解公式に変形すると、

$$E = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{s}_i(\ell) \cdot \frac{\mathbf{u}_i(\ell + \Delta \ell) - \mathbf{u}_i(\ell)}{\Delta \ell} - \frac{\mathbf{s}_i(\ell + \Delta \ell) \cdot \mathbf{u}_i(\ell + \Delta \ell) - \mathbf{s}_i(\ell) \cdot \mathbf{u}_i(\ell)}{2\Delta \ell} \right] \quad (3.43)$$

となる。相反作用型 E 積分公式

$$E(\ell) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{UC^+}} \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \ell} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (3.38 \cdot \text{前出})$$

は、

$$E = \sum_{i=1}^n \left[\mathbf{s}_i(\ell) \cdot \frac{\mathbf{u}_i(\ell + \Delta \ell) - \mathbf{u}_i(\ell)}{2\Delta \ell} - \frac{\mathbf{s}_i(\ell + \Delta \ell) - \mathbf{s}_i(\ell)}{2\Delta \ell} \cdot \mathbf{u}_i(\ell) \right] \quad (3.44)$$

となる。補ひずみエネルギー型 E 積分公式

$$E(\ell) = \frac{\partial}{\partial \ell} \left(\int_{\Gamma_{UC^+}} \frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{u} ds \right) - \int_{\Gamma_{UC^+}} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \ell} \cdot \mathbf{u} ds \quad (3.39 \cdot \text{前出})$$

は、

$$E = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\mathbf{s}_i(\ell + \Delta \ell) \cdot \mathbf{u}_i(\ell + \Delta \ell) - \mathbf{s}_i(\ell) \cdot \mathbf{u}_i(\ell)}{2\Delta \ell} - \frac{\mathbf{s}_i(\ell + \Delta \ell) - \mathbf{s}_i(\ell)}{\Delta \ell} \cdot \mathbf{u}_i(\ell) \right] \quad (3.45)$$

となる。

3. 7 結言

本章では、本研究における拡張有限要素法解析の精度の検証に用いた E 積分に関する説明を行なった。E 積分では積分経路内に進展亀裂以外の他の静止亀裂先端を含んでいても、

亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を有限要素法を用いて、任意の積分経路で求めることが可能である。したがって、亀裂 1 本の場合の数値解析結果では、引張応力下の亀裂進展では相反作用型の E 積分公式が^{6),11)~17)}、圧縮混合モード下の亀裂進展では補ひずみエネルギー型の E 積分公式が^{2),3)} 精度よくエネルギー解放率を求められている。

E 積分を拡張有限要素法解析の精度の検証に使用可能な理由は、1)エネルギー解放率が理論的に分かっている場合は、その値を数値結果と比較することで、ひとつの精度の検証が可能なこと。2)E 積分の経路独立性が示された場合、一個の亀裂先端経路を含む 2 種類の積分経路で囲まれた要素内での、(また亀裂先端を含まない閉経路内での E の値がゼロであれば、その閉経路内の要素での)力のつりあい条件が満たされている十分条件となることである。一般に、亀裂の解析では、亀裂先端近傍の応力場やひずみ場は、特異性を持つことから、数値精度が亀裂先端に近くなるほど悪化する。逆に亀裂先端近傍から離れるほど精度の良い応力やひずみの結果が得られる。したがって、E 積分の経路独立性は、亀裂先端近傍から離れた、精度の良い物理量を使用して積分が可能であるメリットがある。

参考文献

- 1) Yatomi, C. : The energy release rate and the work done by the surface traction in quasi-static elastic crack growth, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 183~187, 1983.
- 2) 鱸 洋一, 矢富盟祥 : 荷重履歴に伴う摩擦力が存在する進展亀裂の E 積分の有限要素解析, *応用力学論文集*, Vol. 1, pp. 45~53, 1998.
- 3) 矢富盟祥, 鱸 洋一 : 圧縮荷重下にある進展き裂の E 積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, *土木学会論文集*, No. 612, I-46, pp. 251~263, 1999.
- 4) 社団法人 土木学会 : *土木工学ハンドブック*, 第 6 編 固体力学, pp. 215~254, 技法堂出版, 1989.
- 5) 鱸 洋一 : 圧縮荷重下にあるき裂進展挙動の破壊力学的研究, 金沢大学学位論文, 1999.
- 6) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓 : E 積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の数値解析, *土木学会論文集*, No. 513, I-31, pp. 17~25, 1995.
- 7) Sanders, J. L. : On the Griffith-Irwin fracture theory, *J. Appl. Mech.*, Vol. 27, pp. 352~353, 1960.
- 8) 矢富盟祥 : エネルギー解放率の新公式とその応用—多軸荷重の場合の簡便式—, *材料*, Vol. 35, No. 394, pp. 767~771, 1986.
- 9) Rice, J. R., Paris, P. C. and Merkle, J. G. : Some further results of J-integral analysis and estimate, *ASTM STP 536*, pp. 231~245, 1973.
- 10) Begley, J. A. and Landes, R. J. : The J integral as a fracture criterion, *ASTM STP 514*, pp. 1~20, 1972.

- 11) Yatomi, C., Hashimoto, K. and Ishida, H. : Finite element analysis of the energy release rate for a kinked crack using the E-integral, Lecture Note in Num. Appl. Anal., 13, pp.61~74, Kino-kuniya,1994.
- 12) 矢富盟祥, 橋本堅一, 石田啓 : E積分による斜向荷重下でのき裂折れ曲がり瞬間時におけるエネルギー解放率の有限要素解析, 日本機会学会論文集, Vol.61, No.592, A, pp.2521~2528, 1995.
- 13) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓 : E積分による異方弾性体内のき裂折れ曲がり時におけるエネルギー解放率の数値解析, 土木学会論文集, No.513, I-31, pp.17~25,1995.
- 14) 橋本堅一, 矢富盟祥, 石田啓 : き裂先端付近に介在物あるいは空隙がある場合のE積分によるエネルギー解放率の解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.499~508,1995.
- 15) 橋本堅一 : E積分による有限要素解析とその応用に関する研究, 金沢大学学位論文, 1995.
- 16) 鱸 洋一, 矢富盟祥 : アイソパラメトリック要素を用いたE積分によるエネルギー解放率の有限要素解析, 構造工学論文集, Vol.43A, pp.437~444, 1997.
- 17) 橋本堅一, 鱸 洋一, 矢富盟祥 : 混合モード荷重下にある異方弾性体内のき裂のエネルギー解放率の数値解析, 材料, Vol.46, No.8, pp.976~980, 1997.

第4章 弾塑性論および従来の陽解法弾塑性有限要素法解析

4. 1 緒言

現在、数値解析の分野において主流である有限要素法は、連続体を解析する際に有限要素に分割し離散化した後、適切な境界条件を与えることによって支配方程式を近似的に解析する手法であり、様々な分野において幅広く用いられており、弾塑性境界値問題にも適用されている。弾塑性問題を解く場合、速度型の弾塑性構成式を用いることになるが、弾塑性体の塑性変形を支配している塑性ひずみ増分をどのような形で求めるかによっていくつかの方法がある。従来から多用されている方法は、応力空間において応力増分ベクトルと降伏曲面の交点での法線ベクトルを用いる方法であり陽解法と呼ばれている。しかし、この陽解法を用いると、必ず応力増分ベクトルと降伏曲面との交点を求めなければならない、またこの陽解法で求めた応力は降伏曲面からのドリフトを生じる。一方、陰解法では降伏関数を満足するような応力で剛性マトリクスを作成するためこのような問題を考える必要はない。また、弾塑性問題を解く場合には、非線形方程式を解くためにNewton-Raphson法が多用されるが、この手法は、数値解析の収束性を早める意味で非常に有用である。

本章では、弾塑性解析の基礎および従来の陽解法を紹介する。

4. 2 弾塑性論の基礎¹⁾

構成式とは物質の力学的性質を表すものであり、応力とひずみの関係式で表される。代表的な挙動に弾性挙動、塑性挙動、粘性挙動などがある。

4. 2. 1 境界値問題の境界条件と支配方程式

解析モデルは、図 4.1 に示すような領域 Ω およびその境界 Γ に関する境界値問題に帰着することができる。境界値問題は支配方程式と境界条件により成り立っている。支配方程式とは、領域 Ω 内の、つりあい式、ひずみ変位関係式、構成式から成り立っており、境界条件は表面力 \bar{t} が与えられている Γ_t (応力境界条件)および変位 \bar{u} が与えられている Γ_u (変位境界条件)、により表せる。

1. 境界条件：

$$\sigma n = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t, \quad u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u \quad (4.1)$$

ここで、 σ は Cauchy 応力、 n は境界 Γ の外向き単位法線ベクトルである。

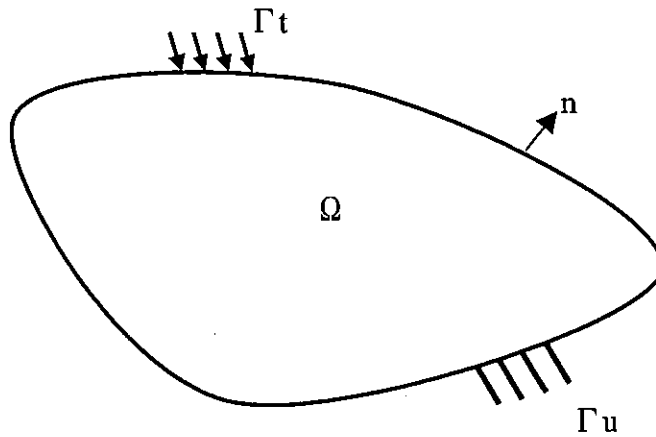


図 4.1 解析モデル

2. 支配方程式：

① 力のつり合い式：

$$\operatorname{div} \sigma + \bar{b} = 0 \quad (4.2)$$

ここで、 \bar{b} は物体力である。

② 適合条件：

$$\varepsilon = (\nabla \otimes u)^s \quad (4.3)$$

ここに、 ∇ はナブラ演算子、 \otimes はテンソル内積である。右肩 s は対称成分であることを表す。

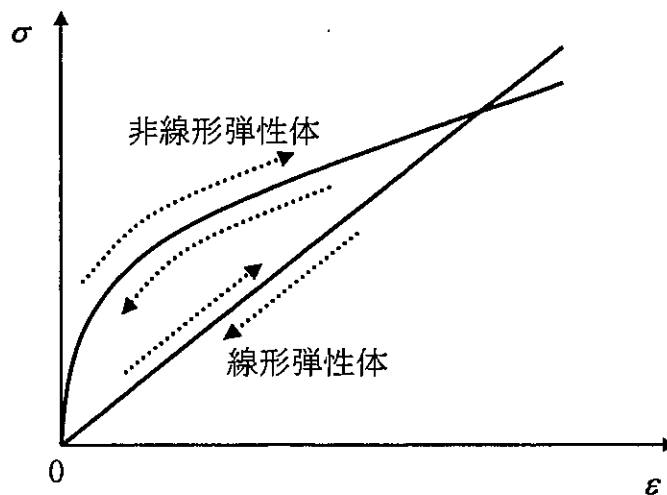


図 4.2 弾性体

③ 構成式：応力とひずみの関係式

物体を弾性体とした場合には，図 4.2 に示すように，応力がひずみの非線形関数となるものを非線形弾性体といい，応力がひずみの線形関数となるものを線形弾性体という．線形弾性体の場合は，次式で与えられる．

$$\sigma = \mathbf{C}^e \varepsilon \quad (4.4)$$

例えば，線形等方弾性体の場合は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathbf{S} + \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I} = 2\mu\mathbf{e} + \lambda(\text{tr } \varepsilon)\mathbf{I} \\ &= 2\mu\mathbf{e} + \kappa(\text{tr } \varepsilon)\mathbf{I} \\ &= \left\{ \kappa\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) \right\} \varepsilon \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで， $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は，体積定数であり， μ 、 λ は，ラメの定数と呼ばれている． \mathbf{S} 、 \mathbf{e} はそれぞれ偏差応力と偏差ひずみであり，次のような関係で定義される．

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \varepsilon - \frac{1}{3}\text{tr}(\varepsilon)\mathbf{I} \quad (4.6)$$

非線形弾性体の場合には，次式で与えられる．

$$\sigma = \hat{\sigma}(\varepsilon) \quad (4.7)$$

したがって，弾性体の場合は応力はひずみによって一意に定まる．言い換えると，応力を大きくする負荷と小さくする除荷の場合でも同じような応力-ひずみ関係となる．

一方，図 4.3 に示すような弾塑性体の場合は，全ひずみ ε が除荷すると元に戻る弾性ひずみ ε^e と，除荷しても残留する塑性ひずみ ε^p の和で表されると仮定する．すなわち，塑性に到達した後について，ひずみおよびひずみ速度を次式のように弾塑性分解を行う．

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (4.8)$$

次に，応力は弾性ひずみで決まると仮定される．

$$\sigma = C^e \varepsilon^e = C^e (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.9)$$

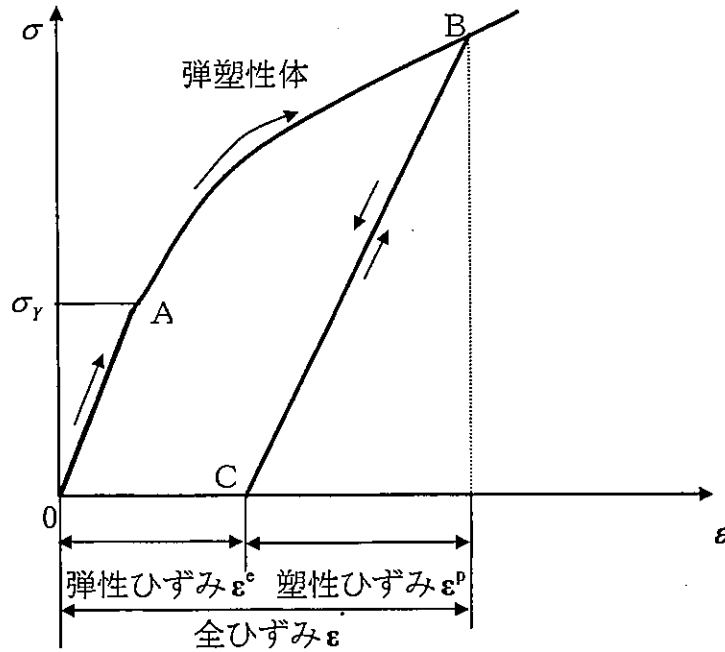


図 4.3 弾塑性体

この時、速度型の構成式は次式のように決まる。

$$\dot{\sigma} = C^e \dot{\varepsilon}^e = C^e (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) = C^{ep} \dot{\varepsilon} \quad (4.10)$$

ここでは、 C^{ep} は Continuum 弾塑性係数と呼ばれている。
弾塑性体の場合には、さらに、以下の二つの仮定が必要となる。

④ 降伏関数の存在：

$$f = f(\sigma, \xi) \quad (4.11)$$

⑤ 関連流れ則：

$$\dot{\varepsilon}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \gamma \geq 0 \quad (4.12)$$

ここに、上添え字 e と p は、それぞれ弾性成分と塑性成分を表している。また降伏関数の

変数 ξ は、硬化/軟化パラメーターであり、降伏曲面の拡大(硬化)と縮小(軟化)を定めている。ここでは、一般性を考慮して、

$$\xi = \xi(\epsilon^p) \quad (4.13)$$

とおく。さらに関連流れ則の乗数 γ は、コンシステンシーパラメーターと呼ばれ、塑性ひずみが発生する限り(弾塑性状態)、 $\gamma > 0$ でなければならない。

4. 2. 2 降伏条件

固体の変形が弾性論の適用できる限界、すなわち弾性変形のみが生じる状態がおわり塑性変形が生じ始める状態を規定する法則を降伏基準あるいは降伏条件といい、その条件を数学的に記述したものが降伏関数 f である。この降伏関数は一般的に三次元の主応力空間で曲面を描くことから降伏曲面と呼ばれている。

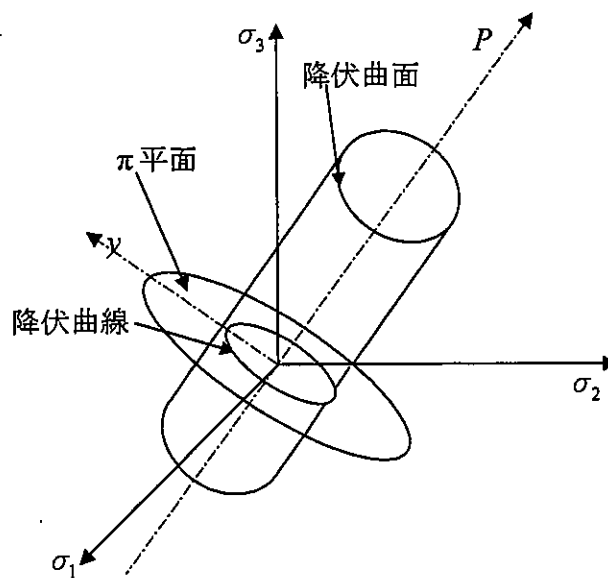


図 4.4 von Mises 塑性体の降伏曲面

von Mises 弾塑性体モデルの降伏関数 f は次のように与えられる。

$$f = \|\mathcal{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + \bar{H}\epsilon^p) \quad (4.14)$$

ここで S は偏差応力，次式で定義される．

$$S = \sigma - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \mathbf{1} \quad (4.15)$$

また， σ_y は降伏応力， \bar{H} は硬化・軟化定数， $\bar{\epsilon}^p$ は相当塑性ひずみである．

von Mises 塑性体の降伏曲面は，図 4.4 のように 3 主応力空間内で p 軸(静水圧軸， $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ の軸)を中心とする円筒形となる．すなわち，等方圧が塑性変形に無関係な金属などのモデルとして汎用される．

一方，Drucker-Prager 弾塑性モデルの降伏関数は以下で与えられる．

$$f = \|S\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + \bar{H} \bar{\epsilon}^p) = 0 \quad (4.16)$$

ここで， S は偏差応力， p は平均応力であり，

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\sigma) \quad (4.17)$$

である．また σ_y ， \bar{H} ， $\bar{\epsilon}^p$ は式(4.14)と同じ意味である．

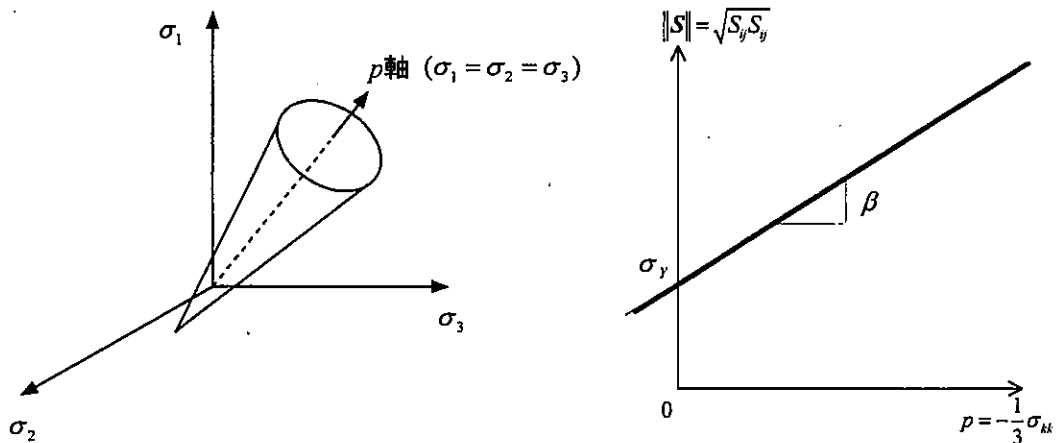


図 4.5 Drucker-Prager 弾塑性モデルの降伏関数

この Drucker-Prager 弾塑性体モデルの降伏関数は，図 4.5 のような主応力空間では静水圧 p 軸($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ の軸)を中心軸に持つ円錐となる．このパラメータ β ， σ_y は主に土の強度

に關係があり，特定の条件を与えることにより Mohr-Coulomb 式の c ， ϕ と関連付けることができる．具体的には， $\sigma_1 < \sigma_2 = \sigma_3$ の条件下(三軸圧縮試験での応力状態に相当)で c ， ϕ を決定した場合，

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{3 - \sin \phi} \quad \sigma_y = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi} \quad (4.18)$$

であり， $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ の条件下(三軸伸張試験での応力状態に相当)で c ， ϕ を決定した場合，

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{3 + \sin \phi} \quad \sigma_y = \frac{6c \cos \phi}{3 + \sin \phi} \quad (4.19)$$

である．

その他のよく使われる弾塑性モデルは，ここにはなまえのみ次のように上げる．

- 1) Tresca モデル(π 面上で六角形．3 主応力空間内で六角柱．)
 - 2) Mohr-Coulomb モデル(π 面上で六角形．圧縮側と引張り側で大きさが違う．3 主応力空間内で六角錐．)
 - 3) Cam-Clay モデル(粘性土． π 面上で円．3 主応力空間内で楕円回転体．)
 - 4) Sekiguchi-Ohta モデル(粘性土．Cam-Clay モデルに異方効果を導入した．)
- など．

4. 2. 3 Continuum 弾塑性係数 C^{ep}

塑性状態にあるならば(除荷などで弾性状態に移行しないのであれば)，応力変化 $\dot{\sigma}$ に対して $\dot{f} = 0$ でなければならない．これをコンシステンシー条件(consistency condition)という．降伏関数の変数 σ ， ξ に注意して，

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \dot{\xi} = 0 \quad (4.20)$$

を得るが，今，硬化／軟化パラメーターを $\xi = \xi(\epsilon^p)$ と置いているから， $\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon^p} \dot{\epsilon}^p$

さらに，関連流れ則，式(4.12)を用いることによって，

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial \epsilon^p}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = 0 \quad (4.21)$$

を得る．よって，式(4.21)から，コンシステンシーパラメーター γ が，

$$\gamma = \frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma}, \quad h = -\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \epsilon^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.22)$$

と定まる。弾性成分を $\dot{\sigma} = C^e \dot{\epsilon}^e$ とおくと、式(4.8)および式(4.12)を用いて、次式が得られる。

$$\dot{\sigma} = C^e \dot{\epsilon}^e = C^e (\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^p) = C^e \left(\dot{\epsilon} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right) \quad (4.23)$$

式(4.23)を式(4.22)に代入して、

$$\gamma = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma} C^e \dot{\epsilon}, \quad H = h + \frac{\partial f}{\partial \sigma} C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (4.24)$$

とも表すことができる。ここに、 H を塑性係数という。式(4.22)を応力増分で表した γ 、式(4.24)をひずみ増分で表した γ と呼ぶことにする。この2つの式を用いることにより、弾塑性体の応力—ひずみ関係を陽に書き表すことができる。例えば、式(4.24)を式(4.23)に代入して、

$$\dot{\sigma} = C^{ep} \dot{\epsilon}, \quad C^{ep} = C^e - \frac{1}{H} C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T C^e \quad (4.25)$$

を得る。

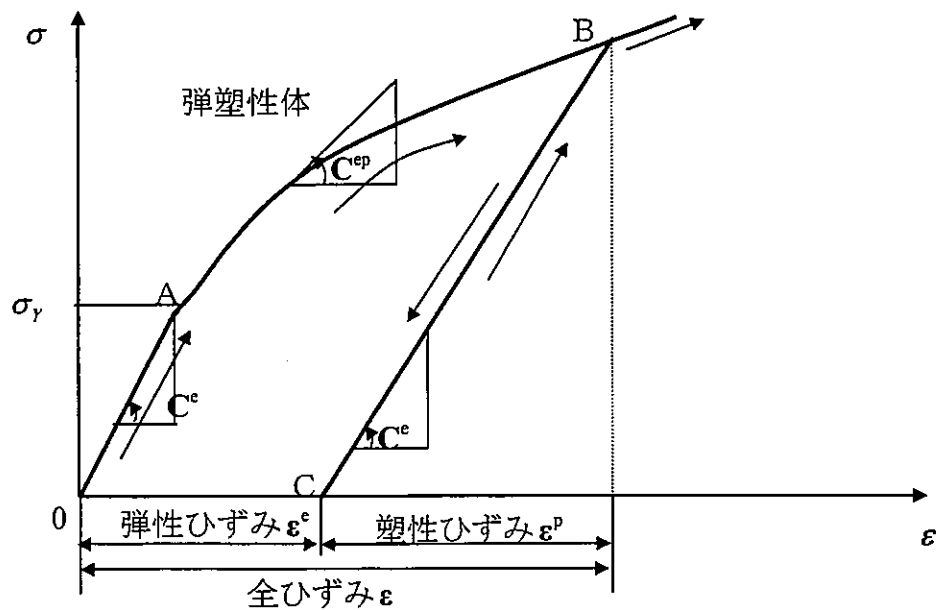


図 4.6 弾塑性係数の概念図

ここで、 C^p は「Continuum 弾塑性係数」と呼ばれ、図 4.6 にその概念図を示す。 σ_y は、この応力以下であれば弾性体という意味をもつ降伏応力と呼ばれる。

4. 2. 4 弾塑性判定条件²⁾

さて、弾塑性体では、弾性状態と弾塑性状態の応力—ひずみ関係が異なるので、「弾塑性状態」から「弾性状態」、または「弾性状態」から「弾塑性状態」への移行をその都度判定してやらねばならない。

(1) $f < 0$ の状態を考えると、ある応力増分 $\dot{\sigma}$ に対しても、 $f < 0$ すなわち「弾性状態」であれば、 $\gamma = 0$ となる。

(2) $f = 0$ の状態を考えると、もし $\dot{f} = 0$ ならば、すなわち弾塑性状態であることにより $\gamma \geq 0$ でなければならない。

i) $\gamma > 0$ すなわち $\frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} > 0$ (式(4.22)より) のとき、「弾塑性状態」と判定され、塑性ひずみが発生する。この時、次の2つの場合が考えられる。

$$(a) \quad h > 0 \text{ かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} > 0$$

「弾塑性状態」にあるならば $\dot{f} = 0$ 、よって式(4.21)において、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} > 0$ および $\gamma > 0$ より、 $\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma} < 0$ だから、 $h > 0$ が確かめられる。また、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} > 0$ ということは、応力空間上で $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ と $\dot{\sigma}$ の内積が正ということだから、それぞれの方向の成す角が鋭角であることを意味している。 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ は降伏曲面の外向法線方向を表すから、 $\dot{\sigma}$ は降伏曲面に対して外側を向いていることになり、よって、 $\dot{\sigma}$ なる応力変化によって降伏曲面は拡大することがわかる。すなわち $h > 0$ において、このような降伏曲面の拡大(ひずみ硬化)が生じるという。

$$(b) \quad h < 0 \text{ かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} < 0$$

この場合、「弾塑性状態」では、式(4.21)において、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} < 0$ および $\gamma > 0$ より、 $\frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma} > 0$ だから、 $h < 0$ が確かめられる。また、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} < 0$ ということは、応力空間上で $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ と $\dot{\sigma}$ のなす

角が鈍角であることを意味している。よって、 $\dot{\sigma}$ は降伏曲面に対して内側を向いていることになり、そのような応力変化によって降伏曲面は縮小することがわかる。すなわち $h < 0$ において、降伏曲面の縮小(ひずみ軟化)が生じるという。

厳密には、ひずみ硬化とひずみ軟化は塑性増分仕事の正負によって定義される。塑性増分仕事は、式(4.12)と式(4.22)から、 $\dot{\sigma}\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} \right)^2$ と表されるので、 $h > 0$ の時、ひずみ硬化($\dot{\sigma}\dot{\epsilon}^p > 0$)、 $h < 0$ の時、ひずみ軟化($\dot{\sigma}\dot{\epsilon}^p < 0$)と確かめられる¹⁾。

ii) $\gamma = 0$ すなわち $\frac{1}{h} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = 0$ のとき、「中立」と判定される。「中立」とは、応力状態は降伏曲面上にとどまるものの塑性ひずみを発生しない状態という。応力空間上で、 $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ と $\dot{\sigma}$ が直交している場合である。

もし $\dot{f} < 0$ ならば、「弾性状態」に移行したと判定され、これを塑性状態からの弾性除荷と呼ぶ。 $\gamma = 0$ 即ち塑性ひずみは発生しない。

なお、上記の古典的な弾塑性判定条件を、最近では下記のクーンタッカ-条件(Kuhn-Tucker Complementary Condition)とコンシステンシ-条件(Consistency Condition)で表わされることが多い。

クーンタッカ-条件：

$$\gamma \geq 0, f(\sigma, \xi) \leq 0, \gamma f = 0 \quad (4.26)$$

コンシステンシ-条件：

$$\gamma \dot{f} = 0 \text{ if } f = 0 \quad (4.27)$$

なお、上記は、次の通常の軟化を含めた弾塑性判定条件に等しい。

$$\left\{ \begin{array}{l} f < 0 \rightarrow \gamma = 0 \text{ (elastic)} \\ f = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{f} < 0 \rightarrow \gamma = 0 \text{ (elastic unloading)} \\ \dot{f} = 0 \text{ and } \gamma = 0 \text{ (neutral loading)} \\ \dot{f} = 0 \text{ and } \gamma > 0 \text{ (plastic hardening, softening loading)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

4. 2. 5 von Mises 弾塑性体モデルの Continuum 弾塑性係数

相当塑性ひずみ \bar{e}^p を用いて、式(4.13)の硬化/軟化パラメーターの具体表現として、

$$\xi = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y + \bar{H}\bar{e}^p) \quad \bar{e}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\epsilon}^p \cdot \dot{\epsilon}^p} \quad (4.29)$$

とすると、von Mises 弾塑性体モデルの場合には、式(4.11)の降伏関数は

$$f = \|\mathbf{S}\| + \xi = 0, \quad (4.30)$$

と表すことができる。上式を ξ で偏微分して、

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 1 \quad (4.31)$$

また、式(4.29)と関連流れ則式(4.12)より、

$$\dot{\xi} = -\frac{2}{3}\gamma\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (4.32)$$

従って、式(4.22)の h 及び式(4.24) H は、それぞれ

$$\begin{aligned} h &= \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \\ H &= \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (4.33)$$

であるので、塑性乗数 γ は、式(4.24)により、

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot C^e \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}}} \quad (4.34)$$

と求まる。

また、von Mises の降伏関数式(4.30)より

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} = \hat{\mathbf{n}} \quad \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} = 1 \quad (4.35)$$

また、式(4.5)より弾性係数マトリクスは、 $\mathbf{C}^e = \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right)$ であるから、

$$\mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 2\mu \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} = 2\mu \quad (4.37)$$

従って、式(4.35)、(4.36)および式(4.37)を式(4.34)に代入して、コンシステンシーパラメータ γ が次式となる。

$$\gamma = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}} \quad (4.38)$$

よって、上式を式(4.23)に代入し整理すると、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[2\mu \mathbf{I} + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \frac{2\mu}{1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.39)$$

となり、von Mises 弾塑性体の Continuum 弾塑性係数は、

$$\mathbf{C}^{ep} = \kappa \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) - \frac{2\mu}{1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (4.40)$$

となる。

4. 2. 6 Drucker-Prager 弾塑性体モデルの Continuum 弾塑性係数

本論文では、Drucker-Prager 弾塑性体モデルは、von Mises 弾塑性体モデルの降伏関数を単に圧力にも依存するよう拡張しただけという意味で、式(4.13)の硬化/軟化パラメーター

を, von Mises 弾塑性体モデルと同じく, 次式のように

$$\xi = -\sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + \bar{H}\bar{e}^p) \quad , \quad \bar{e}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\epsilon}^p \cdot \dot{\epsilon}^p} \quad (4.41)$$

とおき, 降伏関数は, 圧力に線形に関係する次式を用いる.

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p + \xi = 0 \quad (4.42)$$

また, 関連流れ則式(4.12)を仮定する. 式(4.42)を ξ で偏微分して,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 1 \quad (4.43)$$

また, 式(4.41)と関連流れ則式(4.12)より次式を得る,

$$\dot{\xi} = -\frac{2}{3}\gamma\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (4.44)$$

従って, 式(4.22)の h 及び式(4.24)の H は, それぞれ

$$\begin{aligned} h &= \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \\ H &= \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (4.45)$$

であるので, コンシステンシーパラメーター γ は 式(4.24)により,

$$\gamma = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{C}^e \dot{\epsilon}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}}} \quad (4.46)$$

と求まる.

