Designing Learning Environment of Function in Junior Secondary School: With Emphasis on Classroom Discourse and ICT

中学校関数領域における学習環境のデザイン：教室談話とICT利用を視点として

大谷　実

Designing Learning Environment of Function in Junior Secondary School: With Emphasis on Classroom Discourse and ICT

Minoru OHTANI

1．はじめに

(1)研究の目的と方法

本研究は，中学校数学科における関数授業で，生徒が関数を数学的な対象として考え，語ることを奨励するような学習環境をデザインすることを目的とする．その方法として，「ディスコースを通した数学的対象の構成」に関する近年の研究（Font et.al, 2010; 布川, 2014; Sfard, 2011; Nachlieli & Tabach, 2011）の枠組みや知見を参考とし，「デザイン実験」の手法（Gravemeijer & Cobb, 2006）に基づき，実践家と研究者が協働で学習環境をデザインする．特に，本研究では，教室談話とICT環境を視点として中学校第２学年の一次関数と第３学年の関数 $y=ax^2$ について学習環境のデザインを行った．

(2)研究の背景と関連する研究

①　研究の背景

関数は，中学校から一つの内容領域をなす．現行の中学校学習指導要領では，「関数」領域が設けられ，伴って変わる二つの数量の変化や対応を，表，式，グラフによって表現することで関数の性質やそれらの関係を調べることが目指されている．

先ず，中学校の関数領域の内容構成をまとめる．第１学年で関数の定義を導入し，小学校で学んできた比例や反比例を関数としてとらえ直す．また，考察する変数の範囲を負の数にまで拡張するとともに，関数$y=ax^2$のように比例，反比例，一次関数を式で定義し，数表やグラフにおける伴って変わる二つの数量の変化や対応の性質を新しい専門用語で表し，性質間の関係を構築する．中学校における学習内容は，思考水準論（van Hiele, 1986）に照らして考えると，記述的水準から局所的演繹の要素を含むより高い水準へと移行を進めるものといえる．高い水準では，個々の関数は，性質（あるいは属性）を運搬するラベルから，式による定義（あるいは特性）に基づいて構築された性質間の関係網として認識される．このように，中学校での関数は属性から特性へ移行し，新しい種類の思考の対象となる．

思考水準論で指摘されているように，水準が移行する際に言語も変化する．例えば，比例の場合，小学校では具体的な事象における二つの数量間に乗法的関係があるとき，「比例する」と表現する．小学校では，比例は具体的事象に埋め込まれた数学的性質を叙述する述語として機能する．これに対して，中学校では「比例$y=ax$は」と，主語として語られる．このことは，他の関数でも同じである．例えば，一次関数$y=ax+b$の数表やグラフの性質を考察するとき，一次関数という抽象的な対象がもつ一般的な性質を数学の世界で考察している．また，特定の一次関数を定めるのに，先ず$y=ax+b$とし，それ

令和元年12月20日受理

からaとbの値を求めるときも，一次関数を主語として考えている．一般に，与えられた関係がどのような関数であるかを問うたり，与えられた関数の式・表・グラフの組み合わせを決定したりする際には，関数自体を具象化された抽象的な数学的対象（Sfard, 1991）として扱う能力が要求される．

しかしながら，関数それ自体を考察の対象とすることは中学生にとって困難である．実際，関数についての中学生の理解には課題があると種々の調査で指摘されている．例えば，国立教育政策研究所 (2012) は「2つの数量の関係が比例・反比例・一次関数の関係になることを理解すること」(p. 27) を課題の1つとしてあげている．また，全国学力・学習状況調査の「主として知識に関する問題」（国立教育政策研究所，2013）で，例えば，yがxの関数であるものとして，整数xの絶対値yを同定する問いに対して，その正答率が13.8%であることが示すように，中学校３年生になっても，事象から関数を同定する能力が生徒に育成されているとはいいがたい状況にある．

②　教室談話の問題

関数を数学的対象として学習することの難しさを分析する一つの視点として談話（ディスコース）研究がある．ここで，談話とは，固有の語彙や視覚的媒介物，決まりきった行為や，許容される語り口等を含む「コミュニケーションの独特のタイプ」(Sfard, 2011: 2)を意味する．

