

令和 4 年 6 月 6 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2017～2021

課題番号：17K05273

研究課題名(和文) 抽象偏微分方程式の理論 個体数変動モデルの解析手法として

研究課題名(英文) Theory of abstract partial differential equations -- as a method of analyzing population models

研究代表者

蚊戸 宣幸 (Kato, Nobuyuki)

金沢大学・電子情報通信学系・教授

研究者番号：40177423

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：バナッハ空間上の抽象的偏微分方程式で、時間遅れを持つモデルに対して、定常解の線形化安定性の結果を得た。これは、年齢構造やサイズ構造を持ち、空間拡散及び時間遅れのある個体数変動モデルに対して応用が可能である。

サイズ構造と空間拡散のある個体数変動モデルに対する収穫問題で、利益を最大にするという最適収穫問題に対して、最適解の存在と最適解であるための必要条件を得た。また、年齢構造を持つモデルに対する最適収穫問題で、収穫率に有界性を仮定しない場合に測度の最適解が存在することを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果の学術的意義の一つは、抽象的偏微分方程式の理論を展開することにより、時間、場所、サイズという3種類の変数を持つ数理モデルの解析が可能となったことである。従来の抽象的發展方程式の理論は、時間と場所、または時間とサイズといった2種類の変数を持つ数理モデルに対し有効であったことと比較して、より応用の範囲が広がったと言える。

もう一つは、最適収穫問題について得られた結果は、農業や水産業における収穫量や利益を最大にするため制御モデルからくる問題で、最適解であるための必要条件や解の存在条件を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：For abstract partial differential equations with time delay in Banach spaces, the linearized stability of steady states is shown, which is applicable to age- or size-structured population models with spatial diffusion and time delay.

For optimal harvesting problems for size-structured population models with spatial diffusion, the existence of an optimal control and an optimality condition are shown. In addition, the existence of a measure-valued optimal control is shown for age-structured harvesting models.

研究分野：解析学

キーワード：抽象偏微分方程式 個体数変動モデル

## 1. 研究開始当初の背景

サイズに依存した個体数変動モデルの研究は、細胞の増殖モデル、感染症モデル、微生物、植物や魚などの個体数変化のモデルとして様々な応用を持つことから、1980年代頃からその重要性が認識されてきた。1990年代半ばに非線形成長率を持つモデルの研究がなされ、その後、多種生物系を含めたより一般的なモデルに対し、解の存在、定常解の存在や安定性についての研究がなされてきた。ただし、これらはいずれも場所には依存しないモデルについての研究であった。一方、年齢依存モデルでは、1980年代後半から空間拡散を考慮したモデルの研究が行われてきた。2000年以降、空間領域に生息している生物の個体数変動をとらえるための数理モデルとして、年齢、サイズ、場所に依存する個体数モデルを扱う研究がされるようになった。研究代表者は、サイズと場所に依存する個体数変動モデルを一般的に解析する方法として、バナッハ空間やバナッハ・ラティス上の抽象偏微分方程式の研究を始めた。研究開始当初は、研究代表者により、線形の抽象的偏微分方程式に対する解の存在や一意性などは得られており、サイズと場所に依存する個体数変動モデルの解析手法として確立するため、この抽象偏微分方程式の理論を更に整備する必要がある状況であった。

## 2. 研究の目的

抽象偏微分方程式というのは、バナッハ空間上の偏微分方程式を指す。植物や魚などの個体数変動モデルを考えると、年齢よりサイズが重要な要素であることが知られているが、空間的な広がりも同時に考慮したより現実的なモデルを取り扱うためには、サイズ、時間、場所の3種類の変数をもつ個体数変動モデルを考える必要がある。抽象偏微分方程式は、このようなモデルへの応用のために始まった新しい枠組みである。当該研究の目的は、この抽象偏微分方程式の理論を発展させ、空間拡散のあるサイズ依存の個体数変動モデルへ応用することにある。これまでの研究では、線形の抽象偏微分方程式に対して、解の存在、一意性、初期値についての解の連続的依存性、正値性などの結果が得られている。ここでは、それ以上に理論の整備を図ることを目的とする。特に定常解の理論や半線形の理論を構築することは応用上重要である。また、農業や水産業における最適収穫問題への応用を考えて、上の枠組みにおいて最適制御問題の理論を発展させる。

## 3. 研究の方法

以下のように、線形抽象偏微分方程式に対する理論の発展を図り、半線形抽象偏微分方程式に対する理論の発展を図る。また、サイズと空間拡散を考慮した個体数変動モデルへの応用を考える。