Drucker-Prager 弾塑性体モデルの降伏関数式(4.42)より

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{S}{\|S\|} = \hat{n} + \frac{\beta}{3} \mathbf{1} \quad (4.47)$$

$$\sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma}} = \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}}$$

また、式(4.5)より弾性係数マトリクスは、 $\mathbf{C}^e = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$ であるから、

$$\mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \mathbf{C}^e \hat{n} - \frac{\beta}{3} \mathbf{C}^e \mathbf{1} = 2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} &= \left(\hat{n} + \frac{\beta}{3} \mathbf{1} \right) \cdot (2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1}) \\ &= 2\mu + \beta^2 \kappa \end{aligned} \quad (4.49)$$

式(4.47), (4.48)および式(4.49)を式(4.46)に代入して、コンシステンシーパラメーター γ が次式となる。

$$\gamma = \frac{(2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\left(2\mu + \beta^2 \kappa + \frac{2}{3} \bar{H} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \quad (4.50)$$

よって、上式を式(4.23)に代入し整理すると、

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \frac{(2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1}) \otimes (2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1})}{\left(2\mu + \beta^2 \kappa + \frac{2}{3} \bar{H} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \right\} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.51)$$

となり、Drucker-Prager 弾塑性体の Continuum 弾塑性係数は、

$$\mathbf{C}^{ep} = \left\{ \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) - \frac{(2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1}) \otimes (2\mu \hat{n} + \beta \kappa \mathbf{1})}{\left(2\mu + \beta^2 \kappa + \frac{2}{3} \bar{H} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \right\} \quad (4.52)$$

となる。

4. 3 非線形有限要素法の定式化^{2),3)}

有限要素法とは、対象とする物体の中を有限個の要素(element)に分割し、その間を節点(node)でつなぐことにより物体をモデル化し、物体に力などが作用した場合にその変形を得るための一つの数値解析の方法である。たとえば、高層ビルや橋のような複雑な構造物でも、その形状と境界条件(および初期条件)さえ明確に与えられれば、その挙動を正確に予測することができる。また、計算条件をいろいろ変えることにより、最適な解を探すことも可能であるから、数値実験とも言われる。

今、以下のような試験関数を定義する。

$$\delta \mathbf{u} = \{ \delta \mathbf{u} \mid \delta \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \delta \mathbf{u})^S, \delta \mathbf{u} = 0 \text{ on } \Gamma_u \} \quad (4.53)$$

この試験関数をつりあい式(4.2)に掛け合わせ Gauss の発散定理と変形に対する力の境界条件(4.1)を用いるとつりあい式の弱形式が得られる。

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \quad (4.54)$$

この弱形式を有限要素法定式化するため、空間的離散化を行う。今、節点変位を \mathbf{d} とすると、

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla \mathbf{N} \mathbf{d} = \mathbf{B} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.55)$$

ここで、 \mathbf{N} は変位に対する内挿関数であり、形状関数とも呼ばれている。試験関数に対しても同様の離散化が行えると

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \mathbf{N} \delta \mathbf{d} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (4.56)$$

となる。なお、ここでは有限要素法定式化の慣例に従う表記は変えていないが、応力、ひずみはベクトル化、構成テンソルはマトリクス化されていることに注意する。したがって、上付きの T は転置行列を意味する。式(4.55)、式(4.56)の関係を式(4.54)に代入し整理すると、

$$\mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) \, d\Omega = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega \quad (4.57)$$

が得られる。ここで、 \mathbf{A} は assembly operator と呼ばれ全要素数 ne の数だけ重ね合わせる事を意味する。

式(4.57)の左辺を内力ベクトル、右辺を外力ベクトルと呼び、

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{d}) = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) \, d\Omega \quad (4.58)$$

$$\mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega \quad (4.59)$$

と表すと、最終的には有限要素法定式化は節点における離散化された変位 \mathbf{d} を未知とする非線形方程式に帰着する。

$$\mathbf{F}^{\text{ext}}(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{b}}) - \mathbf{F}^{\text{int}}(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d})) = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

1. 線形弾性体の場合：

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}$ と式(4.55)を用いて、式(4.60)に代入することにより、次式を得る。

$$\mathbf{A} \int_{e=1}^{ne} \left[\int_{\Omega_e} [\mathbf{B}]^T [\mathbf{C}^e] [\mathbf{B}] \, d\Omega \right] \{\mathbf{d}\} = \mathbf{F}^{\text{ext}}(\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{b}}) \quad (4.61)$$

すなわち、

$$[\mathbf{K}] \{\mathbf{d}\} = \{\mathbf{F}^{\text{ext}}\} \quad (4.62)$$

上記の線形連立方程式を解けば、物体全体における節点変位 $\{\mathbf{d}\}$ が求まる。さらに、下式より、ひずみおよび応力を求めることができる。

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\varepsilon}\} &= [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \\ \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [\mathbf{C}^e] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{C}^e] [\mathbf{B}] \{\mathbf{d}\} \end{aligned} \quad (4.63)$$

2. 非線形の場合：

ここでの非線形の場合とは、非線形弾性体および弾塑性体両方の意味で述べる。従って、

式(4.57)は次式で書き直すことができる。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{ne} [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega &= \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{ne} [\mathbf{B}]^T \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})\} d\Omega \\
 &= \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{ne} [\mathbf{B}]^T \{\hat{\boldsymbol{\sigma}}([\mathbf{B}]\{d\})\} d\Omega \\
 &= \mathbf{A} \int_{\Gamma_e}^{ne} N^T \bar{\boldsymbol{\tau}} d\Gamma - \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{ne} N^T \bar{\boldsymbol{b}} d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

上式に示されるように、 d の非線形方程式となり、全体では d の非線形連立方程式を解く問題となる。

4. 4 非線形解析の計算法^{2),4),5),6)}

有限要素法の解析で取り扱われる非線形問題は構成則が非線形である材料非線形問題と有限変形という幾何学的非線形問題、さらには接触問題などの境界非線形問題がある。本節においては、変形(ひずみ)や変位は微小と仮定し、線形のひずみと変位の関係が用いられる。ここでは、材料非線形問題のうち、特に時間依存性のない弾塑性材料の応力変形問題を解く計算手法を紹介する。

節 4.3 の式(4.62)に示したように、有限要素法で離散化された線形弾性連続体のつり合い方程式は、系全体の節点力 \mathbf{f} と節点変位 \mathbf{d} を用いて次の式のように表せる。

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{d} \tag{4.65}$$

ここで、 \mathbf{K} は全体剛性マトリクスであり、その成分はすべて定数である。この場合には、荷重 \mathbf{f} が与えられたときの未知の節点変位 \mathbf{d} は、 \mathbf{K} の逆行列を計算することで容易に求まる。しかし、式(4.64)のような非線形材料で構成された系に対するつり合い方程式は、次のように全体剛性マトリクス \mathbf{K} に未知の変位 \mathbf{d} を含んだ非線形な方程式となり、このままでは解くことができない。

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}(\mathbf{d})\mathbf{d} \tag{4.66}$$

このような非線形問題を数値解析的に解く手法が非線形解析法である。有限要素法による材料非線形問題の数値解析では、計算時間の大半がこの部分で占られるため、現在も精度の高い解を効率良く短時間に解く手法の開発や改良が行われている。しかしながら、あらゆる問題に対して万能な解析手法はなく、様々な長所や短所を有している。そのため、解析対象の特徴などを見極めて、それに最適な解析手法を選択しなければならない。適用

を誤ると、解析規模に対して計算時間が長く、安定して解が得られない(解の発散)などの問題が生じる。

現在、よく使われる線形剛性を用いる非線形解析法は、系に加えられた荷重をいくつかの荷重増分 Δf で区分し、その間における剛性の変化が小さいとして一定の剛性(弾塑性係数マトリクス)で線形近似し、変位増分 Δd を計算する「増分法」や、何らかの線形剛性を使用して与えられたが外力(荷重)と内力との不釣り合いな力(残差力 \mathbf{R})が十分に小さくなるまで、すなわち解が収束するまで線形計算を繰り返し行う「反復法」がある。線形近似の「増分法」に比べて、繰り返し計算により誤差を小さくできる「反復法」の方が、高精度の変形計算を行うことができる。しかし、「反復法」は荷重が増加する過程での応力や変形を評価できない。それを改善したのが「混合法」である。「増分法」と同様に荷重増分に分割し、その荷重増分ごとに「反復法」で解の収束計算を行う。

4. 4. 1 増分法

荷重(節点力) \mathbf{f} と変位(節点変位) \mathbf{d} の関係曲線を図 4.7 のように模式的に描く。剛性マトリクス \mathbf{K} は、節点変位 \mathbf{d} あるいは節点力 \mathbf{f} に応じた接線剛性で、逐次変化する。この非線形な荷重 \mathbf{f} と変位 \mathbf{d} の関係を線形解析で近似的に解析する方法としては、まず、この関係曲線をいくつかの区間に分割し、その間を部分的に線形な直線で連続的につないだ折れ線で表して、一連の線形解析で計算することが容易に考えられる。即ち、荷重を小さな増分荷重に分割させ、その増分荷重に対して線形計算で増分変位を求める。これが増分法の基本的な考え方である。

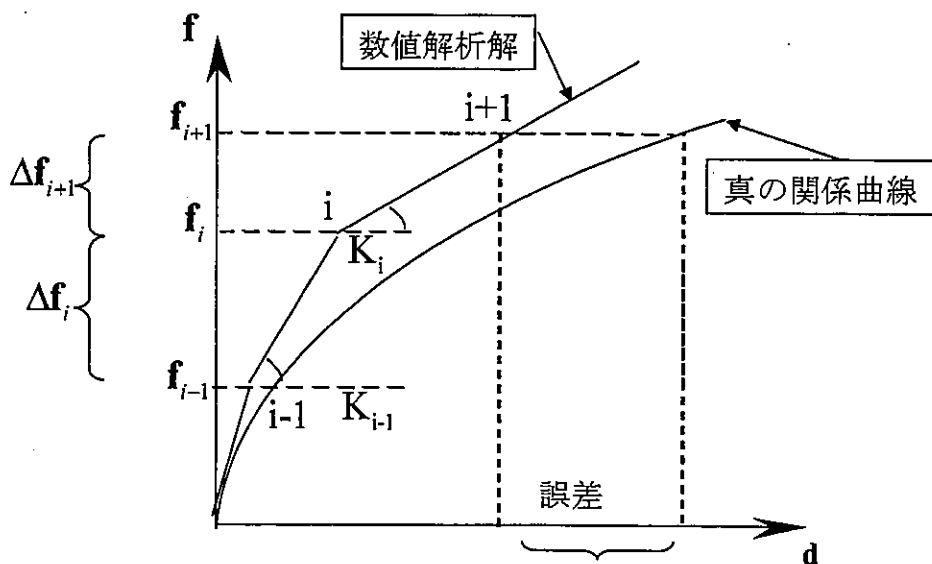


図 4.7 増分法

今、 $i-1$ 番目の変位が求まったとする。図 4.5 に示すように、 i 番目の剛性マトリクス K_i は $i-1$ 番目の応力 σ_{i-1} と塑性ひずみ ϵ_{i-1}^p を基に計算され、 $d_i = d_{i-1} + \Delta d_{i-1}$ より i 番目の変位が得られる。ここで、増分法で求まる数値解析解と厳密解を比較してみると、図 4.7 より荷重が増えるにつれて誤差が累積して厳密解から乖離することがわかる。一般的な材料では、荷重 f と変位 d の関係は上に凸の曲線で、荷重が大きくなるにつれて勾配が小さくなる。そのため、変位の数値解析解は正解よりも小さくなり、荷重が大きくなるにつれて乖離の程度がさらに拡大する。また、荷重増分の量が大きいほどその乖離は大きくなる。しかも、非線形問題では、たいていの場合は正解が分かっていないので、誤差の程度が不明である。そのため、荷重増分を変えた数ケースの数値実験を実施し、それらの結果を比較することでどの程度の誤差が生じているかを推測することが望ましい。

増分法はこのような誤差が発生するという欠点を抱えている。その精度を向上させるためには、荷重増分を小さくする必要がある。しかし、それは計算回数の増加を伴う。そこで、精度の向上手法として平均応力法という方法がある。これは、 i 段階の応力 σ_i とひずみ ϵ_i より計算された i 段階の剛性マトリクス K_i で $i+1$ 段階の応力 σ_{i+1} を求めた後に、 i 段階と $i+1$ 段階の平均応力 $\sigma_{i+1/2}$ とそれに対応するひずみ $\epsilon_{i+1/2}$ を計算する。この応力 $\sigma_{i+1/2}$ とひずみ $\epsilon_{i+1/2}$ で i 番目の剛性マトリクス K_i を計算し直し、再度、 $i+1$ 番目の変位を算定する。これによって、数値解析解と厳密解との乖離は小さくなるが、誤差の累積は避けられない。

4. 4. 2 反復法

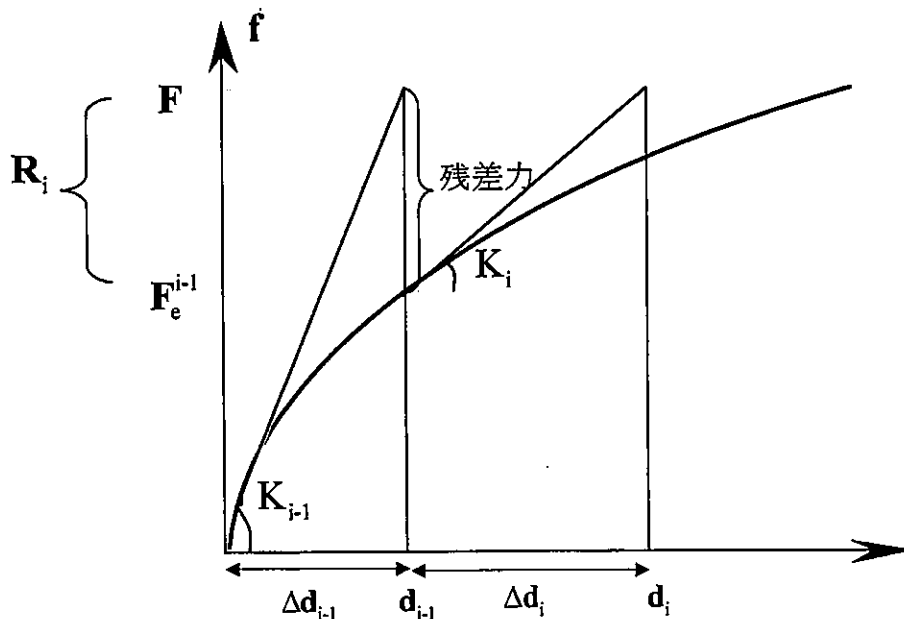


図 4.8 Newton-Raphson 法

有限要素法では非線形方程式の解を求めるために、反復法の1つである Newton-Raphson 法がよく用いられる。与えられた荷重 \mathbf{f} の下で、式(4.66)の支配方程式が満足されるまで、繰り返し計算によって数値解析解を連続的に修正する手法である。この手法は、繰り返し計算の各ステップで一定な係数の剛性マトリクスを用いて、荷重あるいは残差力(繰り返し計算の過程で釣り合わなかった分の荷重)に対応する変位を計算し、その変位の累計が数値解析解として求められるところに特徴がある。

いま、図 4.8 のような節点力(荷重) \mathbf{f} と節点変位(変位) \mathbf{d} の関係を模式的に与える。これに荷重 \mathbf{F} を作用させる。この時、繰り返し計算 $i-1$ 回目(ステップ)が終わった段階で、この関係曲線上の荷重が \mathbf{F}_e^{i-1} であったとする。不釣り合いな荷重 \mathbf{R}_i は次式で求まる。

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F} - \mathbf{F}_e^{i-1} \quad (4.67)$$

これが i 回目の繰り返し計算の過程で作用させる荷重となり、その間の変位増分 $\Delta \mathbf{d}_i$ は次式で計算される。

$$\Delta \mathbf{d}_i = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{R}_i \quad (4.68)$$

これより i 回目の変位 \mathbf{d}_i が求まり、応力 $\boldsymbol{\sigma}_i$ は弾塑性係数マトリクス \mathbf{C}^{ep} を用いて計算する。 i 回目の変位 \mathbf{d}_i に対応する荷重 \mathbf{F}_e^i は、応力 $\boldsymbol{\sigma}_i$ に等価な節点力として次式で求められる。

$$\mathbf{F}_e^i = \sum_{\text{element}} \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_i d\Omega \quad (4.69)$$

式(4.67)から式(4.69)までの繰り返し計算は、不釣り合いな荷重 \mathbf{R}_i あるいは変位増分 $\Delta \mathbf{d}$ が無視できる程度に十分に小さくなるまで行う。

繰り返し計算の式(4.68)に用いる剛性マトリクス \mathbf{K}_i に、荷重と変位の関係曲線の接線剛性、即ち前ステップの \mathbf{d}_{i-1} 、 \mathbf{F}_e^{i-1} より求められる弾塑性係数マトリクスを適用する手法が Newton-Raphson 法である。

4. 4. 3 混合法(増分法と反復法の組合せ)

増分法は非線形な節点変位 \mathbf{d} と節点力 \mathbf{f} の関係曲線を折れ線で近似するため、増分数が増えるにつれて誤差が累積する。それを避けるため、各増分に対して反復法を適用し、精度の良い数値解析解を得ようとする手法である。前の段階における応力とひずみより計算された接線変形係数を用いることも可能である。このように混合法は便利であり、種々の応用が利くことから、現在では、使い方が限定される反復法をそのままの形で適用するので

はなく、それを拡張した混合法が使われる。特に Newton-Raphson 法と増分法と組合せて利用するのが一般的である。

ここで、Newton-Raphson 法を用いて X を未知数とする以下の非線形方程式を解くことを考える。

$$f(X) = C \quad (4.70)$$

$N+1$ 増分ステップ目の初期値 X_n , C_n が上式を満たすとすれば,

$$f(X_n) = C_n \quad (4.71)$$

となる。今、 C_n が ΔC_{n+1} だけ変化して C_{n+1} になったとき、式 (4.70) を満たす $X_{n+1} = X_{n+1}^{(k)}$ を求める。 $X_{n+1}^{(k)}$ と $X_{n+1}^{(0)} = X_n$ の差を ΔX_{n+1} と置くと、以下の条件を満足すればよい。

$$f(X_{n+1}) = C_{n+1} \quad (4.72)$$

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_{n+1}^{(0)} + \Delta X_{n+1} \\ C_{n+1} = C_n + \Delta C_{n+1} \end{cases} \quad (4.73)$$

式 (4.72) を Taylor 展開すると

$$f(X_{n+1}^{(0)}) + \frac{\partial f(X_{n+1}^{(0)})}{\partial X} \Delta X_{n+1} + O(\Delta X_{n+1}^2) = C_{n+1} \quad (4.74)$$

ΔX_{n+1} が十分に小さいとして高次項を無視すれば,

$$\begin{cases} X_{n+1}^{(i)} = X_{n+1}^{(i-1)} + \Delta X_{n+1}^{(i)} \\ \frac{\partial f(X_{n+1}^{(i-1)})}{\partial X} \Delta X_{n+1}^{(i)} = C_{n+1} - f(X_{n+1}^{(i-1)}) \end{cases} \quad (4.75)$$

となる。ここで右肩の i は反復回数を示している。次式のように、 i 回目の近似解の残差を R と置けば、 $R=0$ となったとき $X_{n+1}^{(k)}$ は正しい解となる。

$$R_{n+1}^{(i)} = f(X_{n+1}^{(i)}) - C_{n+1} \quad (4.76)$$

これを式 (4.75) に代入して,

$$\begin{cases} X_{n+1}^{(i)} = X_{n+1}^{(i-1)} + \Delta X_{n+1}^{(i)} \\ \frac{\partial f(X_{n+1}^{(i-1)})}{\partial X} \Delta X_{n+1}^{(i)} = -R_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (4.77)$$

を得る. 数値解析では切り捨て誤差が生じるため, 一般に完全には $R=0$ とはならない. 従って, 解の収束判定には下記のようにある許容値を持たせることにより, 収束したと考える.

$$\frac{|R_{n+1}^{(i)}|}{|R_{n+1}^{(i-1)}|} \leq tol \quad \text{または} \quad \frac{|R_{n+1}^{(i)}|}{|R_{n+1}^{(0)}|} \leq tol \quad (4.78)$$

ここで, tol は残差の許容値である.

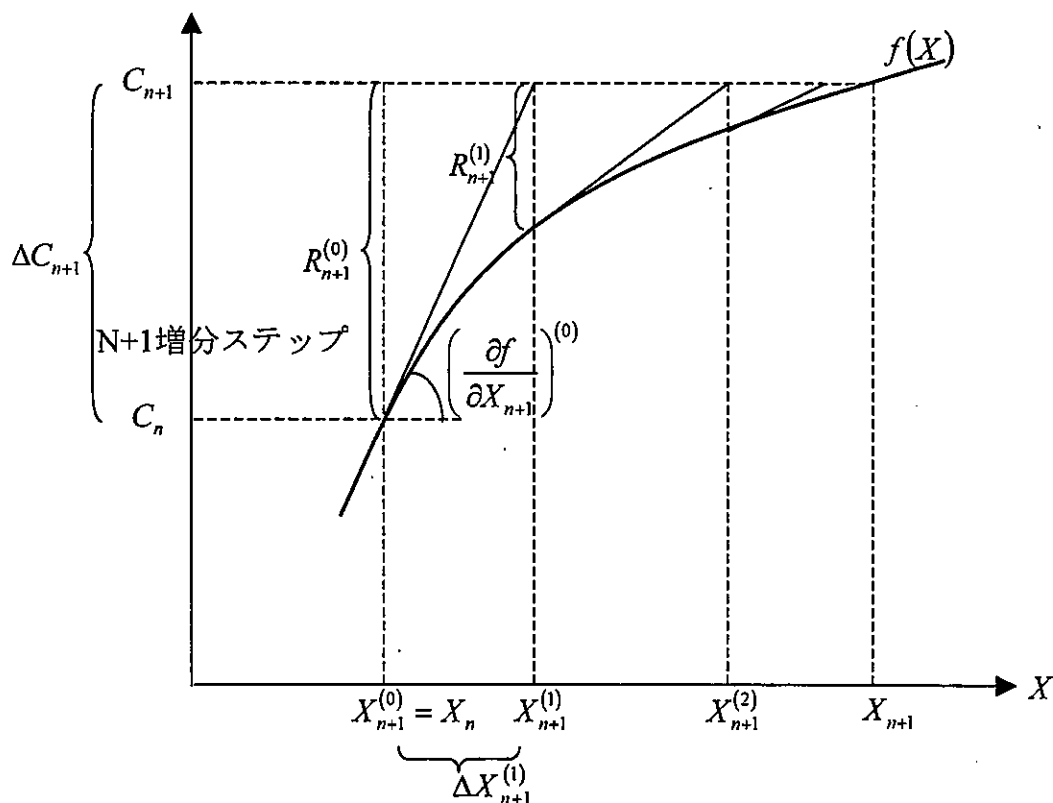


図 4.9 $f(X)=C$ 形の Newton-Raphson 法

以上のアルゴリズムは次のようにまとめられる(図 4.9 参照).

- ① 初期値の設定: $X_{n+1}^{(0)} = X_n$
- ② X の更新: $X_{n+1}^{(i)} = X_{n+1}^{(i-1)} + \Delta X_{n+1}^{(i)}$
- ③ 残差計算: $R_{n+1}^{(i)} = f(X_{n+1}^{(i)}) - C_{n+1}$
- ④ 収束判定: $\frac{|R_{n+1}^{(i)}|}{|R_{n+1}^{(i-1)}|} > tol$ なら⑤へ, $\frac{|R_{n+1}^{(i)}|}{|R_{n+1}^{(i-1)}|} \leq tol$ なら $X_{n+1} = X_{n+1}^{(i)}$ として終わり.
- ⑤ ΔX の計算: $\frac{\partial f(X_{n+1}^{(i)})}{\partial X_{n+1}^{(i)}} \Delta X_{n+1}^{(i+1)} = -R_{n+1}^{(i)}$ より $\Delta X_{n+1}^{(i+1)}$ を求め, ②へ戻る.

4. 5 弾塑性解析に混合法を用いた陽解法アルゴリズム

弾塑性論を用いた有限要素法弾塑性解析を行う場合, 塑性変形が発生すると非線形な全体剛性方程式を解く必要がある. この解法としてよく用いられているのが前節で紹介した Newton-Raphson 法である. Newton-Raphson 法を使用して非線形剛性方程式を解くアルゴリズム化により, 現在の応力 σ_n を用いた $\mathbf{K}(\sigma_n)$ を剛性マトリクスとして解く方法が陽解法と呼ばれる. 本節ではよく使われている陽解法のアルゴリズムを紹介する.

4. 5. 1 陽解法解析の応力増分とひずみ増分の関係^{7), 8), 9)}

弾塑性解析は, 弾塑性判定条件を用いて現在の応力状態および荷重増分(除荷も含む)後の応力状態により応力増分とひずみ増分の関係が異なる. ある荷重増分で弾性状態から塑性状態へ変化する場合, 荷重増分前の弾性状態における応力増分とひずみ増分の関係を使用して, 荷重増分に対する変形や応力などを計算する. そのため, 計算結果が実際の応力と乖離する. そこで, 応力増分とひずみ増分の関係を次の3つに分けて考える.

- ① 弾性状態 \Rightarrow 弾性状態(載荷, 除荷, 再載荷), 弾塑性状態 \Rightarrow 弾性状態(弾性除荷)
- ② 弾塑性状態 \Rightarrow 弾塑性状態(載荷)
- ③ 弾性状態 \Rightarrow 弾塑性状態(載荷)

即ち, ①が弾性範囲内の変形で, ②が塑性状態の変形, ③が弾性状態と弾塑性状態の2つ

をまたがる状態である。

i) 弾性状態 \Rightarrow 弾性状態, あるいは弾塑性状態 \Rightarrow 弾性状態
 応力状態が降伏点に至らない範囲あるいは除荷時は, 応力増分が弾性成分のみである, すなわち, 応力増分とひずみ増分の関係は次式を使う。

$$\dot{\sigma} = C^e \dot{\varepsilon} \quad (4.79)$$

ii) 弾塑性状態 \Rightarrow 弾塑性状態
 応力増分 $\dot{\sigma}$ とひずみ増分 $\dot{\varepsilon}$ の関係は, 次式で与えられる。

$$\dot{\sigma} = C^{ep} \dot{\varepsilon} \quad (4.80)$$

ここで, Continuum 弾塑性係数 C^{ep} は次のようになる。

$$C^{ep} = C^e - \frac{C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T C^e}{-\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon^p} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T C^e \frac{\partial f}{\partial \sigma}} \quad (4.81)$$

iii) 弾性状態 \Rightarrow 弾塑性状態

応力状態 σ_0 で弾性状態にあったとする。この点が図 4.10 の点 A である。これに応力増分 $d\sigma_{AB}$ を作用させたところ, その途中の点 D で弾塑性状態になったとする。

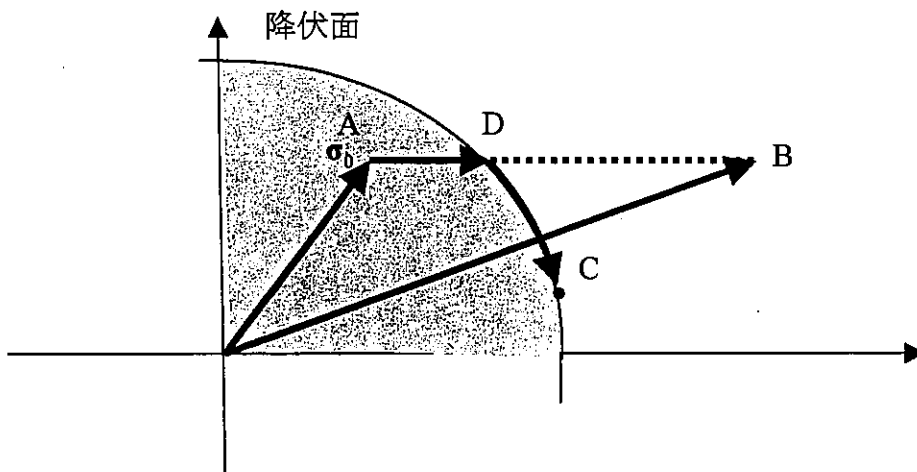


図 4.10 弾性状態から弾塑性状態への移行

この時、次の式が成り立つ：

$$\text{点 A : } f(\boldsymbol{\sigma}_0) = f_0 < 0 \quad (4.82)$$

$$\text{点 B : } f(\boldsymbol{\sigma}_0 + d\boldsymbol{\sigma}_{AB}) = f_1 > 0 \quad (4.83)$$

しかし、式(4.83)の状態は降伏関数の定義から存在しない。この場合は、荷重増分の載荷により点 A から点 D で弾塑性状態に達した後は点 B に向かわず、降伏曲面上の点 C に移動したと考える。応力増分 $d\boldsymbol{\sigma}_{AD}$ は $d\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ に比例すると見なして、次の式を満たすような係数 $\bar{\lambda}$ を求める。

$$f(\boldsymbol{\sigma}_0 + d\boldsymbol{\sigma}_{AD}) = f(\boldsymbol{\sigma}_0) + \bar{\lambda} d\boldsymbol{\sigma}_{AB} \quad (4.84)$$

係数 $\bar{\lambda}$ は $d\boldsymbol{\sigma}_{AB}$ が十分に小さいならば、図 4.10 より降伏関数値の線形補間 $\boldsymbol{\sigma}$ で近似的に求める。

$$\bar{\lambda} = \frac{f(\boldsymbol{\sigma}_0 + d\boldsymbol{\sigma}_{AD}) - f(\boldsymbol{\sigma}_0)}{f(\boldsymbol{\sigma}_0 + d\boldsymbol{\sigma}_{AB}) - f(\boldsymbol{\sigma}_0)} = \frac{-f_0}{f_1 - f_0} \quad (4.85)$$

全ひずみ増分 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ は、点 A から点 D の弾性変形過程で $\bar{\lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ が、点 D から点 C までの弾塑性変形過程で $(1 - \bar{\lambda}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ がそれぞれ発生したと仮定する。このように考えれば、点 A から点 C までの経路に対する応力増分とひずみ増分の関係は次のように求められる。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{AD} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_{DC} \\ &= \mathbf{C}^e \bar{\lambda} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left[\mathbf{C}^e - \frac{\mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C}^e}{-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] \cdot (1 - \bar{\lambda}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \left[\mathbf{C}^e - (1 - \bar{\lambda}) \frac{\mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C}^e}{-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right] \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4.86)$$

よって、弾塑性係数マトリクス \mathbf{C}^{ep} は次のようになる。

$$\mathbf{C}^{ep} = \mathbf{C}^e - (1 - \bar{\lambda}) \frac{\mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C}^e}{-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \right)^T \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)^T \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (4.87)$$

上の式(4.87)は、 $\bar{\lambda}=1$ のとき①「弾性状態 \Rightarrow 弾性状態」の応力増分とひずみ増分の式(4.79)と、 $\bar{\lambda}=0$ のとき②弾塑性状態 \Rightarrow 弾塑性状態の応力増分とひずみ増分の式(4.81)と一致するので、どのような応力状態の変化に対しても統一的に扱うことができる。

4. 5. 2 陽解法の Newton-Raphson 法を弾塑性体の有限要素解析へ適用

Newton-Raphson 法を弾塑性体の有限要素解析へ適用した場合の計算法を図 4.11 の模式図を用いて説明する。同図は系全体に対する荷重と変位の関係を概念的に示したものである。いま、荷重段階 n で解析対象の系に作用した節点荷重 \mathbf{F}_n に対して節点変位 \mathbf{d}_n と応力 $\boldsymbol{\sigma}_n$ が計算されたとする。これに節点荷重増分 $\Delta \mathbf{F}_{n+1}$ を加えると、いくつかの要素が降伏すると想定する。この時の変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}$ および変位 $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d}_{n+1}$ を Newton-Raphson 法で求める。

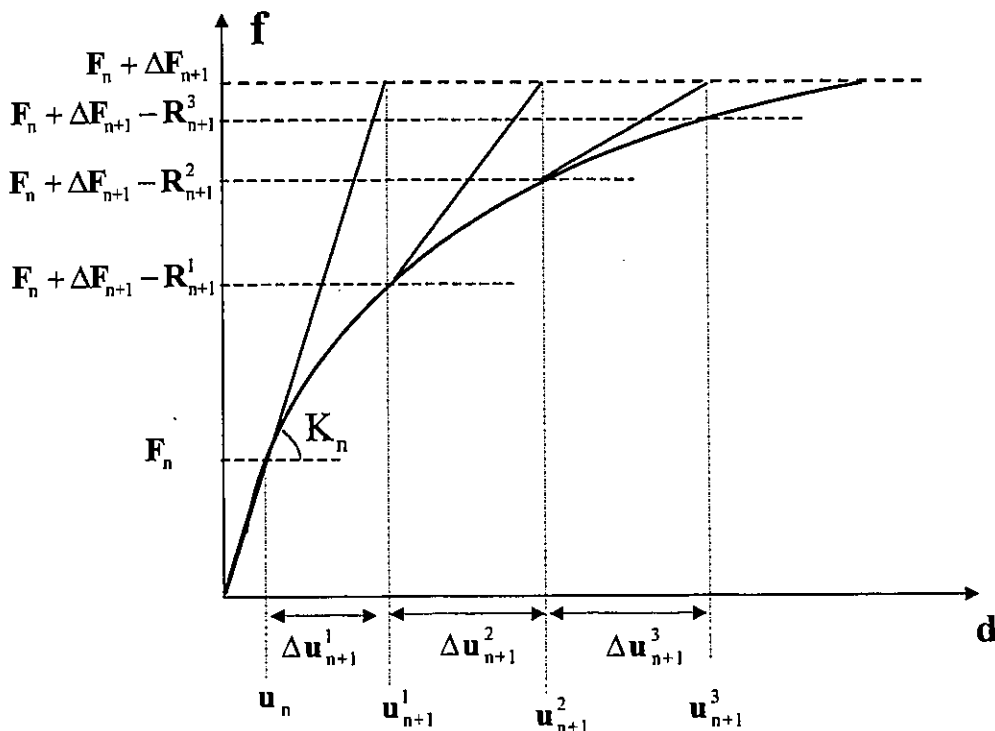


図 4.11 Newton-Raphson 法による弾塑性非線形計算

① 与えられた節点荷重増分 $\Delta \mathbf{F}_{n+1}$ に対する第1次近似解の変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^1$ の算出.

$$[\mathbf{K}(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n)] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^1 = \Delta \mathbf{F}_{n+1} \quad (4.88)$$

② 第1次近似解 \mathbf{d}_{n+1}^1 の計算.

$$\mathbf{d}_{n+1}^1 = \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^1 \quad (4.89)$$

③ 第1次近似解 \mathbf{d}_{n+1}^1 に対応する等価節点力 \mathbf{F}_{n+1}^1 の計算.

a) 各要素ごとに変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^1$ による応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$ の弾性試行計算.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^1 \quad (4.90)$$

ここに、 $\Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$ は変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^1$ に対応する弾性応力増分、 \mathbf{B} は変位とひずみの関係を表す \mathbf{B} マトリクス、 \mathbf{C}^e は弾性係数マトリクスである.

b) 各要素ごとに弾塑性判断による弾塑性マトリクス \mathbf{C}^{ep} の係数 $\bar{\lambda}$ の算定.

弾塑性マトリクス \mathbf{C}^{ep} は式(4.87)のように求められた. 係数 $\bar{\lambda}$ は、荷重段階 n の応力状態 $f_0 = f(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$ と、第1次近似解 \mathbf{d}_{n+1}^1 の応力状態 $f_1 = f(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)$ より求める.

$$f_1 < 0 \rightarrow \bar{\lambda} = 1 \quad (4.91)$$

$$f_1 \geq 0, \quad f_0 = 0 \rightarrow \bar{\lambda} = 0 \quad (4.92)$$

$$f_1 \geq 0, \quad f_0 < 0 \rightarrow \bar{\lambda} = \frac{-f_0}{f_1 - f_0} \quad (4.93)$$

c) 各要素ごとに $\bar{\lambda}$ を用いて第1次近似解 \mathbf{d}_{n+1}^1 に対応する応力 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1$ の修正計算.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^1 = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^1 \quad (\text{陽解法}) \quad (4.94)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^1 = \mathbf{B} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^1 \quad (4.95)$$

ここに、 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^1$ は変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^1$ によるひずみ増分である.

d) 応力 σ_{n+1}^1 に対する等価節点力 F_{n+1}^1 の計算.

$$F_{n+1}^1 = A \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \sigma_{n+1}^1 d\Omega \quad (4.96)$$

④ 残差力 R_{n+1}^1 の計算.

$$R_{n+1}^1 = F_n + \Delta F_{n+1} - F_{n+1}^1 \quad (4.97)$$

⑤ 残差力 R_{n+1}^1 を①の ΔF_{n+1} に置き換えて, 再び①~⑥まで計算を繰り返す.

①で第2次近似解の変位増分 Δd_{n+1}^2 が計算される. この反復によって荷重段階 $n+1$ の変位増分 Δd_{n+1} が次のように求まる.

$$\Delta d_{n+1} = \Delta d_{n+1}^1 + \Delta d_{n+1}^2 + \dots \quad (4.98)$$

なお, 反復計算の打ち切りは次の判定条件による.

$$\frac{|\Delta d_{n+1}|}{|d_n|} \leq tol \quad (4.99)$$

4. 6 結言

本章では, 弾塑性体の有限要素法の陽解法解析のアルゴリズムを述べた. 陽解法は, 現在の応力 σ_{n+1} を計算するために, 前ステップの $\mathbf{C}^{ep}(\sigma_n, \epsilon_n^p)$ により計算するので, 次のような欠点があることが分かる.

1) 陽解法では応力空間において応力増分と降伏曲面の交点での法線を用いるため, 必ずその交点を求めなければならない. また, 求めた応力は降伏曲面からのドリフトを生じるために誤差が累積され, 計算された降伏応力は過大評価されてしまう.

2) アルゴリズムの中で, 式(4.87)のように弾塑性係数マトリクス $\mathbf{C}^{ep}(\sigma_n, \epsilon_n^p)$ の中にある係数 $\bar{\lambda}$ は, 弾性状態から弾塑性状態への移行する場合, 線形補間で近似的に求める. そのため, Newton-Raphson 法の反復法で非線形解析を行うと, 繰り返し計算の過程において係数 $\bar{\lambda}$ の誤差で応力状態が降伏条件式から徐々に外れていくことがある. さらに, この手法では, 一般に, 収束に要する繰り返し計算回数が多くなる.

以上の欠点を解決するために、開発された陰解法リターンマッピング手法を第5章で紹介する。その手法では、基本的に降伏面上に存在する応力を求めるため、陽解法のようにわざわざ応力空間において応力増分と降伏曲面の交点を求める必要はなくなる。

参考文献

- 1) 橋口公一：最新 弾塑性学，朝倉書店，1990.
- 2) 弾塑性有限要素法がわかる，地盤工学会，2003.
- 3) 久田俊明，野口裕久：非線形有限要素法の基礎と応用，丸善，1995.
- 4) 田中忠次，鵜飼恵三，河邑真，阪上最一，大津宏康：地盤の三次元弾塑性有限要素解析，丸善，1996.
- 5) Bathe K J and Cimento A P. :Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations, J. Computer Methods in Appl.Mech. and Eng., 22:59~85,1980.
- 6) Matthies H and Strang G. :The Solution of Nonlinear Finite Element Equations,Int.J.Num. Meth.Eng., 14:1613~1626,1979.
- 7) 田中忠次，鵜飼恵三，岡二三夫，塩見忠彦，田村武：地盤工学における数値解析入門，地盤工学会，2000.
- 8) Nayak G C and Zienkiewicz O C. :Elasto-Plastic Stress Analysis: A Generation for Various Constitutive Relations Including Strain Softening,Int. J. Numer. Methods Eng., 5: 113~135,1972.
- 9) Chen W F. :Plasticity in Reinforced Concrete, New York: McGraw-Hill,1982.