関数の学習環境として談話に着目する研究として，例えば，布川 (2014) は，「関数が生徒にとって表・式・グラフを用いて表現する対象として成立しているのか，学習をするために考察をする対象として成立しているのか」(p.86) を問題視し，教科書の記述を中心に分析し，定義に関わる語り方の特徴とその後の活動での語り方に不整合がみられ，生徒が関数を対象としてとらえにくくしていることを明らかにしている．同じように，Fontら(2010)は，授業における教師の関数の語りも首尾一貫していないことを指摘する．例えば，伴って変わる二つの変数の間の一意対応として関数を語ったり，「一次関数$y=2x+1$」として関数と式を同一視したり，関数は表・式・グラフで表現されるとして対象と表現を区別して語ったりすることは，関数の語りが首尾一貫していない典型的な例である (Font et.al, 2010).そして，関数の語り方の一貫性を配慮することで，関数の学習に生徒が参加しやすくなる可能性が高まることを示唆している．

授業の談話に関する研究を通して，生徒が関数を数学的対象としてとらえなくとも，ある種の計算や操作のレベルに基づく談話により教師と生徒の相互行為が成立していることが指摘されている．例えば，Nachlieli & Tabach (2011)は，関数学習の初期の生徒の談話を低次の操作と高次の対象という視点から分析し，関数の学習の初期の２か月において生徒の談話がもっぱら「低次」(p. 25)のもの，すなわち，具体的な関数の式・表・グラフに対する操作レベルでのルーティンな処理を他者との関係で行うことに終始していることを示している．このような談話では，具体的な関数の式・表・グラフの操作レベルでの処理は身につくが，関数がどういう対象であるかを考えないまま学習が進む状況があることを指摘している．このように，関数の授業において，生徒は，式・表・グラフに対するルーティンな処理はできても，何のために何をしているのかが曖昧なまま課題を解決しているのである．大谷ら（大谷，日野，布川，影山，中村，2018）は，中学校第２学年の一次関数の活用の授業を分析し，生徒が関数とは直接関係のない他の知識（この場合は図形の面積）に基づいて問題を解決していることを明らかにしている．

Nachlieli & Tabach (2011)は，関数学習における談話の問題を改善するためには，他者のための低次の儀式的なルーティンから高次の「自分のための」(p. 25)ディスコースになるように，関数それ自体を，目的を持って探究したり表現したりできるような首尾一貫したディスコース

を設定し，主導的で期待されるディスコースが何であるのかを教師と生徒が明確に共有し，真似ることが大切であると示唆している．その際には，低次の操作レベルから高次の形式的知識への移行を，中間的な水準を設定して漸進をはかる「創発的モデル化」（Gravemeijer, 1997）の視点も参考になる．

これまで見てきたように，中学校の関数指導における数学的対象の構成に関する研究では，教室談話に起因する生徒の困難が指摘されている．他方で，我が国の学習指導要領では，関数を定義特性として理解することを目指している．本研究では，これらの視点や示唆を参考として，関数の学習環境のデザインを試みる．以下では，中学校数学科における関数授業で，生徒が関数を数学的な対象として考え，語ることを奨励するような学習環境のデザインを試みる．

2．デザインの原理

関数の単元ならびに主導的な談話をいざなう学習環境について，本デザイン研究では，以下の３つの原理を取り上げた．

(1) 関数の語り方

本研究では，先行研究で指摘されていることに鑑み，関数に関する談話を首尾一貫することが重要であると考えた．

関数に関する談話として，一意対応としての側面と，伴って変わる変量としての側面がある．ここで，関数を，いわゆる決まれば決まる「こと」という抽象的なとらえ方ではなく，具体的な変量として，すなわち，オイラーの微分学の教科書における定義を採用した．それは，「別の量に依存しているある量，つまり，他の量が変化するときに変化を受ける量はもとの量の関数と呼ばれる．」（岡本・長岡，2014: 32）というものである．また，本研究では，関数という対象とその式・表・グラフの表現を区別することとした．そして，式・表・グラフは，関数の異種の痕跡，「影」であると考える．そして，式・表・グラフそれぞれの影の一部分から，個別の関数（量 x に依存しているある量 y）の性質の現れ方（変化と対応の特徴）を考える．

