現実課題を文脈とする数学科の教材実践

― EUの数理教育プロジェクトmascilを手がかりに ―

数学科 戸田 偉，保健体育科 丹内 周子，山本 潤平
金沢大学 大谷 実，伊藤 伸也

国際比較調査を例に良く語られることだが，数学学習の意義や必要性の実感を生徒に提供することは急務であると考える。そのため，実社会と関わる探究に基づく授業実践が必要と考えた。そこで，EUにおける数理教育プロジェクトmascil(mathematics and science for life)の枠組みを借り，職場の世界の要素を学校の教室に持ち込む授業を目指した。

実践した教材のうち，学習者がトレーナーの立場で考える「心拍数とコンディション（2017年度）」，薬剤師の立場でふさわしい服薬プランを提案する「薬の血中濃度（2018年度）」について報告する。

キーワード：数学的活動，フロイデンタール，RME，mascil，運動生理学，薬物動態

1．はじめに

数学を学び，その意義や必要性を感じること，会得することは，数学教育の普遍的な理想である。そのため，実社会と関わる探求を試みた。

2．RME理論とその教授原理

RME理論とは，フロイデンタールの数学教育理論を基に，現在のフロイデンタール研究所（Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education，略称 FIsme）とその前身の研究所で開発されてきた，数学教育の理論である。RME理論には次の6つの教授原理を認めることができる。

(1) 活動の原理

数学が最もよく学ばれるのは数学をすることによってであり，生徒を数学の学びへの活動的な参加者とみなすもの。この原理には，数学を人間の活動とみなすフロイデンタールによる数学の解釈や，フロイデンタールとトレフォース（Treffers.A）による「数学化」が反映されている。

(2) 現実感の原理

実生活など「数学化」をもたらす現実感のある文脈を伴う問題で教授活動を始めることなどを求める原理

(3) 水準の原理

数学の学びを「インフォーマルな方略」を用いる水準から「フォーマルな方略」や一般性を求める水準へといった，理解のいくつかの水準を進むとみなすもの。

(4) 関連付けの原理

数，図形，測定，データ処理といった数学の内容領域を密接に関連付け，さらに領域内においても関連付け教授活動を行うとする原理。

(5) 相互作用の原理

数学の学びを個人の活動でありかつ社会的な活動と見なすもの。生徒が自分の気づきや方略を他者と共有し振り返る機会を設けることで，生徒の理解をより高い水準に促すことを狙っている。

(6) 導きの原理

生徒の理解をより高い水準に促す具体的な手立てを明らかにし，数学の学びを導き，より高い水準へ

と促すことを求めるもの。この原理は，数学の「追発明」というフロイデンタールのアイデアと関連している。

3．EUにおける数理教育プロジェクトmascilと本校での実践例

mascil(mathematics and science for life)は，初等中等教育において探究に基づく科学の指導の普及を促進することや，数学教育と科学教育を職業に関連付けることを目指した数理教育のプロジェクトである。探求をせまる課題に取り組むことによって，生徒は科学者のように活動し，将来の個人や市民としての生活や職業生活において求められる能力や，好奇心，数学と科学の関わりを育むとともに，より深い学習を刺激することを目指している。しかもこのプロジェクトは，教員養成や教師教育の要素も取り込んでいる。

今回はmascilの教材である“Statistics as a bridge between Mathematics and Science”（数学と科学の架け橋としての統計)，“Drug concentration”（薬の濃度）の2つに着目した。

「数学と科学の架け橋としての統計」において生徒が取り組む主な課題は，運動生理学者がクライアントの身体コンディションを向上させるための心拍数に関する統計的手法に関するものである。心拍数をもとにコンディションを表すRuffer-Dickson index (IRD)の式について考えたり，年齢と最大心拍数の散布図をもとにそのモデルとなる式を洗練させる際の根拠について考えたり，目的に合ったトレーニング時の心拍数を計算したり，散布図から回帰直線を求めるアイディアを考えたりすることが求められている。

