

任意の不連続曲線を高精度に表せる HB-Spline 補間手法*

HB-Spline interpolation method expressing an arbitrary discontinuous curve with a high accuracy

新保泰輝¹, 矢富盟祥²
Taiki SHIMBO, Chikayoshi YATOMI

¹ 五大開発株式会社 技術研究所 (〒921-8051 石川県金沢市黒田1丁目35番地)
² 金沢大学大学院自然科学研究科 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

In this paper, we present a new interpolation method expressing an arbitrary discontinuous curve with a high accuracy based on the B-Spline interpolation. We call it “The Heaviside B-Spline interpolation method”. The idea of this method is to use the Heaviside step function to construct a high accurate discontinuous spline function being analogous to the enrichment of displacement discontinuous modeling, known as the eXtended FEM. The Heaviside B-spline interpolation method enables interpolating jump or discontinuous data in 1-D or 2-D plane by using a least square method: The method interpolates “The Heaviside Step function” with a high accuracy without Gibbs’s phenomena. We obtain excellent results for several examples in which the data is given by a discontinuous function.

Key Words: Discontinuous function, B-Spline interpolation, Gibbs’ phenomenon, X-FEM, Least square method

1. 緒言

き裂進展問題において重要となるのは、き裂がどのような応力状態で、どの方向へ進展するかである。有限要素法で、き裂進展解析を行う場合の破壊基準として応力による破壊基準を採用するためには、き裂先端近傍の任意の位置で応力を精度良く求める必要がある。

一般に有限要素法で求められる応力はガウスの積分点位置のみでの応力値である。その場合、き裂先端近傍の任意の位置の応力を得るためには節点変位を用いて形状関数の一階微分に相当する関数に座標を代入する事で計算する手法、または、ガウス点で取得した応力を用いて内挿補間をする手法⁽¹⁾などがあげられる。節点変位を用いて応力を算出する場合、変位法に基づく有限要素解析に用いる要素の形状関数は一般に Lagrange 型の形状関数であり、有限要素解析は多数の要素を配置する事による区分的な補間手法である。したがって、Lagrange 型の形状関数を用いた有限要素解析では要素境界において変位の連続性は満た

されるが、その微分は不連続であり要素境界において応力やひずみが不連続となる。その場合、要素辺上でき裂進展の破壊基準となる応力が最大となってしまうことがあるため有限要素メッシュにより、き裂進展経路が有限要素メッシュに依存する事になる。また、ガウス積分点の応力を用いた内挿補間は補間精度の問題だけでなく、き裂面の上下での応力の不連続が表せない。

そこで、一般的に用いられる Lagrange 型の形状関数を用いた有限要素解析を対象として、ガウス積分点位置で得られる応力を用いて応力を滑らかにかつき裂面上での応力の不連続を高精度に表現可能な新たな補間手法が必要となる。以上の事が本研究を行なった主な動機である。

標本データ（例えば、ガウスの積分点で得られる応力など）を滑らかに補間する手法として、B-Spline による補間手法がある。B-Spline による補間手法（以下、単に B-Spline 補間と表記する。）では、Fig.1 に示すように、B-Spline 補間に用いる節点 (knot) を多重 (Multiple knots) に配置する事により、Spline 関数の連続性を任意に操作ができるため、標本データが不連続となる場合にも有用である⁽²⁾。しかし、2次元への拡張を考えた場合、補間対象領域内で標本データが不連続となる曲線（以下、不連続線と表記する）が単純な場合ではなく、任意形状で存在する場合、あるいは、不連続線の1端ないし両端が補間領域内に存在する場合の Spline 関数を求める事は容易ではない。

* 原稿受付 2009年09月08日, 改訂年月日 2009年10月19日, 発行年月日 2009年10月29日, © 2009年 日本計算工学学会. Manuscript received, September 08, 2009; final revision, October 19, 2009; published, October 29, 2009. Copyright ©2009 by the Japan Society for Computational Engineering and Science.