第5章 陰解法リターンマッピング手法を用いた弾塑性有限要素法解析

5. 1 緒言

これまで行われていた陽解法解析による弾塑性計算では反復計算による解の収束速度の低下や塑性変形時の応力等が降伏曲面上に存在している保証がない等、誤差を生じる難点が多々あった。それを解決するために、Simo ら^{1), 2)}が陰解法 Return Mapping を使用し、Newton-Raphson 法に整合した Algorithmic tangential moduli を用いた弾塑性構成式を陰解法で解く方法を提案していた。

陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた解析法においては、『理論解のある問題で検証したところ、非常に精度が良い。』、『Newton-Raphson 法に整合しているため、残差力ノルムに対する収束計算が2次収束し、安定的に解が求まる。』、『計算ステップ数に解が依存しない。』などの成果が得られている^{3), 4), 5), 6)}。

現在汎用されている陽解法弾塑性計算に用いられている除荷負荷条件は応力が降伏関数を満たすかどうかで判定している。しかし、数値解析上、線形近似を行った1ステップ内のどの時点の応力を採用するかなど曖昧さが残る。また、この場合求まった応力等が降伏曲面上に存在している保証はない。一方、陰解法弾塑性計算アルゴリズムにおいては、弾性 trial 状態と陰解法 return-map という作業により塑性変形時の応力を必ず降伏曲面上に存在させる手法を使用するため、対象とする弾塑性体が弾性状態であるか、塑性状態であるかという判断が弾性 trial 状態での降伏関数により簡便に判断できる。本章では、陰解法弾塑性計算アルゴリズムの有用性を記述する。

5. 2 陰解法リターンマッピング手法

弾塑性理論を用いた弾塑性解析において、第4章で述べた Continuum 弾塑性係数を用いた増分型構成式 $\dot{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} \dot{\varepsilon}$ を使わず、構成式(4.2)、関連流れ則(4.12)及びコンシステンシー条件(4.27)をそのまま用いて「アルゴリズム化」すると、 $\sigma_{n+1} = \hat{\sigma}(\varepsilon_{n+1})$ のように、応力 σ_{n+1} が塑性負荷状態(硬化・軟化)では ε_{n+1} の非線形関数となり、

$$\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}(\varepsilon_{n+1})}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (\neq \mathbf{C}^{ep}(\sigma_{n+1}) \text{ in general}) \quad (5.1)$$

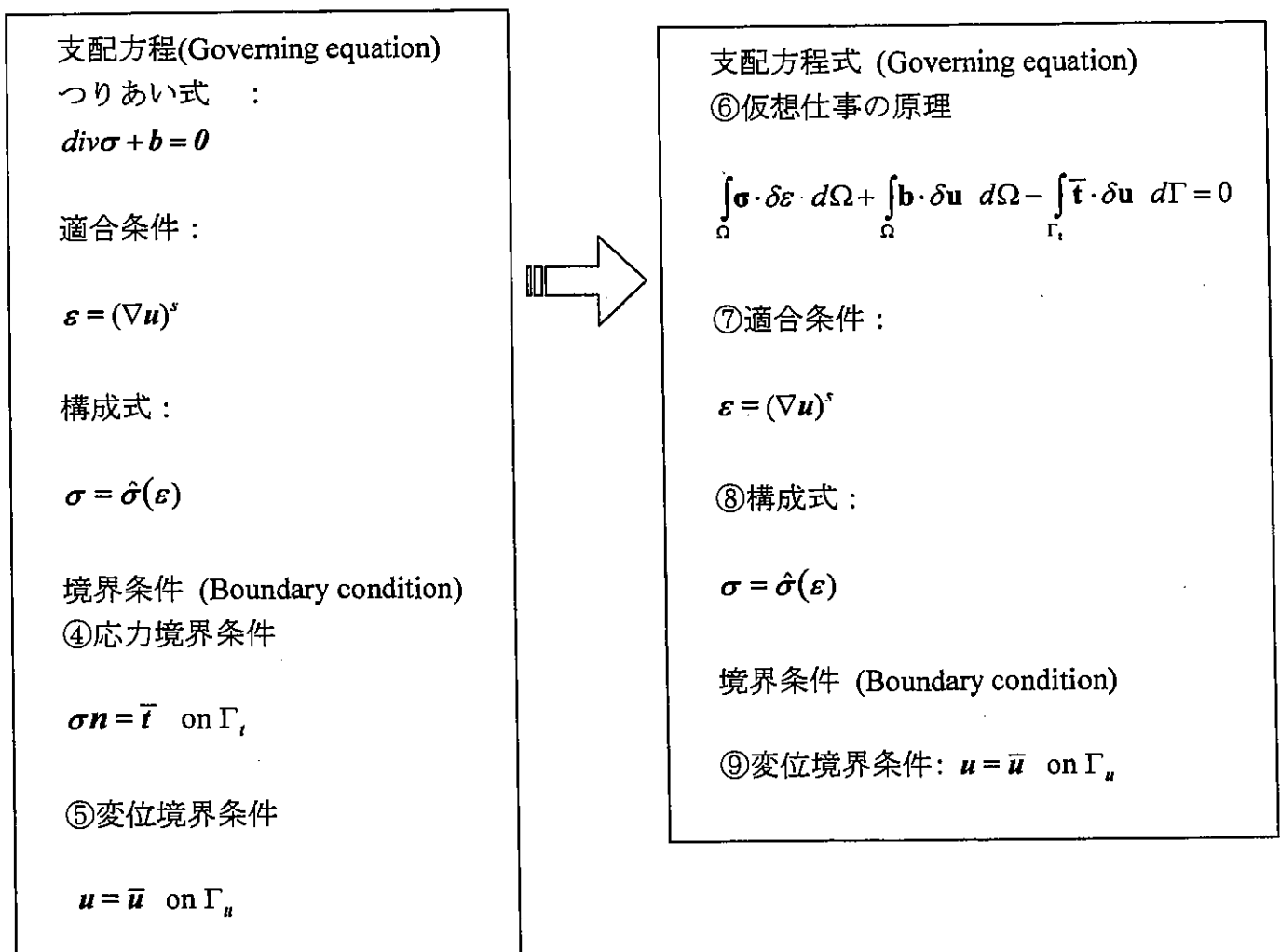
が求まる。 $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep}$ が求まる時に σ_{n+1} を用いたので、陽解法アルゴリズムに対して、ここで

は陰解法アルゴリズムと呼ぶ。さらに、 $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep}$ は、Newton-Raphson 法の 2 次収束性を保証する反復解析に整合したもので、Consistent 弾塑性係数と呼ばれる。一般に、Consistent 弾塑性係数と Continuum 弾塑性係数とは異なるものとなる。この時、弾性負荷・除荷の場合も考慮して、「ひずみ」から「応力」を一意的に決める方法として、Elastic trial と Return mapping(一般的には、General Closest Point Projection)に分解する解析手法をリターンマッピングと呼ばれる。本節では、Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep}$ を用いる陰解法リターンマッピング手法を述べる。

5. 2. 1 弾塑性解析への陰解法 Newton-Raphson 法の適用

1. FEM 定式化における 4.3 節では、次のようにまとめられる。

(1) 仮想仕事の原理を用いると、支配方程式と境界条件は以下のような弱形式に書き換えられる。



(2) 有限要素の離散化を用いて、境界値問題は以下のように変換できる。

支配方程式 (Governing equation)
仮想仕事の原理

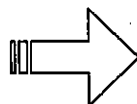
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_1} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0$$

適合条件: $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^s$

構成式: $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon})$

境界条件 (Boundary condition)

変位境界条件: $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \quad (\text{on } \Gamma_u)$



支配方程式 (Governing equation)

⑩剛性方程式

$$\mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$$

境界条件 (Boundary condition)

⑪変位境界条件

$$\{\bar{\mathbf{d}}\} = \{\mathbf{d}\} \quad (\text{on } \Gamma_u)$$

最終的には、有限要素法定式化により境界値問題は節点における離散化された変位 \mathbf{d} を未知とする変位境界条件⑪を満たす非線形方程式⑩に帰着される。式⑩を具体的に表すと、式(4.64)となり、説明の便宜上、次のように再びおく。

$$\mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \quad (5.2)$$

ここで、

$$\mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{A} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}) \, d\Omega \quad (5.3)$$

$$\mathbf{F}^{ext} = \mathbf{A} \int_{\Gamma_1} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \mathbf{A} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega \quad (5.4)$$

2. Newton-Raphson 法に整合する弾塑性解析の定式化

今、時刻 t_n で式(5.2)を満足しており、時刻 t_{n+1} で満足する解を Newton-Raphson 法に整合するよう求めることを考える。式(5.2)を Taylor 展開し、節点変位増分 $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)} - \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}$ に関する線形近似を行う。ここで、各物理量の下付添え字 n は荷重増分ステップ数、上付き添え字 (k) は各増分ステップ内の反復回数を表している。この時、式(5.2)は次式のようにお

ける。

$$\mathbf{F}^{ext} \Big|_{n+1} - \mathbf{F}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k+1)}) = 0 \quad (5.5)$$

次に式(5.5)を $\Delta \mathbf{d}$ の一次の項まで Taylor 展開すると

$$\mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k+1)} \approx \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)} + \frac{\partial \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} \quad (5.6)$$

となる。上式の右辺第 2 項は assembly operator \mathbf{A} が線形であることに注意すれば微分の chain rule を用いて以下のようなになる：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^{int} \Big|_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}_{n+1}^{(k)})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} d\Omega \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} \\ &= \mathbf{A} \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)} \mathbf{B} d\Omega \right] \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} \\ &= \mathbf{K}_{n+1}^{(k)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで式(5.7)中の $\bar{\mathbf{C}}_{n+1}^{ep(k)} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}} \right]$ は、式(5.5)を Newton Raphson 法で解く場合、それに整合した Consistent 弾塑性構成テンソルであり、一次元の場合を除き、一般には式(4.25)の (Continuum)弾塑性構成テンソル \mathbf{C}^{ep} とは一致しない。

式(5.6)を式(5.5)に代入すると、 $n+1$ ステップで、 k 回目の反復時において、

$$\frac{\partial \mathbf{F} \Big|_{n+1}^{int(k)}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^{(k)}} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = -(\mathbf{F} \Big|_{n+1}^{int(k)} - \mathbf{F} \Big|_{n+1}^{ext}) \quad (5.8)$$

が得られる。以上から上式(5.8)は離散化された \mathbf{d} の線形方程式であり、式(5.5)を解く Newton-Raphson 法に整合していることが分かる。

5. 2. 2 陰解法リターンマッピングを用いた弾塑性解析

前節で述べた Newton-Raphson 法に整合する陰解法弾塑性計算のアルゴリズムをまとめると図 5.1 のように表せる。 $(n-1)$ ステップ目の反復収束値を $(\bullet)_n$ とおき、この値を n ステップ目の反復の初期値とし、 $(\bullet)_{n+1}^{(0)} = (\bullet)_n$ とおくと、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(0)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \quad \alpha_{n+1}^{(0)} = \alpha_n^p \quad (5.9)$$

ここで、 α は、式(4.11)の硬化/軟化パラメータと同じものである。また、 $\mathbf{n} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} / \left\| \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\|$ とおく。

< n ステップ目の Iteration >

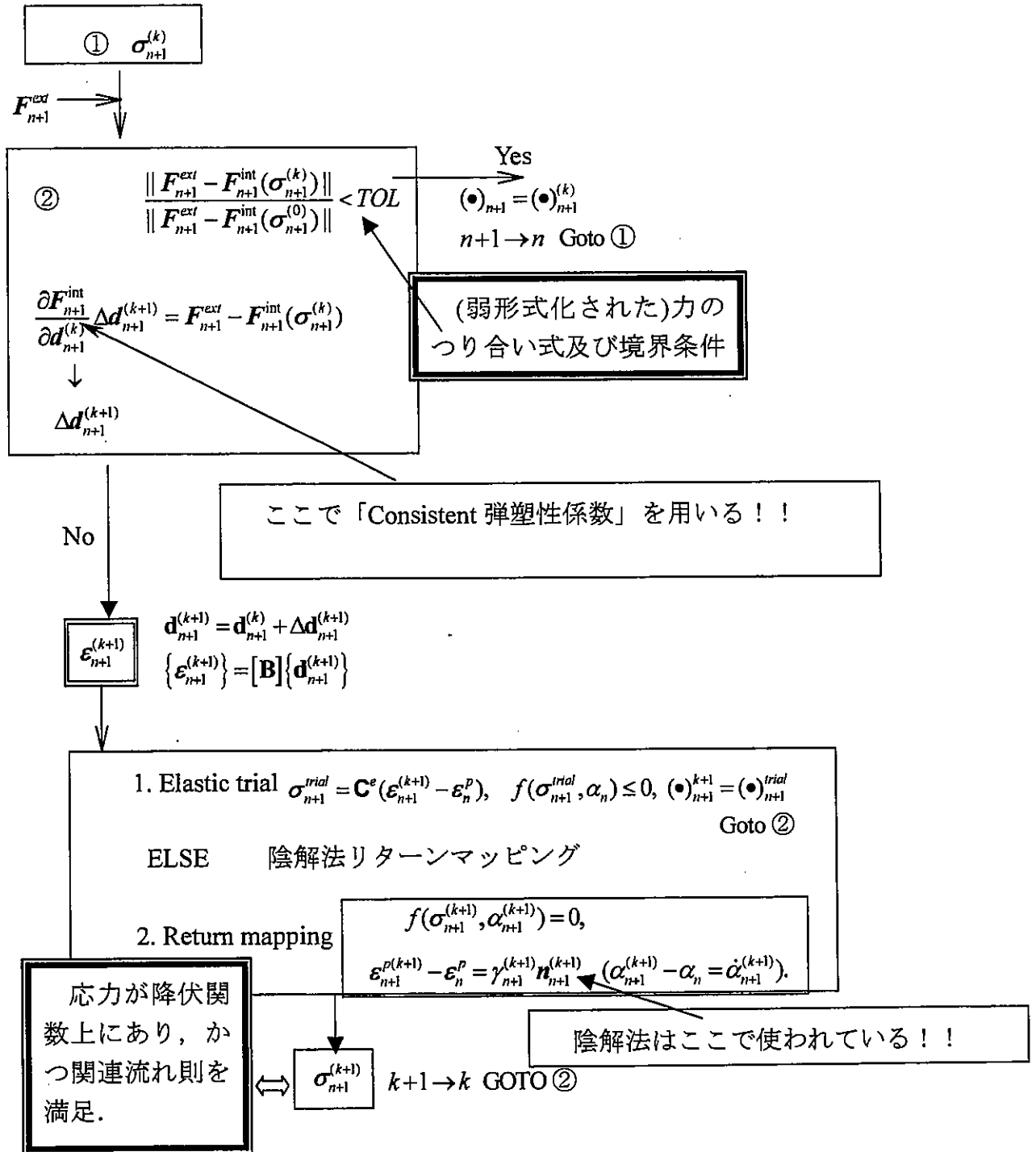


図 5.1 Newton-Raphson 法に整合する陰解法弾塑性計算のアルゴリズム

5. 2. 3 von Mises モデルの Consistent 弾塑性係数 \bar{C}^{ep}

まず、「線形等方弾性体」と「等方硬化・軟化する von Mises の降伏条件」を仮定する。
線形等方弾性体の構成式：

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S} + \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{I} = 2\mu\boldsymbol{e}^e + \kappa(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}^e)\boldsymbol{I} \quad (4.5 \cdot \text{前出})$$

ここで、 \boldsymbol{S} は偏差応力である。

等方硬化・軟化する von Mises 降伏条件は式(4.14)を使う

$$f = \|\boldsymbol{S}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + \bar{H}\bar{\varepsilon}^p) \quad (4.14 \cdot \text{前出})$$

また、弾塑性体の場合には、以下が基礎式となる。

$$\cdot \text{関連流れ則} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \gamma \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \gamma \geq 0 \quad (4.12 \cdot \text{前出})$$

$$\cdot \text{相当塑性ひずみ} : \dot{\bar{\varepsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (4.29 \cdot \text{前出})$$

$$\cdot \text{クーントッカー条件} : \gamma \geq 0, f(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0, \gamma f = 0 \quad (5.10)$$

$$\cdot \text{コンシステンシー条件} : \gamma \dot{f} = 0 \text{ if } f = 0 \quad (5.11)$$

ここで、以降、簡単のため、 $(k+1)$ を (k) と記す。プログラム中でも $k=k+1$ とおけばよい。

(1) Elastic Trial

$$1. \boldsymbol{S}_{n+1}^{trial} = 2\mu(\boldsymbol{e}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{e}_n^p) \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{e}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3}(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)})\boldsymbol{I} \quad (5.13)$$

2. Check Yield function

$$f_{n+1}^{trial} = \| \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_\gamma + \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{e}}_n^p) \quad (5.14)$$

If $f^{trial} \leq 0$ then Elastic step

Set $(\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{trial}$ EXIT

(2) Return Mapping

①. Compute $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)}$ and $\gamma_{n+1}^{(k)}$

$$f = \| \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} \| - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_\gamma + \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p) \quad (5.15)$$

$$\mathbf{e}_{n+1}^{p(k)} - \mathbf{e}_n^p = \gamma_{n+1}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)}, \quad \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} = \frac{\partial f(\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}, \bar{\mathbf{e}}_{n+1}^{p(k)})}{\partial \mathbf{S}} \quad (5.16)$$

ここで, $\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^{p(k)} - \bar{\mathbf{e}}_n^p = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{n+1}^{(k)}$ である.

式(5.15), (5.16)両式を満たすような, $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)}$ と $\gamma_{n+1}^{(k)}$ を求める.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} &= 2\mu(\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_{n+1}^{p(k)}) \\ &= 2\mu(\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p) - 2\mu(\mathbf{e}_{n+1}^{p(k)} - \mathbf{e}_n^p) \end{aligned} \quad (5.17)$$

式(5.12), (5.16)より次式を得る.

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2\mu\gamma_{n+1}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \quad (5.18)$$

一方, 定義より

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(k)} = \| \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} \| \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \quad \left(\because \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}}{\| \mathbf{S} \|} = \hat{\mathbf{n}} \right) \quad (5.19)$$

であるから, 式(5.18), (5.19)より,

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = \| \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \| \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \quad (5.20)$$

i.e.

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}}{\| \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} \|} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{trial}}{\| \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \|} \quad \left(= \frac{\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p}{\| \mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p \|} \right) \quad (5.21)$$

式(5.18)の両辺に $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)}$ の内積をとると,

$$\|\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}\| = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - 2\mu\gamma_{n+1}^{(k)}. \quad (5.22)$$

式(5.22)を式(5.15)に代入して, 次式が得られる.

$$f = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - 2\mu\gamma_{n+1}^{(k)} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^p) = 0 \quad (5.23)$$

ここで, $\bar{\mathbf{e}}_{n+1}^{p(k)} = \bar{\mathbf{e}}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_{n+1}^{(k)}$ であるから, 式(5.23)は

$$f(\gamma_{n+1}^{(k)}) = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - 2\mu\gamma_{n+1}^{(k)} - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + \bar{\mathbf{H}}(\bar{\mathbf{e}}_n^p + \sqrt{\frac{2}{3}}\gamma_{n+1}^{(k)})) = 0 \quad (5.24)$$

となり, $\gamma_{n+1}^{(k)}$ の線形方程式となる. (注: $\gamma_{n+1}^{(k)}$ の非線形方程式となる場合は, 理論解が求まらないので, Newton-Raphson 法で $\gamma_{n+1}^{(k)}$ を求める.)

この時, 式(5.24)は式(5.14)を使うと,

$$f_{n+1}^{trial} - 2\mu\gamma_{n+1}^{(k)} - \frac{2}{3}\bar{\mathbf{H}}\gamma_{n+1}^{(k)} = 0 \quad (5.25)$$

であるから, 次式が得られる,

$$2\mu\gamma_{n+1}^{(k)} = \frac{f_{n+1}^{trial}}{1 + \frac{\bar{\mathbf{H}}}{3\mu}} \left(= \frac{2\mu\|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{e}}_n^p)}{1 + \frac{\bar{\mathbf{H}}}{3\mu}} \right) \quad (5.26)$$

②. $\sigma_{n+1}^{(k)}$, $\mathbf{e}_{n+1}^{p(k)}$ 数値計算

Elastic Trial で求めた \mathbf{S}_{n+1}^{trial} , f_{n+1}^{trial} を用いて, 式(5.21), (5.26)の $\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)}$, $\gamma_{n+1}^{(k)}$ を計算し, 次の $\sigma_{n+1}^{(k)}$, $\mathbf{e}_{n+1}^{p(k)}$ を求める.

式(4.5)および式(5.18)を用いて, 次式が得られる.

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)})\mathbf{1} + \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2\mu\gamma_{n+1}^{(k)}\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \quad (5.27)$$

また、関連流れ則の式(4.12)及び降伏関数の式(4.14)より、次式が得られる。

$$\mathbf{e}_{n+1}^{p(k)} = \mathbf{e}_n^p + \gamma_{n+1}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \quad (5.28)$$

式(5.27)の $\sigma_{n+1}^{(k)}$ は式(5.12), (5.28)を使うと,

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}) \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_{n+1}^{p(k)}) \quad (5.29)$$

また、式(5.12), (5.21)₃および(5.26)₂を式(5.27)に代入すると

$$\sigma_{n+1}^{(k)} = k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}) \mathbf{I} + 2\mu(\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p) - \frac{2\mu \|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{e}}_n^p)}{1 + \frac{\bar{\mathbf{H}}}{3\mu}} \frac{\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p}{\|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\|} \quad (5.30)$$

③. Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{C}}^{ep}$

式(5.30)の $\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}) \mathbf{I}$ であるから、 $\sigma_{n+1}^{(k)}$ は $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ の関数になっていることがわかる。

したがって、アルゴリズム上では Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{C}}^{ep} = \frac{\partial \sigma_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}$ が $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ の関数としまる。

以下、式を簡単にするため、 $(\sigma_{n+1}^{(k)})_{ij}$ を単に σ_{ij} などと記す。式(5.27)より、

$$\sigma_{ij} = k \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + S_{ij}^{trial} - 2\mu \gamma \hat{n}_{ij} \quad (5.31)$$

$$\text{i. } \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{mk} \delta_{ml} = \delta_{kl} \quad (5.32)$$

$$\text{ii. } \frac{\partial S_{ij}^{trial}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial (2\mu(e_{ij} - e_{ij}^p))}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2\mu(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (\text{式(5.12)参照}) \quad (5.33)$$

$$\therefore \frac{\partial e_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial (\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij})}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (5.34)$$

$$\text{iii. } \frac{\partial \gamma}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{1 + \frac{K'}{3\mu}} \frac{e_{ij} - e_{ij}^p}{\|e_{ij} - e_{ij}^p\|} = \frac{1}{1 + \frac{K'}{3\mu}} \hat{n}_{kl} \quad (5.35)$$

$$\therefore \frac{\partial \|e_{mn} - e_{mn}^p\|}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{e_{kl} - e_{kl}^p}{\|e_{mn} - e_{mn}^p\|} = \hat{n}_{kl} \quad (5.36)$$

$$\begin{aligned} \text{iv. } \frac{\partial n_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{e_{ij} - e_{ij}^p}{\|e_{mn} - e_{mn}^p\|} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial e_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} \|e_{mn} - e_{mn}^p\| - (e_{ij} - e_{ij}^p) \frac{\partial \|e_{mn} - e_{mn}^p\|}{\partial \varepsilon_{kl}}}{\|e_{mn} - e_{mn}^p\|^2} \\ &= \frac{(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) \|e_{mn} - e_{mn}^p\| - (e_{ij} - e_{ij}^p) \hat{n}_{kl}}{\|e_{mn} - e_{mn}^p\|^2} \quad (\text{式(5.34), (5.36)を使用}) \\ &= \frac{2\mu}{\|S_{mn}^{trial}\|} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} - \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl}) \quad (5.37) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{式(5.14)より, } \|S_{mn}^{trial}\| = 2\mu \|e_{mn} - e_{mn}^p\| \quad (5.38)$$

式(5.32), (5.33), (5.35), (5.37)より, Consistent 弾塑性係数は, $\varepsilon_{n+1}^{(k)}$ の関数となり,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= k \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) - 2\mu \frac{\hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl}}{1 + \frac{H}{3\mu}} - \frac{4\mu^2 \gamma}{\|S_{mn}^{trial}\|} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} - \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl}) \\ &= k \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \theta_{n+1} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}) - 2\mu \bar{\theta} \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl} \quad (5.39) \end{aligned}$$

$$\therefore \bar{\mathbf{C}}^{ep} = k \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \theta_{n+1} (\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - 2\mu \bar{\theta} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \quad (5.40)$$

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = 1 - \frac{2\mu\gamma}{\|\mathbf{S}^{trial}\|} \\ \bar{\theta} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{H}}{3\mu}} - (1 - \theta_{n+1}) \end{cases} \quad (5.41)$$

上式(5.40)で $\gamma = 0$ とおくと、Continuum 弾塑性係数となる。

5. 3 Drucker-Prager 弾塑性モデルの Consistent 弾塑性係数

本節では、節 4.2.2 に述べた Drucker-Prager の降伏条件を用いて陰解法 Return-Mapping アルゴリズムに適合する Consistent 弾塑性係数を誘導する。Drucker-Prager 弾塑性モデルの降伏条件にしたがうバイリニア型の弾塑性体と、関連流れ則を仮定する。この場合、Drucker-Prager 弾塑性モデルの降伏関数は以下のような式で与えた。

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_\gamma + \bar{H}\bar{e}^p) = 0 \quad (4.16 \cdot \text{前出})$$

5. 3. 1 弾性試行応力計算

時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ の増分弾塑性初期値境界値問題を考え、時刻 t_n の時の全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 、全応力 $\boldsymbol{\sigma}_n$ が与えられたとする。今、時刻 t_{n+1} における全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ が与えられたとすると、時刻 t_{n+1} と時刻 t_n におけるひずみ増分、試行応力は以下の式で与えられる。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (5.42)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) + \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n) = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (5.43)$$

上式より、試行平均応力及び試行偏差応力は

$$\mathbf{p}_{n+1}^{trial} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) = -\kappa \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (5.44)$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \mathbf{1} \quad (5.45)$$

ここで、式(4.5)₂、式(5.43)より上式は以下のように簡略化される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{n+1}^{trial} &= 2\mu \left\{ \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) - \frac{1}{3} \text{tr} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) \mathbf{1} \right\} = 2\mu \left\{ \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} \right) - \left(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p - \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \right) \right\} \\
&= 2\mu \left(\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p \right)
\end{aligned} \tag{5.46}$$

ここに、 $\mathbf{e}_{n+1}^{(k)}$ は偏差ひずみであり、以下の式で定義される。

$$\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}) \mathbf{1} \tag{5.47}$$

また、試行偏差応力、試行平均応力を式(4.16)に代入し除荷負荷判定を行う。

$$f_{n+1}^{trial} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - \beta p_{n+1}^{trial} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + \bar{H} \bar{\varepsilon}_n^p) \tag{5.48}$$

Kuhn-Tucker 条件より、

$$\gamma f = 0 \tag{5.49}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{trial} < 0 &\Rightarrow \text{elastic step} \Leftrightarrow \gamma = 0 \\
f_{n+1}^{trial} \geq 0 &\Rightarrow \text{plastic step} \Leftrightarrow \gamma > 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

ここで、 $f_{n+1}^{trial} < 0$ であるならば、以下のようにして次のステップに進めば良い。

$$(\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{trial} \tag{5.51}$$

5. 3. 2 リターンマッピング計算

$[t_n, t_{n+1}]$ の現ステップが塑性ステップであると判断された際、単に陽解法近似を行った計算アルゴリズムで増分解析を行うと、一般に求めた応力等が降伏曲面上にないので降伏曲面上に応力を引き戻す必要がある。これを Return mapping アルゴリズムと呼ぶ。

流れ則式(4.12)、は、微小時間 Δt を考えると次式のように近似できる。

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.52)$$

ここで, $\Delta \gamma_{n+1}^{(k)} = \Delta t \cdot \dot{\gamma}_{n+1}^{(k)}$ である.

今, 時刻 t_{n+1} において, 降伏曲面上にある応力を $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ とし, 時刻 t_n における応力を $\boldsymbol{\sigma}_n$ とすると, $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ は以下の式で表される.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{C}^e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (5.53)$$

ここで, 式(5.43)を用いると,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbf{C}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (5.54)$$

となる. 式(5.54)に式(5.52)を代入すると,

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{C}^e \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5.55)$$

である. 式(4.5)より, 弾性係数マトリクスは $\mathbf{C}^e = \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right)$ であるから, 式(4.48)

の結果を用いて,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} (2\mu \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} + \beta \kappa \mathbf{1}) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2\mu \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} - \beta \kappa \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (5.56)$$

式(5.56)の両辺の偏差部分と等方成分に分解すれば, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) \mathbf{1} \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \mathbf{1} + \beta \kappa \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{1} \\ &= \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 2\mu \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} - \beta \kappa \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{1} - \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \mathbf{1} + \beta \kappa \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \mathbf{1} \\ &= \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - 2\mu \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned}
p_{n+1}^{(k)} &= -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}) \\
&= -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) + \beta \kappa \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \\
&= p_{n+1}^{trial} + \beta \kappa \Delta \gamma_{n+1}^{(k)}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

ここで式(4.35)より,

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(k)} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}\| \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \left(\because \frac{\partial \|\mathbf{S}\|}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} = \hat{\mathbf{n}} \right) \tag{5.59}$$

であるから, 式(5.57)より,

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| \hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} \tag{5.60}$$

が得られる。したがって, 次式の関係にある。

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{(k)}\|} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{trial}}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\|} \tag{5.61}$$

式(5.46)を上式に代入すると, 次式が得られる。

$$\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} = \frac{\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p}{\|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\|} \tag{5.62}$$

今, 式(5.57), 式(5.58)を Drucker-Prager の降伏関数式(4.16)に代入すると,

$$f = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} - \beta(p_{n+1}^{trial} + \beta\kappa\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}) - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_\gamma + \bar{H}\bar{e}_{n+1}^p) = 0 \tag{5.63}$$

ここで, $\bar{e}_{n+1}^{p(k)} = \bar{e}_{n+1}^p + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\sqrt{\frac{2}{3}(1+\frac{\beta^2}{3})}$ であるから, 上式は,

$$\begin{aligned}
f(\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}) &= \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} - \beta(p_{n+1}^{trial} + \beta\kappa\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}) \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sigma_\gamma + \bar{H}(\bar{e}_{n+1}^p + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\sqrt{\frac{2}{3}(1+\frac{\beta^2}{3})})\right) = 0
\end{aligned} \tag{5.64}$$

となり, $\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}$ の線形方程式となる。このとき式(5.63)は, 式(5.48)を用いると,

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{trial} - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} - \beta^2\kappa\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} - \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{3}}\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} &= 0 \\
f_{n+1}^{trial} &= \left(2\mu + \beta^2\kappa + \frac{2}{3}\bar{H}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{3}}\right)\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} \\
2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} &= \frac{f_{n+1}^{trial}}{\left(1 + \frac{\beta^2\kappa}{2\mu} + \frac{2\bar{H}}{3\mu}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{3}}\right)}
\end{aligned} \tag{5.65}$$

式(5.44), 式(5.46), 式(5.48)を式(5.65)に代入すると,

$$2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)} = \frac{2\mu\|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\| - \kappa\beta\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_\gamma + \bar{H}\bar{\mathbf{e}}_n^p)}{\left(1 + \frac{\beta^2\kappa}{2\mu} + \frac{2\bar{H}}{3\mu}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{3}}\right)} \tag{5.66}$$

となる.

以上の結果を用いて $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)}$ を求める.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} &= \mathbf{S}_{n+1}^{(k)} - p_{n+1}^{(k)}\mathbf{1} \\
&= \mathbf{S}_{n+1}^{trial} - p_{n+1}^{trial}\mathbf{1} - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} - \beta\kappa\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\mathbf{1} \\
&= \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + \kappa\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)\mathbf{1} - 2\mu\Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} + \frac{\beta\kappa}{2\mu}\mathbf{1}\right)
\end{aligned} \tag{5.67}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta\gamma_{n+1}^{(k)}\left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} + \frac{\beta}{3}\mathbf{1}\right) \tag{5.68}$$

また, 式(5.62)および式(5.66)を式(5.67)に代入すると,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} &= \kappa\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p)\mathbf{1} + 2\mu(\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p) \\
&= \frac{2\mu\|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\| - \kappa\beta\text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_\gamma + \bar{H}\bar{\mathbf{e}}_n^p)}{\left(1 + \frac{\beta^2\kappa}{2\mu} + \frac{2\bar{H}}{3\mu}\sqrt{1+\frac{\beta^2}{3}}\right)}\left(\frac{\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p}{\|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p\|} + \frac{\beta\kappa}{2\mu}\mathbf{1}\right)
\end{aligned} \tag{5.69}$$

$\mathbf{e}_{n+1}^{(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}) \mathbf{1}$ であるから、 $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ は $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ の関数になっていることがわかる。したがって、(理論上では、弾塑性体の応力はひずみの関数では求まらないが、) アルゴリズム上では $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}$ は $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ の関数になっている。したがって、Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{C}}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}$ も $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ の関数として求まる。

5. 3. 3 Consistent 弾塑性係数

以下、式を簡単にするため、 $(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)})_{ij}$ を単に σ_{ij} などと記す。また、 $\varepsilon_{ij}^p = (\boldsymbol{\varepsilon}_n^p)_{ij}$ とする。この時、式(5.67)より、次式が得られる。

$$\sigma_{ij} = \kappa(\varepsilon_{mm} \delta_{ij} - \varepsilon_{nn}^p \delta_{ij}) + S_{ij}^{trial} - 2\mu\Delta\gamma \left(\hat{n}_{ij} + \frac{\beta\kappa}{2\mu} \delta_{ij} \right) \quad (5.70)$$

上式を全ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ で偏微分することにより、Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{C}}^{ep} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}}$ が求まる。

以下、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ による偏微分を、式(5.70)にある、 $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ の関数になっている、 ε_{nm} 、 S_{ij}^{trial} 、 $\Delta\gamma$ 、および \hat{n}_{ij} らの一項目づつ記述する。

$$\textcircled{1} \quad \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{mk} \delta_{ml} = \delta_{kl} \quad (5.71)$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\partial S_{ij}^{trial}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial (2\mu(e_{ij} - e_{ij}^p))}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (5.72)$$

ここで、偏差ひずみの定義より、

$$e_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (5.73)$$

したがって、次式となる。

$$\frac{\partial S_{ij}^{trial}}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2\mu \frac{\partial \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} \right)}{\partial \varepsilon_{kl}} = 2\mu \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \quad (5.74)$$

③ 式(5.66)を用いて

$$\frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left\{ \frac{2\mu \| \mathbf{e}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{e}_n^p \| - \kappa \beta \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_\gamma + \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{e}}_n^p)}{\left(1 + \frac{\beta^2 \kappa}{2\mu} + \frac{\bar{\mathbf{H}}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \right\} \quad (5.75)$$

において,

$$\frac{\partial \| e_{ij} - e_{ij}^p \|}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{(e_{kl} - e_{kl}^p)}{\left\{ (e_{ij} - e_{ij}^p)(e_{mn} - e_{mn}^p) \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{e_{kl} - e_{kl}^p}{\| e_{ij} - e_{ij}^p \|} \quad (5.76)$$

を使用すると, 式(5.62)より,

$$\frac{\partial \| e_{ij} - e_{ij}^p \|}{\partial \varepsilon_{kl}} = \hat{n}_{kl} \quad (5.77)$$

であるから, 次式を得る.

$$\frac{\partial \Delta \gamma}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{1}{2\mu \left(1 + \frac{\beta^2 \kappa}{2\mu} + \frac{2\bar{\mathbf{H}}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} (2\mu \hat{n}_{kl} + \kappa \beta \delta_{kl}) \quad (5.78)$$

④ 式(5.62)より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} \left(\frac{e_{ij} - e_{ij}^p}{\| e_{mn} - e_{mn}^p \|} \right) \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} (e_{ij} - e_{ij}^p) \| e_{mn} - e_{mn}^p \| - (e_{ij} - e_{ij}^p) \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{kl}} (\| e_{mn} - e_{mn}^p \|)}{\| e_{mn} - e_{mn}^p \|^2} \end{aligned} \quad (5.79)$$

ここで, 式(5.74), 式(5.77)を用いると,

$$\frac{\partial \hat{n}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \| e_{mn} - e_{mn}^p \| - (e_{ij} - e_{ij}^p) \hat{n}_{kl}}{\| e_{mn} - e_{mn}^p \|^2} \quad (5.80)$$

となる, 式(5.46)より,

$$\|S_{mn}^{trial}\| = 2\mu \|e_{mn} - e_{mn}^p\| \quad (5.81)$$

であるから, 次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{n}_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \frac{\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)}{\|e_{mn} - e_{mn}^p\|} \frac{(e_{ij} - e_{ij}^p)}{\|e_{mn} - e_{mn}^p\|^2} \hat{n}_{kl} \\ &= \frac{\left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right)}{\frac{1}{2\mu} \|S_{mn}^{trial}\|} \frac{(e_{ij} - e_{ij}^p)}{\left(\frac{1}{2\mu} \|S_{mn}^{trial}\| \|e_{mn} - e_{mn}^p\|\right)} \hat{n}_{kl} \\ &= \frac{2\mu}{\|S_{mn}^{trial}\|} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right) - \frac{2\mu}{\|S_{mn}^{trial}\|} \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl} \\ &= \frac{2\mu}{\|S_{mn}^{trial}\|} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij} - \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl}\right) \end{aligned} \quad (5.82)$$