「薬の濃度」において生徒が取り組む課題は，効果的な薬物摂取量について研究する薬理学研究者の職業に関係しており，生徒には患者に薬の使用方法を伝える役割が想定されている。ほとんどの薬物はその効果を発揮するために，一定量の血中濃度を必要とする。その一方で，その濃度が高くなりすぎると，人体に悪影響を及ぼすこととなる。様々な薬物摂取の状況下でどのように血中濃度が変化するかを計算し理想化することに焦点が当てられ，生徒は実験の代わりに，数学を用いることで課題に取り組む。飲み忘れや，一回の服用量を2倍にするなど変えることでどのようなことになるかを調べる。生徒は患者向けのパンフレットとなるレポートを作成することが最終課題となっている。

(1) 心拍数とコンディション（2017年度）

「数学と科学の架け橋としての統計」を手掛かりとした，数学Ⅰ「データの分析」における実践である。概要は以下の通り。

「スポーツ科学や医療の分野では，科学的根拠に裏付けられた事象を推薦する『エビデンスベースド(Evidence Based)』の考え方が当たり前になっています。今回は，運動生理学者が日常的に用いる『スポーツ選手の身体的コンディション向上のための心拍数に関する統計的手法や知識の利用』について見ていきましょう。

コンディションを測定する（2択）

運動しているとき，(1分間の）心拍数は（上昇・下降）する。それは，コンディションの良い人の方が（急激・緩やか）である。また，コンディションの良い人の心拍数は，運動後，（より早く戻る。・なかなか戻らない。）

問1 自分がトレーナーなら，心拍数をどうコンディション向上に役立てますか？

回答例；安静時心拍数と最大心拍数を把握し「キツい・ラク」でなく「最大心拍数の何%」といった数値で運動強度の目安を決める，同じペースで走ったときの心拍数の増減で，心肺機能の向上を測る，等