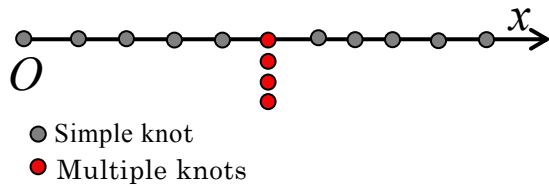
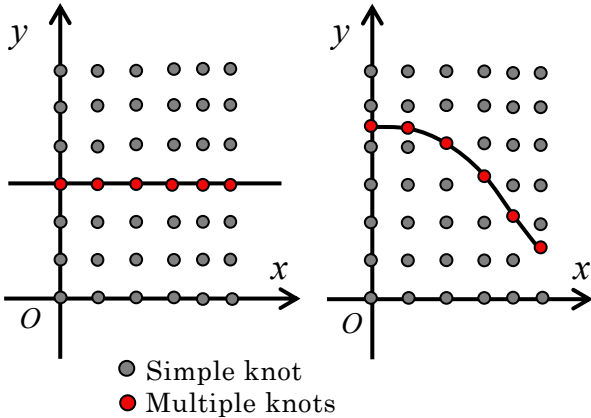


Fig.1 Multiple knots in the 1-D line



(a) Straight line (b) Curve

Fig.2 Multiple knots in the 2-D domain

2次元の B-Spline 基底関数は x, y 方向それぞれに対し、1次元の B-Spline 基底関数のテンソル積で表されるため、節点は 2次元平面上で格子状に配置される。ここで、不連続線を 1次元と同様にして考えると Fig.2(a)に示す不連続線が x 軸に対して水平(あるいは垂直)な直線の場合には多重節点により容易に不連続線を表現する事ができる。しかし、Fig.2(b)に示すような不連続線が曲線の場合には x, y 方向節点それぞれに対し、 y, x 方向に節点配置、多重度が変化させなければならない。すなわち、節点間隔、多重度が x, y の関数となるため節点と格子が一致しない点が存在する。

他方、2次元平面上の不連続線を表現する方法として、補間対象領域を分割し、分割領域境界で節点を多重にする事で不連続線を表現する手法が考えられるが、不連続線以外の分割領域では接合条件を与える必要があるなど煩雑である。また、補間領域や不連続線が任意形状の場合には細かな分割が必要となり、B-Spline 基底関数を支持する標本データが十分でなくなる場合が生じる。

したがって、2次元平面上に標本データがあり、任意の不連続線を高精度に表せる Spline 補間が簡易にできる手法が望まれる。

本論文では X-FEM に用いられる拡張された変位近似式と同様に、Partition of Unity 条件に基づき Heaviside 関数と不連続パラメータを導入し、任意の不連続線を高精度に表現可能な Spline 関数を新たに提案する。

最後に、不連続線を有する Lagrange 型の形状関数を用いた有限要素法の、ガウス積分点での応力の補間を想定し、1次元や2次元の場合のいくつかの不連続線を有する関数形が具体的に与えられた場合において本補間手法の有効性を確認した。

なお、有限要素解析に用いられる形状関数に B-Spline 関数を用いたいくつかの解析が行われている。しかし、物体やき裂が非常に単純な場合を除き、その解析は非常に困難である^{(3)~(5)}。田中ら⁽⁶⁾はウェーブレットガラーキン法に対し、ペナルティ法を用いて任意領域における解析を行っており、今後の研究に期待したい。

2. Heaviside B-Spline 補間

Heaviside B-Spline 補間(以下、単に HB-Spline 補間と表記する)とは端的に言えば、Partition of Unity 条件に基づき B-Spline 基底関数の線形結合で表された Spline 関数に新たに Heaviside 関数と後述する不連続パラメータを導入する事で Spline 関数に不連続を表す自由度を導入した補間手法である。本手法は節点に関係なく不連続線を与える事ができるメッシュフリーな手法であり、2次元への拡張は容易である。

