

平成 30 年 5 月 11 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04751

研究課題名(和文) 動的システムの分岐過程への数値誤差の依存性解析と新規解適合スキームの開発

研究課題名(英文) Analysis of dependence on numerical errors in the bifurcation process of dynamical system and development new adaptive numerical scheme

研究代表者

畑上 到 (Hataue, Itaru)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号：50218476

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、反応拡散方程式系のフィッツフー-南雲モデルや拡張したファンデルポール方程式をモデルに、分岐点近傍に複数の定常解が共存する場合に、かなり大きなランダムなノイズを加えながら安定状態を空間的に同時に与える新規の初期条件作成スキームを開発することにより、複数の安定解が空間内で不均一に共存する安定構造を持つ解(d-LCBS)を効率的に求めることができた。さらに、共存する安定な複数の解パターン間の遷移過程において、それらの相対的な安定度について、付加したランダムネスの大きさを評価した。また不均一解パターンの界面の安定性に対してランダムなノイズが影響を与えていることがわかった。

研究成果の概要(英文)：The properties of several types of asymptotic solutions of one- and two-dimensional reaction-diffusion system with the FitzHugh-Nagumo model and the extended van der Pol oscillator model were studied. When several asymptotic solutions coexist in a parameter region around the bifurcation point, the dynamic locally connecting bistable solutions (d-LCBSs) which consists of two domains can be effectively obtained by developing the newly suggested preconstructed initial condition given by calculating with large random noises in the present study. The relative stability levels of two stable uniform asymptotic solution patterns in the transition process from one pattern to another ones were evaluated by the amplitude of adding random noises. Furthermore, it was elucidated that the random noises affect the stability of boundary of the LCBS.

研究分野：Applied Mathematics

キーワード：randomness reaction-diffusion eq. FitzHugh-Nagumo eq. stability van der Pol model

## 1. 研究開始当初の背景

高パフォーマンス大型計算機の急速な発達と小型パソコン上での可視化技術の向上により、非線型現象における複雑な解パターンの解析は比較的容易にできるようになってきた。しかしながら、数値解として真の解と異なる解(幻影解)を得てしまう恐れがある点については、完全に解決されたわけではなく、解決すべき問題として依然として残っている。この問題に対して本研究者は、決定論に基づく解析手法を開発、適用して、ある種の非線型項が存在する場合に生じる幻影解の性質を明らかにしてきた。また他方で、数値計算の解の信頼性を左右している誤差の移入に対してランダムネスを付加する確率論的アプローチを導入して解析し、安定解の構造への数値誤差の影響について、数値シミュレーションを行う研究者へ提言を行ってきた。

以上の背景と研究成果をふまえ、本研究者らは、これまで開発してきたアプローチを、複数の安定解が微妙に交錯する分岐点近傍に適用することによって、ランダムな誤差移入の数値シミュレーションの結果への影響を具体的に明らかにすることができるのではないかと判断した。特に複雑な解パターンを有する反応拡散系等にこれらのアプローチを適用することによって、複数の安定解の空間的な特徴を分類し、さらにそれらの相対的な安定度の評価を行う上で新たな指針が得られるであろうとの着想に到った。

## 2. 研究の目的

本研究では、「非線型微分方程式の数値解の正確な分岐点を得るためにはどのような点を考慮して数値スキームを構成しなければならないか」、という問題に対して、確率論、決定論の両面から研究を推進する。すなわち、正確な分岐点を求める上で、種々の誤差移入の内、分岐点の変動に及ぼす数値誤差の影響や動的システムの構造不安定性に対するランダムな誤差移入の依存性を考察して、対象となる系の分岐点近傍での安定な解パターンの相対的な安定構造の詳細を明らかにすることを目的とする。