実験A　心拍数の測定（Ruffier-Dickson test，以下RDt）

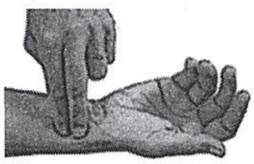
① 測定を始める前に，約1分間，静かに座る。

② 1分間心拍数を数える。これを**安静時心拍数**（H1）という。

③ 合図に合わせて45秒間，背筋をまっすぐに伸ばし足を地面につけたまま，スクワット（指先を地面につける。）を30回行う。

④ ③の直後に15秒間心拍数を数え，それを4倍する。これを**活動時心拍数**（H2）という。

⑤ ④の1分後，再度15秒間心拍数を数え，同様に4倍する。（H3）

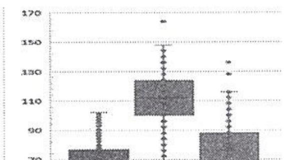


※スポーツ選手が行う心拍トレーニングでは左上図のような器具を用いることが多いが今回のRDtでは心拍は自分の脈を自分の手で測った。

問2　右の箱ひげ図は，RDtのデータをまとめたものです。

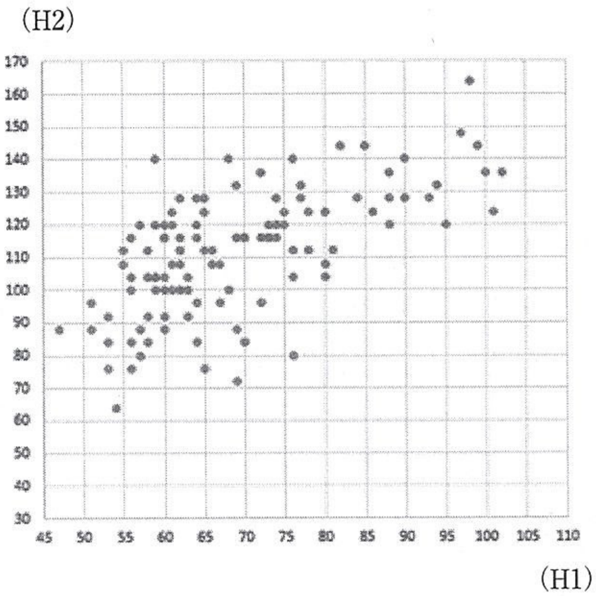
H1, H2, H3の箱ひげ図はどれでしょうか？

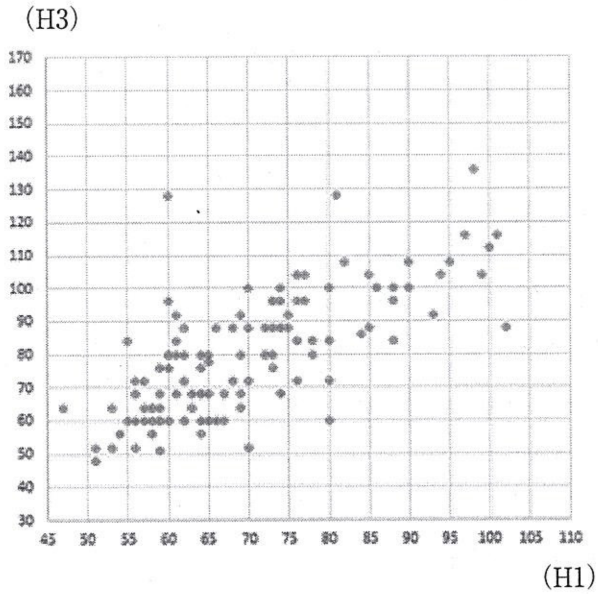
そう思う理由は？



回答例；左からH1, H2, H3
運動直後のH2が一番高く，少し休んだH3はそれよりは低いが安静時のH1よりは高いと考えられるから。

問3　以下の散布図は，RDtのデータ三クラス分をまとめたものです。それぞれの縦軸，横軸は，H1, H2, H3のうちどれでしょうか。そう思う理由は？





理由　運動後は心拍が上がり，休憩すると下がるはず。ただし，1分間の休憩では安静時心拍数まで戻らないことが予想されるので，H2>H3>H1となるケースが多いと思われる。よって，上の相関図は縦軸H2，横軸H1，下の相関図は縦軸H3，横軸H1だろう。

五数要約	H1	H2	H3
max	102	164	136
Q1	76	124	90
Q2	65.5	114	78
Q3	60	100	64
min	40	64	40
average	69.1	112.0	78.7
分散	162.1	339.1	352.1
標準偏差	12.7	18.4	18.8

問4 RDtでデータを収集する際，注意すべき大切な点をいくつか書きなさい。

> 安静にする　スクワット直後に測る（すぐ回復するから）（一人の人が毎日繰り返し行う場合は）同一時間帯など，同じ条件にする　など

正確に1分間当たりの心拍数H1, H2, H3が分かったとき，運動生理学者はあなたの体力レベルを予想することが出来ます。

問5 運動生理学者はどのようにH1,H2,H3を用いると思いますか。

> 比較的体力レベルの高い人は，一回の拍動で血液を送り出す量が多く，普段は少ない拍動で済み，少しの運動ならそれほど心拍数は上がらないと考えられるのでH2が小さいと予想される。また，回復も早いと考えられるので，H3はH1に近いから，H1-H3も小さくなるだろう。

問6 RDtを繰り返し行うとしたら，いつも同じ値になると予想しますか？また，運動生理学者はこのことをどのように扱うと思うかを述べなさい。

> いつも同じ値にはならないが，正確に測ればある一定の“幅”はあると予想される。
> 毎日計測して平均と標準偏差を求める　など

問7 各班でRDtを行い，下のI.R.D.の値を計算して，最小の人の値を黒板に書きに来てください。

正確に1分間当たりの心拍数H1, H2, H3が分かったとき，運動生理学者は身体コンディションの目安として，ある式，例えばRuffeier-Dickson 指標（略してI.R.D.）を用いることがあります。次のように計算されます。

I.R.D. 測定値	コンディション
I.R.D.≦0	極めて良い
0<I.R.D.≦3	とても良い
3<I.R.D.≦6	良い
6<I.R.D.≦8	やや悪い（weak）
I.R.D.>8	悪い