本章では標本データがある線(点)を境にして不連続となる場合を想定し、HB-Spline 補間を詳説する。

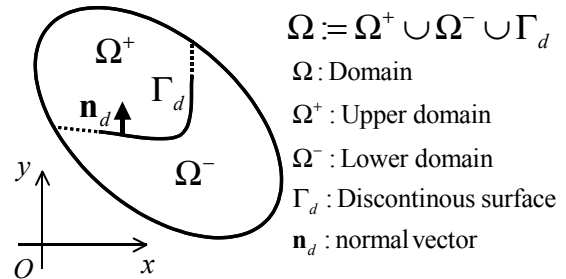


Fig.3 Definition of the interpolation domain

2.1 Spline 関数の拡張 今、Fig.3 に示す直交デカルト座標系に存在する補間対象となる領域 Ω 内に標本データが不連続となる線 Γ_d が存在すると仮定する。ここで $\mathbf{x} := (x, y)$ を位置ベクトルとし、不連続線 Γ_d 上の位置 \mathbf{x}_d の法線ベクトルを \mathbf{n}_d とすると不連続線からの符号付き距離関数は、

$$f(\mathbf{x}) := \text{sign}\{\mathbf{n}_d \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_d)\} \min\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_d\|, \quad (1)$$

である。ここで、上式 (\cdot) は内積を意味する。また、 $\text{sign}(A)$ は A の正負を与える演算子であり、 $\min\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_d\|$ は、 \mathbf{x} と \mathbf{x}_d の距離が最小となる時の距離を意味する。上式は T.Belytscho et al.⁽⁷⁾ の定義した符号付き距離関数と一致する。ここで、符号付き距離関数を用いて、

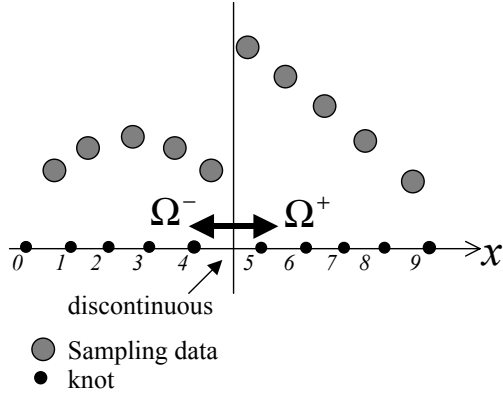


Fig.4 Discontinuous Sampling Data in the 1-D model

$$\begin{aligned}\Omega^+ &:= \{x \in \Omega / \Gamma_d \mid f(x) \geq 0\} \\ \Omega^- &:= \{x \in \Omega / \Gamma_d \mid f(x) < 0\}\end{aligned}\quad (2)$$

を定義する。この時、補間対象領域 Ω において標本データの不連続線 Γ_d を考慮した Spline 関数が以下のように表されると仮定する。

$$\begin{aligned}S(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{h+m} \sum_{j=1}^{k+m} M_{ij}(\mathbf{x}) c_{ij} + \sum_{i=1}^{h+m} \sum_{j=1}^{k+m} H(\mathbf{x}) M_{ij}(\mathbf{x}) d_{ij} \\ M_{ij}(\mathbf{x}) &:= M_i^m(x) M_j^m(y) \\ H(\mathbf{x}) &:= \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \Omega^+ \\ -1 & \mathbf{x} \in \Omega^- \end{cases}\end{aligned}\quad (3)$$

ここで、 h 、 k は x 、 y 方向の節点数(knot)であり、 m は Spline の階数であり、後述する本論文の解析例では常に $m=4$ とする。 M_{ij} は正規化された B-Spline である。また、以下 c_{ij} を連続パラメータ、 d_{ij} を不連続パラメータと呼ぶ。なお、 $H(\mathbf{x})$ は Heaviside Step 関数である。上式は正規化された B-Spline 自体を変更しておらず、Partition of unity 条件を満たしている事に注意したい。なお、Partition of unity 条件を満足する事により、節点上、節点で囲まれた格子上での関数の連続性が保証される。