平衡点近傍においては、複数の安定解が共存しているため、安定解の間での相対的な安定度の差を評価することが必要となる。特に、分岐点近傍の安定解は安定度が低くなるため、ランダムなノイズにより、比較的敏感に他の安定解に遷移することが予想される。従って、このような複数の安定解の間での遷移過程や、遷移の障壁の高さを評価するスキームを構築することが喫緊の課題である。その後、複雑な分岐を起こす現象に焦点をあて、分岐点近傍での解の安定度評価スキームの結果をもとに、分岐過程の数値誤差による影響を抑える上で有効であると考えられる解適合スキームを構成することを目的とする。

## 3. 研究の方法

それぞれの専門分野をもとにして役割を分担し、まず確率論的な立場からの基礎研究については、研究代表者の畑上と確率論を専門とする分担者の税所が離散動的システムにランダムネスを付加した場合の影響について考察する。特にランダムネスの大きさが複数の安定解の間での遷移過程にどのような影響を与えるかについて、数値実験と理論的なアプローチの両面から共同で多角的に議論する。この基礎的な研究においては、数式処理ソフトの活用が有効であり、これを導入して研究を推進する。

一方、この研究と平行して、反応拡散方程式系の数学モデルを専門とする分担者の長山と畑上が、フィッツフー-南雲モデルを例に、多数の定常解が共存する分岐点近傍において、離散パラメータやランダムネスの大きさを变化させた場合に現れる遷移過程の構造変化を追跡する。通常、分岐点近傍領域においては、鋭敏な初期値依存性による非常に複雑な解構造が見られるが、それらを通常の初期条件から求めることは難しい。従って、種々の安定な解を組み合わせた解パターンを初期条件として用いることや、初期段階で非常に大きなランダムネスを付加して計算することにより、あらゆる安定状態が空間的に共存する状態を生成しうる条件等を模索する。すなわち、これまでの研究で知られていた空間的に均一な解パターンだけでなく、不均一なものも含めてあらゆる解パターンの抽出を行う。これらの試行錯誤の作業における重要なポイントは、ランダムネスに起因する構造不安定を持った複雑に見える現象のうち、膨大な量の計算結果からいかにして、その空間的に安定及び不安定な解パターン間の境界の構造を抽出するかである。これを効果的に行う上では、多くの擬似乱数を発生させて膨大なサンプルから複雑な空間構造を見極める上で、高速マシンを導入して長時間の計算による解析を行うことが不可欠である。さらに高次元離散動的システムの解析においては、非線型な挙動を示す複雑系の内的構造を有効に視覚化できる動画による解析が有効である。これに対しては、画像処理専用パソコンと有効なソフトウェアを導入して解析を行う。以上の解パターンを分類するアプローチをまず第一に構築することを最優先に研究を推進する。

次に、以上のアプローチを完成させた後、本研究ではフィッツフー-南雲モデルの物理パラメータを变化させて、解パターンの安定度が変化の様子を追跡し、分岐点近傍での複数の安定解が共存する状態でのランダムネス付加による遷移過程について解析する。その際、複数の解の間での遷移過程だけでなく、空間的に均一な解パターンについても、その構造の安定形状が変化の様子についても追跡する。さらに、フィッツフー-南雲モデルだけでなく、他のモデルについても同様の

解析を適用して、物理パラメータの変化に対する複数の解パターンの安定度変化の様子や遷移過程について解析する。ここでも長時間の計算による解析と可視化システムによる動画解析を行うことで、より効率的な解析を行う。