体力レベルの指標：

$$I.R.D.=\frac{H2-70+2(H3-H1)}{10}$$

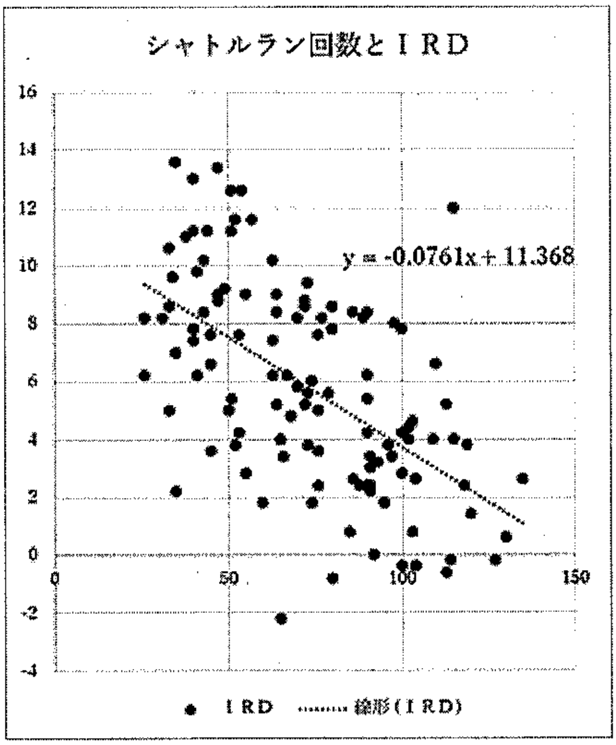
問8 指標（index）の式のどのデータ（H1, H2, H3）が最も重要だと思いますか？

問9 測定したI.R.D.の値は，被験者の運動能力に合っていますか。例えば，よく運動する同級生のI.R.D.は小さいですか。

問10 安静時心拍数H1と活動時心拍数H2の関係，H1とH3の関係を散布図で見ると，どのようになっていましたか？また，IRDとH1, H2, H3との相関を考えると，一番相関関係が強いのは？

相関係数	H1	H2	H3
H1	1.00	0.62	0.73
H2	0.62	1.00	0.64
H3	0.73	0.64	1.00
IRD	0.26	0.74	0.82

実験してみると，H3がH1より低いなど，測定ミスと見られる生徒もいたが，IRDの低い生徒は概ね体力のある生徒が多かった。しかし，体育科の協力を得て20mシャトルランの回数とIRDの比較をしたところ，相関係数-5.6程度で，相関が強いとは言い難かった。実験の精度が甘かったのか，データの数が不足しているのか，シャトルラン以外のもので心肺機能との相関が強いと思われるものを用いるべきだったのかはわからない。また，実験は数学の授業の最初に行ったが，体育の後のクラスと他のクラスのデータを混ぜるべきではなかったかもしれない。また，同じ人間が何回か（何週間か）記録をつけて変化を調べるなどの工夫も考えられる。いずれにせよ，教材の現実への説得力という点ではまだまだ改善の余地があると思われた。



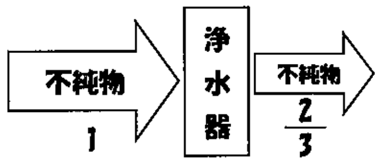
(2) 薬の血中濃度（2018年度）

「薬の濃度」を手掛かりとした，数学Ⅱ「指数関数・対数関数」，数学B「数列」，数学Ⅲ「数列の極限」における実践である。概要は以下の通り。

【第1回/全3回】

問1（教科書p.172問20）

ある浄水器で水をろ過すると，1回ごとに水の不純物の量を$\frac{2}{3}$にすることができる。水の不純物の量をはじめの$\frac{1}{100}$以下にするには，何回以上ろ過を行えばよいか。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$とする。



【解答】n回ろ過を行って$\frac{1}{100}$以下になったとすると

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \frac{1}{100}$ 底10（>1）の対数をとって

$\log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \log_{10}\frac{1}{100}$ より