(2) 動的環境で変量を観察し，語る

他の量が変化するときに変化を受ける量を強調するために，本研究では，動的数学ソフトウエアである“GeoGebra”のアプレットを作成し，タブレットパソコンを使用して生徒に触れさせる．例えば，変量が伴って変わる様子を，式で x と y が計量カウンターのように連動して変わったり，グラフでは y 軸上を移動するキャラクターとその影を表す点が同時に移動したりすることにより，関数としての変量と影を区別することができる．また，動的環境により，例えば，一次関数と反比例の変化の割合を比較する際に，反比例では原点の近くで変化の割合が激しく変動し，原点から離れると緩慢になることを実感することが可能となり，単に「変化の割合は一定でない」という以上の理解を得ることができる．さらに，動的環境でアプレットが組み込まれたタブレットを生徒が使用することで，変量の動き方についての予想を述べたり，動いた影の特徴を語ったりする機会が増えることが期待される．

(3) 代数的処理やグラフの図形的な性質

大概の教科書は，関数を式として静的対象として扱い，それを方程式の解法を用いて代数的に決定する．また，グラフを，直線の平行性や放物線の対称性など図形の性質としてとらえる．このような静的見方を早期に主導的な談話として優勢にするため，他の量が変化するときに変化を受ける量の特徴として見出してきた性質を参照しつつ，関数について語る機会が少なくなる．現行の教科書でも関数は基本的に静的なディスコースが早めに主導的なものとなることが，生徒の側で関数という対象をイメージしにくくしているように思われる．本デザイン実験では，変量の動的側面から静的側面へのディスコースが変化することを，教師と生徒が共有できるように配慮した．次の２つの節において，第２学年の一次関数と第３学年の関数 $y=ax^2$ の学習環

境のデザインについて説明する．

3．一次関数の学習環境のデザイン

一次関数の学習に関して，上記のようなデザインの原理を研究者と実践家が協議しつつ，協働しながら単元と学習環境を次のようにデザインした．

(1)関数の語り方：忍者として擬人化する

ディスコースにおける数学的対象の構成に関する研究に基づき，関数という対象とその式・表・グラフの表現を区別し，関数を具体的な変量として一貫して語ることとした．また，日野の提案により，関数を個別の忍者として擬人化し，式・表・グラフは忍者が走った際に垣間見える影であると考えることとした．比例忍者，反比例忍者，一次関数忍者など，関数にはいろいろな忍者がおり，それぞれの忍者は固有の動き方をする．忍者自身はめったに姿を見せないが，表・式・グラフで影を残すので，変化と対応を視点として，わずかな影の情報から，忍者を区別できるようになることを学習の目当てとする．その過程で，やがては，忍者が仮想的にでも存在するような気持ちを生徒が持てるように期待する．例えば，「この反比例忍者は，グラフでは，原点の近くですごく速く動くが，原点から遠ざかると止まっているような感じ．」，「この一次関数忍者は，あの一次関数忍者よりも動くペースが速い．」などのような語りが生徒から出ることを期待する．

(2)動的環境で観察する

GeoGebra アプレットでは，教師の提示用，生徒の観察用など，用途に応じて様々なものを作成した．例えば，一次関数を表す2直線の交点を考える際に，2人の一次関数忍者を y 軸上に走らせ，それに応じてグラフの影が点で移動したり，直線が累積したりするアプレットを教師提示用に作成した（図 1)．このアプレットは，「2 人の忍者が密書を手渡す」という場面設定で，グラフの影のどこで渡したことがわかるか，その座標を求めることを課題にするものである．このようなアプレットにより，関数とその表現の区別，すなわち，忍者とグラフの区別が容易にできるようになることが期待され，代数的でなく，変化の割合（ペース）をグラフ上で考えて，生徒は交点の座標を求めることが期待される．