以上①,②,③,④の結果より, Consistent 弾塑性係数は次式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \kappa \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}\delta_{ij}\right) - \frac{(2\mu \hat{n}_{ij} + \kappa \beta \delta_{ij})(2\mu \hat{n}_{kl} + \kappa \beta \delta_{kl})}{2\mu \left(1 + \frac{\beta^2 \kappa}{2\mu} + \frac{2\bar{H}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}}\right)} \\ &\quad - \frac{4\mu^2 \Delta \gamma}{\|S_{mn}^{trial}\|} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} - \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl}\right) \end{aligned} \quad (5.83)$$

上式を変形すると, 次式の Continuum 弾塑性係数と同型の形における.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} &= \kappa \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \theta_{n+1} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \\ &\quad - 2\mu(\theta_{n+1} - 1) \hat{n}_{ij} \hat{n}_{kl} - \frac{(2\mu \hat{n}_{ij} + \kappa \beta \delta_{ij})(2\mu \hat{n}_{kl} + \kappa \beta \delta_{kl})}{\left(2\mu + \beta^2 \kappa + \frac{2\bar{H}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \end{aligned} \quad (5.84)$$

ここで,

$$\theta_{n+1} = 1 - \frac{2\mu \Delta \gamma}{\| \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \|} \quad (5.85)$$

である。したがって、Drucker-Prager 弾塑性体モデルにおける Consistent 弾塑性係数の直接表示は、次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^{ep} &= \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \theta_{n+1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \\ &\quad - 2\mu(\theta_{n+1} - 1) (\hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+1}) - \frac{(2\mu \hat{\mathbf{n}}_{n+1} + \kappa \beta \mathbf{1}) \otimes (2\mu \hat{\mathbf{n}}_{n+1} + \kappa \beta \mathbf{1})}{\left(2\mu + \beta^2 \kappa + \frac{2\bar{H}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \\ &= \kappa \left(1 - \frac{\kappa \beta^2}{A} \right) (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu \theta_{n+1} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right] \\ &\quad - \frac{2\mu \kappa \beta}{A} [(\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+1}) + (\hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \mathbf{1})] - 2\mu \bar{\theta}_{n+1} (\hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+1}) \end{aligned} \quad (5.86)$$

ここで、 $\bar{\theta}_{n+1} = \frac{2\mu}{A} - (1 - \theta_{n+1})$, $A = 2\mu + \beta^2 \kappa + \frac{2\bar{H}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}}$ とおいた。

これをマトリクス表示するため、ベクトル $\{j\}$, マトリクス $[L]$ を定義する。

$$\{j\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

また、マトリクス $[L]^{-1}$ は

$$[L]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.88)$$

となる。これらは本来、テンソルである応力，ひずみをベクトル化したことにより，計算上と便利な演算マトリクスである。例えば平均応力は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = -\frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ &= -\frac{1}{3} \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0\} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \{j\}^T \{\sigma\} \end{aligned} \quad (5.89)$$

また一般化偏差応力 q はマトリクス $[L]$ を用いて次のように計算される。

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{ij} S_{ij} = \sqrt{\frac{3}{2}} (S_{11}^2 + S_{22}^2 + S_{33}^2 + 2S_{12}^2) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12}\} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{S_{11} \quad S_{22} \quad S_{33} \quad S_{12}\} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \{S\}^T [L] \{S\} \end{aligned} \quad (5.90)$$

次に単位偏差応力ベクトルを以下のように定義する。

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{rr}}{\|\mathbf{S}_{n+1}^{rr}\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}^{rr}}{q_{n+1}^{rr}} = \begin{Bmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \\ \hat{n}_3 \\ \hat{n}_4 \end{Bmatrix}. \quad (5.91)$$

これらを用いて式(5.97)で示された Consistent 弾塑性係数テンソル内の5つのマトリクスを導入する.

$$\mathbf{I} = [\mathbf{L}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

$$(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \{j\} \{j\}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

$$(\mathbf{1} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \{j\} \{\hat{n}\}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{1}) = \{\hat{n}\} \{j\}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & 0 \\ \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & 0 \\ \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & 0 \\ \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}) = \{\hat{n}\} \{\hat{n}\}^T = \begin{bmatrix} \hat{n}_1 \hat{n}_1 & \hat{n}_1 \hat{n}_2 & \hat{n}_1 \hat{n}_3 & \hat{n}_1 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_2 \hat{n}_1 & \hat{n}_2 \hat{n}_2 & \hat{n}_2 \hat{n}_3 & \hat{n}_2 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_3 \hat{n}_1 & \hat{n}_3 \hat{n}_2 & \hat{n}_3 \hat{n}_3 & \hat{n}_3 \hat{n}_4 \\ \hat{n}_4 \hat{n}_1 & \hat{n}_4 \hat{n}_2 & \hat{n}_4 \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \hat{n}_4 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

これらを用いて式(5.97)で示された Consistent 弾塑性係数テンソルをマトリクス表示すると,

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathbf{C}}^{ep}] = & \kappa \left(1 - \frac{\kappa\beta^2}{A} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\mu\theta \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\
& - \frac{2\mu\kappa\beta}{A} \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 & \hat{n}_3 & \hat{n}_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2\mu\kappa\beta}{A} \begin{bmatrix} \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & \hat{n}_1 & 0 \\ \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & \hat{n}_2 & 0 \\ \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & \hat{n}_3 & 0 \\ \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & \hat{n}_4 & 0 \end{bmatrix} \\
& - 2\mu\theta \begin{bmatrix} \hat{n}_1\hat{n}_1 & \hat{n}_1\hat{n}_2 & \hat{n}_1\hat{n}_3 & \hat{n}_1\hat{n}_4 \\ \hat{n}_2\hat{n}_1 & \hat{n}_2\hat{n}_2 & \hat{n}_2\hat{n}_3 & \hat{n}_2\hat{n}_4 \\ \hat{n}_3\hat{n}_1 & \hat{n}_3\hat{n}_2 & \hat{n}_3\hat{n}_3 & \hat{n}_3\hat{n}_4 \\ \hat{n}_4\hat{n}_1 & \hat{n}_4\hat{n}_2 & \hat{n}_4\hat{n}_3 & \hat{n}_4\hat{n}_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{5.97}$$

となる。

5. 4 結言

陽解法では応力空間において応力増分と降伏曲面の交点での法線を必要とするため、必ずその交点を求めなければならない。また、求まった応力は降伏曲面からのドリフトを生じるために誤差は累積され、計算された降伏応力は過大評価されてしまうという欠点がある。一方、リターンマップを用いた陰解法では、応力は硬化（あるいは軟化）する降伏面上に常に存在し、その時の塑性ひずみ増分は、降伏面の法線方向を向く流れ則を満たしている。また、有限要素法自体は変位を求める非線形連立方程式となっているが、その変位に対して2次収束が保証されている Newton-Raphson 法に整合した Consistent 弾塑性係数を求めることにより、計算時間が大幅に短縮できる。

なお、本リターンマップを用いた陰解法弾塑性解析では、軟化する弾塑性体の場合にも、応力が降伏曲面上に存在している事が保証されており、Trial State と Return-Mapping アルゴリズムに分けることにより、陽解法のように、除荷負荷判定を特に考慮する必要がなく除荷と軟化を区別する事が可能であり、また、ステップの取り方によっては軟化により降伏関数を満たしつつ応力が減少中にもかかわらず応力が増加してしまうような不都合も生じない。

参考文献

- 1) J.C.Simo,J.G.Kennedy and S.Govindjee: Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms,Internat.J.Numer.Methods Engrg26,pp.2161-2185,1988.
- 2) J. C. Simo, T.J.R.Hughes : Computational Inelasticity, Springer-Verlag New York,1998.
- 3) R. I. Borja and S. R. Lee : Cam-Clay plasticity, Part I : Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations, Compt. Methods Appl. Mech. Engrg. 78(1), pp.49-72, 1990.
- 4) 矢富盟祥, 鱸 洋一 : 陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた微小変形土/水連成有限要素法解析, 応用力学論文集, Vol.4, pp.345-356, 2001.
- 5) Pipatpongsa,T.,Iizuka,A.,Kobayashi,I., Ohta,H. and Suzuki,Y.:Nonlinear analysis for stress-strain-strength of clays using return-mapping algorithms,Journal of Applied Mechanics,JSCE,Vol.4,pp295-306,2001
- 6) 山川優樹, 寺田賢二郎, 池田清宏, 鳥井邦夫 : 圧縮場における弾塑性体の分岐解析パスジャンプ挙動, 土木学会論文集, No.701, III-58, pp.73-86, 2002.

第6章 拡張有限要素法 (X-FEM) による破壊解析の基礎

6. 1 緒言

物体内に亀裂が存在する場合の有限要素法による解析では、従来から汎用されている方法は、要素分割において亀裂を要素辺と一致させ、その要素辺にある節点を二つに分離することにより亀裂の上面と下面を表現するものである。しかし、この方法では、亀裂の進展形状が要素の幾何形状に大きく制約される。

そこで、亀裂の進展解析を行なう場合、亀裂が進展するたびに亀裂先端近傍のリメッシュ作業に膨大な労力と時間が必要となる。

この様な欠点を避けるため、Simo¹⁾、Oliver²⁾ や Ortiz ら³⁾によって不連続な形状関数を用いる“埋め込み不連続”と呼ばれる強不連続解析手法が提案された。この方法により、得られる解の要素依存性が大幅に軽減し、損傷モデルや弾塑性体などの亀裂進展解析が数多く報告された^{4),5),6)}。しかし、この手法によると、不連続な形状関数の作成が非常に複雑となり、亀裂によって分割された、亀裂方向のひずみが常に同一になる。これが異なることが、亀裂の折れ曲がりによって大きく左右されるから、この制約は亀裂の正確な進展形状を求めるのに致命的な欠点となる。

一方、この強不連続解析手法に対し、線形弾性体の場合に限定されてはいるが、上記の欠点を持たない、より簡便で有効な手法として、X-FEM と呼ばれる方法が Belytschko ら⁷⁾ や Moes ら⁸⁾によって提案されている。この方法は、亀裂などの変位の不連続面を有する要素に対して、要素節点に新たな自由度を付加することにより変位の不連続を表現できるようにしたものである。この方法では、線形弾性体の場合の亀裂先端近傍の理論解を使用するため、未知量の増加により計算時間は増加するが、従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく、比較的容易に導入することが可能である。

ところが、彼等による X-FEM では線形弾性体しか適応できず、弾塑性体への応用はまだ国内外においても前例が無い。そこで、本論文では、上記の強不連続解析手法と同じように、亀裂の先端が常に要素辺上にあると仮定した X-FEM の新しい解析手法を開発した。本章では、この X-FEM 解析の定式化の詳細を記述する。

6. 2 拡張有限要素法(X-FEM)基礎

本節では、拡張有限要素法の特長および形状関数に関して述べる。

6. 2. 1 従来の有限要素法と拡張有限要素法の違い

緒言に記したように、物体内に亀裂が存在する場合の有限要素法による解析では、従来から汎用されている方法は、図 6.1 のように要素分割時において亀裂を要素辺と一致させ、

その要素辺にある節点を二つに分離することにより、亀裂の上面と下面を表現する。すなわち、図 6.1 の要素⑤、⑥の右下と右上要素節点が亀裂の先端だとして、この点は連続だった場合、要素①、③、⑤と、要素②、④、⑥がそれぞれ対応して、

変位の不連続が生じているとする。この時、有限要素法の定式化においては、仮にここに亀裂が無ければ、すなわち変位が連続であれば、この部分には6個の要素の4個の節点には、2次元問題であれば、1個の節点に2個ずつ、合計8個の変位の未知数が存在する。一方亀裂が存在してその部分の変位が不連続になった場合は、図 6.1 の左から3個の節点が分離される。この意味は、 $2 \times 3 = 6$ 個の新しい変位の未知数が加わる事に等しい。ここまでなら物理的にもわかりやすく、数値解析的にも簡単明瞭でなんら問題のないことである。

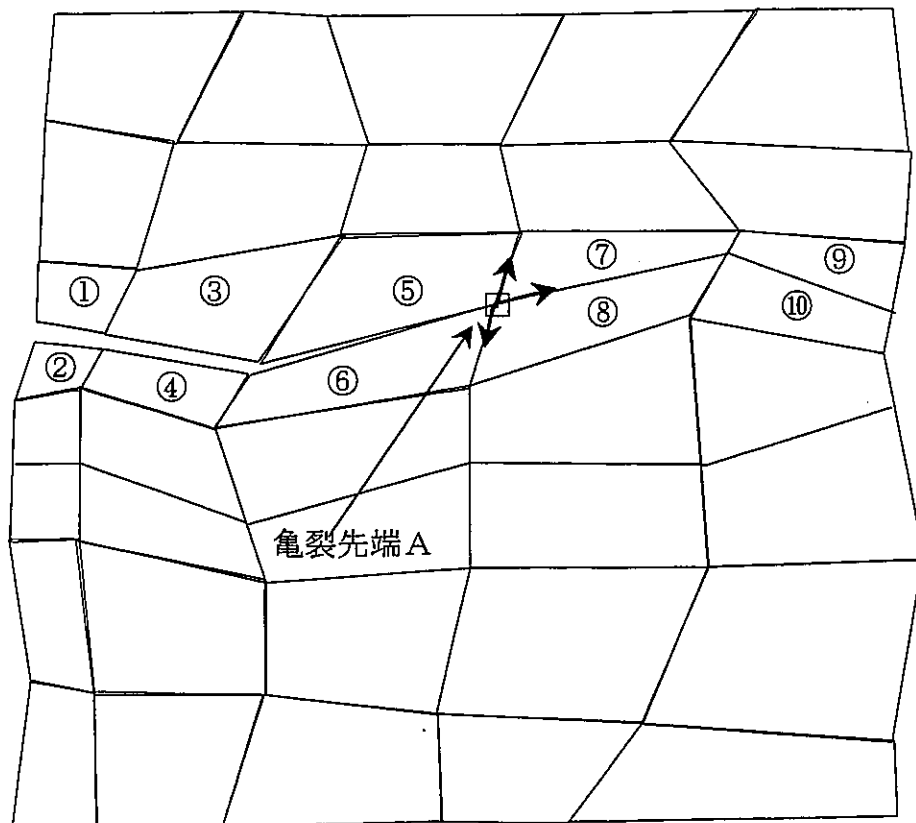


図 6.1 従来から汎用されている亀裂解析モデル

問題は、この図 6.1 の状態から、亀裂がさらに進展する場合を考えるときに生じる。図 6.1 のように、有限要素法のメッシュ分割をしていた場合、この亀裂先端Aから、亀裂がさらに進展できる方向、つまり、それまでと同様に、新しく節点の未知数を増やせる方向としては、3個の矢印の方向に限定される。これでは、物体に与えられた荷重が大きくなった場合、どのように亀裂が進展するかを追跡するには、不可能である。これを解決する手法として、まず考えられるのが、次図 6.2 のように、この亀裂先端近傍のメッシュを数多

くの方角に進展することが可能なメッシュ分割しておく事である。

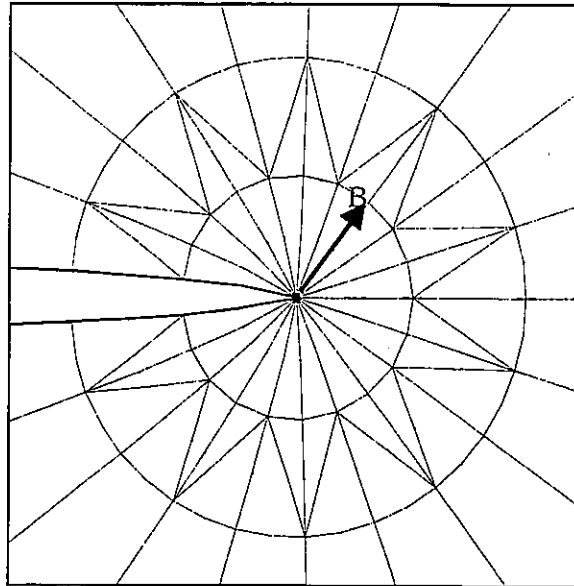


図 6.2 亀裂先端近傍のメッシュの拡大図

図 6.2 のように、亀裂先端近傍をメッシュ分割しておけば、この分割角度の数と同じ数の方向に亀裂は進展可能になる。しかし、このようにしても、次の進展に関し同じ問題が生じる。今、亀裂が図 6.2 の矢印の B 点の方向に進んだとする。さらに進展する場合、進展方向はまた 3 方向に限定される。したがって、亀裂先端が B 点に来た時には、また B 点を中心とした図 6.2 と同じようなメッシュを再分割させる必要となる。これが可能なら、逐次メッシュを再分割してやれば、亀裂の進展解析は、とりあえず可能である。この手法をリメッシュによる方法と言う。

このリメッシュによる手法の難点は、明らかに分かるのが、リメッシュのプログラムの作成が非常に面倒であること。また、亀裂進展前後の特定の点の応力、ひずみの評価方法が一般には非常に難しい事にある。この手法は、線形弾性体に使われていた時代があったが、非線形問題や、弾塑性体の問題には、不可能だと言われ、今日では、ほとんどこの研究はなされていない。むしろ、メッシュフリ-法、強不連続手法、有限被覆法、拡張有限要素法(X-FEM)など、亀裂である不連続面が要素内を通過するような解析手法の研究が提案されてきている。

上記したように、拡張有限要素法は、図 6.3 のように、亀裂である不連続面が、従来のように要素辺に沿うのではなく要素内を通過するようにして、進展方向が制限をうけないように工夫されたものである。その手法は後で詳述するので、ここでは簡単に述べると、亀裂などの変位の不連続面を有する要素に対して、変位の不連続を表わす未知数を、従来のように要素の節点を分離することにより節点を増やす手法をとらずに、要素節点は分離せ

ず、変位の不連続を表わす未知数を、亀裂を含む要素節点に付加することにより、変位の不連続を表現できるようにしたものである。図 6.3 の場合、亀裂が要素①、②、⑤、⑧内に存在とすれば、変位の不連続を表す未知数を亀裂の存在する要素①、②、⑤、⑧の節点にのみ付加され、付加された節点は図 6.3 の○で示してある。

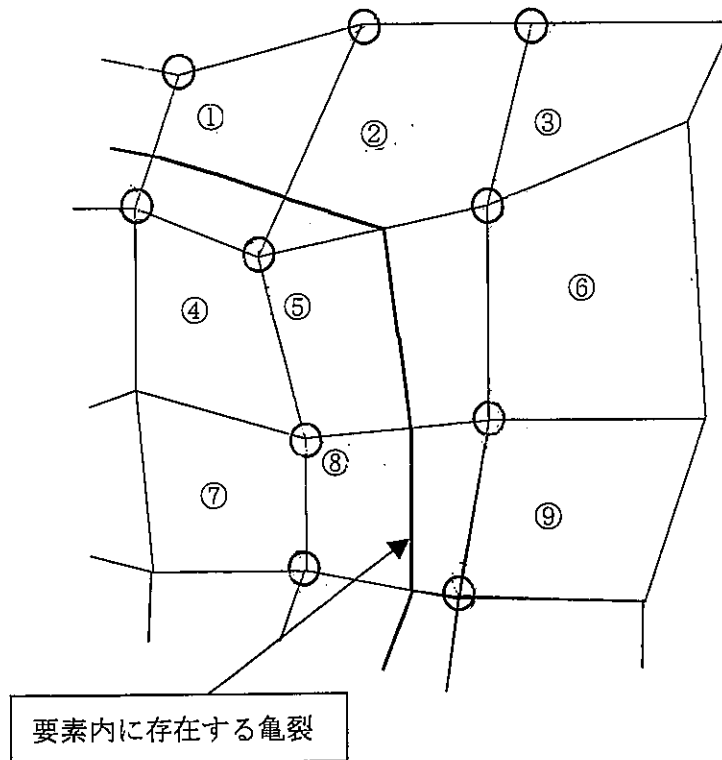


図 6.3 拡張有限要素法の亀裂解析モデル

6. 2. 2 X-FEM の形状関数

Belytschko ら^{7), 8)}は、PUFEM(FEM by Partition of Unity)の考え方に基づいた拡張有限要素法(eXtended-FEM, 以下 X-FEM と記す)を提案し、その形状関数においては Partition of Unity の概念^{9), 10)}に基づき拡張された形状関数が用いられる。すなわち、一般に次式のような形状関数が用いられる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i_j \in N} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i + \sum_{i_j \in N^d} N_j(\mathbf{x}) \mathbf{a}_j \bar{f}(\mathbf{x}) \quad (6.1)$$

ここに、 N_i 、 N_j は通常の FEM での形状関数であり、 \mathbf{a}_i 、 \mathbf{a}_j は節点自由度、 \bar{f} はエンリッチ関数、 N は FEM 解析モデルでの全節点の集合、 N^d は不連続性を表す必要がある領域近傍の節点の

集合である。式(6.1)の右辺第1項が、いわゆる「古典的な(classical)」形状関数、第2項が関数 \bar{f} により「エンリッチ(enrich)」(付加)された部分である。

式(6.1)の形状関数を用いて、亀裂を扱う場合について具体的に示すと、亀裂近傍にある要素内の位置 \mathbf{x} における変位を次式のように近似することができる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I + \sum_{I \in C} \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) \sum_{k=1}^4 \gamma_k(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I^k + \sum_{I \in J} \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (6.2)$$

ここに \mathbf{N}_I は通常 FEM の要素の定式化で用いられる形状関数、 m は要素を構成する節点数、 C は亀裂先端の変位についての漸近解の特性を考慮する節点の集合、 J は亀裂周辺の変位の不連続性を考慮する節点の集合、 $\mathbf{a}_I, \mathbf{a}_I^k, \mathbf{b}_I$ は節点に割り付けられる節点自由度ベクトルである。 $C \cap J = \phi$ である。また、 $\gamma_i (i=1 \sim 4)$ は、亀裂先端の変位場の漸近解を表す基底関数、 $H(\mathbf{x})$ は亀裂近傍での変位の不連続を表すヘビサイドの階段関数である。

基底関数 γ_i として次式が用いられる。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \gamma_2 = \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ \gamma_3 &= \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \gamma_4 = \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (6.3)$$

ここに r, θ は亀裂先端位置を原点とする極座標である。この4個の基底関数は、節2.2.2で述べた、亀裂先端近傍解の応力解が得られる変位の特異性を表わすのに十分な基底関数である。

したがって、式(6.2)によって、亀裂先端近傍の応力の $-1/2$ 特異性をもつような変位分布の自由度をも節点に付加することになっている。しかし、この付加自由度によって、未知数が大幅に増加するだけでなく、物体が線形弾性体でなく、例えば、一般の非線形弾性体や弾塑性体の場合では、亀裂先端近傍の応力ないしひずみの特性は、特別な場合を除き未知である。したがって、物体が線形弾性体の場合を除き、式(6.2)の第2項を形状関数に付加することは出来ない。

そこで、本論文の研究目的が、地盤の地滑りなどの弾塑性体挙動する物体の破壊解析にあるため、本研究ではあえて、応力の特異性を持つような変位分布の自由度を導入せず、最近でも精力的に研究されている強不連続解析の場合と同様に、変位の不連続量を表わす自由度のみ、すなわち、式(6.2)の第3項を付加した形状関数を使用する手法を採用する。

この時、式(6.2)の変位場は、連続節点変位 \mathbf{a} 、不連続節点変位 \mathbf{b} を用いて次式のように表せる、

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^m \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) \mathbf{a}_I + \sum_{I \in J} \mathbf{N}_I(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_I \quad (6.4)$$

ここに、 $N_I(\mathbf{x}), \mathbf{m}, \mathbf{J}$ は式(6.2)の説明と同じものである。

6. 3 陰解法弾塑性解析を用いた拡張有限要素法の定式化

本論文では、最終的には、物体が圧縮応力場にあり、亀裂面上に摩擦が発生する弾塑性体内に亀裂が存在する場合において、提案した拡張有限要素法を用いて解析を行なう。本節では、解析するため提案した拡張有限要素法の定式化を述べる。

6. 3. 1 支配方程式と境界条件

図 6.4 に示すような二次元物体 Ω を考える。物体 Ω 内には亀裂があり、亀裂 Γ_c とその先端における接線を延長した線(図 6.4 中の破線)により分割される 2 つの領域を、それぞれ Ω^+ 、 Ω^- とする。図には、 Ω^+ は灰色で塗りつぶしてある。なお Ω^+ 、 Ω^- の領域は、亀裂 Γ_c が進展するたびに变化する。しかし、このように 2 つの領域に分けたのは、説明の便宜上のためだけであって、実際の解析で、亀裂 Γ_c の近傍の領域だけ考えれば良い。 Γ は物体の全境界を表し、変位 \mathbf{u} が既知である Γ_u 、表面力 \mathbf{t} が既知である Γ_t 、および亀裂の両面 Γ_c を合わせたものである。亀裂の面 Γ_c は図 6.5 を示すように Ω^+ 側の Γ_c^+ と Ω^- 側の Γ_c^- を合わせたものであり、それぞれの単位法線ベクトル方向は図 6.5 のように定義する。

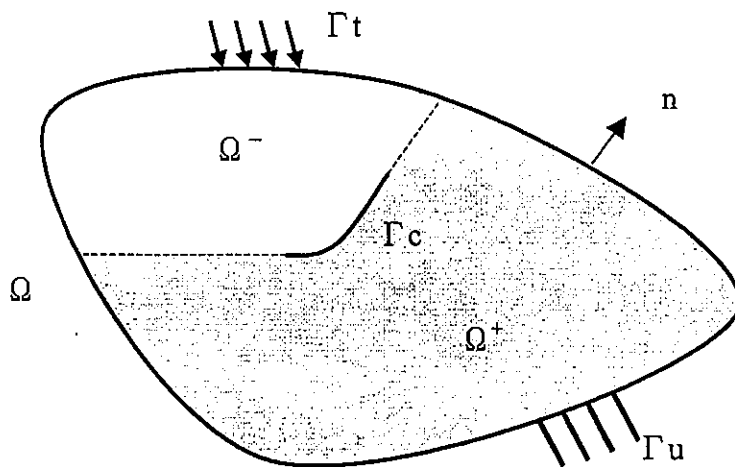


図 6.4 物体の領域と境界

したがって、物体の全境界及び亀裂面は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_u + \Gamma_t + \Gamma_c \\ \Gamma_c &= \Gamma_c^+ + \Gamma_c^- \end{aligned} \quad (6.5)$$

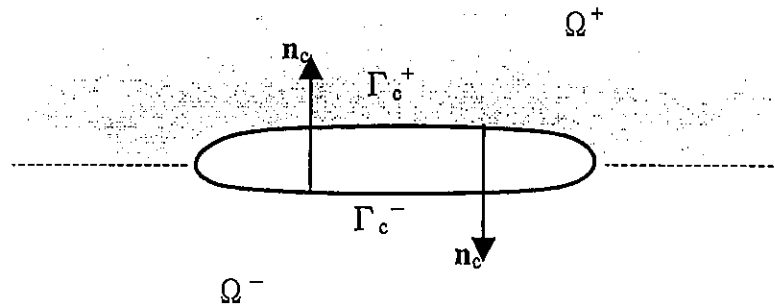


図 6.5 亀裂部分の領域と境界

釣り合い式と境界条件は以下のとおりである.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega / \Gamma_c \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{on } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{on } \Gamma_t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_c &= \mathbf{f} && \text{on } \Gamma_c \end{aligned} \quad (6.7)$$

ここで, ∇ はナブラ演算子, $\boldsymbol{\sigma}$ は Cauchy の応力テンソル, \mathbf{n} は物体全境界 Γ の外向き単位法線ベクトル, \mathbf{n}_c は, Γ_c の両面単位法線ベクトルであり, Γ_c^+ の場合に Ω^+ から Ω^- の方向を持ち, Γ_c^- の場合に Ω^- から Ω^+ の方向を持つ. \mathbf{f} は Γ_c 上の表面力を表している. (\cdot) はテンソルとベクトルの内積を示している. また上線の $(-)$ は既知量であることを示す. ひずみは変位より以下のように示される.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \cdot \mathbf{u})^s \quad (6.8)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみテンソルを表し, 上式の右肩の s は (\cdot) 内部の量の対称部分であることを表す.

6. 3. 2 X-FEMの弱形式化

式(6.6)を弱形式化するため, 次のような Γ_c 上で不連続となる変位 \mathbf{u} および試験関数 $\boldsymbol{\eta}$ を考える.

$$\mathbf{u} := \left\{ \mathbf{u} : \Omega \rightarrow R^2 \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (6.9)$$

$$\boldsymbol{\eta} := \left\{ \boldsymbol{\eta} : \Omega \rightarrow R^2 \mid \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma_u \right\} \quad (6.10)$$

この試験関数を式(6.6)の両辺に掛け、物体の領域 Ω 全体で積分し Gauss の発散定理と境界条件(6.7)を用いると次式が得られる。

$$\int_{\Gamma_i + \Gamma_c} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\eta} d\Gamma = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : (\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}) d\Omega \quad (6.11)$$

6. 3. 3 不連続変位およびX-FEMの定式化

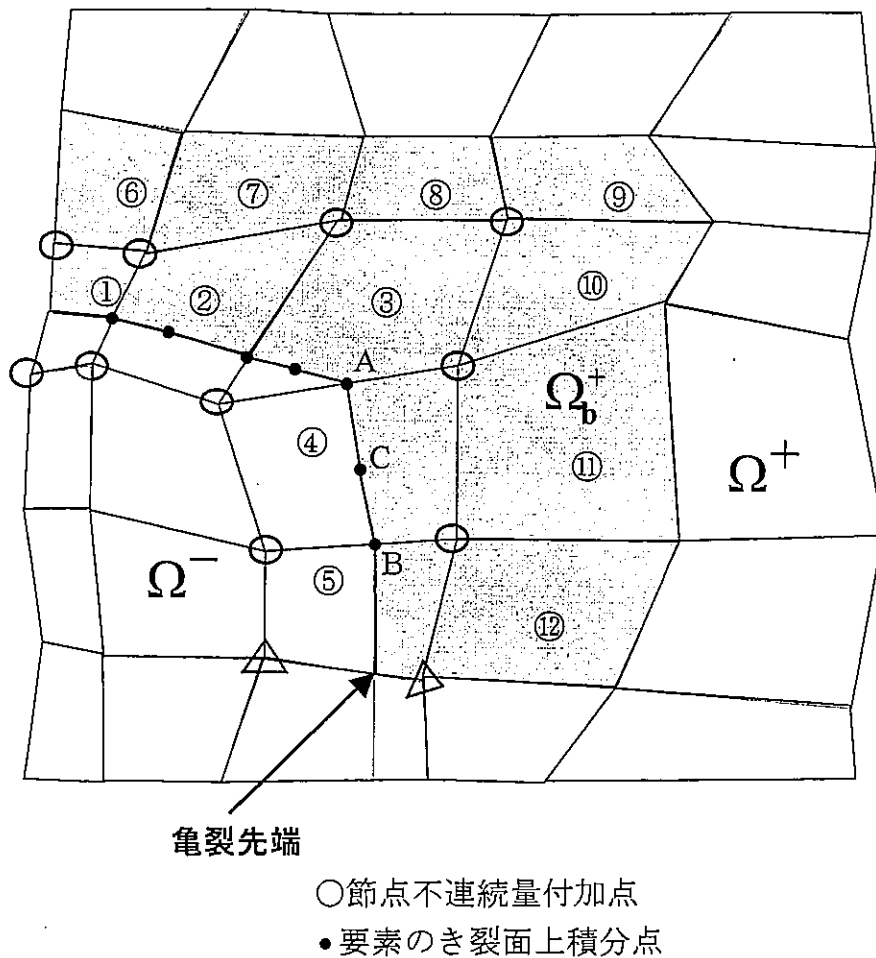


図 6.6 X-FEM による解析の要素と節点

式(6.11)を連続変位と不連続変位を用いた式に離散化する。一般に、有限要素法では変位

は連続と仮定され、この連続節点変位 \mathbf{a} のみを未知量として計算を行うが、X-FEM では亀裂面の不連続性を表すために、通常の連続節点変位 \mathbf{a} に、付加的な自由度として、要素内に亀裂が存在する要素節点全てに不連続節点変位 \mathbf{b} を節点に付加する。以下、これらの付加的な自由度を、亀裂を含む要素の不連続節点変位 \mathbf{b} と呼ぶ。これらの付加項を加える節点には図 6.6 中○で示してある。要素⑤内の亀裂先端では、変位が閉じていることを保証するため、△で示される点では、不連続節点変位 \mathbf{b} は付加しない。連続節点変位 \mathbf{a} 、不連続節点変位 \mathbf{b} を用いて亀裂面 Γ_c で変位 \mathbf{u} が不連続となるように離散化された変位 \mathbf{u} は次式のように表せる、

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{a}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{N}]\{\mathbf{b}\} \quad (6.12)$$

ただし、第2項は亀裂が存在する要素 (図 6.5 中、①、②、③、④、⑤の要素) の節点のみに付加される。ここで、 $[\mathbf{N}]$ は節点変位 $\{\mathbf{a}\}$ に対する標準的な形状関数行列、 $\{\mathbf{a}\}$ は連続節点変位ベクトル、 $\{\mathbf{b}\}$ は不連続節点変位ベクトル、 $H(\mathbf{x})$ は亀裂面により分割された Ω^+ 、 Ω^- に対して以下のような値を持つヘビサイドの階段関数である。

$$H(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases} \quad (6.13)$$

ひずみは式(6.12)を微分して、次式のように表せる。

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{a}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{B}]\{\mathbf{b}\} \quad (6.14)$$

ここで、 $[\mathbf{B}]$ は、 $[\mathbf{N}]$ の各成分を座標で微分した通常の $[\mathbf{B}]$ マトリクスである。

試験関数 $\boldsymbol{\eta}$ に関しても変位と同様な離散化を行うと、

$$\{\boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (6.15)$$

のように表せる。ここで、 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}$ は、試験関数の連続節点変位および不連続節点変位である。また、 $\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}$ も、次式のようになる。

$$\{\nabla \otimes \boldsymbol{\eta}\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\alpha}\} + H(\mathbf{x})[\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\gamma}\} \quad (6.16)$$

この試験関数も、変位と同じく第2項は亀裂が存在する要素にのみ付加される。式(6.15)、式(6.16)を式(6.12)に代入すると次のような二つ式を得る。

$$\mathbf{A} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.17)$$

$$\mathbf{A} \int_{\Omega_c^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma = \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.18)$$

ここで、 ne と $ne+$ は、それぞれ全要素数と亀裂を含む要素数である。 Ω_c^+ は、図6.5で灰色で示してある領域、すなわち、不連続節点変位 \mathbf{b} が、1個以上付加されている要素からなる亀裂近傍の Ω^+ にある単連結領域である。

以下、説明の便宜上、式(6.17)、(6.18)の両辺を次のようにおく。

$$\mathbf{F}_{\text{int},a} = \mathbf{A} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d})) d\Omega \quad (6.19)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},a} = \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega \quad (6.20)$$

$$\mathbf{F}_{\text{int},b} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_c^+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d})) d\Omega + \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{N}^T \mathbf{f}(\bar{\mathbf{u}}) d\Gamma \right) \quad (6.21)$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},b} = \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.22)$$

ここで、 $\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix}$ とおいた。また、 $\bar{\mathbf{u}}$ は Γ_c 上の相対変位である。亀裂上の表面力 \mathbf{f} は、比例载荷の場合は、相対変位 $\bar{\mathbf{u}}$ の関数となる。

この時、式(6.17)と式(6.18)は、次式のように節点における離散化された連続節点変位 \mathbf{a} と不連続節点変位 \mathbf{b} を未知数とする非線形連立方程式に帰着される。

$$\mathbf{g}_a(\mathbf{d}) = \mathbf{F}_{\text{int},a} - \mathbf{F}_{\text{ext},a} = \mathbf{0} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{g}_b(\mathbf{d}) = \mathbf{F}_{\text{int},b} - \mathbf{F}_{\text{ext},b} = \mathbf{0} \quad (6.24)$$

次に、式(6.23)と式(6.24)の連続節点変位 \mathbf{a} と不連続節点変位 \mathbf{b} に関する非線形連立方程式

にニュートン・ラフソン法を適用するため、Taylor 展開を行い、その第 1 階微分項だけ残すと次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \mathbf{F}_{\text{ext},a} - \mathbf{F}_{\text{int},a}(\mathbf{d}) \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int},b}(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} \cdot \Delta \mathbf{d} = \mathbf{F}_{\text{ext},b} - \mathbf{F}_{\text{int},b}(\mathbf{d}) \quad (6.26)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{Bmatrix}$ とおいた。

結局、式(6.25)、式(6.26)より、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},a} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int},a} \\ \mathbf{F}_{\text{int},b} \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