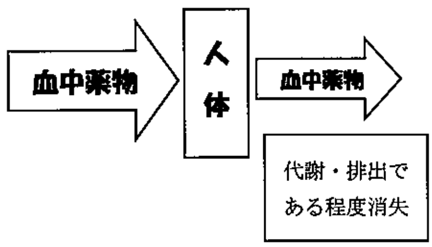
$n(0.3010-0.4771) \leqq -2$

$-0.1761n \leqq -2$ だから

$n \geqq \frac{2}{0.1761} = 11.3\cdots$（小数第1位まで）

【答】12回以上

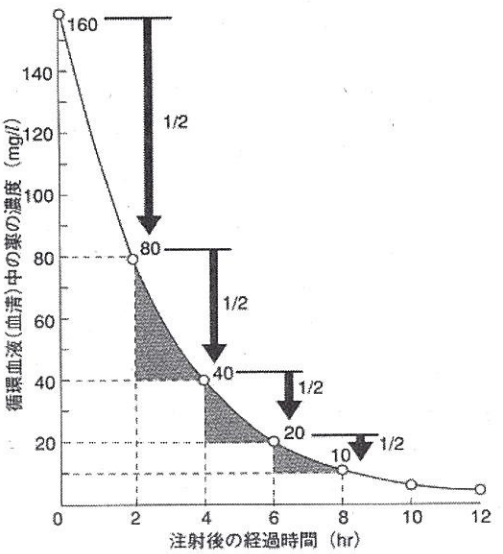
上の問1と同じように，人間の身体を浄水器に見立て，不純物を薬物と見立てて考えるのが，線形コンパートメントモデルです。



この場合，時間とともに一定の割合で減っていくので，「何回ろ過した」という代わりに「半減期」（薬の量や濃度が半分になるまでにどれだけ時間がかかるか）を用います。

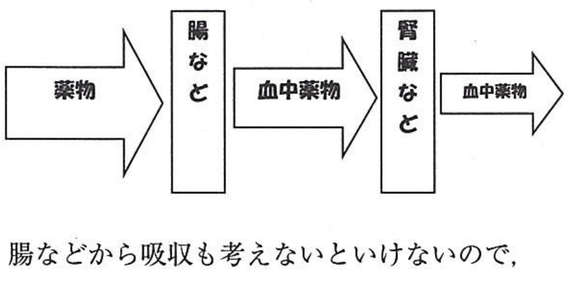
問2　次の図は，抗菌薬スルファチアゾール（半減期2時間）を静脈注射した際の血中薬物濃度曲線である。

注射してx時間後の血中濃度y　mg/lとすると，定数p, aを用いて$y=p\times a^x$ $(0<a<1)$と表すことができる。p, aを求めなさい。また，aは小数第3位まで求めなさい。



【答】　$p=160$,　$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.707$

【注意】問2のように，注射した場合，薬物はすぐに最大濃度に達すると考えられますが，経口投与の場合は違います。



腸などから吸収も考えないといけないので，

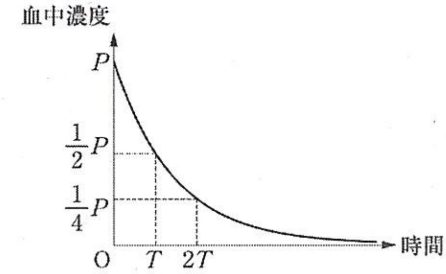
$y=p(a^x-b^x)$　　$(0<b<a<1)$

のようになることが知られています。

今回は，簡便のため，経口投与でも$y=pa^x$とみなして考えます。

問3（H29センター試行問題より）

ある薬Dを服用したとき，有効成分の血液中の濃度（血中濃度）は一定の割合で減少し，T時間が経過すると$\dfrac{1}{2}$になる。薬Dを1錠服用すると，服用直後の血中濃度はPだけ増加する。時間Tで血中濃度がPであるとき，血中濃度は次のグラフで表される。適切な効果が得られる血中濃度の最小値をM，副作用を起こさない血中濃度の最大値をLとする。