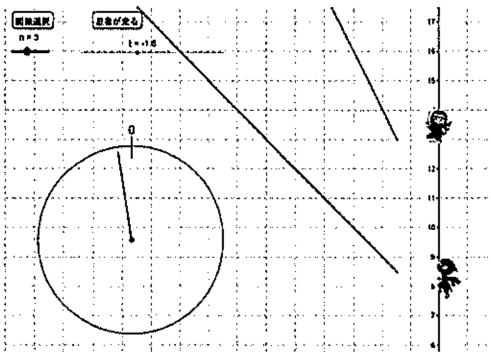

図１　２人の忍者が密書を手渡す

また，本研究では，関数の利用場面でも GeoGebra アプレットを複数作成した．例えば，電話会社の2社（伊賀社と甲賀社）の1ヶ月の料金を比較する場面では，次のようなアプレットを作成した（図 2)．

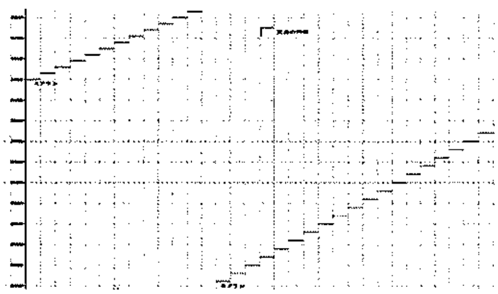

図２　電話料金のプラン

問題場面では，月額基本料金と1分ごとの通話料の情報が与えられている．通常は，各プランを式に表し，グラフをかき，交点を読むことで何分通話するといずれの会社の料金が高くなるかを判断する．動的環境では，このような静的アプローチを動的に，しかも現実に近い有り様で扱う．GeoGebra で作成したアプレットでは，

電話料金が階段関数として現れる．そして，どこで料金が同じになるかをつかむ際に，画面をマウスのホイールを回して画面をズームアウトすると，グラフのサイズはどんどん縮小し階段状のグラフが直線に見えてくる．この過程を通して，厳密には一次関数ではないが，大雑把に見ると一次関数を利用して全体の傾向を考えてもよいことが実感できる．さらに，「交点の吟味」というボックスをチェックすると，x 軸に垂直な直線が現れ，それをスライドして，交点がどのあたりかを確認することもできる．

(3) 式の代数的な処理：「計算忍法」

グラフで１点の座標と傾きがわかっている場合の一次関数の式の決定，グラフが通る２点の座標がわかっている場合の式の決定，２つの式がわかっている場合のグラフの２直線の交点の確定する課題を，グラフを手がかりとして変化の割合（ペース）が一定であるという一次関数の性質を用いて考えさせる．その後，グラフが与えられない場面を取り上げ，その場合は，「「計算忍法」を使って求めるべし.」という文脈で考える．特に，交点が格子点上にない場合は，この忍法が有効であり，また，代数的な処理が不得意な生徒には，忍法の修行として，練習を積むことを推奨する．

(4) 一次関数の単元のデザイン

単元計画に当たり，共同研究者（漢野，布川，日野）全員が意見を出し合いつつ基本線を決め，漢野がワークシートを，布川がアプレットをそれぞれ提案し，再度全員でアプレットとワークシートの使用バランスについて議論した．表１は，単元デザインの概略である．

次	時	学習内容
1	1	比例と反比例．「変化」と「対応」の２つの視点．
	2	関数忍者が走る．「対応」の特徴を，影である表・式・グラフにおいて見出す．
	3	関数忍者の「変化」の特徴を，影である表・式・グラフにおいて見出す．
	4	水槽の場面で，比例忍者でも反比例忍者でもない変化の特徴を考察し一次関数忍者を導入．変化のペースが一定であること，表・式・グラフの影の見方と表現の仕方を知る．
	5	反比例での変化ペースを動的環境でみる．「変化の割合（ペース）」が変化の特徴を知る鍵であることを知る．
	6	線香が燃える場面を動的に考察．変化のペースを三角形で表示．一次関数忍者は多数いて，名前が違い，異なる動きをする．生徒が名前をつける．
2	7	1学期の振返り．線香の元の長さを表・グラフ・式で求める．一次関数忍者は，他にもたくさんいそう．
	8	式の影から忍者の区別をする方法を考える．式のカウンターで不変な値に着目し，それらで忍者を区別．
	9	グラフの影から忍者を区別する方法を考える．「通る点（切片）」，「向き（傾き）」など素朴な表現で区別．
	10	グラフの区別情報と式の区別情報の関係を見出す．
	11	具体の式からグラフをかきグラフから式をつくる．
	12	忍者が走り，グラフの影の切片と傾きが残り，式を決める．任意の点と傾きからグラフで式を求める．
	13	忍者が走り，グラフの２点が残り，式を決める．任意の２点からグラフで式を求める．
	14	グラフを用いずに「計算忍法」で式を決める．