ここで、上式の 4 個の \mathbf{K} は、以下のように定義されたものである。

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega \quad (6.28)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e^+} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega \quad (6.29)$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T = \mathbf{A} \int_{\Omega_e^+} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega \quad (6.30)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e^+} \mathbf{B}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_e^+} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \right) \quad (6.31)$$

6. 3. 4 要素剛性マトリクスの数値積分法

本論文では、メッシュ要素は、基本的には 4 節点四角形要素を用いる。なお物体全体をメッシュ分割する場合、節点の連続性を保持するため必要な 3 角形部分領域、また後述するように、不連続面が存在することにより新たに生成される 3 角形部分領域も、すべて 4

節点四角形アイソパラメトリック要素で Gauss の 4 点積分を用いて考える (図 6.7)。これにより、プログラムのアルゴリズムが非常に簡単になる。

式(6.28)～(6.31) のような積分において、通常の四角形の場合の要素剛性マトリックスは、次式で表せる。

$$[K]_{ij} = \sum_{k=1}^4 [B]_i^T [C][B]_j \det[J_k] W_k \quad (6.32)$$

ここで、Bマトリックスは、正規座標系 (ξ, η) における Gauss 点上の値、 $\det[J_k]$ は、ヤコビ行列式の Gauss 点上の値、 W_k は、重み係数である。

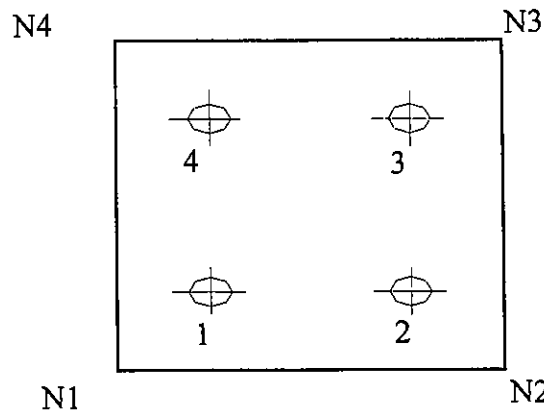


図 6.7 4 節点四角形要素および Gauss 点

本研究では、亀裂面は、要素内に存在するが、亀裂先端は、常に要素辺上にあると仮定する。また亀裂は要素内では直線であり、要素内に 1 個だけ存在する場合に限定する。その場合、各要素の式 (6.27) の左辺の K マトリックス中の、 $K_{aa}, K_{ab} = K_{ab}^T, K_{bb}$ の求めかたの説明を行なう。まず、亀裂が存在する要素(図 6.6 中、①, ②, ③, ④, ⑤の要素)の場合から説明する。この場合、 K_{aa} は要素全体 Ω_e (今の場合、全物体の Ω でなく一つの要素に関する積分であるから、 Ω_e のように区別する必要がある。しかし、本論文では、面倒なのと自明なことなので、以下でも、自明な部分は、各要素と全物体での記号を混在して用いる。)に関する積分なので、通常の正規座標系の 4 個のガウス点を使用した積分を行なえば良い。

一方、 $K_{ab} = K_{ab}^T, K_{bb}$ に関する積分は、亀裂面で分割された Ω_e^* (図中では、 Ω_e^*) 上の積分が必要である。なお、 K_{bb} の亀裂面上での摩擦力に関する積分は節 6.4 の式 (6.75) 及び節 7.3.2 の式 (7.16) で詳述する。

この時、亀裂面の位置により、図 6.8 のような 2 種類の四角形領域に分割される場合と図 6.9 のような三角形および五角形領域に分割される 2 種類のタイプが考えられる。

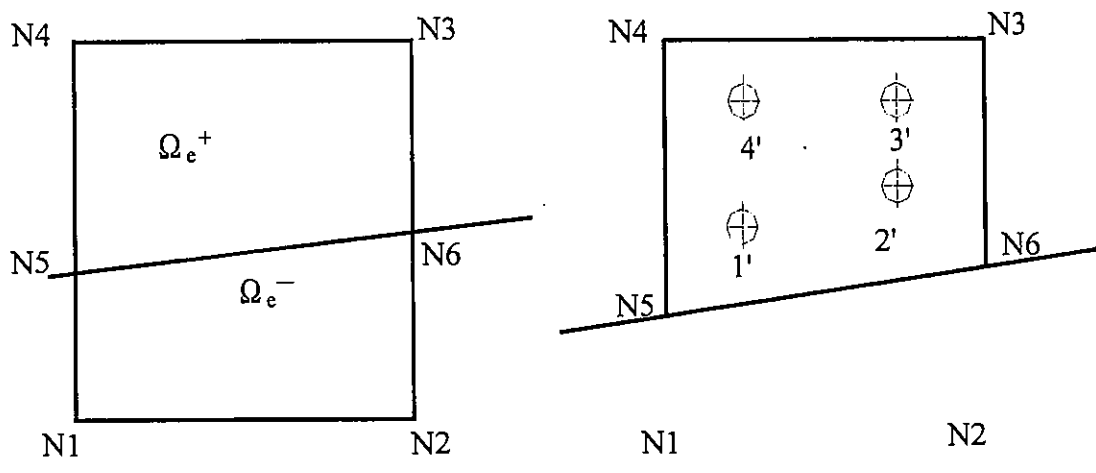


図 6.8 亀裂により分割された 2 種類の 4 節点四角形部分領域と Gauss 積分点

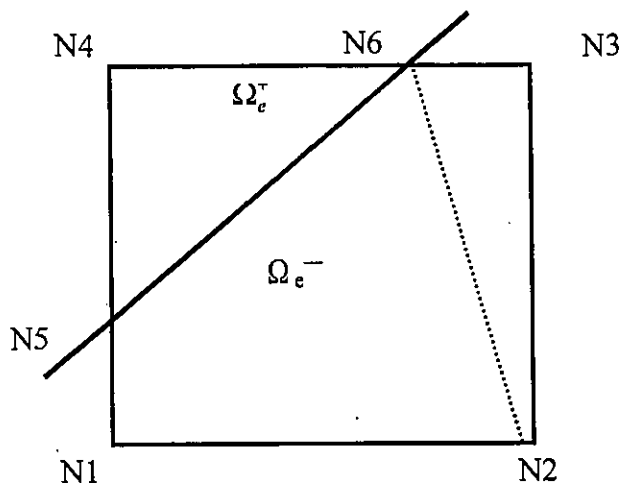


図 6.9 亀裂により分割された四角形および五角形領域

現在までに発表された X-FEM に関する論文では、この分割された領域の積分を実行する場合、領域を更に小さな多くの三角形要素で分割したり、多くの三角形要素と四角形要素に分割する事によって積分されている。しかし、その手法では、積分精度の保証が無いのと、亀裂が進展する場合、亀裂で分割された新たな要素が出来るたびに、積分領域を小さな領域に再度分割しなおす操作が必要になり、このような操作は、亀裂が存在する要素(図 6.6 中、①、②、③、④、⑤の要素)だけに限られるとはいえ、X-FEM では、面倒なりメッシュを避けることが出来るという、せつかくの最大の長点が失われてしまう。そこで、本研

究では、図 6.8 のような 2 種類の四角形領域に分割される場合は、上下 2 つの四角形のみ、また図 6.9 のような三角形および五角形領域に分割される場合は、五角形の部分を図 6.9 のように、三角形と四角形の二つに分けて、合計 3 個の部分領域のみを考える。

また、モデル上で現れた三角形領域は、図 6.10 のように、その三角形の一つの頂点を二つ同値座標を持つ節点に分離して、4 節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法を使用し、一貫して、4 節点四角形アイソパラメトリック要素の Gauss の 4 点積分アルゴリズムだけを使用する簡便な手法を採用する。

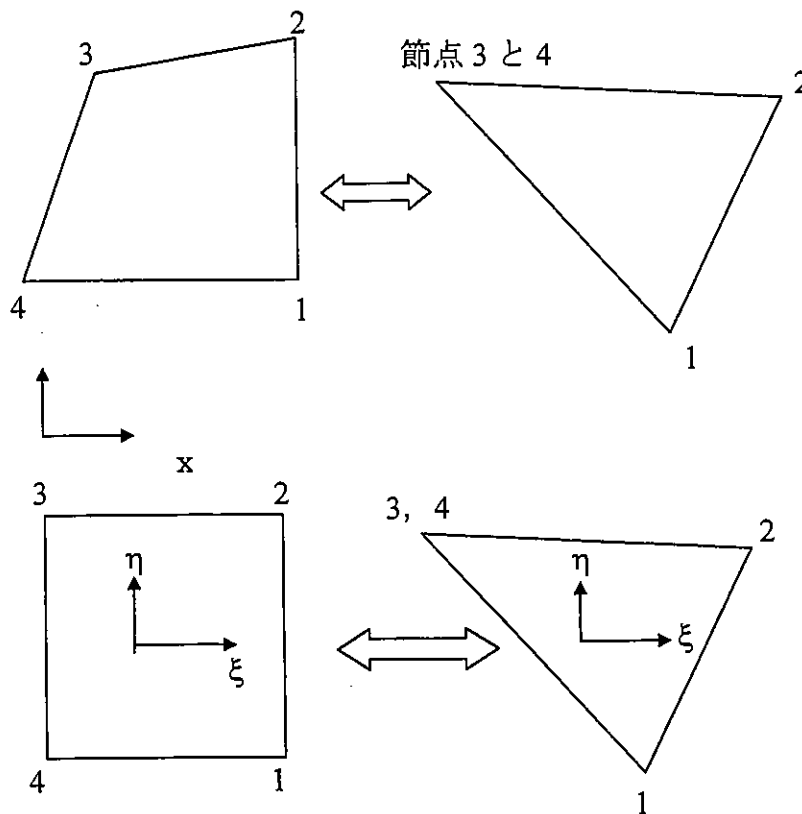


図 6.10 4 節点四角形アイソパラメトリック要素と三角形要素の変換

一方、式(6.28)~(6.31)中で必要な、図 6.8 左 Ω_e^* 上の (亀裂によって分割された) 要素に関する積分は、式(6.32)のように表わした場合、この積分の被積分項 B マトリクスやヤコビアン行列式は、 Ω_e^* ではなく、 Ω_e 全体の四角形の N_1, N_2, N_3, N_4 の内挿関数を用いた正規座標系 (ξ, η) に関する積分であるから、通常の正規座標系 (ξ, η) における 4 個の Gauss 点での積分には評価できない。この事に注意して、次のような手順で積分する。

- 1) 図 6.8 左のように、亀裂で分割された四角形 Ω_e^* の N_3, N_4, N_5, N_6 の内挿関数を用いた

4 個の通常の Gauss 積分点に対応する全体座標における 4 個の積分点 (x^*, y^*) を求める。

2) この 4 個の積分点 (x^*, y^*) に対応する, Ω_e 全体の四角形の N_1, N_2, N_3, N_4 の内挿関数を用いた正規座標系の 4 個の点 (ξ^*, η^*) を求める。

3) 求めた 4 個の点 (ξ^*, η^*) で式(6.32)の積分を評価する。

上記の説明中, 図 6.8 の左図で N_5, N_6 なる点を使用した, この事は, 要素 Ω_e に新しい節点が出来たわけではなく単に積分上必要な点に過ぎないことに注意を要する。

上記の手順を, 図 6.11 に示す。

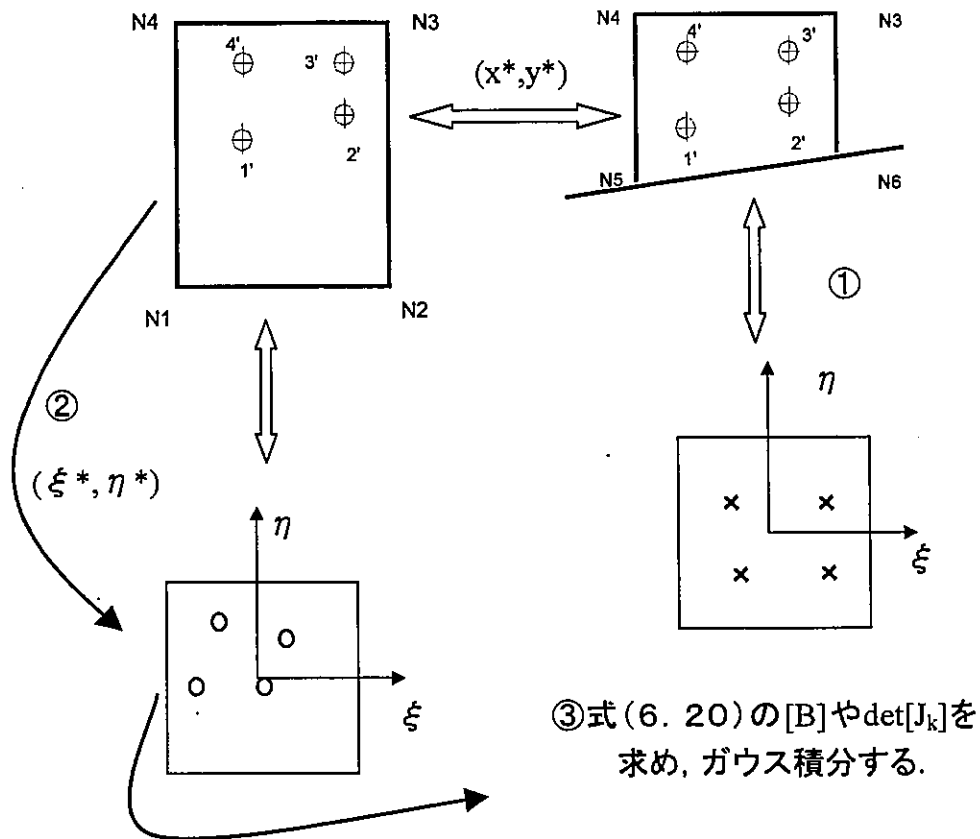


図 6.11 積分領域が分割された場合の Ω_e^+ 上の積分

図 6.9 の三角形 Ω_e^+ 上の積分は, その 3 角形の一つの頂点 N_4 を二つに分離して, 4 節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法を使用し, 前記と同様な方法で, Ω_e 全体の四角形における点の正規座標系における座標 (ξ^*, η^*) を求め, その点で式(6.32)を使って数値積分を行う。また, 図 6.9 で, 五角形の部分が Ω_e^+ となった場合は, 先に述べたように,

三角形と四角形の二つに分けて考え、前述と同様な手法で数値積分すれば良い。

次に、図 6.6 の亀裂を含まない Ω^+ に含まれる要素⑥～⑫の要素に関して述べる。これらの要素節点の一部には、不連続節点変位 \mathbf{b} を有している。しかし、積分領域は、要素全体 Ω_e である。したがって、(メモリを気にしないならば、) まず、全節点に、不連続節点変位 \mathbf{b} があると仮定し、通常の正規座標系の 4 個のガウス点を使用した積分を行なった後、 \mathbf{K}_{aa} は、前記と同じであるが、 $\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{K}_{ab}^T, \mathbf{K}_{bb}$ に関しては、そのマトリクスから不連続節点変位 \mathbf{b} の成分が存在しない行と列を全て 0 とすれば良い。

図 6.6 の Ω^+ にある他の要素 (白色の要素) には、不連続節点変位 \mathbf{b} 存在しないから、 \mathbf{K}_{aa} のみ値を持つ。また、 Ω^- にある他の要素には、不連続節点変位 \mathbf{b} を持っている要素もあるが、ヘビサイドの階段関数 $H(x) = 0$ 領域にあるので、ここでも \mathbf{K}_{aa} のみ値を持つ。これらの \mathbf{K}_{aa} は、前と同じく、通常の正規座標系の 4 個のガウス点を使用した積分を行なえば良い。

6. 4 亀裂面に摩擦力がある場合の拡張有限要素解析

亀裂面に接触表面力 \mathbf{f} が存在する場合は、式(6.31)の \mathbf{K}_{bb} の中には、表面力 \mathbf{f} と相対変位の関係を与えなければならない。地盤を対象とした問題では通常圧縮荷重が地盤に作用しているため、亀裂進展する場合には亀裂面に摩擦力が働く。この摩擦力が存在する場合の解析手法として、破壊力学で汎用されている要素の辺上に沿って要素節点を分離する事によって亀裂を表わす手法の場合、摩擦力の判定には要素節点力を使用する手法が汎用されている。ところが、X-FEM では、この要素節点力は陽な形で求まらない。したがって、X-FEM では、摩擦力のある問題を解析する方法として、釣り合い式の弱形式をそのまま使用する手法が簡便である。この手法の一つとして、J.Dolbow ら¹¹⁾は、P.Ladevèze¹²⁾ の反復計算し収束させてゆく LATIN 法を採用した結果を報告している。しかし、この LATIN 法は、そのアルゴリズムが煩雑であり、特に収束性がこの手法で使用する重要なパラメータの値によって大きく左右され、しかも、その値をどのような値にすれば収束が早くなるのか前もって分からないなどの欠点を有している。そこで、本節では、D.Perić ら¹³⁾が提案した、釣り合い式の弱形式中の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換える摩擦モデルとし、その部分を 2 次収束性が保証されている陰解法リターンマップ手法¹⁴⁾を用いた弾塑性解析を採用した。

6. 4. 1 接触表面力と相対変位

要素内の亀裂は直線であると仮定しているので、図 6.12 に示すように、 \mathbf{f} は表面力、 \mathbf{u} は変位であり、上付き土はそれぞれき裂上下面での物理量であり、また下付き $\bar{\mathbf{t}}, \bar{\mathbf{n}}$ はそれぞれ進展き裂面上の接線・法線方向の物理量を示している。接触境界上 Ω^+ に作用する接触力

\mathbf{f} と置くと,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\bar{\tau}} + \mathbf{f}_{\bar{n}} \quad (6.33)$$

ここで, テンソル積の定義を用いると次式のように置ける.

$$\mathbf{f}_{\bar{n}} = (\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}})\mathbf{f}, \quad \mathbf{f}_{\bar{\tau}} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_{\bar{n}} \quad (6.34)$$

亀裂面の接触点の相対変位を $\bar{\mathbf{u}}$ と定義すると

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad (6.35)$$

である. この関係は, X-FEM では, 次式の関係となる.

$$\bar{\mathbf{u}} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{b}\} \quad (6.36)$$

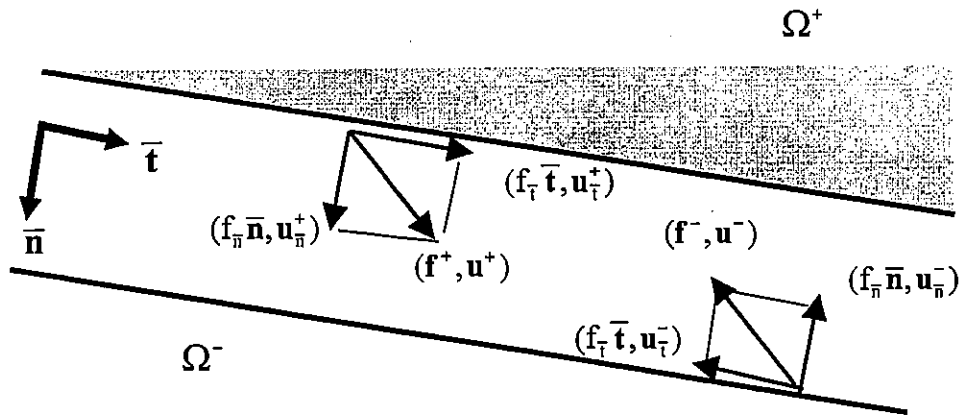


図 6.12 接触面の表面力と変位

同様に,

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\tau}} + \bar{\mathbf{u}}_{\bar{n}} \quad (6.37)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{\bar{n}} = (\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}})\bar{\mathbf{u}}, \quad \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\tau}} = \bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_{\bar{n}} \quad (6.38)$$

また,

$$\bar{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{f}_t}{\|\mathbf{f}_t\|} \quad (6.39)$$

と定義する.

6. 4. 2 弾完全塑性摩擦モデルの挙動

弾完全塑性体モデルでは亀裂面での相対変位を、以下のようにすべりが生じる以前の微小な相対変位に相当する”弾性成分”とすべりに相当する”塑性成分”に分解する.

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}^e + \tilde{\mathbf{u}}^p \quad (6.40)$$

従って、次式が得られる.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}_t &= \tilde{\mathbf{u}}_t^e + \tilde{\mathbf{u}}_t^p \\ \tilde{\mathbf{u}}_n &= \tilde{\mathbf{u}}_n^e \end{aligned} \quad (6.41)$$

なお、ここで法線方向にすべらない(めり込まない)ので、法線方向の相対変位の塑性成分は $\tilde{\mathbf{u}}_n^p = \mathbf{0}$ と仮定した.

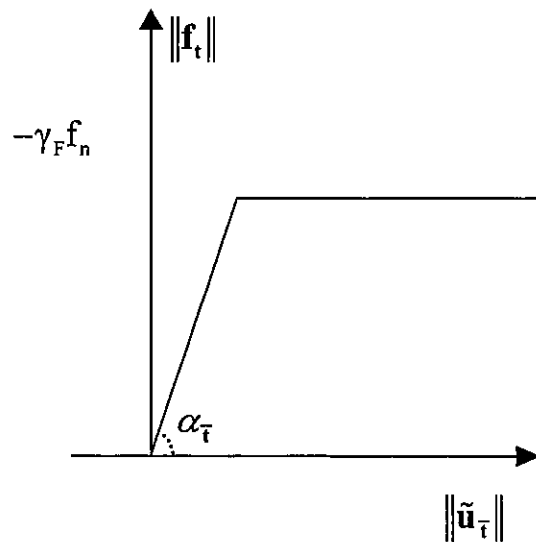


図 6.13 “弾完全塑性” 接触摩擦モデル

また、図 6.13 に示すように、弾完全塑性モデルの亀裂面の表面力は、次式のように相対変位の弾性成分で決まると仮定する。

$$\mathbf{f}_{\bar{\tau}} = \alpha_{\bar{\tau}} \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{\tau}}^e, \quad \mathbf{f}_{\bar{n}} = \alpha_{\bar{n}} \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n}}^e \quad (6.42)$$

ここに、 $\alpha_{\bar{\tau}}$ 、 $\alpha_{\bar{n}}$ らは、摩擦のすべりが生じるのは、表面力がある値以上になった場合と言われるが、実際には、表面力が小さい場合には、弾性変位が生じていると考えても、なんらおかしくない。また、数学的に考えて、ペナルティ係数であり十分大きな値を用いてもよい。

滑り始める条件、すなわち“降伏条件”は γ_F を摩擦係数として次式で与えられる。

$$\phi(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f}_{\bar{\tau}}\| + \gamma_F \mathbf{f}_{\bar{n}} = 0 \quad (6.43)$$

ここで、 $\mathbf{f}_{\bar{n}} = \mathbf{f}_{\bar{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ であり、 $\mathbf{f}_{\bar{n}} \leq 0$ の場合は式(6.43)が成り立つが、 $\mathbf{f}_{\bar{n}} > 0$ の場合、すなわち亀裂が開口している場合は $\|\mathbf{f}_{\bar{\tau}}\| = 0$ とする。

$\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n}}^p = \mathbf{0}$ を満たすために次式の塑性ポテンシャル

$$\Psi = \|\mathbf{f}_{\bar{\tau}}\| \quad (6.44)$$

を定義すると、以下のような流れ則が成立ものとする。

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{\bar{\tau}}^p = \lambda \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{f}_{\bar{\tau}}} = \lambda \frac{\mathbf{f}_{\bar{\tau}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{\tau}}\|} = \lambda \bar{\mathbf{t}} \quad (6.45)$$

また除荷・負荷判定として、下記の Kuhn-Tucker 条件が課せられている。

$$\phi \leq 0, \lambda \geq 0, \lambda \phi = 0 \quad (6.46)$$

6. 4. 3 弾完全塑性体モデルの Continuum 弾塑性係数

式(6.42)より

$$\dot{\mathbf{f}}_{\bar{\tau}} = \alpha_{\bar{\tau}} (\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{\bar{\tau}} - \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_{\bar{\tau}}^p) \quad (6.47)$$

式(6.45)を上式に代入すると、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{t}}} = \alpha_{\bar{\mathbf{t}}}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{t}}} - \dot{\lambda}\bar{\mathbf{t}}) \quad (6.48)$$

式(6.43)よりコンシステンシー条件は次式で表せる.

$$\dot{\phi} = \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{t}}} + \gamma_F \dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{n}}} = 0 \quad (6.49)$$

式(6.42)より

$$\dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{n}}} = \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}}^e \Rightarrow \dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{n}}} = \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \alpha_{\bar{\mathbf{n}}}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{n}} \quad (6.50)$$

式(6.48)と式(6.50)を式(6.49)に代入して, 次式が得られる.

$$\alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \bar{\mathbf{t}} \cdot (\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{t}}} - \dot{\lambda}\bar{\mathbf{t}}) + \gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad (6.51)$$

$$\therefore \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \dot{\lambda} = \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{t}}} + \gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (6.52)$$

式(6.52)を式(6.48)に代入して, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{t}}} &= \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{t}}} - \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \dot{\lambda} \bar{\mathbf{t}} \\ &= \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{t}}} - (\alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{t}}} + \gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{t}} \\ &= -\gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} (\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{t}} \quad (\text{注: } \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \\ &= -\gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} (\bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \dot{\bar{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (6.53)$$

式(6.51)と式(6.53)より次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{D}^{\text{ep}} \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{n}}} + \dot{\mathbf{f}}_{\bar{\mathbf{t}}} \\ &= \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} (\dot{\bar{\mathbf{u}}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{n}} - \gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} (\bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \dot{\bar{\mathbf{u}}} \\ &= [-\gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} (\bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) + \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} (\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}})] \dot{\bar{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (6.54)$$

ここで, \mathbf{D}^{ep} は亀裂面に摩擦が存在する弾完全塑性体モデルの Continuum 弾塑性係数であり, 次式で与えられる.

$$D^{ep} = -\gamma_F \alpha_{\bar{n}} (\bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) + \alpha_{\bar{n}} (\bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \quad (6.55)$$

6. 4. 4 “弾完全塑性” 摩擦接触モデルの陰解法リターンマッピング

上記のように摩擦接触を，弾完全塑性体モデルと考えれば，第5章で記述した精度が良く，計算速度も速い，リターンマッピングを使用した陰解法弾塑性解析手法が使える．図6.14に示すように，具体的には以下のようなアルゴリズムを考える．

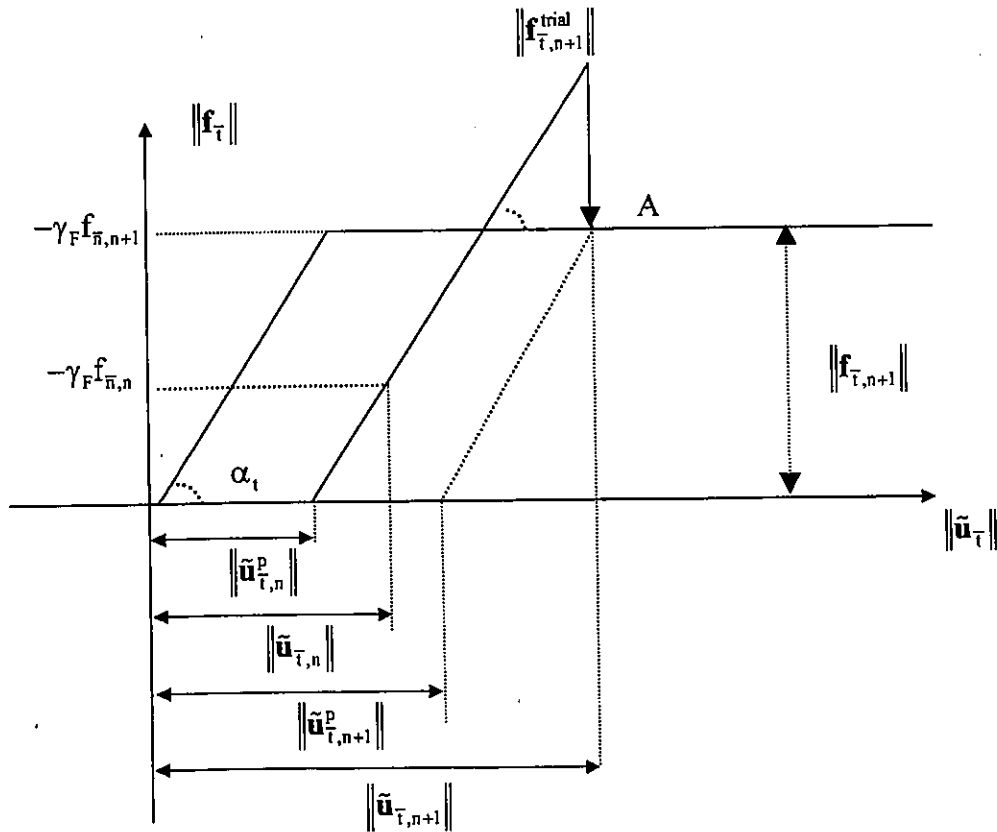


図 6.14 陰解法リターンマッピングの
接線摩擦力と相対変位の接線成分の関係

(1) Elastic Trial

N ステップ目の相対変位 $\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{t}}, n}$ と $\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{n}}, n}$ が与えられたとする．今， $n+1$ ステップ目における $\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{t}}, n+1}$ と $\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{n}}, n+1}$ が与えられたとすると，試行表面力は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\bar{t},n+1}^{trial} &= \mathbf{f}_{\bar{t},n} + \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}) \\
&= \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}^p) + \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}) \\
&= \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}^p)
\end{aligned} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{trial} &= \mathbf{f}_{\bar{n},n} + \alpha_{\bar{n}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n+1}^{(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n}) \\
&= \alpha_{\bar{n}}\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n}^e + \alpha_{\bar{n}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n+1}^{e(k)} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n}^e)(\because \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n}}^p = 0) \\
&= \alpha_{\bar{n}}\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n+1}^{e(k)} = \alpha_{\bar{n}}\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n+1}^{(k)}
\end{aligned} \tag{6.57}$$

これを降伏関数に代入し、試行降伏関数を得る。

$$\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) = \|\mathbf{f}_{\bar{t},n+1}^{trial}\| + \gamma_F \mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}} \tag{6.58}$$

If $\mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}} > 0$ (亀裂面は開口状態) then

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(k)} = 0 \quad \text{EXIT}$$

クーンタツカ条件より、

If $\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) < 0$ then Elastic step

Set $(\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{trial}$ EXIT

If $\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) > 0$ then Return Mapping

(2) Return Mapping

ステップ[n+1]における接線方向の表面力は、ステップ[n]における表面力と、相対変位増分を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{\bar{t},n+1} &= \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^p) \\
&= \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}^p) - \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^p - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}^p) \\
&= \mathbf{f}_{\bar{t},n+1}^{trial} - \alpha_{\bar{t}}\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^p
\end{aligned} \tag{6.59}$$

ここに式(6.45)より,

$$\Delta \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^p = \Delta \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \quad (6.60)$$

以上より, 式(6.59)は

$$\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1} = \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial} - \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} (\Delta \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{t}}_{n+1}) \quad (6.61)$$

法線方向の表面力は相対変位の塑性成分が存在しないので, 弾性予測と等しくなる. したがって,

$$\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1} = \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1}^{trial} \quad (6.62)$$

以上を降伏関数に代入すると,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{f}_{n+1}) &= \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial} - \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} (\Delta \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{t}}_{n+1})\| + \gamma_F (\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \\ &= \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial}\| - \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \Delta \lambda_{n+1} + \gamma_F \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1}^{trial}\| \\ &= \phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) - \alpha_{\bar{\mathbf{t}}} \Delta \lambda_{n+1} \\ &= 0 \\ \therefore \Delta \lambda_{n+1} &= \frac{1}{\alpha_{\bar{\mathbf{t}}}} \phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) \end{aligned} \quad (6.63)$$

上式を(6.61)に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1} &= \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial} - \left(\|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial}\| + \gamma_F \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \\ &= \left(\|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial}\| - \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial}\| - \gamma_F \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \\ &= (-\gamma_F \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \end{aligned} \quad (6.64)$$

ここで, 次式のように置いた.

$$\bar{\mathbf{t}}_{n+1} = \frac{\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial}}{\|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}},n+1}^{trial}\|} \quad (6.65)$$

(3) 亀裂面上の弾完全塑性体モデルの Consistent 弾塑性係数

亀裂面上の表面力は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}} + \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}}} \\ &= \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}\| \bar{\mathbf{t}} + \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}}}\| \bar{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (6.66)$$

ここで, $\bar{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}\|}$, $\bar{\mathbf{n}}$ は定数である.

式(6.66)の両辺を $\bar{\mathbf{u}}$ で偏微分すると次式となる.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \bar{\mathbf{t}} \otimes \frac{\partial \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}\|}{\partial \bar{\mathbf{u}}} + \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}\| \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} + \frac{\partial \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}}}\|}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (6.67)$$

また, 式(6.64)および式(6.42)により, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}\| &= (-\gamma_F \mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}}}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{t}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \\ &= -\gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}}}\| = \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (6.69)$$

上式を $\bar{\mathbf{u}}$ で偏微分すると下式となる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{t}}}\|}{\partial \bar{\mathbf{u}}} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} (-\gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \\ &= -\gamma_F \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial \|\mathbf{f}_{\bar{\mathbf{n}}}\|}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{u}}} (\alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{n}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}) = \alpha_{\bar{\mathbf{n}}} \bar{\mathbf{n}} \quad (6.71)$$

また, 式(6.59)は次式のように変形される.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_i &= \alpha_{\bar{i}}(\tilde{\mathbf{u}}_i - \tilde{\mathbf{u}}_i^p) \\
&= \alpha_{\bar{i}}(\tilde{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{n}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) - \alpha_{\bar{i}}\tilde{\mathbf{u}}_i^p \\
&= \alpha_{\bar{i}}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}})\tilde{\mathbf{u}} - \alpha_{\bar{i}}\tilde{\mathbf{u}}_i^p
\end{aligned} \tag{6.72}$$

一方, $\bar{\mathbf{t}}$ を $\tilde{\mathbf{u}}$ で偏微分すると下式となる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} \left(\frac{\mathbf{f}_{\bar{i}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|} \right) = \frac{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\| \frac{\partial \mathbf{f}_{\bar{i}}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} - \mathbf{f}_{\bar{i}} \frac{\partial \|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|}{\partial \tilde{\mathbf{u}}}}{(\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|)^2} \\
&= \frac{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\| \alpha_{\bar{i}}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) - \alpha_{\bar{i}}\mathbf{f}_{\bar{i}} \otimes [(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \frac{\mathbf{f}_{\bar{i}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|}]}{(\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|)^2} \\
&= \frac{\alpha_{\bar{i}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|}(\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) - \frac{\alpha_{\bar{i}}\mathbf{f}_{\bar{i}}}{(\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|)^2} \otimes (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \frac{\mathbf{f}_{\bar{i}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|} \\
&= \frac{\alpha_{\bar{i}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|} \{ (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) - ((\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{t}}) \bar{\mathbf{t}} \} \\
&= \frac{\alpha_{\bar{i}}}{\|\mathbf{f}_{\bar{i}}\|} (\mathbf{I} - \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{t}}) = 0
\end{aligned} \tag{6.73}$$

以上の結果を式(6.67)に代入すれば次式が得られる.

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = -\gamma_f \alpha_{\bar{n}} \bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \alpha_{\bar{n}} \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \tag{6.74}$$

すなわち, 弾完全塑性体モデルの Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{D}}^{\text{ep}}$ は次式で表せる.

$$\bar{\mathbf{D}}^{\text{ep}} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tilde{\mathbf{u}}} = -\gamma_f \alpha_{\bar{n}} \bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \alpha_{\bar{n}} \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \tag{6.75}$$

式(6.63)から分かるように, 2次元問題の場合には Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{D}}^{\text{ep}}$ は, 亀裂面に摩擦が存在する弾完全塑性体モデルの Continuum 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{D}}^{\text{ep}}$ と全く同様であることが証明できた.