薬Dについては，M=2, L=40, P=5, T=12である。

次のQRコードを読み取って（無理なら直打ち）以下の実験を行い，グラフの概形を描いて，気付いたことを述べなさい。

https://www.geogebra.org/m/ghbycssx

実験

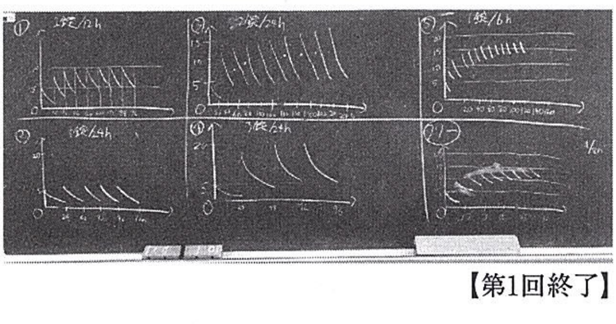
① 12時間ごとに1錠ずつ服用する

② 24時間ごとに1錠ずつ服用する

③ 24時間ごとに服用し，1回目は1錠，2回目からは2錠ずつ服用する

④ 24時間ごとに服用し，1回目は1錠，2回目からは3錠ずつ服用する

⑤ 6時間ごとに1錠ずつ服用する



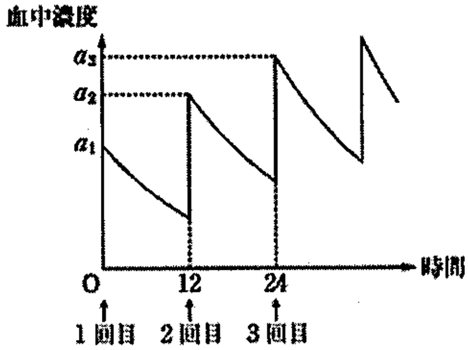
【第1回終了】

【第2回】

問3で，横軸x(時間)，縦軸$y(mg/l)$とすると，どんな式で表せますか？

【答】 $y=5\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{12}}$

薬Dについて，12時間ごとに1錠ずつ服用するときの血中濃度の変化は次のグラフのようになる。



問4 (1) 下表を埋めて，血中濃度a_1, a_2, a_3 (%)を求めなさい。

時間 / n回目の薬の濃度	0	12	24
1回目の服用直後	5	2.5	1.25
2回目の服用直後		5	2.5
3回目の服用直後			5

$a_1=5$, $a_2=5\times\frac{1}{2}+5=7.5$, $a_3=(5\times\frac{1}{2}+5)\times\frac{1}{2}+5=8.75$

(2) 2回目の薬を飲み忘れたとき，24時間後の服薬直後の血中濃度を求めなさい。

【答】 $(5\times\frac{1}{2})\times\frac{1}{2}+5=6.25$

(3) nを自然数とする。飲み忘れがなかった時，n回目の服用直後の血中濃度a_nを求めなさい。また，何回も飲み続けるとき，a_nはどんな値に近づきますか。

【答】 初項5，公比$\frac{1}{2}$，項数nの等比数列の和だから，

$$a_n=5\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=10\{1-(\frac{1}{2})^n\}\to 10\ (n\to\infty)$$

よって，a_nは10に近づく。

(4) 前回実験した服用法①～⑤に従って薬Dを服用し続けたとき，適切でないと思われる服用法を挙げ，その理由を説明しなさい。

① 12時間ごとに1錠ずつ服用する

② 24時間ごとに1錠ずつ服用する

③ 24時間ごとに服用し，1回目は1錠，2回目からは2錠ずつ服用する

④ 24時間ごとに服用し，1回目は1錠，2回目からは3錠ずつ服用する

⑤ 6時間ごとに1錠ずつ服用する

【ヒント】(3)と同様に②～⑤のn回目の服用直後の血中濃度をb_n～e_nとすると

② $b_n=5+5\frac{1}{4}+5(\frac{1}{4})^2+\cdots+5(\frac{1}{4})^{n-1}=5\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{20}{3}$

$\{1-(\frac{1}{4})^n\}\to\frac{20}{3}=6.\dot{6}\ (n\to\infty)$

③ $c_n=10+10\frac{1}{4}+10(\frac{1}{4})^2+\cdots+10(\frac{1}{4})^{n-2}+5(\frac{1}{4})^{n-1}$

$=10\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}-5(\frac{1}{4})^{n-1}\to\frac{40}{3}=13.\dot{3}\ (n\to\infty)$

④ $d_n=15+15\frac{1}{4}+15(\frac{1}{4})^2+\cdots+15(\frac{1}{4})^{n-2}+5(\frac{1}{4})^{n-1}$

$=15\frac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}-10(\frac{1}{4})^{n-1}\to 20\ (n\to\infty)$

⑤ 初項5，公比$\sqrt{\frac{1}{2}}$項数nの等比数列の和より

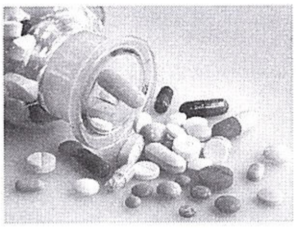
$$e_n=5\frac{1-(\sqrt{\frac{1}{2}})^n}{1-\sqrt{\frac{1}{2}}}\to 5(2+\sqrt{2})=17.071\cdots$$