上式で表される Spline 関数を Heaviside B-Spline 関数と呼ぶ(以下、単に HB-Spline と表記する)。

Fig.4 に 1 次元の場合の不連続点を有する標本データの例を示す。領域 Ω 内に x 軸上に節点を 10 個等間隔に配置し、 Ω の境界となる節点 0 と 9 の多重度を 4 とし、標本データが不連続となる点を節点 4、5 の間とした場合の正規化 B-Spline と $H(\mathbf{x})$ を考慮した正規化 B-Spline を Fig.5 に示す。

この時、式(3)の第 1 項の正規化 B-Spline は Fig.5 (a) に示すように通常の正規化 B-Spline であり、第 2 項は $H(\mathbf{x})$ を考慮すると Fig.5(b) のようになる。すなわち、この Heaviside 関数により Spline 関数に不連続を表現する自由度が与えられ、標本データ内に不連続線を有する場合の補間が可能となる。また、Fig.5(b) に示すように HB-Spline 関数を用いると不連続部分に節点を配置する必要がないため、不連続線を任意に配置することができる。

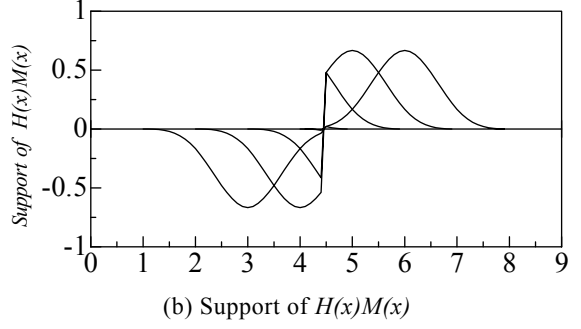
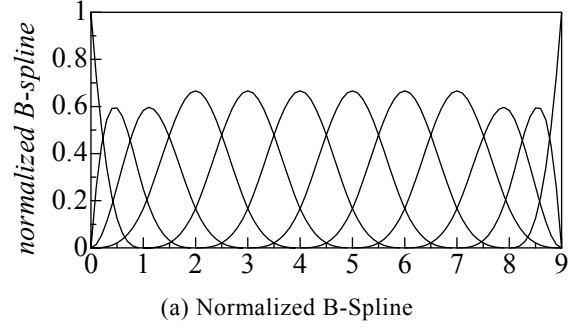


Fig.5 Support of B-Spline based functions

2.2 最小 2 乗法

今、式(3)のパラメータ c_{ij} 、 d_{ij} を求めるために領域 Ω 内に存在する標本点 $\mathbf{x}_r := (x_r, y_r)$ で得られた値 F_r を用いて残差 2 乗和、

$$Q = \sum_{r=1}^n \{S(\mathbf{x}_r) - F_r\}^2 \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

を最小とする事を考える⁽⁸⁾。ここで n は標本データの数である。今、残差 2 乗和が最小となるための局所的な極値条件は $\mathbf{c} := \{c_{ij}, d_{ij}\}$ と置くと、

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{c}} = \mathbf{0} \quad (5)$$

である。ここで、簡単のために $H(\mathbf{x}_r) = H_r$ とし、また、 A_{ijkl} 、 B_{ij} を、

$$\begin{aligned}A_{ijkl} &:= \sum_{i=1}^{h+m} \sum_{j=1}^{k+m} \sum_{k=1}^{h+m} \sum_{l=1}^{k+m} M_{ij}(\mathbf{x}_r) M_{kl}(\mathbf{x}_r), \\ B_{ij} &:= \sum_{i=1}^{h+m} \sum_{j=1}^{k+m} M_{ij}(\mathbf{x}_r).\end{aligned}\quad (6)$$

と定義し、式(5)に式(3)を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial c_{ij}} &= \sum_{r=1}^n A_{ijkl} c_{kl} + \sum_{r=1}^n H_r A_{ijkl} d_{kl} - \sum_{r=1}^n B_{ij} F_r = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial d_{ij}} &= \sum_{r=1}^n H_r A_{ijkl} c_{kl} + \sum_{r=1}^n A_{ijkl} d_{kl} - \sum_{r=1}^n B_{ij} H_r F_r = 0,\end{aligned}\quad (7)$$