	15	2 直線のグラフから交点を「計算忍法」で求める.
	16	「計算忍法」の修行
3	17	水温の上昇を一次関数とみなし，内挿・外挿する.
	18	2 社の電話料金のプランを比較する.
	19	家から知人宅へ行く途中で買物のために店に寄る.

表１．単元のデザイン

一次関数の教授実験は，共同研究者の漢野が公立中学校の習熟度別・基礎クラス（11名）に対して平成26年7月3日より開始した. 教授実験は10月中旬に終了した. 各授業は，教室の後方に黒板とTVモニターが視野に収まるようにVTRを1台設置して授業全体の様子を記録するとともに，タブレットパソコンの管理を行った. 4名の抽出生徒の机上に超小型VTRを設置して各自の授業中の書く活動や発話を記録した. 教師は，自身で作成したワークシートを回収し，生徒により書かれた作業のコピーを収集した.

４．関数 $y=ax^2$ の授業のデザイン

関数の授業をデザインする３原理に関して，次のような工夫を行った.

(1) 関数の語り方

本研究では，一次関数と同様に，「y は x に伴って規則的に変わる数量なので y は x の関数である．関数 y は，$y=ax^2$ いう式で表される.」と説明し，単元全体を通して「関数 y」という言い方をし，それによって関数では変量 y のペースに着目することを強調した.

また，Font ら(2010)の指摘に鑑みると，関数とその表現に関して２通りの談話が想定される. 本授業でも，他の変量に依存する変量を関数と捉えその変化の特徴に目を向けるので，関数の式・表・グラフを関数自体と区別することとした．そして，式・表・グラフは，関数の異種の痕跡，比喩的にいえば「影」であると語った. さらに，変量の関係に関して単に変量の取る値を求める手続きを語るのではなく，式・表・グラフそれぞれの影の一部分から変量のペース自体を語ることを重視した.

(2) 動的環境で変量に着目し，ペースを語る

本授業でもGeoGebraのアプレットを作成し，生徒がその動作を観察し，変量の変化ペースに着目しやすくし，また語りやすくなることを期待した. 本授業でも，共同研究者の布川が，単元全体で提示するアプレットを作成した. アプレットとしては，例えば，関数 $y=ax^2$ の導入において，四角いケーキを縦・横等分に切り目を入れて分割したときのピースを表示するものを作成した. ここでは，ピースをクリームがついた面の数を視点として分類し，３面（比例），２面（一次関数）との対比で，１面（２乗を含む新しい関数）のピースに着目し，その増え方のペースに注意を向ける．使用している教科書の導入では，斜面を転がる球の場面についてデータが与えられ，そこから関数関係を見出していく. 本授業では，創発的モデル化に基づき，具体的状況，参照モデル，推論のためのモデルを経て，形式的知識に至る機会を設定した.

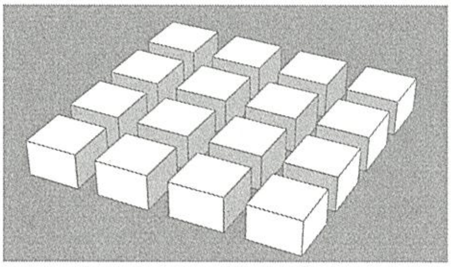

図３．ケーキの分割

また，数量の変化のペースを既習の関数のそれと比較することを通して，２乗に比例する関数 y の変化のペースを感覚的に捉える機会を設けた.