6. 5 結言

1) 拡張有限要素法 (X-FEM : eXtended Finite Element Method) は, 亀裂などの変位の不連続面を有する要素に対して, その不連続量を単に要素節点に新たな自由度として付加す

ることにより亀裂面の変位の不連続を表現できるようにしたものである。X-FEM は、未知量の増加により計算時間は多少増加するが、従来の有限要素法に付加的な自由度を加えるだけでよく、比較的容易にプログラムを作成することが可能である。

本論文では弾塑性体挙動する地盤体の破壊解析にあるため、あえて、応力の $-1/2$ 特異性を持つような変位分布の自由度を導入せず、強不連続解析の場合と同様に、変位の不連続量を表わす自由度のみ考慮し、亀裂先端を常に要素辺上に設定した簡便な X-FEM の手法を提案した。

2) 地盤にかかる荷重は引張の場合は稀であり、通常圧縮荷重である。その際、圧縮荷重下においては亀裂間に摩擦が発生する。そこで、本研究においては亀裂面が圧縮荷重下であり、亀裂面上に摩擦力が発生する問題への X-FEM 手法の開発を試みた。その中で、釣り合い式の弱形式中の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換える摩擦モデルを採用した。そしてその解法にも、Newton-Raphson による、リターンマップ手法を用いた陰解法弾塑性解析を行えるよう定式化を行なった。

3) 亀裂面上に発生する摩擦接触問題と物体の弾塑性問題が全く同一手法による連立増分・反復結合法となるため、アルゴリズムが非常に簡単になる利点を有したものとなった。

参考文献

- 1) J.C.Simo : On the variational foundations of assumed strain methods, J. Appl. Mech. 53 , pp.51-54,1986.
- 2) Oliver ,J. : Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2 : Numerical simulation, Int. J. Num. Meths. Engng. 39, pp.3601-3623, 1996.
- 3) Ortiz M, Leroy Y, Needleman A. : A finite element method for localized failure analysis , Comput. Meths. Appl. Mech. Engng. 61, pp.189-214,1987.
- 4) R.A.Reguerio and R.I.Borja : A finite element model of localized deformation in frictional materials taking a strong discontinuity approach , Finite elements in Analysis and Design, 33, pp.283-315, 1999.
- 5) F.Armero and K.Garikipati : An analysis of discontinuity in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids, Int. J. Solids Structures, 33, pp.2863-2885, 1996
- 6) Ronaldo I. Borja : Finite element simulation of strain localization with large deformation capturing strong discontinuity using a Petrov-Galerkin multiscale formulaton, Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg. 191, pp.2949-2978, 2002
- 7) T. Belytscheko and T. Black : Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing ,

Int. J. Num. Meths. Engng, 45, pp.601-620, 1999.

- 8) N. Moes, J. Dolbow and T. Belytschko : A finite element method for crack growth without remeshing, Int. J. Num. Meths. Engng, 46, pp.131-150, 1999.
- 9) Melenk,J.M. and Babuska, I., The partition of unity finite element method: Basic theory and applications, Comput.Methods Appl. Mech. Engrg., 139,pp.289-314,1996.
- 10) Babuska, I. and Melenk,J.M., The partition of unity methods, Int.j.numer.methods eng.,40, pp.727-758, 1997.
- 11) J. Dolbow, N. Moes and T. Belytschko : An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact,Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 19, pp. 6825--6846, 2001.
- 12) P.Ladevèze: Nonlinear Computational Structural Mechanics, New York:Spring Verlag, 1998.
- 13) Peri'c, D. and Owen, D.R.J.: Computational Model for 3-D Contact Problems With Friction Based on the Penalty Method, Int.J. for Num. Meth. In Eng., Vol.35, pp.1289-1309,1992.
- 14) J. C. Simo, T.J.R.Hughes : Computational Inelasticity, Springer-Verlag New York,1998.

第7章 拡張有限要素法 (X-FEM) による 弾性および弾塑性破壊解析の精度検証

7. 1 緒言

本章では、まず、第6章で詳述した X-FEM 手法を用いて、無限板中央に亀裂があり、それを、亀裂と垂直な方向に一軸引っ張り荷重を作用させた場合において、亀裂の任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を計算し、C. H. Wu¹⁾ による半理論解との比較を行う。

次に、等方弾性体中の亀裂面が圧縮荷重下であり、亀裂面上に摩擦力が発生する問題への X-FEM 手法の応用を試みた。その中では、釣り合い式の弱形式中の亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロン摩擦を模擬した弾完全塑性体に置き換える摩擦モデルとし、その部分を、以前から汎用されている陽解法増分法に比べて、最近、弾塑性解析手法として世界的に注目を浴びている増分・反復結合法である、精度が良く計算時間も早い、リターンマップ手法を用いた陰解法弾塑性解析を行なった。この新しく開発した X-FEM 解析手法を用いて、一軸及び二軸圧縮荷重下にある亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を補ひずみエネルギー積分公式を使用して、亀裂が直進する場合には、理論式との比較を行い、亀裂が折れ曲がる場合は、従来 FEM の結果²⁾ との特性と比較検討を行う。

さらに、亀裂面が圧縮荷重下であり、亀裂面上に摩擦力が発生し、物体が弾塑性体の場合である場合への X-FEM の応用を試みた。物体が弾塑性体の場合への応用は、世界でも初めてのことであり、弾塑性体モデルには、比較的簡単な Drucker-Prager 弾塑性モデルを仮定した。この弾塑性体の解法アルゴリズムも、前記した亀裂面上に摩擦力が発生する問題同様、Newton-Raphson 法によるリターンマップ手法を用いた弾塑性解析を行なった。したがって、亀裂面上に発生する摩擦接触問題と物体の弾塑性問題が全く同一手法による連立増分・反復結合法となるため、アルゴリズムが非常に簡単になる利点を有している。なお、二軸圧縮荷重下での弾塑性体内に存在する亀裂先端近傍の、特に、応力分布について考察した。弾性体の場合には、理論式との比較を行い、弾塑性体の場合は、従来の FEM 解析による結果³⁾ との比較検討を行う。

7. 2 引張荷重下にある線形等方弾性体の X-FEM の精度検証

本節では、無限板中央に亀裂があり、それを、亀裂と垂直な方向に引っ張り荷重を作用させた場合の基本的な問題を解く。まず、その解析における、亀裂方向にある σ_y の分布を理論解と比較検討する。次に、亀裂の任意方向折れ曲がり時のエネルギー解放率を計算し、提案した X-FEM の妥当性を検証する。しかしながら、線形等方弾性体の 2次元の場合でもこの任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率は完全な理論解は、モードⅢの場合を除いて存在しない。ただし、かなり信頼性が高いといわれている Wu による半解析解¹⁾ が知られているので、この半解析解との比較検討を行な

う。X-FEM では、リメッシュの場合と異なり、どんな角度への折れ曲がりも可能である。したがって、この任意方向折れ曲がり時のエネルギー解放率の解析は、X-FEM の最大の長点である任意方向折れ曲がり解析のひとつの精度の検証にもなる。

7. 2. 1 引張荷重下にある線形等方弾性体の X-FEM 連立剛性方程式

物体は、2 個の定数を持った \mathbf{C}^e を弾性構成テンソルとした線形等方弾性体と仮定する。変形は微小であるとし、運動は準静的であり、物体力も無いものとする。なお本論文では以上の仮定を以降全てに適用する。本節では、更に、亀裂表面は自由表面であり、亀裂面間に摩擦などの表面力は生じないものとする。この時、 $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^e \boldsymbol{\varepsilon}$ とひずみ式(6.16)を用いて式(6.17)と式(6.18)に代入すると、次のように、連続節点変位 \mathbf{a} と不連続節点変位 \mathbf{b} の連立線形方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a \\ \mathbf{f}_b \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

ここに、

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (7.2)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (7.3)$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T = \mathbf{A} \int_{\Omega_e^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (7.4)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_e^+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \right) \quad (7.5)$$

ここで Ω_e , Ω_e^+ はそれぞれ、第6章で述べたとおりである。式(7.1)の右辺は、次式となる。

$$\mathbf{f}_a = \mathbf{A} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega \quad (7.6)$$

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{A} \int_{\Gamma_e^+} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (7.7)$$

ここで、 $\Gamma_f e$ は要素に属する表面力境界 Γ_f の一部分を示している。

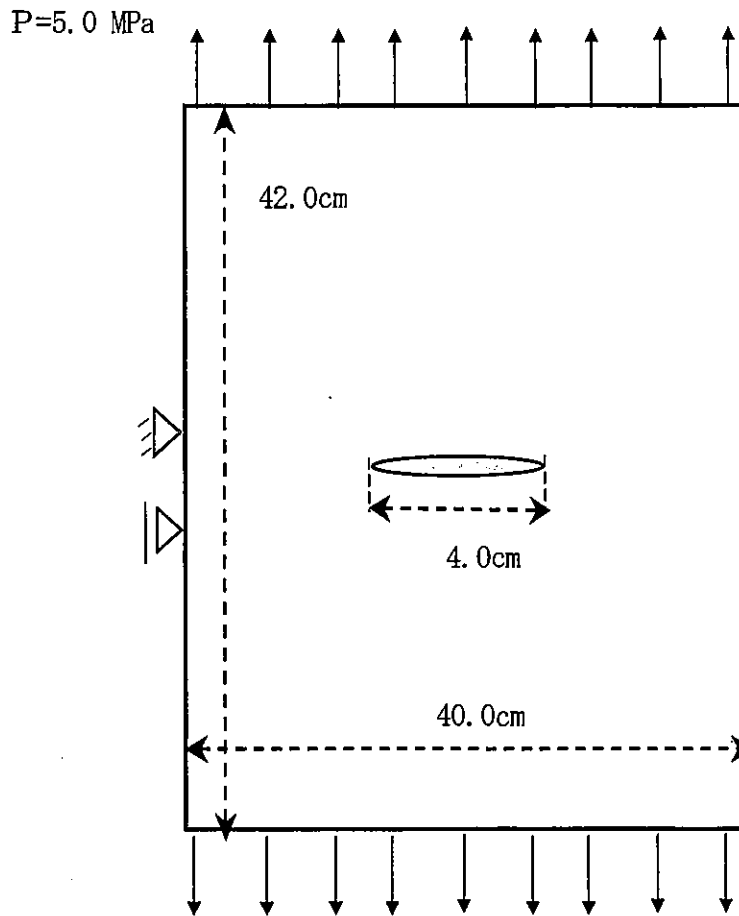


図 7.1 中央に亀裂を有する 2 次元長方形モデル

7. 2. 2 精度検証解析

図 7.1 に示す様に、長さ 4.0cm の亀裂を中央に有する、縦 42cm、横 40.0cm の長方形で無限版の近似モデルと考え、亀裂と垂直な方向に一様引張り荷重 $P = 5.0 \text{ MPa}$ が作用しているモデルを解析する。材料定数は、ヤング率 $E = 72.0 \text{ MPa}$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ とした。

X-FEM 解析モデルのメッシュ分割は、図 7.2 に示す。この図では、亀裂の上下に三角形要素があるが、前記したように、3 角形の一つの頂点を二つに分離して、4 節点四角形アイソパラメトリック要素に変換する方法を採用しているため、近似モデルの要素は、全て 4 節点アイソパラメトリック要素であり、合計 1960 節点 2024 要素に分割している。なお、物体の剛体変位を取り除くため、

長方形モデル中央左端の要素の左上の節点変位は、 X 、 Y 両方向を固定し、左下の節点変位は、 Y 方向の変位のみを固定した。(図 7.1, 図 7.2 参照) 亀裂は、中央線の一つ下の要素内の中央に沿って挿入している。亀裂先端の変位をゼロとするため、亀裂先端は、亀裂を含む要素辺中央上に設置し、その節点を含む要素辺の上下の節点には、節点不連続量 b は付加しない。

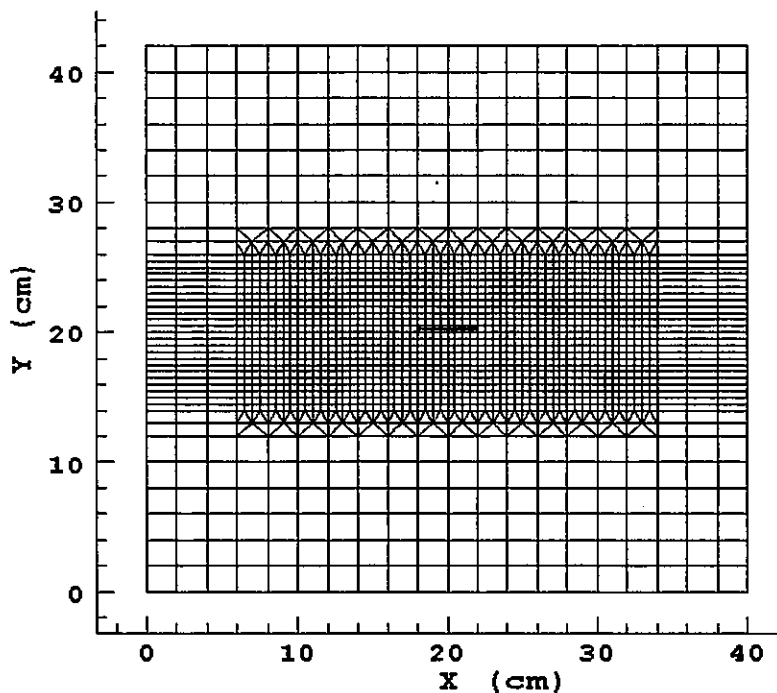


図 7.2 解析モデルのメッシュ分割

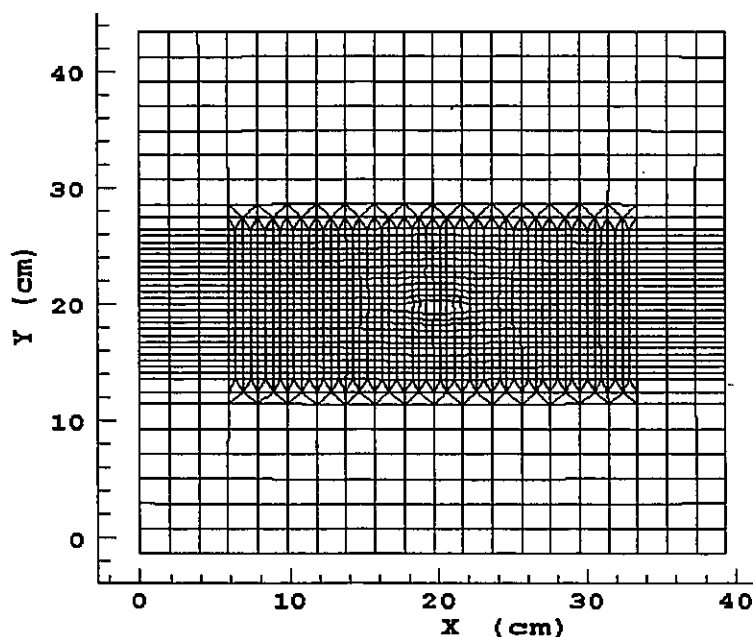


図 7.3 変形図

まず、最終変位状態での変形図を図 7.3 に示す。微小な変形を変位で図示している。変形が不連続面近傍に局所化している様子が確認できる。

次に、応力 σ_y の数値解を検討する。図 7.4 に示す中央に $2a$ の長さの亀裂を持つ無限板を考える。角度 θ , θ_1 , θ_2 および長さ r , r_1 , r_2 はそれぞれ亀裂中央、右端、左端での値、 σ_y^∞ は無限遠点での一様引張り応力である。この様な場合、点 A の σ_y の理論解は第 2 章で紹介した Westergaard の応力関数を使用することにより次式で与えられる。

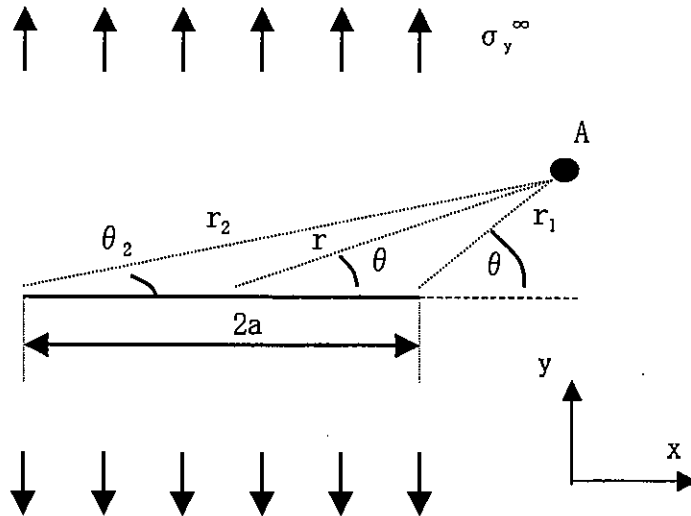


図 7.4 一様引張りを受ける中央亀裂を有する無限板

$$\sigma_y = \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sigma_y^\infty \left[\cos \left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin \theta \sin \left\{ \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \quad (7.8)$$

図 7.5 に、亀裂右端から右側の応力 σ_y の分布図を本 X-FEM 解析による解と上記理論解とともに示す。なお数値解析による応力 σ_y の値は、ガウス積分点の値が最も正確であるため、亀裂延長線上より少し上の位置での値で比較してある。本解析解は亀裂先端付近で応力が增大する理論解の特徴を表している。ただし、本 X-FEM 手法では、亀裂先端を囲む要素節点に線形等方弾性体の場合の特異応力を表す関数を付加していないため、それを付加した手法に比べ、亀裂先端近傍の解の精度は劣るであろうが、通常の有限要素法による図 7.2 のようにメッシュ分割された場合の解と同程度の精度が得られていると考えられる。図 7.5 の結果からも、図 7.2 のようにメッシュ分割された場合における σ_y は比較的良好と言える。

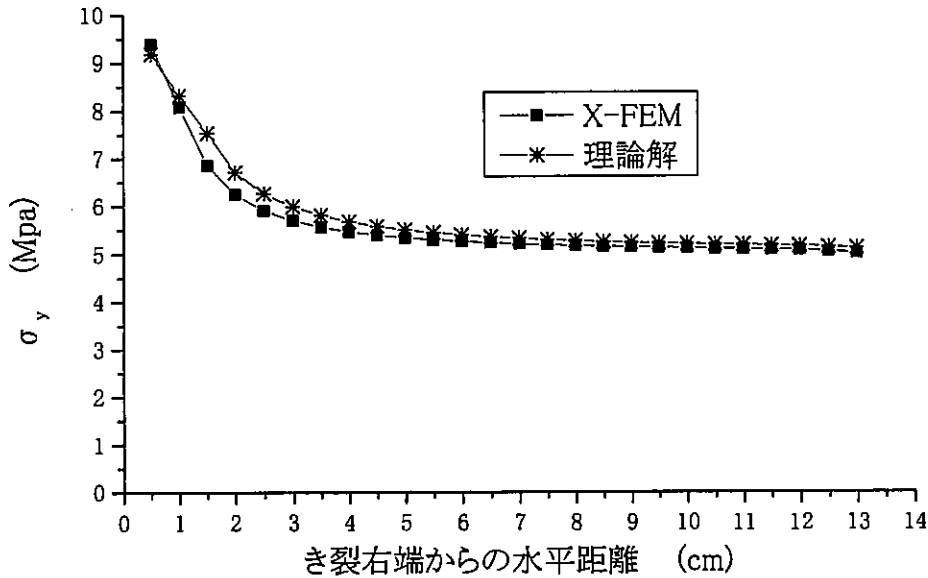


図 7.5 亀裂先端近傍の σ_y の分布図

7. 2. 3 X-FEM 解析を用いたE積分による亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の解析

前節では亀裂が直線の場合の、本 X-FEM 手法の精度の検証をしたが、本節では、亀裂が折れ曲がる場合の精度の検証を行う目的もあり、亀裂折れ曲がり瞬間時エネルギー解放率を求め、理論解と比較する事により、その精度の検証を行う。

7. 2. 3. 1 E積分によるエネルギー解放率とその近似公式

本研究では線形等方弾性体を扱うので、エネルギー解放率を求める経路独立な E 積分は、進展亀裂先端を含む物体内の任意の領域の全境界 Γ 上の経路積分として第 3 章の式(3.38)を用いる。

$$E = \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2} \mathbf{t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial l} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial l} \cdot \mathbf{u} \right) ds \quad (7.9)$$

ここで、 \mathbf{t}, \mathbf{u} はそれぞれ、 Γ 上の表面力および変位である。また、 l は、亀裂の長さである。

数値解析においては、亀裂長さに関する微分項を亀裂進展前と進展後の 2 点差分近似をする。その時、式(7.9)は次式のようなになる。

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ \mathbf{t}_i(\ell) \cdot \frac{\mathbf{u}_i(\ell + \Delta\ell) - \mathbf{u}_i(\ell)}{\Delta\ell} - \frac{\mathbf{t}_i(\ell + \Delta\ell) - \mathbf{t}_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot \mathbf{u}_i(\ell) \right\} \Delta s \quad (7.10)$$

ここに、 n は経路における要素辺の数、 Δs は各要素辺の長さ、 $\Delta\ell$ は亀裂進展長さである。また (ℓ) および $(\ell + \Delta\ell)$ は、それぞれ亀裂の進展前と進展後の物理量を表している。このE積分によれば、破壊力学で周知のJ積分では求める事が不可能であった任意方向折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率が経路独立な積分で求めることが出来る。

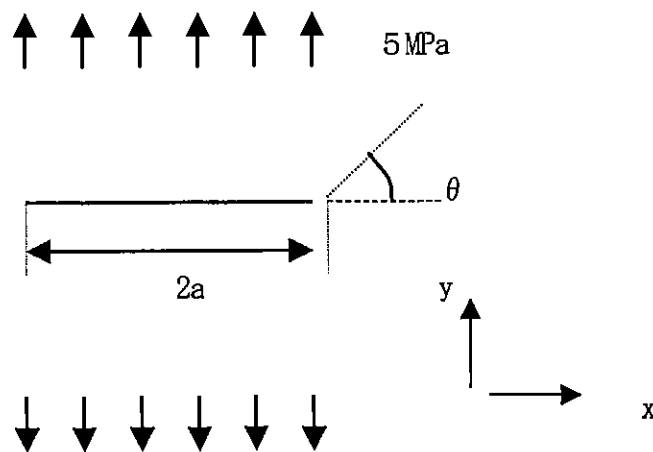


図 7.6 一様引張り荷重下の亀裂折れ曲がりモデル

7. 2. 3. 2 X-FEM 解析を用いたエネルギー解放率の解析

本節では、図 7.6 に示すように、節 7.2.2 で解析したものと同様なモデルを使用し、亀裂と垂直な方向に一様引張り荷重 $p=5.0\text{MPa}$ が作用している場合の、亀裂右先端が折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率を、本 X-FEM により得た数値解析解を利用し、式(7.10)によって求める。

なお、エネルギー解放率を算出する積分経路は、図 7.7 のように、亀裂右先端を囲む経路内側の閉経路を 1、外側の閉経路を 2、及び両側先端を囲む経路内側の閉経路を 3、外側の閉経路 4 の合計 4 種類設定した。(番号が小さいほうが、小さな閉経路となっている。)なお、E 積分では積分経路を要素辺上に設定し、ひずみや応力より精度の良い節点での表面力、変位のみで計算することができるため、ひずみないし応力が必要な周知の J 積分より精度が良い。

なお、主亀裂面からの折れ曲がり角度 θ は、 0° 、 18° 、 36° 、 54° 、 72° 、 89° の計 6 方向に進展する場合を解析した $\theta = 0^\circ$ 即ち亀裂が直進する場合のエネルギー解放率の経路の違いによるエネルギー解放率を図 7.8 に示す。ここで、縦軸は数値解析結果を理論解で除して正規化している。横軸は 4 個の積分経路の番号である。解析結果により、亀裂先端のみを囲む経路 1 と 2 および亀裂両先端を囲

む 3, 4 とすべての経路において一定の値となっており経路独立性が非常に良い精度で成立していることがわかる(経路誤差 0.003%以下)。また, 無限板の理論解との誤差も 0.3%以下とエネルギー解放率の精度も非常に良いことがわかる。

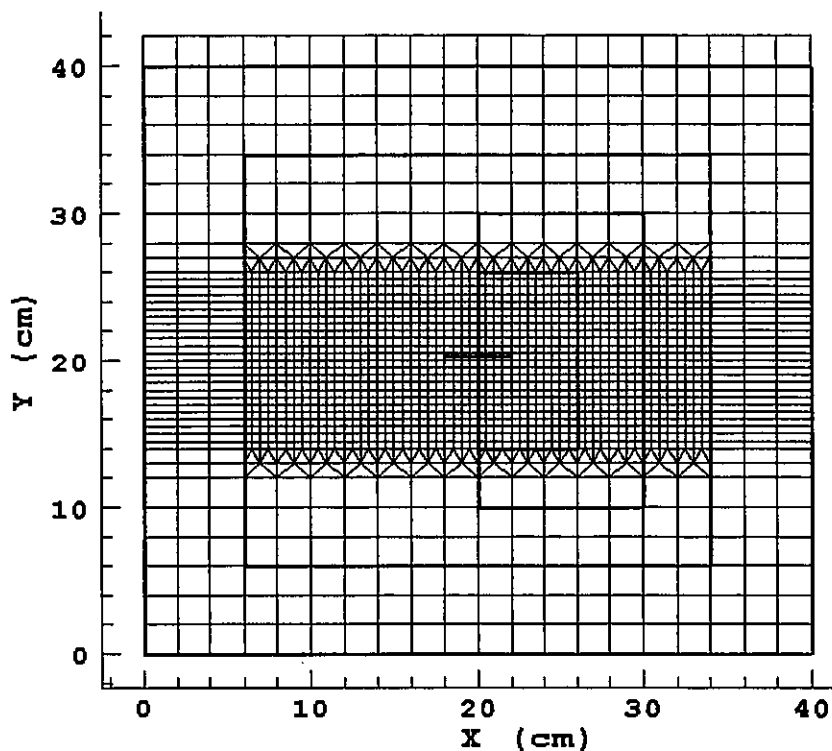


図 7.7 積分経路の設定

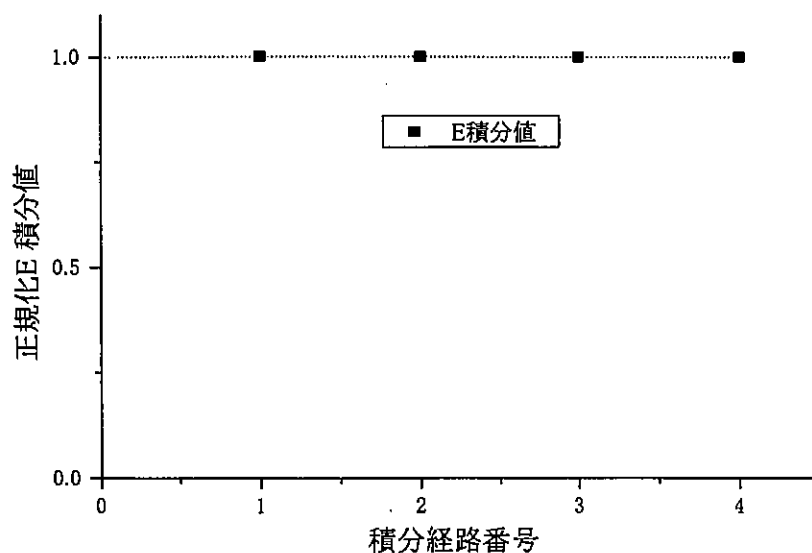


図 7.8 経路独立性の検証

図 7.9 は、亀裂面に垂直な方向に一様引張応力を載荷した場合の亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求めた結果であり、横軸は亀裂折れ曲がり角度 θ 、縦軸は亀裂がまっすぐ進む場合の理論解により求めたエネルギー解放率で正規化してある。折れ曲がり角度が負方向の値は、結果が正方向と同一となる対称性を確認したため、図では省略してある。図中■で示してあるのが本解析結果であり、破線で示したものがWuの半解析解¹⁾である。なお、文献1)には、 $\theta \leq 0.4\pi$ までしか得られていない。この亀裂の折れ曲がりの問題はモードIII以外厳密な理論解が存在しないが、このWuの結果はその他の多くの研究者によって確かめられており、最も信頼できる解である。そのWuの結果と本解析の結果は非常に良く一致していることが分かる。

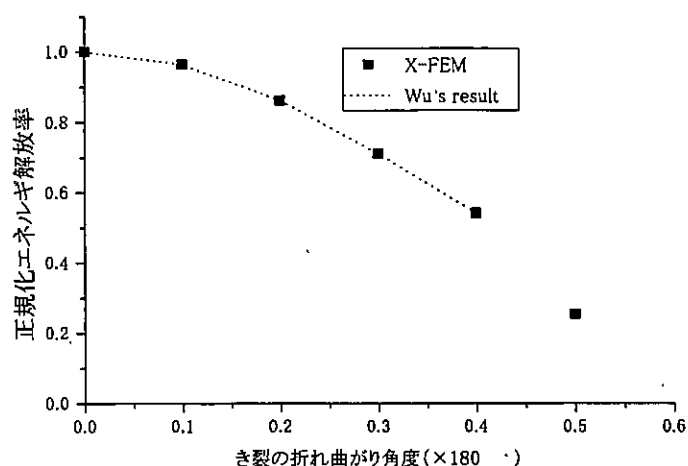


図 7.9 本 X-FEM による解と Wu の解の比較

7. 3 摩擦力が存在する場合の X-FEM の精度検証

節 7.2 では、提案した X-FEM 手法を用いて、無限板中央に亀裂があり、それを、亀裂と垂直な方向に一軸引っ張り荷重を作用させた場合における解析を行ったことにより本 X-FEM 手法の有効性を確認した。

一方、研究目的である地盤の地滑りやコンクリートや岩盤などの破壊現象では、引っ張り荷重下にある場合は稀であり、ほとんど場合、圧縮荷重下であり、亀裂面上には摩擦力が生じる。そこで、本節では、第 6.4 節で新しく開発した亀裂面上の表面力と相対変位の関係を、クーロンの摩擦を模擬した弾完全塑性体を、リターンマップを使用した X-FEM 陰解法弾塑性解析を用いて、一軸及び二軸圧縮荷重下にある亀裂折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を補ひずみエネルギー E 積分公式を使用して、亀裂が直進する場合には、理論式との比較を行い、亀裂が折れ曲がる場合は、既報の結果²⁾との比較検討を行なう。

7. 3. 1 X-FEM 接触解析の増分線形連立剛性方程式

節 6.4 で詳述した増分節点変位に関する線形連立剛性方程式は、物体が線形等方弾性体とするため、 $\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}^e$ となる。式(6.27)、式(6.28)、式(6.29)、式(6.30)、式(6.31)はそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},a} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},b} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int},a} \\ \mathbf{F}_{\text{int},b} \end{bmatrix} \quad (6.27 \cdot \text{前出})$$

ここで、

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{\text{ne}} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (7.11)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{A} \int_{\Omega_b^+}^{\text{ne}+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (7.12)$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T = \mathbf{A} \int_{\Omega_b^+}^{\text{ne}+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega \quad (7.13)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_b^+}^{\text{ne}+} \mathbf{B}^T \mathbf{C}^e \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_c^e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \right) \quad (7.14)$$

式(6.27)の右辺は、次式となる。

$$\mathbf{F}_{\text{int},a} = \mathbf{A} \int_{\Omega_e}^{\text{ne}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \quad (6.19 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},a} = \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Omega \quad (6.20 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{F}_{\text{int},b} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_b^+}^{\text{ne}+} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{N}^T \mathbf{f} d\Gamma \right) \quad (6.21 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{F}_{\text{ext},b} = \mathbf{A} \int_{\Gamma_c^+} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (6.22 \cdot \text{前出})$$

7. 3. 2 X-FEM 摩擦接触解析のアルゴリズム

境界で与えられた表面力ベクトルや変位を n 等分して、 n 個のステップに分け、各ステップでの表面力ベクトルや変位において、各反復回数での応力やひずみの近似解を、図 7.10 のように

Newton-Raphson 法を用いて求める。

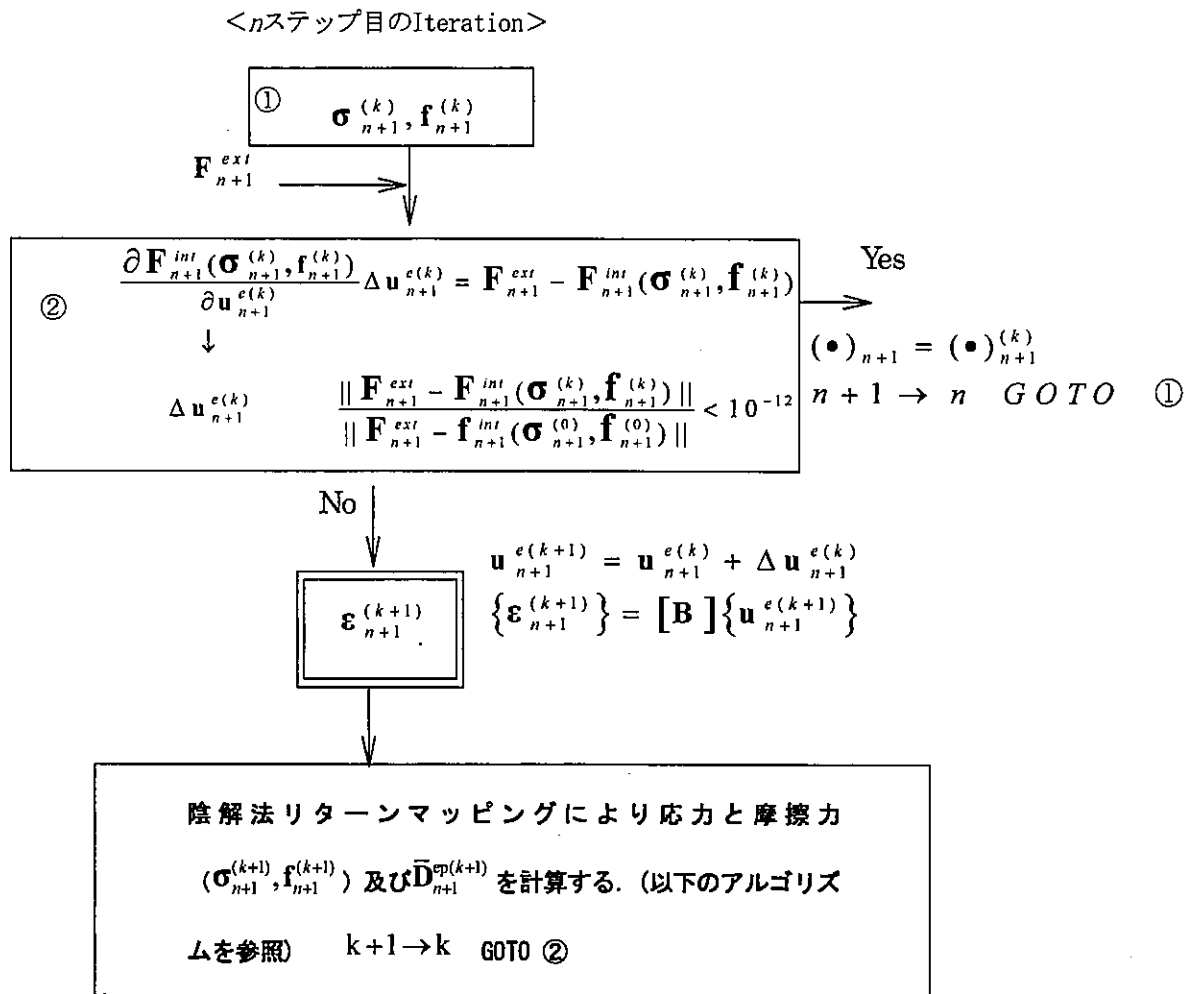


図 7.10 X-FEM 解析のアルゴリズム

一方、亀裂面上での弾完全塑性体の増分・反復法及び陰解法リターンマッピングのアルゴリズムは節 6.4 で詳述したので、ここでは、取りまとめるため重要な亀裂面上での表面力計算のアルゴリズムのみを述べる。

まず、求めた $\tilde{\mathbf{u}}_{t,n+1}^{(k)}$ と $\tilde{\mathbf{u}}_{n,n+1}^{(k)}$ を用いて、固着を仮定して次式より弾性予測を行なう。

$$\mathbf{f}_{\bar{t},n+1}^{trial} = \mathbf{f}_{\bar{t},n} + \alpha_{\bar{t}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n+1}^k - \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{t},n}) \quad (6.56 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{trial} = \alpha_{\bar{n}} \tilde{\mathbf{u}}_{\bar{n},n+1}^k \quad (6.57 \cdot \text{前出})$$

次は、リターンマッピングを行うかどうか判断するため、次式より $\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial})$ を計算する。

$$\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) = \|\mathbf{f}_{t,n+1}^{trial}\| + \gamma_F \mathbf{f}_{n,n+1}^{trial} \quad (7.15)$$

If $\phi(\mathbf{f}_{n+1}^{trial}) < 0$ then Elastic step

Set $(\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{trial}$ EXIT

Else

リターンマッピングより降伏面に乗る表面力は次式より計算する。

$$\mathbf{f}_{t,n+1}^{(k)} = (-\gamma_F \mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{trial} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \bar{\mathbf{t}}_{n+1} \quad (6.64 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{(k)} = \mathbf{f}_{\bar{n},n+1}^{trial} \quad (6.62 \cdot \text{前出})$$