となる。上式より正規方程式、

$$\begin{bmatrix} \sum_{r=1}^n A_{ijkl} & \sum_{r=1}^n H_r A_{ijkl} \\ \sum_{r=1}^n H_r A_{ijkl} & \sum_{r=1}^n A_{ijkl} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{kl} \\ d_{kl} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{r=1}^n B_{ij} F_r \\ \sum_{r=1}^n H_r B_{ij} F_r \end{Bmatrix} \quad (8)$$

が得られる．式(8)よりパラメータ \mathbf{c} が求まる．式(4)～式(8)は通常の Spline 関数に最小 2 乗法を適用した場合の誘導と同様であり，解の唯一性などに関しては文献(2)，(8)を参照されたい．

以上より得られたパラメータ \mathbf{c} を式(3)に代入する事で補間対象区間内に標本データ内に不連続線が存在する場合の補間値を求める事ができる．

2.3 補間例 本節では HB-Spline 補間の解析例を示す．今，1 次元において標本データが，

$$f_1(x) = \begin{cases} -1 & (x < 2) \\ 1 & (x \geq 2) \end{cases} \quad (9)$$

なる Heaviside Step 関数で与えられた不連続関数の補間を考える．今，補間区間を $0 \leq x \leq 4$ とし，不連続点を $x=2$ とする．このとき，節点は $x=0, 0.5, 1, 1.5, 2.5, 3, 3.5, 4$ とした．また，領域境界 $x=0,4$ では領域外では標本データは存在せず，関数が不連続とするために多重度を 4 とする．

標本データは Schoenberg-Whitney 条件を満たすように式(9)を満たす補間区間 $0 \leq x \leq 4$ で等間隔に 40 点与えた．この時，HB-Spline 補間と B-Spline 補間結果を Fig.6 に示す．図中 Q_B, Q_{HB} はそれぞれ B-Spline 補間と HB-Spline 補間の式(4)で定義された残差 2 乗和である．Fig.6 より，B-Spline 補間では Spline 関数が不連続を表す自由度がないため，不連続点 $x=2$ 付近で Gibbs 現象⁹⁾により関数が発振している．この振動により残差 2 乗和 Q_B が発生している．一方，HB-Spline 補間を用いた場合，不連続点近傍であっても Gibbs 現象は発生せず，式(4)の残差 2 乗和 $Q_{HB}=0$ で Heaviside Step 関数の補間をする事ができる．

次に，同一の補間区間，節点および標本位置に 3 ケース，

$$f_2(x) = \begin{cases} x & (x < 2) \\ -x+4 & (x \geq 2) \end{cases} \quad (10)$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & (x < 2) \\ (x-2)^2 & (x \geq 2) \end{cases} \quad (11)$$

$$f_4(x) = x \quad (12)$$

を標本データとして与えた補間結果をそれぞれ Fig.7, Fig.8, Fig.9 に示す．式(10)は関数が連続でその微分が $x=2$ で不連続な関数であり，式(11)は $x=2$ で関数とその微分が不連続な関数である．また，式(12)は連続関数であるが，不連続パラメータを導入した場合の結果を示す．Fig.7, Fig.8, Fig.9 に示すように，どのケースであっても HB-Spline 補間では $Q_{HB} = 0$ で補間できている．すなわち，HB-Spline 補間では Heaviside 関数により Spline 関数が不連続となる自由度があるため，微分の不連続も表す事が可能となる．また，不連続点