#### 4. 研究成果

本研究ではまず、反応拡散方程式系のフィッツアー-南雲モデルについて、多数の定常安定解が共存することが予想される分岐点近傍において、離散パラメータやランダムネスの大きさを变化させた場合に現れる種々の解パターンを分類した。特に本研究では、通常の計算では現れないような漸近解を得る上で有効であると思われる新規の初期条件を構成する方法を提案した。この方法は、非常に大きなランダムネスを加えながら通常の離散化された有限差分計算を比較的長時間行うことによって、前処理した初期条件を構成するという方法である。これにより、計算領域全体に広がった定性的に均一な構造をもつ大域解だけでなく、複数の解が空間的に共存する安定な解を得ることに成功した。この場合、二つの定性的に異なった定常解が境界の両側に共存する解パターンはしばしば現れるが、一方が周期的な波動運動をしているパターンを始めて安定的に得ることができた。これを d-LCBS (dynamic-Locally Connected Bistable Solution) と呼ぶ。この解パターンにおいては、通常は境界が不規則に振動しているが、静止している解の側において、位相の同期が生じた場合に境界が安定して静止することが明らかにされた。さらに、計算領域の広さの漸近解の構造への依存性についても明らかにした。

次に、同じく反応拡散方程式系のフィッツアー-南雲モデルの別のパラメータ領域に対して、上記の初期条件を構成する方法を適用し、2つの異なる均一解の間に静止する境界をもつ解を構成し、ランダムネスによりこの境界の曲率が変化する現象を追跡した。その結果、ランダムネスを加えている状態では、境界は静止した複雑な形状を呈するが、ランダムネスを取り除いた瞬間に、可逆的な境界の曲率変化が生じ、単純な曲率の小さい状態に戻ることを示した。

また同様のモデルに対して、複数の定常解が共存する場合に、空間的に得られた不均一な解パターンの安定度に重点を置いて解析、考察した。ランダムネスをこの不均一な空間安定解パターンに加えることにより、この不均一構造を構成する均一な解パターンの安定度によって、それぞれの均一パターンに遷移することを示した。これにより、解パターンの安定度のパラメータ依存性を明らかにする上で、一つの効果的なアプローチであることが確認できた。さらにこのアプローチは不均一な空間的な解パターンの場合だけにとどまらず、一般的に複数の解が共存するパ

ラメータ領域において、その解の安定度や解の遷移過程における安定度の障壁ともいえる状態の定性的評価を行う上でも有効であることが確認された。

以上の解析で得られた複数の空間的に得られた不均一な定常解が共存する場合に、それらの安定度の差を評価した。すなわち、ランダムネスの大きさをパラメータとして数値実験を行うことにより、ある安定状態から別の安定状態へ遷移する過程において、相対的な安定度を加えたランダムネスの大きさで評価することができた。またこれらの遷移過程においては障壁が存在し、ランダムネスの大きさによっては複数の状態間を空間的に不規則に遷移する現象が見られることも示すことができた。これにより、障壁の高さを評価するスキームの開発への糸口を与えた。さらに、流入なしの境界条件だけでなく、周期境界条件を採用した解析も行い、境界条件の違いによる、d-LCBSのパターンの違いや安定度の違いについて考察した。これにより、自由度の高い状態での均一・不均一のより複雑な解パターンを得ることに成功した。特に、二つの均一パターンが接触する境界の形状において、単純で対称的な直線的なものだけでなく、複雑な結合状態を示し、さらに非定常的に移動するものが存在し、それらが物理パラメータの領域によって安定度が異なることを示した。これらの不均一な解パターンにおいても、同様のランダムネスをパラメータとする数値実験により、その安定度の評価と障壁の高さの評価を行い、興味ある知見を得た。

最後に、新たなモデルとして、亜臨界分岐を有するファンデルポール方程式を取り上げ、界面の移動に対するランダムネスの寄与について考察し、不均一解パターンの界面の安定性に対してランダムなノイズが影響を与えていることを明らかにした。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Hataue, I., Study on Change of Stability Levels of Coexisting Multiple Solutions in Nonlinear PDE System, Information, 20(2017), 5499-5508, 査読有,  
<http://www.information-iii.org/index-j.html>

Hataue, I., Dependence of Asymptotic Solutions of 2-D Fitz-Hugh Nagumo Model Dependence of Asymptotic Solutions of 2-D Fitz-Hugh Nagumo Model, Information, 17(2017), 1065-1074, 査読有,  
<http://www.information-iii.org/index-j.html>