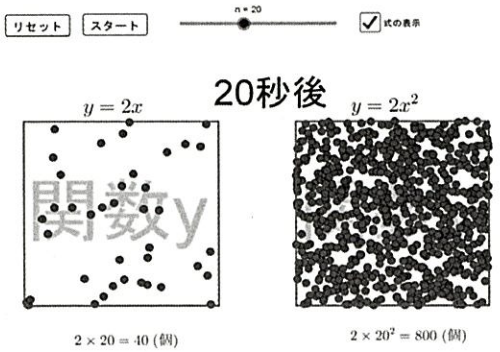

図２．関数 y の変化のペースの視覚化

さらに，「関数 y」として変量を強調し，数表・式・グラフと区別をした．

第10時の課題である「効率のよいバトンパス」では，グラフの y 軸上を二人の走者を表す点が移動するとき，連動してグラフが表示され，バトンパスをする走者のペースとグラフの関係を考察する（図３）．

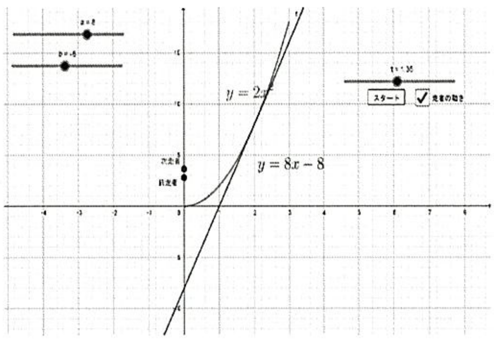

図３．バトンパスの走者のペースとグラフ

(2) 関係網の構築

本デザイン研究では，関数 $y=ax^2$ の特徴を相互に関連づけることを重視した．その際，関係として，次の３点を重視した．（ア）既習の比例や一次関数で見出した特徴と対比しながら関数 $y=ax^2$ の性質間の関係を考察すること．ケーキの分割，円周と面積がその例である．（イ）関数が式で定義されることに鑑みて，関数の特徴を式と関連付け，局所的演繹の一端を意識する．例えば，放物線が y 軸に関して線対称であることは，式 $y=ax^2$ で容易に確認できる．（ウ）変量としての関数を重視するため，変量の変化のペース，すなわち変化の割合を一貫して考察の対象とすること．特に，関数の利用においては，しばしば代数的処理やグラフの読みによる求答で終わる傾向があるため，既習の変化の割合を活用する機会を充実し，生きて働く知識・技能となるように配慮する．例えば，第10時の振り子の場面で，紐の長さや周期の長さ求めるだけでなく，いろいろな紐の長さの場合で同じ長さを伸ばすときの，周期の変化を考察する．

(3) 関数 $y=ax^2$ の単元のデザイン

上記のようなデザインの原理を一次関数と同じ様に研究者と実践家が協議しつつ，共同しながら単元と学習環境を次のようにデザインした．単元計画に当たり，全員が意見を出し合いつつ基本線を決め，実践家がワークシートを，研究者がアプレットをそれぞれ提案し，アプレットとワークシートの使用のバランスについて再度全員で議論した．表２は，単元のデザインの概要である（表２）．

時	学習内容（GeoGebra アプレット）
1	ケーキの分割．比例，一次関数との対比で２乗を含む新しい関数を知る（図１）．
2	斜面と水平面を転がる球．関数 $y=ax^2$ を導入する（球が転がる様子を CG 映像で示し，それを作成する際に用いた公式を見抜く）．
3	円の半径，周長・面積の変化の様子を調べる．一次関数の学習を振り返り，関数 $y=ax^2$ の学習計画をたてる（図２，円の半径を変えるときの周長・面積の変化の様子を示す）．
4	関数 $y=x^2$ のグラフを作成し，グラフからわかる y の変化の特徴を考える（x が負の範囲から正の範囲へ連続的に増える