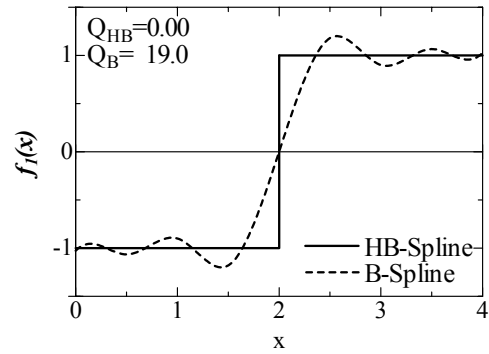


Fig.6 Interpolation of the Heaviside Step function, HB-Spline vs. B-Spline

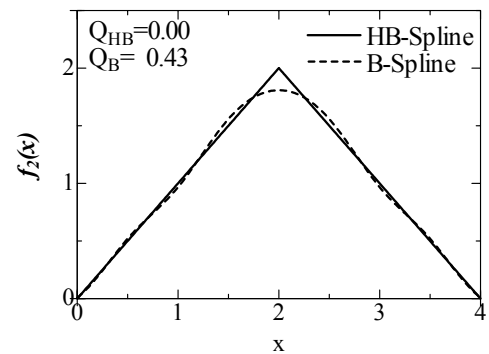


Fig.7 Interpolation of Eq.(10), HB-Spline vs. B-Spline

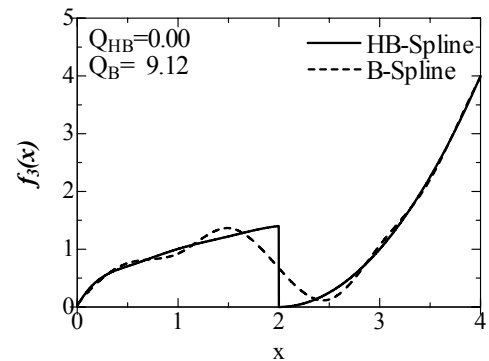


Fig.8 Interpolation of Eq.(11), HB-Spline vs. B-Spline

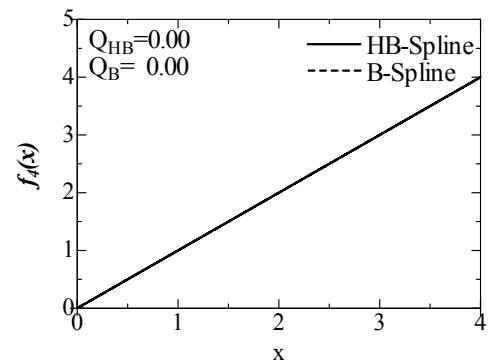
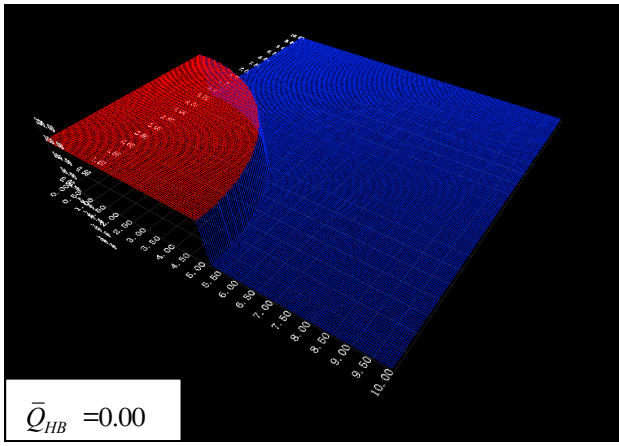
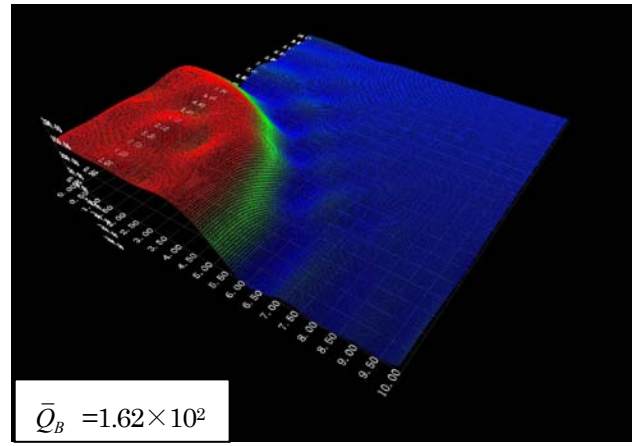