Hataue, I., On Immovable Boundary between Coexisting Solutions and Synchronization in a Reaction Diffusion System, J. Phys. Soc. Japan., 85(2016), 74005. 査読有, <http://dx.doi.org/10.7566/JPSJ.85.074005>

Y. Kobayashi, H. Kitahata, and M. Nagayama. Model for calcium-mediated reduction of structural fluctuations in epidermis, Phys. Rev. E, 92 (2015), 22709 査読有, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.92.022709>

K. Nishi, T. Ueda, M. Yoshii, Y. S. Ikura, H. Nishimori, S. Nakata and M. Nagayama. Bifurcation phenomena of two self-propelled camphor disks on an annular field depending on system length, Phys. Rev. E, 92 (2015), 22910, 査読有, <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.92.022910>

[学会発表](計12件)

畑上到, 2次元 FitzHugh-Nagumo モデルにおける空間的に共存する動的パターンの遷移過程について, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第21回シンポジウム, 2018年1月6日~7日, 島根大学(島根県)

Hataue, I., Dependence of numerical solutions of nonlinear PDE on forcibly added randomness, The 3rd International Conference on Fuzzy Systems and Data Mining, 2017年11月24日~27日, Hualien (Taiwan) (招待講演)

税所康正, 伊藤敦, OH ラジカルの収量(G値)のLET依存性に関する数理モデル, 日本放射線影響学会第60回大会, 2017年10月25日~28日, 京葉銀行分化プラザ(千葉県)

税所康正, チッチゼミの孵化生態について, 日本昆虫学会第77回大会, 2013年9月2日~4日, 愛媛大学(愛媛県)

畑上到, 複数の解が共存する非線型偏微分方程式系の空間構造へのランダムノイズの影響, 第64回理論応用力学講演会, 2017年8月22日~24日, 機械振興会館(東京都)

Saisho Y., On a probabilistic problem appearing in radiation biology, Workshop on Applied Analysis and Probability, 2017年3月21日~24日, 国立臺灣大學數學系(Taiwan) (招待講演)

税所康正, 伊藤 敦, DNA 二重鎖切断のLET依存性についての数学モデルの構築, 日本放射線影響学会第59回大会, 2016

年10月26日~28日, JMS アステールプラザ(広島県)

畑上到, FitzHugh-Nagumoモデルにおける共存する解が接触する境界の挙動について, 日本応用数理学会2016年年会, 北九州国際会議場(福岡県)

税所康正, セミの羽化日の分散が交尾率に与える影響について, 日本昆虫学会・日本応用動物昆虫学会合同大, 2016年3月26日~29日, 大阪府立大学(大阪府)

M. Nagayama, Mathematical modeling for the barrier function of the stratum corneum, 2016 NCTS Workshop on Applied Mathematics at Tainan, 2016年3月28日, National university of Tainan(Taiwan)

Y. Saisho and A. Ito, Mathematical Model Describing the Dose and LET Dependence of the Generation of DNA Damages by Radiation, 15th International Congress of Radiation Research (ICRR2015), 2015年5月25日~29日, Kyoto International Conference Center(Japan)

M. Nagayama, K. Wakai, K. Nishi, Y. Kobayashi, Y. Ikura and S. Nakata, The collective motion of camphor papers in an annular water channel, ICIAM2015, 2015年8月10~14日, Beijing (China)

[図書](計0件)

[産業財産権]

出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

畑上 到 (HATAUE ITARU)  
金沢大学・電子情報学系・教授  
研究者番号: 50218476

(2) 研究分担者

長山 雅晴 (MASAHARU NAGAYAMA)  
北海道大学・電子科学研究所・教授  
研究者番号: 20314289

税所 康正 (SAISHO YASUMASA)  
広島大学・工学(系)研究科(研究院)・  
准教授  
研究者番号: 70195973

(3)連携研究者  
なし

(4)研究協力者  
なし