	ときの y 軸上の値の増減を示す).
5	関数 $y=x^2$ のグラフとの対比で関数 $y=ax^2$ のグラフの特徴を考える ($y=x^2$ のグラフが a を指定したときに，$y=ax^2$ に変化する).
6	$y=x+2$ との対比で，関数 $y=x^2$ で変域を考える (x 軸上の2点をスライドさせ，それに対応する y の値を y 軸上に示す).
7	これまで学んだ関数と比較しつつ，関数 $y=ax^2$ の変化の割合を考える (x の値を変わるとき，一次関数と関数 $y=ax^2$ の変化の割合をグラフで視覚的に示す).
8	斜面を球が転がるときの変化の割合の意味を考える (球の位置とグラフを一定時間ごとに表示し，変化のペースの違いを示す).
9	自転車の空走距離と制動距離.
10	関数 $y=ax^2$ の利用. 効率のよいバトンパスの方法 (図3). ハイジのブランコの長さ.
11	身の回りにあるいろいろな関数. 紙の等分 (関数 $y=2^x$ と関数 $y=x^2$ の大域的なグラフ). 箱のサイズと送料 (x 軸のまわりの長さをスライドして階段関数のグラフを表わす).

表2. 単元のデザイン

関数 $y=ax^2$ の教授実験においては，共同研究者の漢野が公立中学校の1クラス (36名) に対して平成27年9月21日から10月18日にわたり視聴覚室において，11回の実験授業を実施した. 各授業では，教室の後方に黒板とTVモニターが視野に収まるようにVTRを1台設置して授業全体の様子を記録した. 教師は，自身で作成したワークシートを回収し，生徒により書かれた作業のコピーを収集した. また，授業の最後には，今回の授業のデザインの原理に照らしつつ，生徒に関数の理解について，自由記述による質問紙調査を行った.

5. おわりに

本研究は，中学校数学科における関数授業で，生徒が関数を数学的な対象として考え，語ることを奨励するような学習環境をデザインするために，「ディスコースを通した数学的対象の構成」に関する近年の研究枠組みや知見を参考とし，「デザイン実験」の手法に基づき，実践家と研究者が協働で単元と学習環境をデザインした. 特に，本研究では，教室談話とICT環境を視点として中学校第2学年の一次関数と第3学年の関数 $y=ax^2$ について学習環境のデザインを行った.

学習環境のデザインにおいては，3つのデザイン原理もしくは発見学 (design heuristics) を採用した. それらは，(1) 関数に関する談話を首尾一貫し，「別の量に依存しているある量」として語り，関数と式・数表・グラフの表現を区別した. (2) 変量としての関数の特徴を生かすために，動的数学ソフトウエアであるGeoGebraのアプレットを作成し，タブレットパソコンを使用して生徒に触れさせ，感じたことを語る機会の重視した. (3)概念の二面性論に基づき，関数の操作的側面から構造的側面へと漸次的に移行するように配慮した.

今後は，2つの単元のデザインに基づく教授実験から得られた授業のデータおよび抽出生徒の活動のデータ，ワークシート，質問紙調査などを分析することにより，デザインした学習環境が，数学的対象として関数を構成することへ，実際にどの程度誘う可能性があるかについて，詳細に分析を進めたい.

引用・参考文献

Font, V., Godino, J. D., Planas, N., & Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and synecdoche in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics*, *30* (1), 15-19.

GeoGebra: http://www.geogebra.org/cms/ja/

Gravemeijer, K. & Cobb, P. Design research from a learning design perspective. In van den Akker, J. et.al.

(eds.), (2006). *Educational design research* (pp.17-51). London: Routledge.

国立教育政策研究所. (2012). 『全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめ・中学校編』 教育出版.

Nachlieli, T. & Tabach, M. (2011). Growing mathematical objects in the classroom – The case of function. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 10-17.

布川和彦 (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成－教科書の考察を中心に－. 上越教育大学研究紀要, 第33巻, 85-96.

大谷　実・日野圭子・布川和彦・影山和也・中村光一 (2018). 数学的対象論の実践的意義を考える. 第６回春季研究大会論文集・創成型課題研究の部, 日本数学教育学会.

岡本久・長岡亮介 (2014). 『関数とは何か: 近代数学史からのアプローチ』 近代科学社.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22(1)*, 1-36.

Sfard, A. (2011). Developing mathematical discourse -Some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52*, 1-9.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight.* New York: Academic Press.

付記：本研究は科学研究費補助事業・基盤研究（B）課題番号 24300267 の助成を受けて行われた.