$(n\to\infty)$

参考URL:

https://www.geogebra.org/m/ghbycssx

最終課題



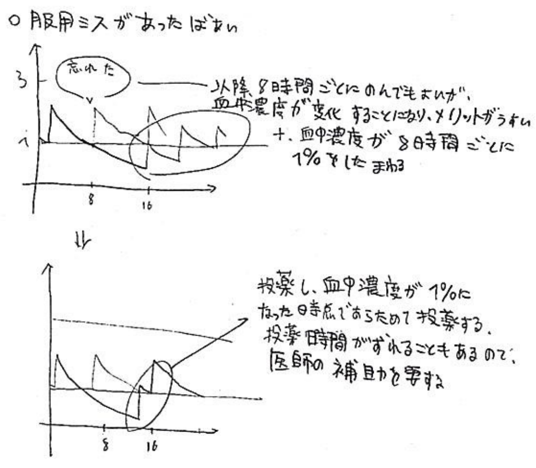
あなたは医師（または薬剤師）です。薬を繰り返し飲むと血中濃度がどう変化するかを考えて，以下の薬の服用案を検討し，最もよい案を選んで（あるいはもっと良い案を作って）わかりやすいリーフレットを作成してください。また，患者さんが飲み忘れたときにどうしたらよいか，アドバイスして下さい。なお，この薬の半減期は8時間，有効血中濃度は1％以上～3％以下とし，薬を1錠飲んだ時，血中濃度は1％上がるとします。

服用案1	4時間ごとに2錠ずつ薬を飲む。
服用案2	8時間ごとに2錠ずつ薬を飲む。
服用案3	16時間ごとに2錠ずつ薬を飲む。
服用案4	8時間ごとに4錠ずつ薬を飲む。
服用案5	8時間ごとに1錠ずつ薬を飲む。

参考　https://www.geogebra.org/m/mnmpukna

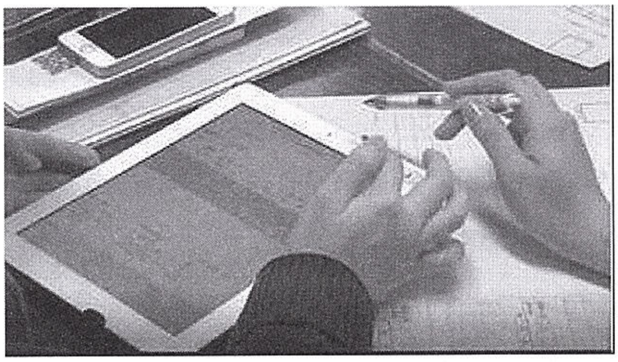
【第3回】

生徒による相互発表・評価を行った。



上は生徒が作成したリーフレットの一部である。

GEOGEBRAで服薬プランを制作し，修正・再提案をジグソー法で行った。Web上で生徒たちの作ったプラン（修正前）を公開したので，ご覧いただきたい。



参考　https://www.geogebra.org/u/todasuguru

4．おわりに

数学を使って現実課題を考える際，3(1)のように散布図や相関をとって比較する，3(2)のようにパラメータを増減させたときのグラフの変化を把握するなど，ICT教材の利用は有用であると改めて感じた。今後も，より一層教材を改良していきたい。

謝辞

本研究の一部は，JSPS科研費基盤研究（B），言語活動とICT環境の充実による関数の創発的モデル化カリキュラムの開発と評価，課題番号16H03056，代表者（大谷実）の助成を受けたものです。また，GEOGEBRAアプレットの作成に当たり，上越教育大の布川和彦先生にご助言を頂きました。

参考文献

徳田凌・原佑輔・伊藤伸也：「数学学習の意義や数学の必要性を実感しうる数学科の教材開発」『日本科学教育学会研究会研究報告』，30（4），53-56，2016

松島信二・田中紘希・伊藤伸也：「実生活を文脈とする数学科の教材の開発」『日本科学教育学会研究会研究報告』，32（4），47-50，2017