最後、2次元問題の場合には、次の反復が必要とする Consistent 弾塑性係数 $\bar{\mathbf{D}}^{ep}$ は、次式により計算する。

$$\bar{\mathbf{D}}^{ep} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} = -\gamma_F \alpha_{\bar{n}} \bar{\mathbf{t}} \otimes \bar{\mathbf{n}} + \alpha_{\bar{n}} \bar{\mathbf{n}} \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (6.75 \cdot \text{前出})$$

また、式(6.75)を式(7.14)の \mathbf{K}_{bb} 中に代入し数値解析を行うため、亀裂面に対する一次積分を計算しなければならない。本研究ではニュートン・コーツのシンプソン則を用いて次式で評価した。

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{ce}} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \\ & = \frac{h}{3} [(\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{D}}^{ep} \mathbf{N})_A + (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{D}}^{ep} \mathbf{N})_C + (\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{D}}^{ep} \mathbf{N})_B] \end{aligned} \quad (7.16)$$

式(7.16)の A, B, C は、それぞれ亀裂面の要素積分点である(図 6.6 を参照)、また h は要素内の亀裂の長さである。 $\bar{\mathbf{D}}^{ep}$ は式(6.75)により計算する。

一方、次の反復が必要となる式(6.21)中の $\mathbf{F}_{int,b}$ は式(6.64)と式(6.62)を用いて計算する。

7. 3. 3 X-FEM 解析モデル及び精度の検証

1. 解析モデル

本研究で提案した解析手法を検証するために、図 7.11 に示すように 2次元線形等方弾性体であり、ヤング係数 $E = 70GPa$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ 、中央に長さ $l = 4cm$ の亀裂が存在しており、無限遠方より 2軸圧縮分布応力 σ_1 と σ_3 が作用している無限板のモデルを考える。亀裂(変位不連続)は、最大圧縮 σ_1 応力方向から γ 傾いて存在している。また、 α_t, α_n の値はヤング係数 E と同じ値とした。

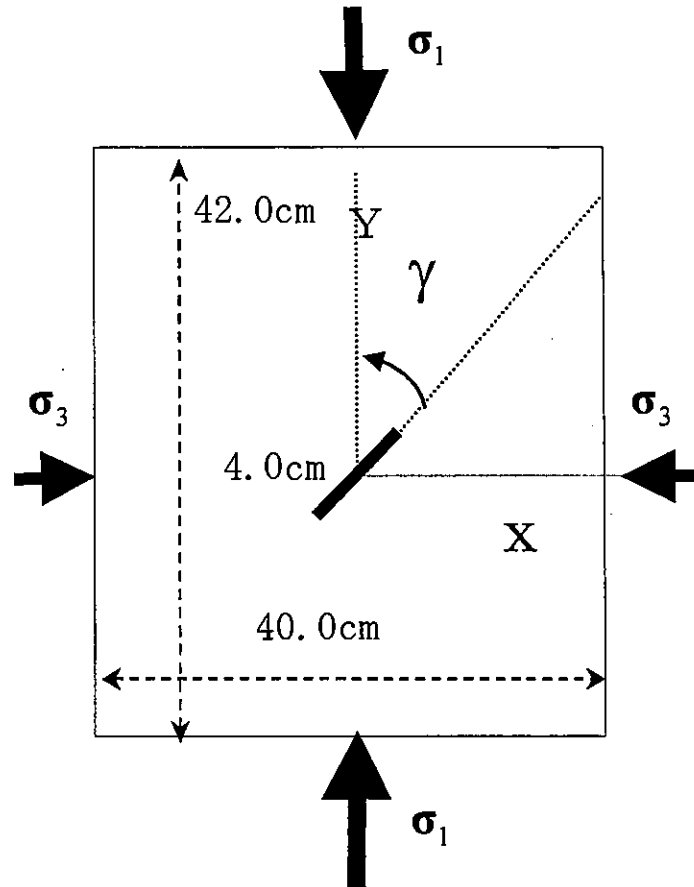


図 7.11 無限板解析モデル

なお、図 7.11 のようなまま X-FEM 解析モデルを作ると、亀裂の角度 γ を変化させる場合、要素の配置や形状を変更することが必要になり非常に面倒である。本研究では、図 7.11 と等価である図 7.12 のような X-FEM 解析モデルを作成し、亀裂の角度 γ を変化させる場合には、下式(7.17)のような応力の変換関係を使って荷重を変化させた。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \sigma_1 \cos^2 \gamma + \sigma_3 \sin^2 \gamma \\
 \sigma_y &= \sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma \\
 \tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

$$E = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{t_i(\ell + \Delta\ell) \cdot \mathbf{u}_i(\ell + \Delta\ell) - t_i(\ell) \cdot \mathbf{u}_i(\ell)}{2\Delta\ell} - \frac{t_i(\ell + \Delta\ell) - t_i(\ell)}{\Delta\ell} \cdot \mathbf{u}_i(\ell) \right\} \quad (7.19)$$

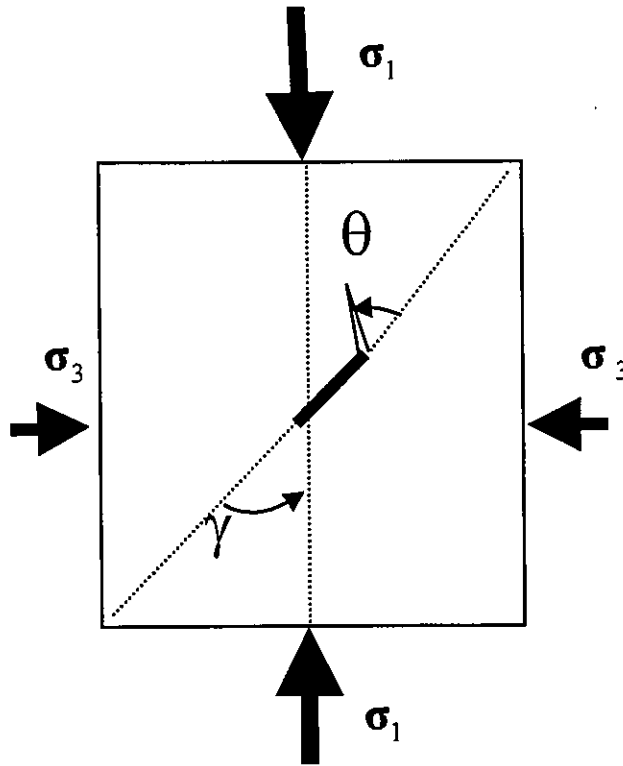


図 7.13 折れ曲がり進展亀裂

3. X-FEM 解析を用いたエネルギー解放率の解析

本節では、図 7.13 のように、亀裂右先端が折れ曲がり進展する瞬間時のエネルギー解放率を求める。また、エネルギー解放率を算出する積分経路は、前節の図 7.7 と同様の 4 個の経路を考えた。圧縮荷重下 ($\sigma_1 < 0, \sigma_3 < 0$) の場合では、亀裂面の大部分は閉じて接触しながら進展するため、亀裂面上の各点で摩擦力が存在する。このときの亀裂が直進方向に進展する場合のモード II の場合のエネルギー解放率の理論解は、次式で与えられる。

$$\begin{cases} G = \frac{\pi l}{2E} [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma - \mu(\sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma)]^2 \\ \quad \text{for } [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma - \mu(\sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma)] < 0 \\ G = 0 \\ \quad \text{for } [(\sigma_1 - \sigma_3) \sin \gamma \cos \gamma - \mu(\sigma_1 \sin^2 \gamma + \sigma_3 \cos^2 \gamma)] \geq 0 \end{cases} \quad (7.20)$$

7. 3. 4 一軸圧縮荷重下にある摩擦力が存在する直進進展亀裂のエネルギー解放率

図 7.14 は一軸一様圧縮荷重 σ_1 を $\gamma = 0.25\pi$ ($=45^\circ$) の方向から比例的に載荷した時に、亀裂が直進する場合 ($\theta = 0.0\pi$ とした場合) のエネルギー解放率である。横軸は経路番号であり、縦軸は無限遠からの一様引っ張り荷重下にある進展亀裂の理論解により求まるエネルギー解放率

$$G = \frac{\sigma_1^2 \pi l}{2E} \quad (7.21)$$

で正規化してある。以後すべて正規化したエネルギー解放率とは、補ひずみエネルギー型 E 積分公式 (7.18) の数値解公式 (7.19) の値を、式 (7.21) で正規化したものである。図 7.14 からわかるように、進展亀裂右先端のみを囲む経路 1, 2, および進展亀裂両先端を囲む経路 3, 4 のどの経路においても、一定の値となっており経路独立性が示されている。

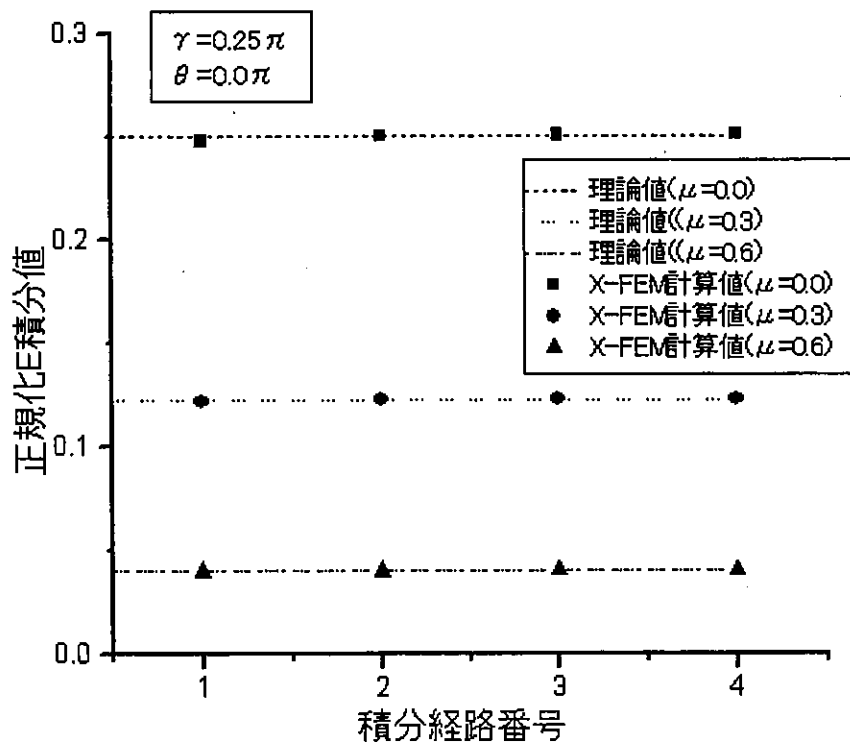


図 7.14 経路独立性の検証

また、摩擦係数 μ は0.0, 0.3, 0.6の3つの場合をそれぞれ解析したが、どの摩擦係数でも経路独立性が示されていることがわかる。また図中の点線は式(7.20)で表される亀裂面上に摩擦力が存在する場合のエネルギー解放率の理論解であり、本解析方法によるエネルギー解放率と非常に良く一致していることがわかる。また、その誤差は摩擦係数の大きさに関わらず、どの経路においても約0.25%程度と、無限板を有限板にした差と一致しており、非常に良い精度で解析できていることが分かる。

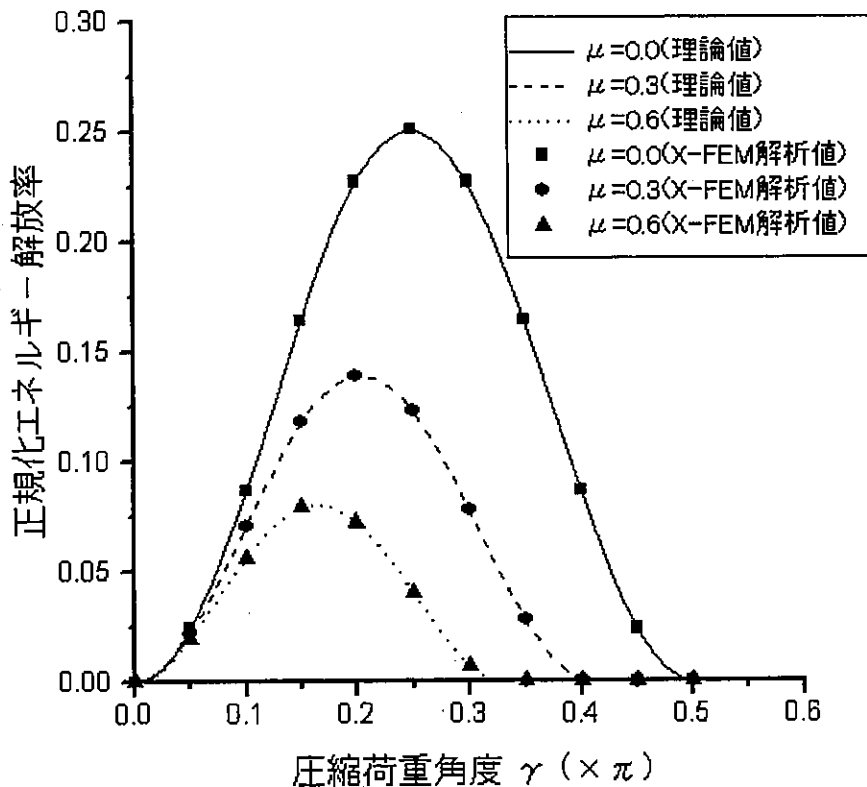


図 7.15 一軸圧縮荷重角度 γ の変化とエネルギー解放率

図 7.15 は一軸圧縮荷重下で圧縮荷重角度 γ を 0.0π から 0.5π まで 0.05π ごと、また摩擦係数 μ を0.0, 0.3, 0.6と変えた時のエネルギー解放率を求めたものである。横軸は圧縮荷重角度 γ であり、縦軸は正規化したエネルギー解放率である。図中曲線は式(7.20)で表される理論解である。どのような圧縮荷重角度においても理論解との誤差は約0.25%以内であった。この図からも圧縮荷重下での進展亀裂のエネルギー解放率の解析に、E積分を用いた本論文による摩擦を考慮したX-FEM解析が有効であることが示されている。また、圧縮荷重角度がある値以上になると、摩擦力により亀裂面は動かなくなり、エネルギー解放率がゼロとなることもわかる。そのエネルギー解放率がゼロとなる圧

縮荷重角度は、式(7.20)によると、摩擦係数 μ が0.3の時は $\gamma \cong 0.41\pi$ 、 μ が0.6の時は $\gamma \cong 0.33\pi$ となることが分かるが、本解析でも図7.15の様に、同様の荷重角度付近でエネルギー解放率がゼロとなっていることが分かる。

7.3.5 一軸圧縮荷重下にある摩擦力が存在する折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

節7.3.4で一軸圧縮荷重下の場合に摩擦力が存在する直進亀裂の問題を解析し、理論解と比較することにより本論文によるX-FEM解析が有効であることが確かめられた。次に、この方法を用いて折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を解析し、その進展特性を議論する。

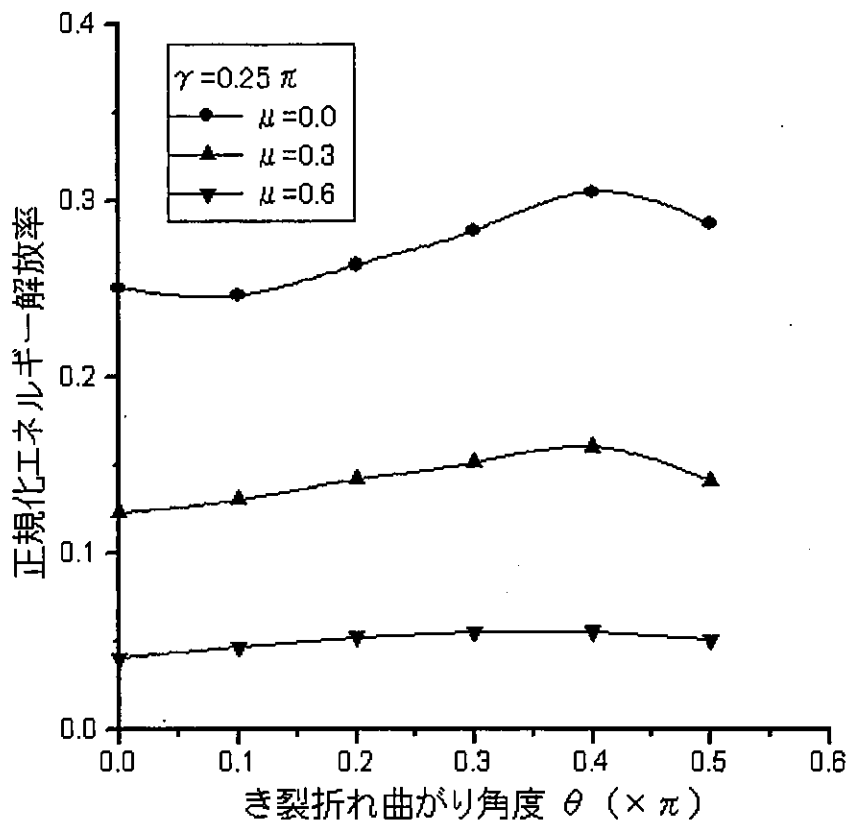


図7.16 一軸圧縮荷重下で折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

図7.16は一軸一様圧縮荷重下で圧縮荷重角度 γ が 0.25π ($=45^\circ$)の場合、折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を求めたものである。横軸は亀裂折れ曲がり角度 θ で、縦軸は正規化したエネルギー解放率である。亀裂折れ曲がり角度 θ は 0.0π から 0.5π までの 0.1π ごとに、また摩擦係数 μ は0.0, 0.3, 0.6の場合をそれぞれ解析した。この図から、摩擦係数の大きさによらず、最大エネルギー解放率破壊基準に従うとすれば、亀裂は初期亀裂面から約 $0.39\pi \sim 0.41\pi$ (約 $70^\circ \sim 73^\circ$)圧縮荷重 σ_1 方向へ折れ曲がって進みやすいことがいえる。これは図7.17に示すような圧縮荷重下でのウィングクラックタイプの亀裂の折れ曲がり進展開始方向を表わしていると考えられる。

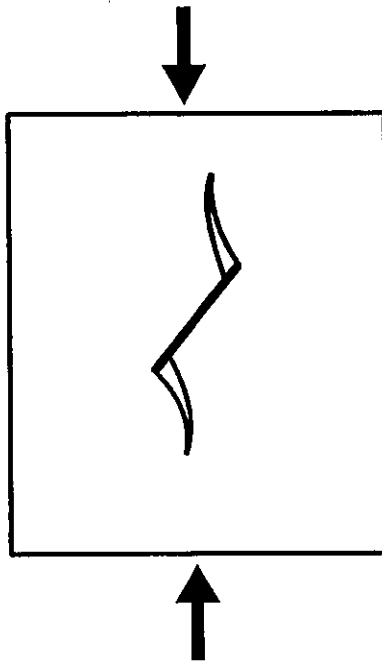


図 7.17 ウイングクラック型亀裂進展

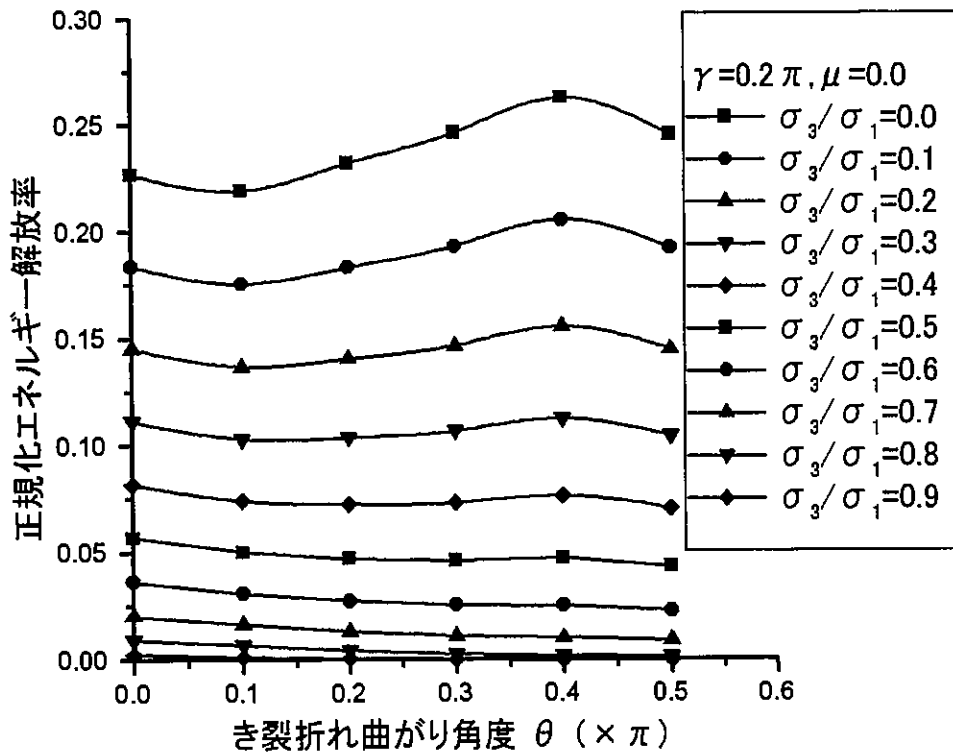


図 7.18 二軸圧縮荷重で $\mu=0.0$ の場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

7. 3. 6 二軸一様圧縮荷重下にある摩擦力が存在する折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

図 7.18 は、二軸一様圧縮荷重を $\gamma=0.2\pi$ ($=36^\circ$) の方向から、主応力比 σ_3/σ_1 を 0.0 から 0.9 まで 0.1 ごとく変えて比例的に载荷した場合の、摩擦が無い場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を求めた図である。この図から進展方向は主応力比が 0.1 から 0.3 ぐらいまでは、一軸の場合 (主応力比が 0.0) のように、初期亀裂面に対して最大主応力 σ_1 方向へ約 0.4π 傾いた方向に進展しやすいことが分かるが、主応力比が 0.4 から 0.9 までは直進方向 ($\theta=0.0\pi$) のほうが大きくなっており、この場合、図 7.19 のように、折れ曲がらず直進する方向にせん断破壊していくことが予想される。

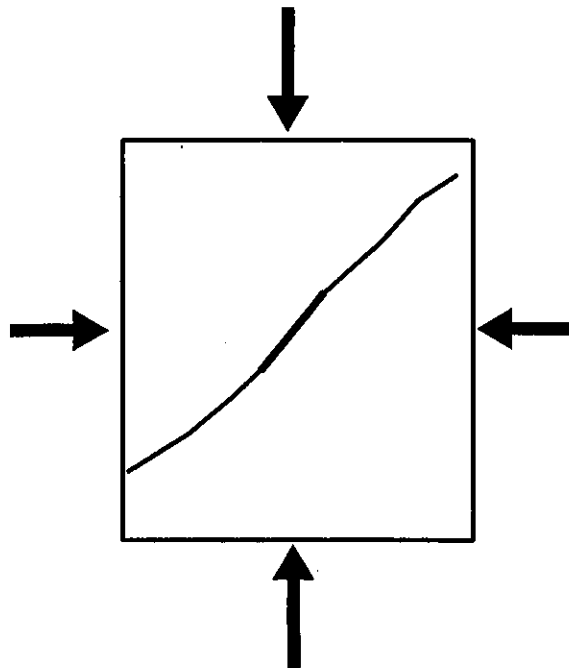


図 7.19 直進亀裂進展

同様の二軸一様圧縮荷重下で、主応力比は 0.1 から 0.5 まで 0.1 ごとくに変化させ、今度は亀裂面に摩擦力がある場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を計算した。図 7.20 は $\mu=0.3$ の場合で解析を行ったものである。主応力比 σ_3/σ_1 が、0.5 以上になると、亀裂面は滑らず固着状態となるため、エネルギー解放率はゼロとなる。図 7.21 は $\mu=0.6$ の場合で主応力比が 0.3 より大きいとエネルギー解放率がゼロとなったので主応力比を 0.05 ごとく変えて解析をおこなった。以上の一軸及び二軸の一様圧縮荷重の時、折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率の折れ曲がり角度 θ に関する分布形状は既報²⁾の結果の特性と非常に良く一致していることが分かった。ただし、既報²⁾の解析では、不連続面を要素の辺上に沿って節点を分離する古典的な手法であるため、亀裂折れ曲がり方向はあらかじめ設定された方向に作られてしまうが、本 X-FEM による手法では、亀裂折れ曲がり方向は全

く任意方向にとれる優位性がある。

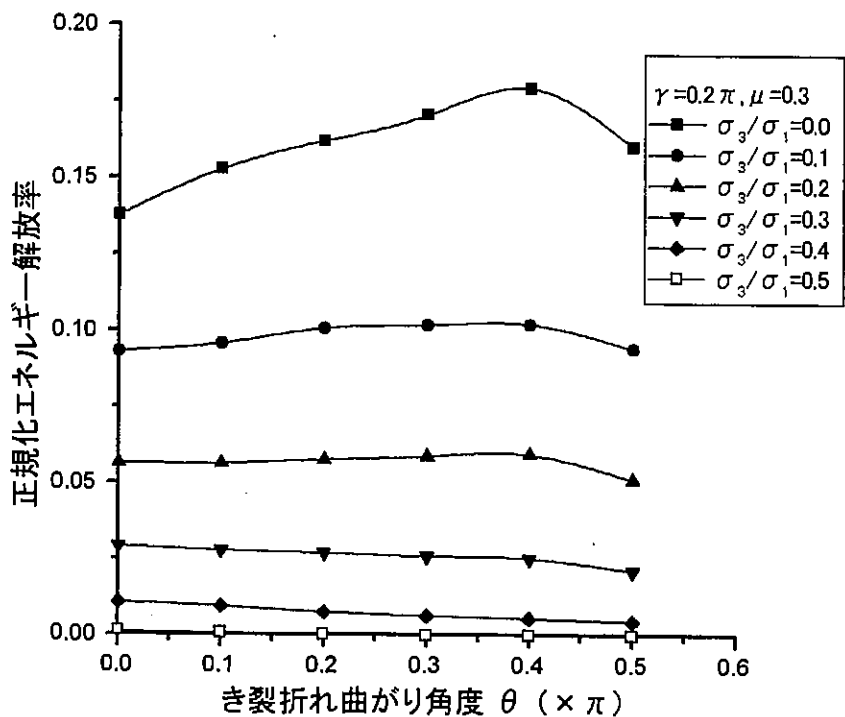


図 7.20 二軸圧縮荷重下で、 $\mu=0.3$ の場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

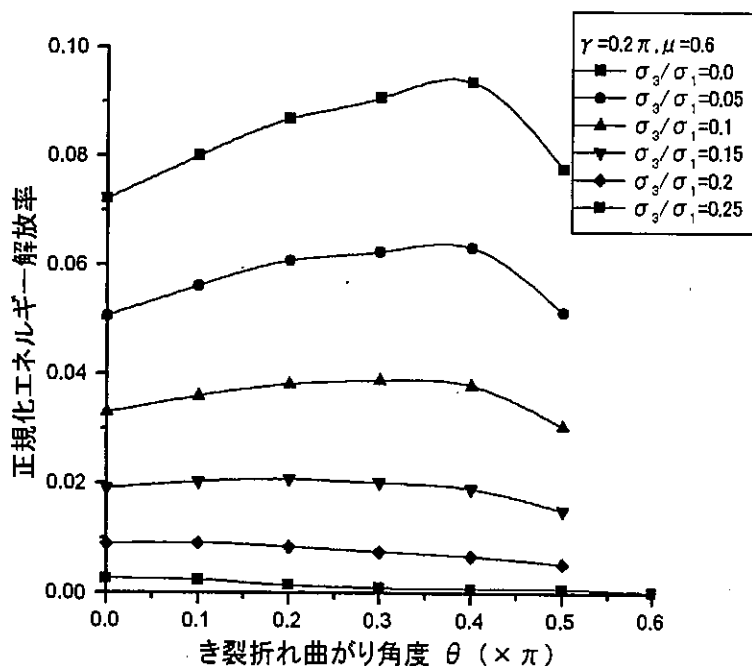


図 7.21 二軸圧縮荷重下で、 $\mu=0.6$ の場合の折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率

7. 4 亀裂面上に摩擦力が発生する場合の弾塑性体のX-FEMの精度検証

本節では、亀裂面が圧縮荷重下であり、亀裂面上に摩擦力が発生し、物体自身も弾塑性体の場合である場合へのX-FEMの応用を試みる。物体が弾塑性体の場合へX-FEMへの応用は、世界でも初めてのことであり、弾塑性体モデルには、比較的簡単なDrucker-Prager弾塑性モデルを仮定した。この弾塑性体の解法アルゴリズムも、前記した亀裂面上に摩擦力が発生する問題同様、リターンマップ手法によるNewton-Raphson法を用いた陰解法弾塑性解析を行なった。したがって、亀裂面上に発生する摩擦接触と物体の弾塑性問題が全く同一手法による連立増分・反復結合法となるため、アルゴリズムが非常に簡単明瞭になる利点を有している。

なお本節では、二軸圧縮荷重下での弾塑性体内に存在する亀裂先端近傍の、特に、応力分布について考察した。前節で行なった物体が弾性体で、亀裂面上に摩擦力が発生する場合は、エネルギー解放率の比較のみしか比較しなかったため、本節では、弾性体の場合には亀裂先端近傍の応力の理論式との比較をまず行い、弾塑性体の場合には、応力の理論式は得られていないので、リターンマップ手法を用いた従来の陰解法弾塑性解析による破壊解析の結果³⁾との比較検討を行う。

7. 4. 1 弾塑性体および摩擦接触問題のX-FEM連立剛性方程式

弾塑性体および摩擦接触問題の場合のリターンマップ陰解法解析アルゴリズム、および拡張有限要素法に関しては、第6章で詳述した。したがって、本節では、それらの詳細は省略する。ここでは、物体は、第4章の節4.2.2で述べた、次式のような降伏関数をもったDrucker-Prager弾塑性モデルを仮定する。

$$f = \|\mathbf{S}\| - \beta p - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_Y + H\bar{e}^p) \quad (4.16 \cdot \text{前出})$$

摩擦のモデルは、第6章の弾完全塑性モデルを用い、摩擦力の解析は節7.3と同じである。ここでは、物体自身が弾塑性体の場合について述べる。Drucker-Prager弾塑性モデルのConsistent弾塑性係数を用いて、式(6.27)～(6.31)の増分線形連立剛性方程式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{K}_{ab} \\ \mathbf{K}_{ba} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{ext},a} \\ \mathbf{F}_{\text{ext},b} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int},a} \\ \mathbf{F}_{\text{int},b} \end{Bmatrix} \quad (6.27 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{K}_{aa} = \mathbf{A} \int_{\Omega_a} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (7.22)$$

$$\mathbf{K}_{ab} = \mathbf{A} \int_{\Omega_b^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (7.23)$$

$$\mathbf{K}_{ba} = \mathbf{K}_{ab}^T = \mathbf{A} \int_{\Omega_b^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{B} d\Omega \quad (7.24)$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \mathbf{A} \left(\int_{\Omega_b^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}}^{ep} \mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_c^e} \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{\mathbf{u}}} \mathbf{N} d\Gamma \right) \quad (7.25)$$

7. 4. 2 陰解法による X-FEM 弾塑性解析アルゴリズム

各ステップでのひずみや応力の近似解を，図 7.22 のように Newton-Raphson 法を用いた時の反復解析によって求める。

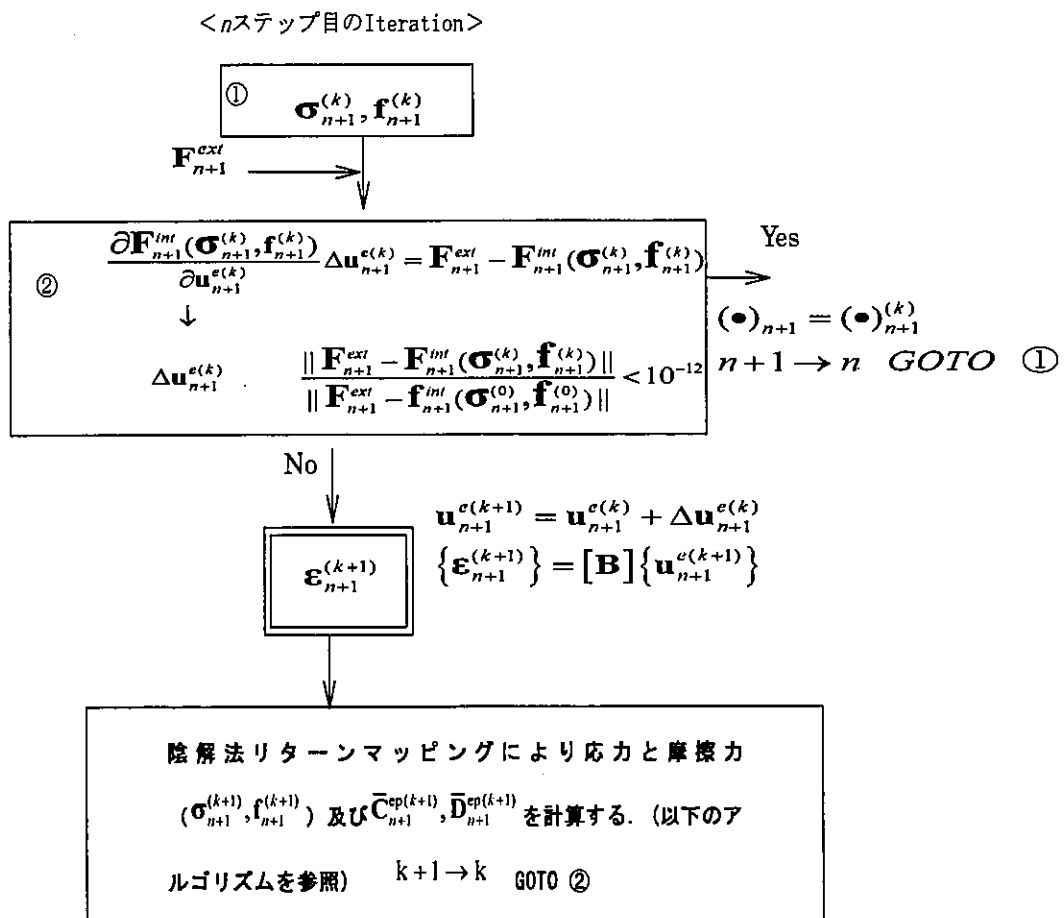


図 7.22 X-FEM 弾塑性解析のアルゴリズム

弾塑性体の増分・反復法及び陰解法リターンマッピングのアルゴリズムは節 5.3 で詳述したので、ここでは、取りまとめるために重要な応力計算のアルゴリズムを述べる。

まず、求めた $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)}$ を用いて弾性予測を行なう。次式より試行応力を計算する。

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = \mathbf{C}^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \quad (5.43 \cdot \text{前出})$$

さらに、上式より試行平均応力及び試行偏差応力を次式より求める。

$$p_{n+1}^{trial} = -\frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \quad (5.44 \cdot \text{前出})$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}) \mathbf{1} \quad (5.45 \cdot \text{前出})$$

次は、リターンマッピングを行うかどうか判断するため、次式より f_{n+1}^{trial} を計算する。

$$f_{n+1}^{trial} = \|\mathbf{S}_{n+1}^{trial}\| - \beta p_{n+1}^{trial} - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_Y + H \bar{\varepsilon}_n^p) \quad (5.48 \cdot \text{前出})$$

if $f_{n+1}^{trial} < 0$ then Elastic step

Set $(\bullet)_{n+1}^{(k)} = (\bullet)_{n+1}^{trial}$ EXIT

Else

リターンマッピングより降伏面に乗る応力と塑性ひずみは次式より計算する。

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{S}_{n+1}^{trial} + \kappa \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{(k)} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \mathbf{1} - 2\mu \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} + \frac{\beta \kappa}{2\mu} \mathbf{1} \right) \quad (5.67 \cdot \text{前出})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p(k)} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \Delta \gamma_{n+1}^{(k)} \left(\hat{\mathbf{n}}_{n+1}^{(k)} + \frac{\beta}{3} \mathbf{1} \right) \quad (5.68 \cdot \text{前出})$$

また、次の反復が必要となる K を求めるために Consistent 弾塑性係数であり、次式で求める。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{C}}^{ep} = & \kappa \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\theta_{n+1} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \right) \\ & - 2\mu(\theta_{n+1} - 1)(\hat{\mathbf{n}}_{n+1} \otimes \hat{\mathbf{n}}_{n+1}) - \frac{(2\mu\hat{\mathbf{n}}_{n+1} + \kappa\beta\mathbf{1}) \otimes (2\mu\hat{\mathbf{n}}_{n+1} + \kappa\beta\mathbf{1})}{\left(2\mu + \beta^2\kappa + \frac{2\bar{H}}{3\mu} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{3}} \right)} \end{aligned} \quad (5.86 \cdot \text{前})$$

出)