Fig.9 Interpolation of Eq.(12), HB-Spline vs. B-Spline

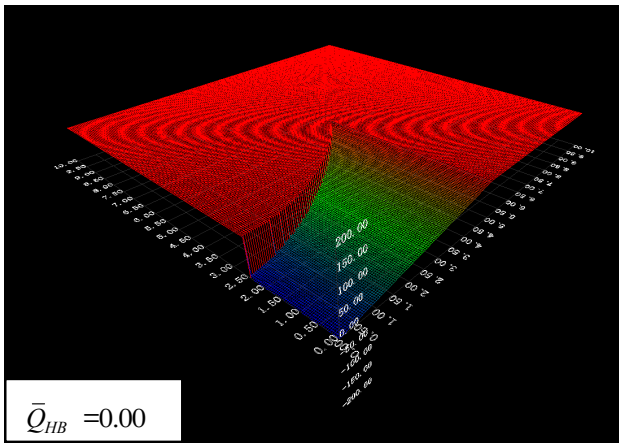


(a) Result of the HB-Spline interpolation.

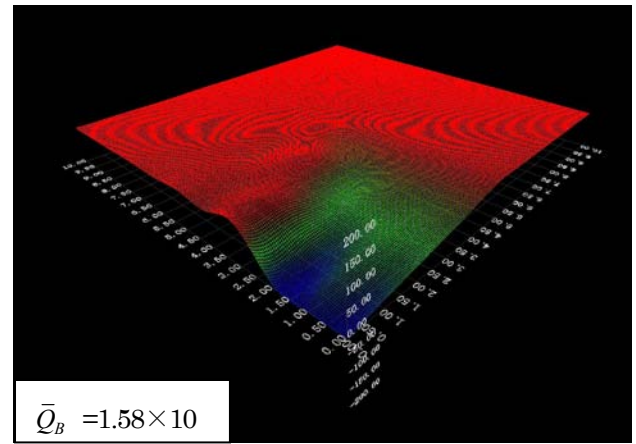


(b) Result of the B-Spline interpolation.

Fig.10 Interpolation of Eq.(13), HB-Spline vs. B-Spline



(a) Result of a HB-Spline interpolation.



(b) Result of a B-Spline interpolation.

Fig.11 Interpolation of Eq.(14), HB-Spline vs. B-Spline

のない標本データに対して HB-Spline 補間を適用した場合、不連続パラメータが0となり不連続点のない場合の補間も可能である。

次に2次元平面上に x 、 y 方向にそれぞれ 10×10 節点を格子上に配置し、標本データは以下の関数を用いて x 、 y 方向それぞれ等間隔に40点与えた場合の補間例を示す。

$$f(x,y) = \begin{cases} 150 & (x^2 + y^2 < 27) \\ 10 & \text{other} \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} 20x & (x < 5 \cap y < 0.1x^2 + 2.5) \\ 100 & \text{other} \end{cases} \quad (14)$$

上式はそれぞれ不連続線が2次元平面上で単一曲線の場合、不連続線が領域内で折れ曲がっている場合を想定している。後者は、不連続線の一端が領域内に存在する場合を特殊な場合として含んでいる。

この時、領域境界の節点で多重度を4としてB-Spline補間とHB-Spline補間の補間結果をFig.10, Fig.11に示す。なお、ここで、 \bar{Q}_B 、 \bar{Q}_{HB} は、後述する標本数と最小2乗和の比較のために、それぞれB-Spline補間とHB-Spline補間の残差2乗和をデータ数 n で除した平均2乗誤差である。

Fig.10(a), Fig.11(a)に示すように式(13)、式(14)で与えた標本データに対して、HB-Spline補間を適用した場合 $\bar{Q}_{HB} = 0$ であり、