- (1) バナッハ空間やバナッハ・ラティス上の線形偏微分方程式に対する定常解の存在、定常解の安定性について明らかにする。
- (2) バナッハ空間やバナッハ・ラティス上の半線形偏微分方程式に対し、解の存在と一意性、初期値についての解の連続的依存性を明らかにする。
- (3) バナッハ空間やバナッハ・ラティス上の半線形偏微分方程式に対する定常解の存在と線形化安定性の原理を示す。
- (4) 多種生物系を含めたサイズと場所に依存する個体数変動モデルに対して、定常解の存在や局所安定性を示す。
- (5) バナッハ空間やバナッハ・ラティス上の線形偏微分方程式に対する最適収穫問題を考察し、最適解の存在や最適性条件を与える最大値原理を示す。

#### 4. 研究成果

- (1) バナッハ・ラティス上の抽象的線形偏微分方程式に対する結果を応用することにより、サイズ構造と空間拡散のある線形の個体数変動モデルに対する最適制御問題について考察した。ここでは特に収穫係数を制御することで収穫量を最大にする最適制御問題について考え、その最適解が存在するための十分条件を与えると同時に、ポントリャーギンの最大値原理について考察し、最適収穫のための収穫係数の形を与えた。さらに最適収穫係数が有限個の値しか取らない、いわゆるバンバン制御であるための条件を与えた。この結果は、これまでに知られていた空間拡散のないサイズ構造モデルに対する結果を拡張するものである。この結果については、国際誌に論文を発表した。
- (2) 年齢構造に対応するバナッハ空間上の抽象的偏微分方程式で、時間遅れが半線形の積分項で表されるモデルに対する定常解の線形化安定性について考察した。ここでは、作用素の行列を用いて発展方程式の形に変形し、非線形発展方程式に対して得られていた線形化安定性の原理をこの場合に適合する形に拡張することで線形化安定性の結果が得られた。これについては、国際会議で発表した。
- (3) サイズ構造に対応するバナッハ空間上の抽象的偏微分方程式で、半線形の時間遅れのあるモデルの場合に対する定常解の線形化安定性について考察した。ここでは、以前から知られていた発展方程式に対して扱われた遅れと同様なタイプを扱い、これらの結果を拡張することができた。この結果については、国際会議で発表した。
- (4) 年齢構造の個体数変動モデルに対する収穫問題で、利益を最大にするという最適収穫問題を扱った。これは栽培による農業や養殖などの水産業において、新生個体数の供給量と年齢ごとの収穫量の2つの量を制御することで、利益を最大にするという最適制御問題からくるものである。収益を表す関数は経済学的な理由から価格に対して非線形であるとする。制御関数である収穫量には有界性を仮定しない場合に、デルタ関数で表現される制御が最適制御になり得ることが示された。これについては、国際会議のプロシーディングに発表した。
- (5) 上記の最適収穫問題において、収益関数は価格に対して非線形であるとし、制御関数である収穫量には有界性を仮定しない場合に測度値を持つ最適制御関数が存在することを示した。ここでは、元の方程式系を積分した新たな方程式系を導入し、有界変動関数の枠組みで制御関数を導入し、有界変動な最適制御関数の存在を示し、その超関数の意味での微分をとるという方法を新たに開発した。この結果は、国際誌に論文として発表した。ここで開発された方法を用いると、今後の発展として、サイズ構造を持ち空間拡散のある個体数変動モデルに対する最適収穫問題も取り扱うことが可能になることが期待できる。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Nobuyuki Kato	4. 巻 18
2. 論文標題 Optimal harvesting for linear size-structured population models with diffusion	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Nonlinear and Convex Analysis	6. 最初と最後の頁 1335-1348
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Natali Hritonenko, Nobuyuki Kato, Yuri Yatsenko	4. 巻 -
2. 論文標題 Existence of measure-valued solutions in optimal control of age-structured populations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Applicable Analysis	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00036811.2021.1981876	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Natali Hritonenko, Nobuyuki Kato, Yuri Yatsenko	4. 巻 -
2. 論文標題 Dirac Delta-Function in Optimal Control of Age-Structured Populations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Proceeding of 12th International ISAAC Congress	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件/うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Nobuyuki Kato
2. 発表標題 Optimal harvesting for size-structured population models with spatial diffusion
3. 学会等名 Equadiff 2017（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Nobuyuki Kato
2. 発表標題 Linearized stability for abstract age-structured population equations with delay in Banach spaces
3. 学会等名 The 6th Asian Conference on Nao-Asia 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Nobuyuki Kato
2. 発表標題 Linearized stability for abstract size-structured equations with delay
3. 学会等名 Equadiff2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ヒリトネンコ ナタリー  (Hritonenko Natali)		
研究協力者	ヤツェンコ ユーリ  (Yatsenko Yuri)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	Prairie View A&M University	Houston Baptist University		