式(6.19)と式(6.21)中の $\mathbf{F}_{\text{int},a}, \mathbf{F}_{\text{int},b}$ は式(5.67)を用いて計算する。

7. 4. 3 弾塑性拡張有限要素法解析による亀裂先端近傍の応力解析

本節では、節7.3の解析モデルを用いて、節7.4.2のアルゴリズムによる亀裂先端近傍の応力計算解析を行う。

7. 4. 3. 1 亀裂先端近傍の応力計算方法

図7.23は亀裂先端近傍の要素、およびガウス点に対応する全体座標の点であるが、亀裂先端から (r, θ) の箇所のある応力は、丸印○を付けた点で応力を評価した。この点での応力は隣接している要素の最近接(もしくは一致)している4個のガウス点から形状関数を作成し、次式によって求めた。

$$\sigma = \sum_{i=1}^4 \bar{N}_i \sigma_i \quad (7.26)$$

ここで、 σ_i はガウス点の応力であり、 \bar{N}_i は形状関数である。

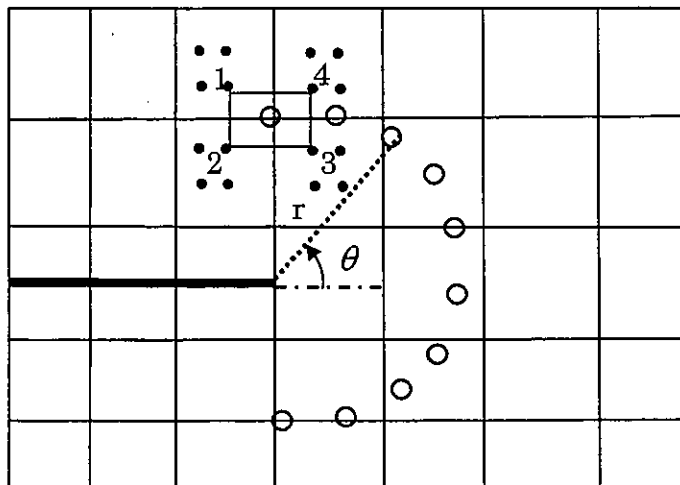


図7.23 亀裂先端近傍応力の計算

7. 4. 3. 2 無限長方形板中央に亀裂がある場合の弾性応力理論解

まず、長方形板が弾性体の場合について、X-FEM による亀裂先端近傍の応力数値解の精度を検証する。図 7.24 に示すような 2 次元板での平面ひずみ圧縮荷重下にある無限板内に存在する亀裂を考える。この場合の応力場は、図 7.24 のように無限遠から与えられる応力による一様応力場と、亀裂面上での垂直応力および摩擦力により発生したせん断応力場の重ね合わせである。ここで σ_x^∞ , σ_y^∞ , τ_{xy}^∞ はそれぞれ無限遠での、亀裂面に水平、垂直、せん断方向の応力である。また、 σ_0 , τ_0 は亀裂面上の反力、摩擦力である。この時 μ を摩擦係数としたクーロンの摩擦則を使用すれば下記の関係が得られる。

$\sigma_y^\infty < 0$ の時：

$$\begin{aligned} \text{if } |\tau_{xy}^\infty| + \mu\sigma_y^\infty \geq 0 \quad \text{then } \tau_0 = \pm\mu\sigma_y^\infty \\ \text{for } \tau_{xy}^\infty \geq 0, \quad \text{respectively.} \end{aligned} \quad (7.27)$$

$$\text{if } |\tau_{xy}^\infty| + \mu\sigma_y^\infty < 0 \quad \text{then } \tau_0 = \tau_{xy}^\infty. \quad (7.28)$$

ここで、式(7.27)の場合には亀裂面は相対的な変位を生じる。式(7.28)の場合は、亀裂面は固着したままである。

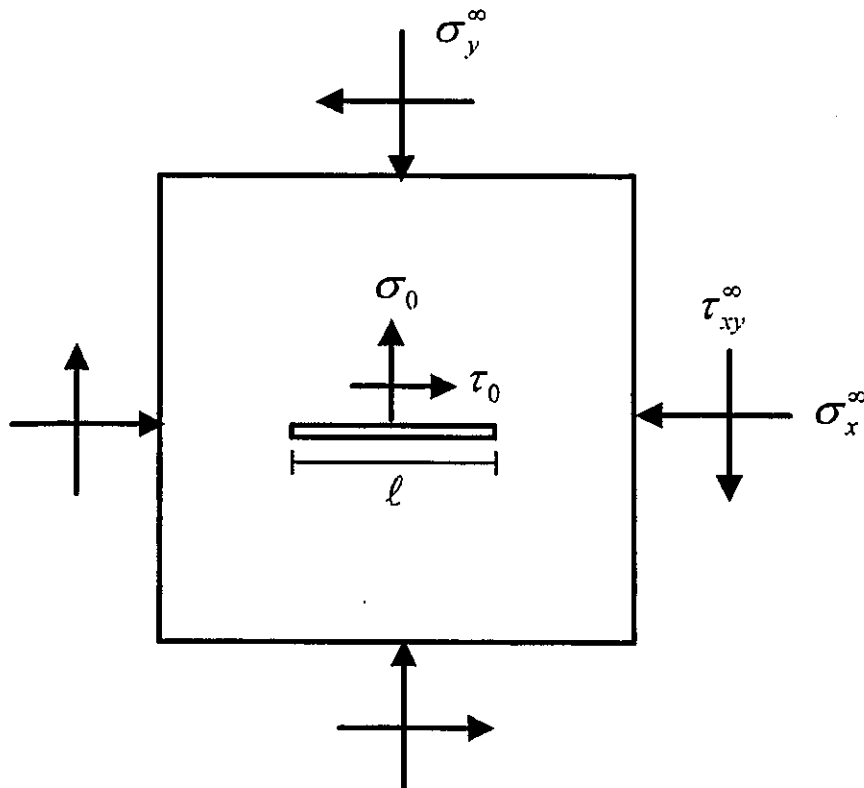


図 7.24 圧縮荷重下にある 2 次元無限板内の亀裂

この時、図 7.25 で表すような極座標系における応力の、 r の $-1/2$ の特異性のオーダーをもつモードIIの場合の第1項(特異項)は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\frac{5}{4}\sin(\theta/2) + \frac{3}{4}\sin(3\theta/2) \\ -\frac{3}{4}\sin(\theta/2) - \frac{3}{4}\sin(3\theta/2) \\ \frac{1}{4}\cos(\theta/2) + \frac{3}{4}\cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

また第2項(定数項)は次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^\infty \cos^2 \theta + \sigma_y^\infty \sin^2 \theta + 2\tau_{xy}^\infty \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_x^\infty \sin^2 \theta + \sigma_y^\infty \cos^2 \theta - 2\tau_{xy}^\infty \sin \theta \cos \theta \\ (\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy}^\infty (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{Bmatrix} \quad (7.30)$$

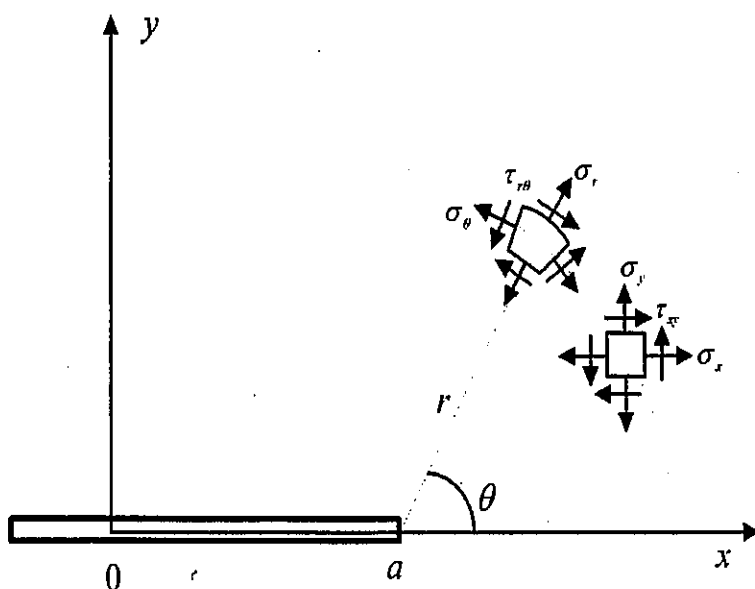


図 7.25 亀裂先端近傍の極座標による応力

なお、圧縮荷重下での上式中の K_{II} は、式(7.27)の条件が成立し、亀裂面に相対的な変位を生じる場合は次式となり、

$$K_{II} = (\tau_{xy}^{\infty} \pm \mu \sigma_y^{\infty}) \sqrt{\pi a} \quad \text{for } \tau_{xy}^{\infty} \geq 0, \text{ respectively.} \quad (7.31)$$

式(7.28)の条件が成立し、亀裂面が固着した状態では、

$$K_{II} = 0 \quad (7.32)$$

となる。なお、以後 $a = \ell/2$ と記す。

7. 4. 3. 3 弾性の場合における拡張有限要素法解析の精度検証

そこで、4 cmの長さの亀裂を中央に持つ解析モデル図7.11の物体全体を弾性体としてX-FEM解析を行い、式(7.29)と式(7.30)の和である亀裂先端近傍($r = 0.01 \text{ cm}$)応力の漸近理論解と比較する。

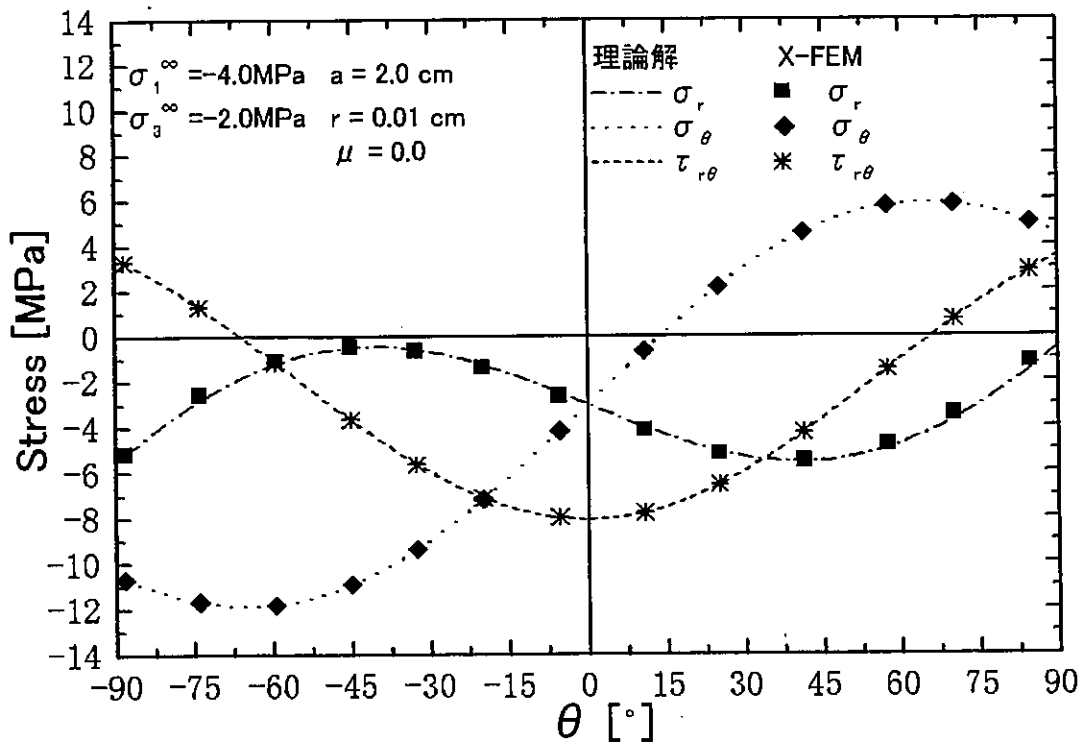


図7.26 摩擦係数0.0の場合X-FEM弾性解析結果

図 7.26, 図 7.27 には, 横軸は亀裂先端からの角度 θ であり, 縦軸は極座標で表した亀裂先端近傍の各応力 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ である. 図中, $\blacksquare, \blacklozenge, *$ はそれぞれ X-FEM 解析結果 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ の分布であり, $-\cdot-\cdot-, \cdots, \cdots$ はそれぞれ理論解析結果 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ の分布である. 図 7.26 は亀裂面上の摩擦係数 μ が 0.0 の場合であり, 図 7.27 は摩擦係数 μ が 0.3 の場合である. 両図に示すように弾性体の場合では摩擦のある無しに関わらず, 本 X-FEM による弾塑性解析手法は精度が非常に良いことが分かる.

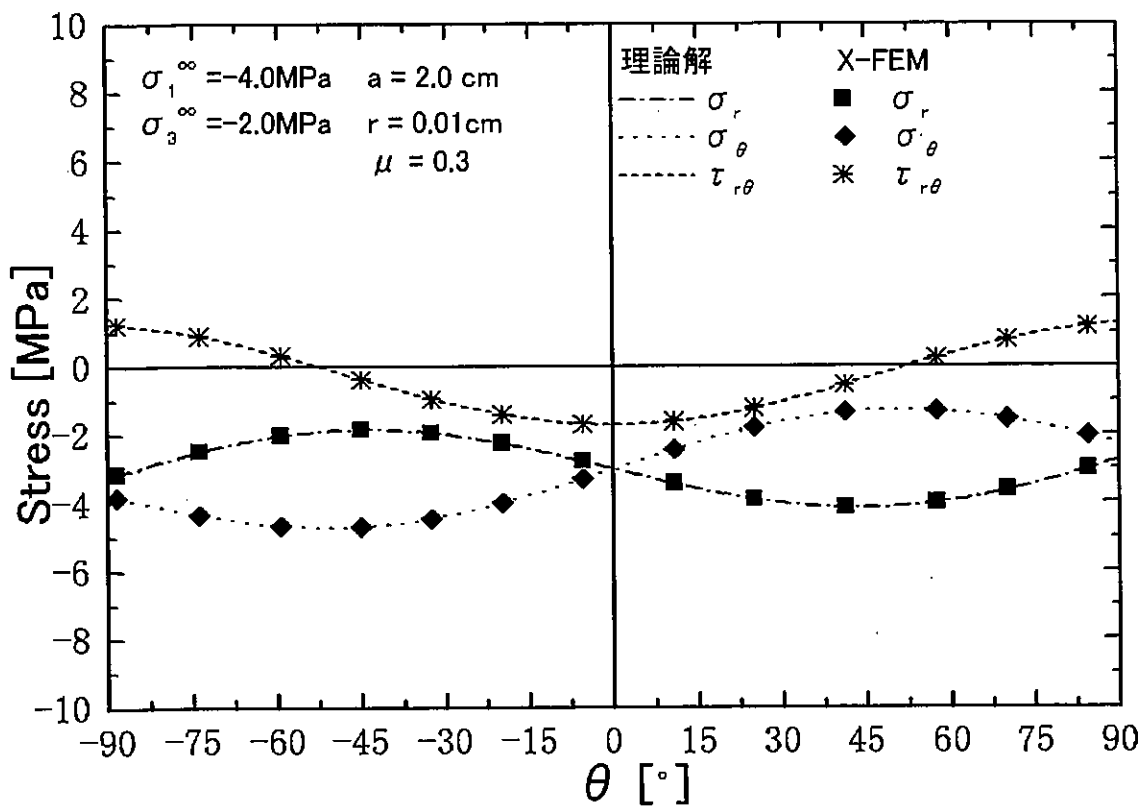


図 7.27 摩擦係数 $\mu=0.3$ の場合 X-FEM 弾性解析結果

7. 4. 3. 4 弾塑性の場合における拡張有限要素法解析の精度検証

弾塑性体内にある亀裂先端近傍の X-FEM で求めた応力分布の検証を行なう. しかしながら, 弾塑性体内に存在する静止亀裂の場合, 簡単な von Mises や Drucker-Prager モデルの場合であっても, その亀裂先端近傍の 2 次元場の理論解でも存在しない. 非常に興味ある問題ではあるが, 亀裂が静止している場合は当然のこと, ましてや, その亀裂が準静的に進展する場合における平面問題の理論解などは完全に未解決問題である. FEM 等による数値解析は数多く行なわれているが, ほとんどが陽解法増分法による弾塑性解析であるため, 亀裂先端近傍の応力の精度は非常に悪い. 最近, 本

論文と同じモデルの場合において、リターンマップを用いた陰解法弾塑性計算アルゴリズムを使用した解を得ているので、その解と比較検討する。ただし、この手法による亀裂の変位不連続性は、従来から汎用されている要素辺上に沿った要素節点を分離する事によって表現されたものである。この手法による応力の評価に関しては、文献³⁾を参照されたい。

図7.28は、最大圧縮主応力 σ_1 が -10MPa であり、主応力比が 0.6 、亀裂面上の摩擦係数は 0.0 の場合である。降伏応力 $\sigma_y = 5\text{MPa}$ 、硬化・軟化係数 $H=0.0\text{MPa}$ 、すなわち完全塑性の場合である。物質係数 β は、土質の場合によく使用される次式(7.33)を使って $\phi = 30^\circ$ と仮定した。

$$\beta = \frac{2\sqrt{6} \sin \phi}{\sqrt{3}(3 - \sin \phi)} \quad (7.33)$$

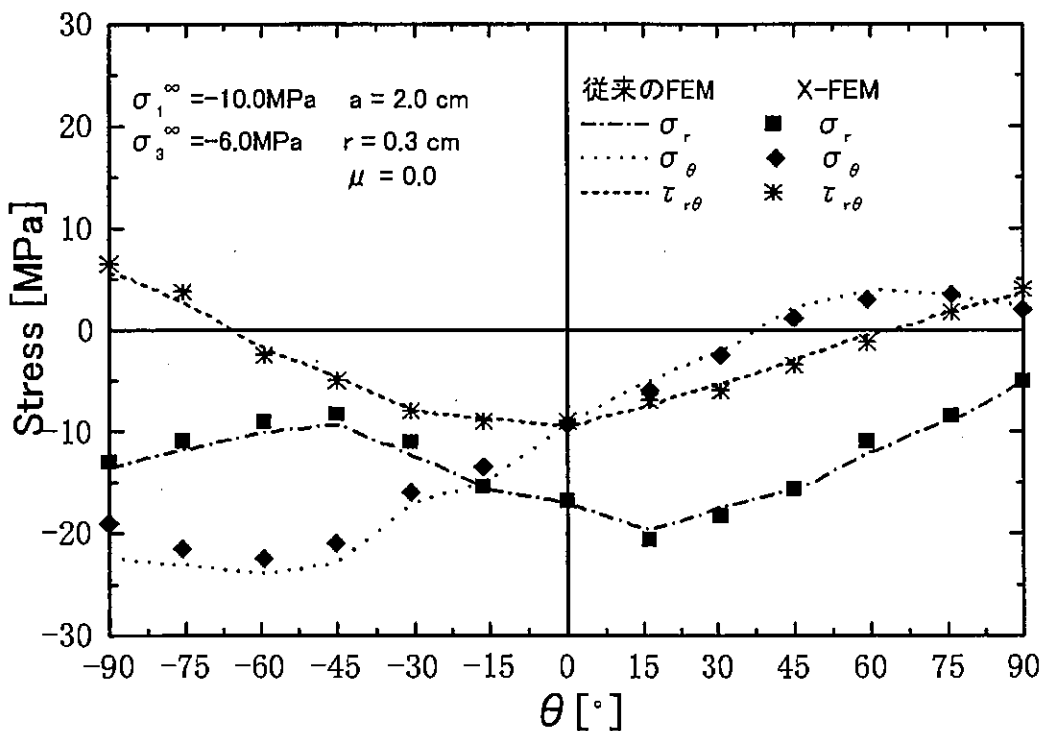


図7.28 摩擦係数 0.0 の場合 X-FEM 弾塑性解析結果

図7.29は、最大圧縮主応力 σ_1 が -10MPa であり、主応力比が 0.3 、亀裂面上の摩擦係数は 0.3 である。降伏応力 $\sigma_y = 5\text{MPa}$ 、内部摩擦角 $\phi = 0^\circ$ 、硬化・軟化係数 $H=1000.0\text{MPa}$ の場合である。いずれの場合も図中の連続点線が、上記の従来による陰解法弾塑性計算による結果であり、■、◆、*らは、それぞれ本 X-FEM 解析結果 $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ の分布である。これらの結果から、本 X-FEM による

(Drucker-Prager) 弾塑性体内の亀裂先端近傍の応力は、比較的精度の良いものと判断できる。

ここで注意すべきことは、このように比較的精度の良い弾塑性体内の亀裂先端近傍の応力が、得られたのは、拡張有限要素法を用いたからではなく、リターンマップを用いた陰解法弾塑性計算アルゴリズムによって、弾塑性問題を解いたからである。ここで確認できたのは、従来の要素辺を亀裂面とする手法でなく、X-FEM の手法によっても、ほとんど同一の応力場が得られたということにある。

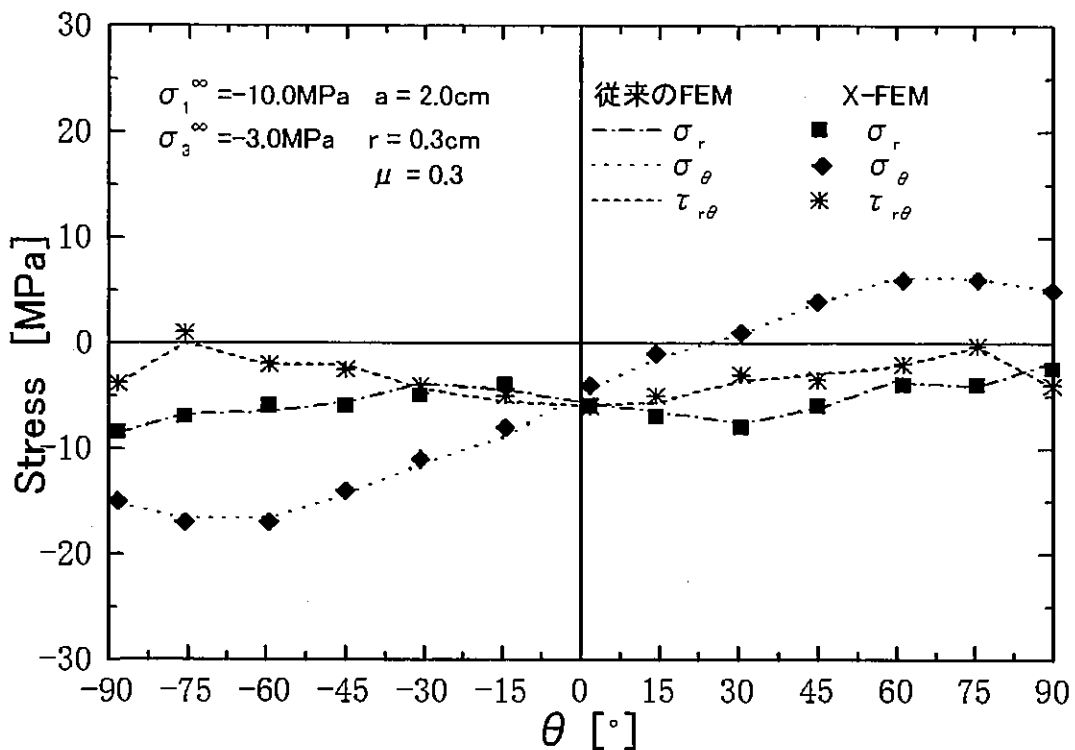


図 7.29 摩擦係数 0.3 の場合 X-FEM 弾塑性解析結果

7. 5 結言

1) 4 節点四角形アイソパラメトリック要素を用いた簡便な X-FEM 手法を提案し、その解析手法により、中央に亀裂がある無限板を近似したモデルに、亀裂に垂直な方向に一様引っ張り荷重が載荷された場合において、亀裂面上に沿う σ_y の分布ならびに E 積分により、亀裂のいくつかの方向への折れ曲がり瞬間時のエネルギー解放率を求め、その有効性を検討した。その結果、進展亀裂先端を囲み、先端近傍から離れた任意の積分経路で、折れ曲がり方向にかかわらず非常に精度良くエネ

ルギ解放率を求めることができ、亀裂の折れ曲がり問題に対しても本 X-FEM 手法は、非常に有効であることが確認できた。

2) 非線形方程式の解析に対して収束が早くかつ精度の良い陰解法リターンマッピング計算アルゴリズムを組み込み、離散化された全体の非線形連立剛性方程式を Newton-Raphson 法に整合させた摩擦を考慮した新しく開発した X-FEM 解析手法に、中央に亀裂がある無限板を近似したモデルに、一様圧縮荷重が一軸と二軸に載荷された場合において、E 積分により折れ曲がり進展亀裂のエネルギー解放率を求めた。その結果、進展亀裂先端を囲み、先端近傍から離れた任意の積分経路で、折れ曲がり方向にかかわらず精度良くエネルギー解放率を求めることができた。従って、提案した摩擦を考慮した X-FEM 解析手法は、非常に精度の良いものであることが確認できた。

3) 最後に、亀裂面が二軸圧縮荷重下にあり、亀裂面上に摩擦力が発生し、物体が Drucker-Prager 弾塑性体である場合への X-FEM 解析を行い亀裂先端近傍の応力分布について考察した。この弾塑性体の解法アルゴリズムには、亀裂面上に発生する摩擦接触問題と物体の弾塑性問題いずれも、精度が良く、計算速度が速く、近年、精力的に使用されている Newton-Raphson 法を用いた陰解法リターンマップ手法による弾塑性解析が行なえる新しい手法を開発した。亀裂先端近傍の応力分布に関する解析結果は、弾性体の場合には、理論式との比較を行い、弾塑性体の場合には、従来の陰解法弾塑性 FEM 解析による結果との比較検討を行なった結果、非常に精度の良いものであることが分かった。

参考文献

- 1) Wu, C.H. : Explicit asymptotic solution for the Maximum-Energy-Release-Rate problem, *Int. J. Solids Structures*, Vol.15, pp.561~566, 1983.
- 2) 例えば、矢富盟祥、鱸 洋一：圧縮荷重下にある進展亀裂の E 積分によるエネルギー解放率の有限要素解析，土木学会論文集，No.612，I—46，pp.251—263，1999.
- 3) 鱸 洋一，矢富盟祥：陰解法弾塑性計算アルゴリズムを用いた圧縮荷重下に存在するき裂先端近傍応力場の有限要素解析，応用力学論文集，Vol.7，pp.597-606，2004.

第 8 章 おわりに

本論文には、リターンマップを使用した陰解法弾塑性解析や拡張有限要素法など世界でも最新の研究テーマ事項が含まれており、日本でも未だこれらを行なっているところは数少ない。したがって、本論文の内容の関連を読者に分かりやすくするため、下図に沿ってもう一度、本研究の位置付けを行なう。

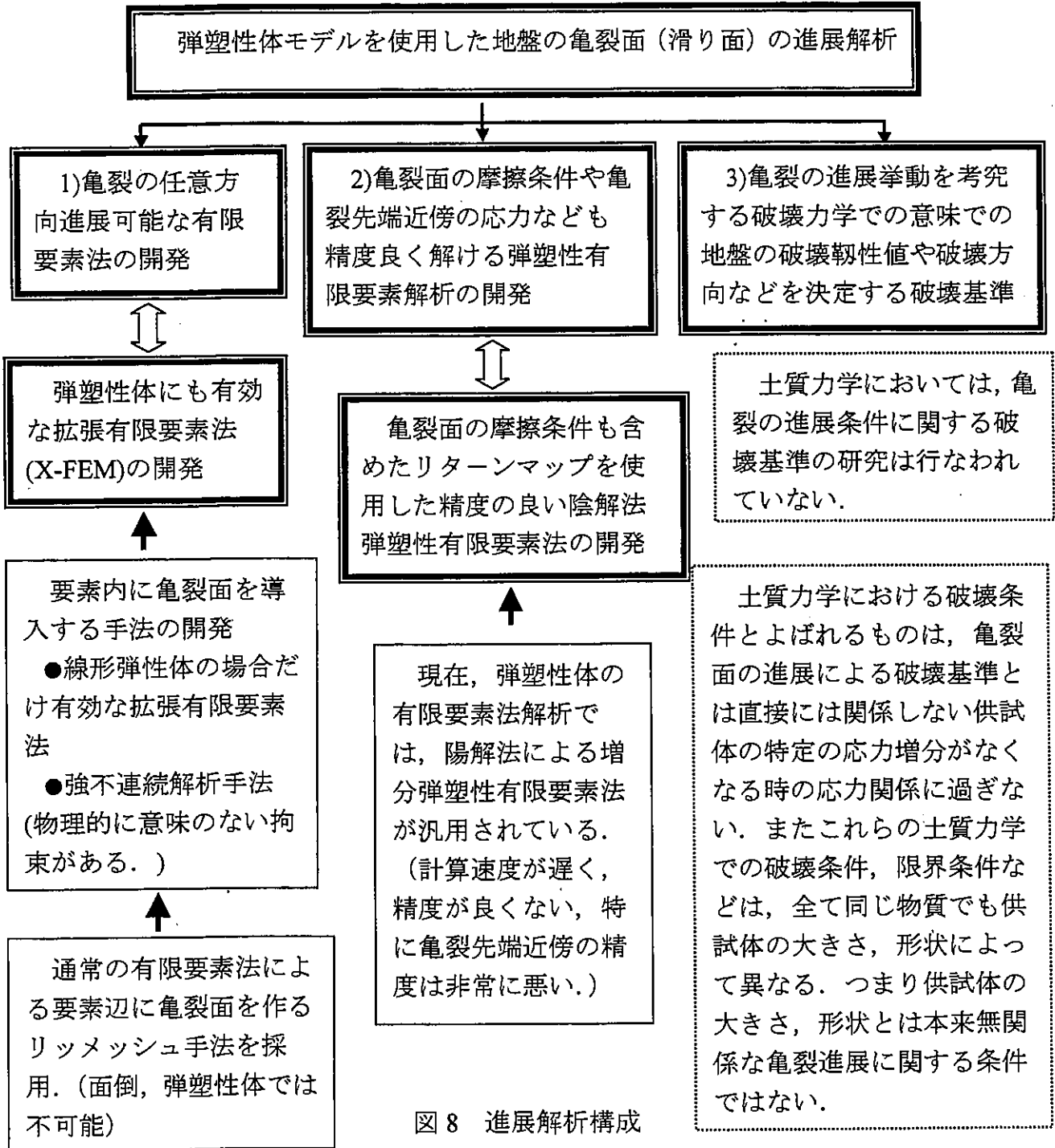


図 8 進展解析構成

本論文の題名は、「地盤の破壊解析を目的とした拡張有限要素法(X-FEM)の関する研究」とある。「地盤の破壊進展解析を行なう」とはなっていない。なお、最近では、地盤という語は、岩盤などを含めて呼ばれる用語になっているが、ここでは、岩盤などは含まない、従来から、主に粘土や砂のような土質力学の範疇での地盤である。図8を参照しながら記述する。一番上にある最終目標「弾塑性体モデルを使用した地盤の亀裂面（滑り面）の進展解析」を、現場に合うという高級レベルではなく、理論的レベルで有用的な範疇で行なうことが可能なためには、図8の2行目にある3個の枠にあることが強く要求される：

1) 弾塑性体にも使用可能な亀裂の任意方向進展可能な有限要素法の開発

2) 亀裂面の摩擦条件や亀裂先端近傍の応力などが精度良く解ける弾塑性有限要素解析の開発

3) 亀裂の進展挙動を考究する破壊力学での意味での地盤の破壊靱性値や破壊方向等を決定する破壊基準

上記1)に関しては、図の左の列の下から上に向かって記してある。

20世紀の最後頃には、通常の有限要素法による要素辺に亀裂面を作る手法では、任意の方向に折れ曲がる亀裂進展解析は不可能なので、リメッシュ手法が採用されたが、これは非常に面倒であり、弾塑性体では作成不可能であった。そこで、今世紀に入って要素辺を亀裂とする事はあきらめ、要素内に亀裂面を導入する手法の研究が盛んに行われるようになった。例えば、線形弾性体の場合だけに有効な拡張有限要素法や、(物理的に意味のない種々の拘束がある,) 強不連続解析手法などである。そこで、本論文では、上記の線形弾性体の場合だけに有効な拡張有限要素法を、弾塑性体にも有効な拡張有限要素法(X-FEM)の開発を行なった。これによって、上記1)の要求が満たされた分けである。ここで注意したいのは、この1)の要求には、特に、弾塑性体の亀裂端近傍までもが精度良く解けることまでは要求されていない。図8の2列目下に記してある、現在盛んに汎用されている陽解法増分法による弾塑性解析でも構わない。しかし、最終目標には、2)の要求がある。これも、ほぼ時を同じくして、今世紀に入って、この要求を満たす、精度が非常に良く計算速度も非常に速い、リターンマップを使用した陰解法弾塑性有限要素法が、J.C.Simoらによって公表されたのである。そこで、本論文では、最終目標2)の下にある、亀裂面の摩擦条件も弾塑性体モデルとみなし、通常は全く別の解法が使用される問題に対し、両方の問題を、精度の良いリターンマップを使用した陰解法弾塑性有限要素法のみを使用した簡便なアルゴリズムを世界で始めて開発している。

したがって、これで2)の要求も満たされた分けである。この2つの要求を満たされるようなプログラム開発が、本論文の目的である。したがって、本論文の題名が、「地盤の破壊解析を目的とした拡張有限要素法(X-FEM)の関する研究」となった次第である。では何故、弾塑性体である地盤の破壊進展解析を行なわなかったのかという疑問を持つ方が多いと危惧する。その理由は、図8の3)にある。すなわち、土質力学では、破壊力学での意味での破壊靱性値や破壊方向などを決定する破壊基準が今まで全くといって良いほど研究

されていないからである。論文中にも述べたように、不思議にも、土質力学においては、亀裂の進展条件に関する破壊基準の研究は行なわれていないのである。土質力学における破壊条件、例えば、汎用されているモール・クーロンの破壊基準などは、亀裂の進展による破壊基準とは直接には関係しない、供試体の特定の応力増分がゼロになる時の応力関係に過ぎない。注意すべきは、この破壊条件は、同じ物質でも、供試体の大きさ、形状によって、亀裂面の生じ方が異なることも要因となり、異なる破壊基準となること、つまり供試体の大きさ、形状とは本来無関係な亀裂進展に関する条件、破壊基準ではない。また、通常、この破壊にいたる以前に、供試体内にはすでに亀裂面が、1個、時には数多く発生していることである。土質力学において、亀裂の進展条件に関する破壊基準の研究を行うためには、金属の破壊試験のように、金属供試体中に亀裂を作り、それに荷重をかけて、亀裂の進展基準を求めると同じように、原理的には、土供試体の中に亀裂を作って、それに、1軸ないし3軸圧縮試験を行い、亀裂の発生基準、すなわち、破壊靱性値を求め、また、いかなる方向に進展するのかの亀裂進展方向に関する試験を数多く行わなければならない。しかし、このような破壊試験は一切と言ってよいほど行われていない。

金属においても第二次世界大戦頃までは、弾性体や弾塑性体を使用した、許容応力設計、限界条件設計が汎用され、破壊靱性値などの破壊力学の研究は皆無に近かった。ところが、超高強度鋼などが使われ始めた頃から、疲労破壊なども含めて、盛んに破壊力学の研究が始まった。超高強度鋼のようにヤング係数などの応力強度は、通常の鋼鉄に比べはるかに大きい。しかし、一端、微小亀裂が生じると、急速に亀裂が進展し破壊しまう。セラミックスなどもそうである。つまり、皮肉な事に、世の中の物質は、ヤング係数などの応力強度が大きいものほど、破壊靱性値は小さいものが多いのである。また、当時、大型タンカが、ほとんど波が無いのに、急激に船が真っ二つに急激に割れる事件が起こったこともあり、破壊力学に関する研究が盛んに行なわれるようになった。現在では、機会学会の構造部門の研究には、破壊力学が80%を占めているといっても過言ではない。また、土木の分野では、金属はもとより、20世紀も終わる頃から岩石、岩盤、コンクリートの部門にも亀裂の破壊力学の研究が盛んに行なわれるようになった。最近では、岩石、岩盤の破壊力学の研究に近いこともあって、地震の発生、進展も、活断層を亀裂面と考えた破壊力学的研究も盛んに行なわれるようになった。土質力学でも、斜面崩壊の進行性破壊や杭基礎近傍の地盤の破壊など、亀裂の破壊力学を必要としている現象は数多い。岩石、岩盤の関する破壊の研究の歴史もそうであったように、亀裂の発生・進展の研究とは直接関係しない、供試体の大きさ、形状にも依存する、モール・クーロンの破壊基準などの研究から早く脱皮して、まずは、地盤の真の亀裂の進展に関する破壊力学の実験的研究が急務である。