最小2乗の意味で精度の良い補間となっており、また、不連続線が明確に精度良く表されている事が分かる。B-Spline補間では $\bar{Q}_B \neq 0$ であり、また、不連続線は明確ではなくGibbs現象が発生している。

Table 1, Table 2にそれぞれ等間隔に式(13)、式(14)で標本データを与えた場合の最小2乗誤差の比較表を示す。Table 1, Table 2を見て分かるように、HB-Spline補間は標本数によらず最小2乗誤差は $\bar{Q}_{HB} = 0$ である。一方、B-Spline補間では不連続を精度良く表現することができないため、残差2乗和をデータ数で除した値は、近似関数に固有なほぼ一定な値となり、0にはならない。以上より、HB-Spline補間は2次元の任意曲線上の標本データが不連続となる場合の補間にも有用である事が分かる。

Table 1 Least mean square of Eq.(13), HB-Spline vs. B-Spline

Eq.(13)		
Number of Sampling Data	\bar{Q}_{HB}	\bar{Q}_B
50 × 50	0.00	1.60×10^2
40 × 40	0.00	1.62×10^2
30 × 30	0.00	1.57×10^2
20 × 20	0.00	1.43×10^2

Table 2 Least mean square of Eq.(14), HB-Spline vs. B-Spline

Eq.(14)		
Number of Sampling Data	\bar{Q}_{HB}	\bar{Q}_B
50 × 50	0.00	1.57 × 10
40 × 40	0.00	1.58 × 10
30 × 30	0.00	1.58 × 10
20 × 20	0.00	1.57 × 10

3. 結 言

本論文では任意曲線上に高精度な不連続性を持つ HB-Spline 補間を提案し、以下に示す有用性を示した。

1. 不連続パラメータを導入することで標本データに不連続を有する場合の補間を簡易に行える。
2. Heaviside Step 関数を補間する際に HB-Spline 補間を適用した場合 Gibbs 現象は発生しない。
3. Heaviside Step 関数のみならず、微分が不連続の場合や連続関数の場合にも適用できる。
4. 2次元平面上で標本データの不連続線が関数形で与えられた場合、および不連続線の境界が領域内にある場合に、Gibbs 現象は発生せず、最小2乗の意味で高精度で補間できる。

参考文献

- (1) 李炳奇, 矢富盟祥, 陰解法リターンマップ手法を用いた圧縮荷重下における亀裂先端近傍応力場の弾塑性 X-FEM 解析, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.8, 2005, pp.461-470.
- (2) 市田浩三, 吉本富士市, Spline 関数とその応用, 教育出版, 1979.
- (3) E.V.Jarve, Mesh independent modeling of cracks by using higher order shape functions, *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, Vol.56, 2003, pp.869-882.
- (4) E.V.Jarve and D.M.R.Kim, Theoretical and experimental investigation of stress redistribution in open hole composite laminates due to damage accumulation, *Applied.Sci.Manuf.* Vol.36, 2005, pp.163-171.
- (5) Amit Shaw, K.N.Kaushik, D.Roy, Mesh-free approximations via the error reproducing kernel method and applications to nonlinear systems developing shocks, *Int.J.Nonlinear Mech.*, Vol.44, 2009, pp.417-431.
- (6) 田中 智行, 岡田 裕, 岡澤 重信, 藤久保 昌彦, ウェーブレットガラーキン法を用いた破壊力学解析に関する研究, 日本機械学会論文集, A編, 第75巻第751号, 2009, pp.296-303
- (7) T.Belytschko, N.Moes, S.Usui, C.Parimi, Arbitrary discontinuities in finite elements, *Int.J.Numer.Meth.Engng.*, Vol.50(4), 2000, pp.993-1013.
- (8) J.G.Hayes, The least-squares fitting of cubic spline surfaces to general data sets, *J.Inst.Maths.Applies*, Vol. 14, 1974, pp.89-103.

- (9) F.B.Richards, A gibbs phenomenon for spline functions, *J.Appro. Theory*, Vol.66, 1991, pp.344-351.