

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2007～2009
課題番号：19740052
研究課題名（和文） 非凸領域における有限要素解の高精度計算および精度保証に関する研究
研究課題名（英文） Research on high accuracy computing and numerical verification for Finite Element Method solution in a non-convex domain
研究代表者
小林 健太（KOBAYSHI KENTA）
金沢大学・数物科学系・准教授
研究者番号：60432902

研究成果の概要（和文）：非凸領域において有限要素法を用いて数値計算を行う場合、領域の非凸性によって厳密解の滑らかさが失われ、精度の良い数値計算が困難になるケースが多い。このような場合については、解の特異性を表現するような特異関数を有限要素基底に用いたり、非凸な角でメッシュを細かく切るメッシュリファインメントを用いたりすることによって精度を改善できることが知られている。これらの手法について、今までは数値実験結果からの経験則や収束のオーダーしか知られていなかったが、我々はいくつかの手法について厳密な誤差評価を与えることに成功した。これらの結果は精度保証付き数値計算への応用上も重要である。

研究成果の概要（英文）：In solving partial differential equation by Finite Element Method in a non-convex domain, it is known that the convergent rate could be improved by adding singularity functions to the Finite Element basis or using mesh refinement. In our research, we have obtained explicit error estimations for these problems. These results can be applied for computer-assisted proof for non-linear problems.

交付決定額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2007年度 | 1,200,000 | 0 | 1,200,000 |
| 2008年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 2009年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 3,200,000 | 600,000 | 3,800,000 |

研究分野：数値解析

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：精度保証，有限要素法，誤差評価，非凸領域

1. 研究開始当初の背景

非凸領域において有限要素法を用いて数値計算を行う場合、領域の非凸な角で厳密解の滑らかさが失われることにより、均等メッシュを用いた通常の有限要素法では精度の良い数値計算が困難になるケースが多い。このような場合については、解の特異性を表現するような特異関数を有限要素基底に用いたり、非凸な角でメッシュを細かく切るメッシュリファインメントを用いたりすることによって精度を改善できることが知られている。これらの手法について、今までは数値実験結果からの経験則や収束のオーダーしか知られていなかった。しかし、精度保証付き数値計算への応用を考えると、これらの手法についても厳密な誤差評価を得る必要がある。例えば、ポアソン方程式に対する精度の良い誤差評価が求めれば、様々な形状の領域に対する楕円型偏微分方程式の解の精度保証の実現が期待できるし、重調和問題に対する事前誤差評価が確立できれば、ステップ流れなど、Navier-Stokes 方程式に対する精度保証にも進展が期待できる。これらの問題意識を背景として、いくつかの手法について厳密な誤差評価を得るべく研究を開始した。

2. 研究の目的

本研究の目的は、非凸領域における有限要素法の数値解に対して精度の良い誤差評価を開発し、実際の問題に対して適用することであった。また、本研究においては、誤差評価そのものの重要性もさることながら、誤差評価を厳密に追及していく過程でその理論的構造を明らかにし、効率的なメッシュの切り方など、数値計算を実行する上での新たな知見を得ることも目標とした。

3. 研究の方法

一般的な非凸領域を取り扱うのは困難なため、まずは具体的に、領域としては任意角

で構成された折線領域を考え、その領域上におけるポアソン問題や重調和方程式の有限要素解について、精度の良い L^2 ノルム、 H^1 ノルム、および絶対値ノルムによる事前誤差評価を求めようと試みた。非凸な角の周辺でメッシュを細かく切る、いわゆるメッシュリファインメントを用いる場合には、精度の良い誤差評価を得るには場所によるメッシュの細かさの違いを評価に反映させる必要がある。また、重調和方程式については、折線領域どころか、より簡単な凸領域である長方形領域においてさえも効率的な誤差評価が得られていないため、まずは長方形領域において事前誤差評価を確立し、その後に非凸な折線領域での解析を試みることにした。以上の研究は事前誤差評価についての研究であるが、事後誤差評価についても並行して研究を行った。具体的には、特異関数を用いることにより、非凸な折線領域において、絶対値ノルムに関する事後誤差評価を確立した。

4. 研究成果

まずは非凸領域におけるポアソン方程式の事前誤差評価について説明する。有限要素基底に特異関数を付け加える方式については、平成 19 年度中に事前誤差評価を確立することができた。この成果は平成 21 年になって Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics に掲載された。また、メッシュリファインメントを用いた場合の誤差評価についても事前誤差評価が得られた。この成果については、研究期間の 3 年間において、国際研究集会で 6 回、国内の研究集会で 2 回の発表を行っている。この成果については、基本的な評価が確立した後も誤差評価の精度の改良を続けていたため、まだ論文にはなっていないが、昨年段階で満足するレベルに達したと考えており、近日中に投稿を予定している。ポアソン方程式の絶対値ノルムに関する事後誤差評価については、平成 19 年よりドイツ・Karlsruhe 大学の M. Plum 教授と共同で研究を行ってきたが、既にこれ

も誤差評価の方法を確立して、国際研究集会での研究発表を1回行っている。論文に関しては、M. Plum 教授と分担して執筆を進めている最中である。

次に、重調和方程式の事前誤差評価に関する成果について説明する。この問題については、非常に難しい問題のため、非凸領域においては理論を構築するための予備的な数値計算を行ったに留まるが、非凸領域に取り組む前に必要な、凸領域の場合に研究の進展があった。重調和方程式に対して精度保証を行うには、4階微分に関するあるノルム不等式を証明することが必要なのであるが、領域が長方形の場合に、その定数のある程度の精度で求めることができた。具体的には、 H^1 かつ H_0^1 に属する関数について、 H^1 セミノルムをダブルブラシアン L^2 ノルムで押さえる定数が必要となる。この定数は、それまでは理論的には存在のみが知られていただけであるが、我々がはじめて具体的な上界を与えることに成功した。この結果はNavier-Stokes方程式に精度保証を適用する上で重要になってくるが、単独の不等式としても興味深いものである。この成果については国際研究集会で2回の発表を行っている。論文は執筆中である。

他には、有限要素法で得られた解に誤差評価を適用する際に、全体の精度に極めて密接に関係する、三角形要素上の補間誤差定数の精度を改善する研究を行い、著しい結果を得ている。具体的には、任意の与えられた三角形に対し、その三角形上の、 P_0 補間誤差の L^2 ノルムをgradientの L^2 ノルムで押さえる定数、 P_1 補間誤差の L^2 ノルムを H^2 セミノルムで押さえる定数、 P_1 補間誤差のgradientの L^2 ノルムを H^2 セミノルムで押さえる定数の精度の良い上界を与える公式を作成し、それを証明した。今までの手法では、三角形の形が歪んでいる場合には理論値の何倍も悪い値しか求まらなかったのであるが、この公式を用いると、最大でも理論値の15%増以内に収まるということがわかっている。この成果については、国際研究集会で1回、国内の

研究集会で2回の講演を行っている。論文は執筆中である。

研究期間を振り返ると、非凸領域における重調和方程式の事前誤差評価にまで手が回らなかったのは残念であるが、全体として見れば多くの成果が得られ、実りの多い三年間であったと感じている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

1. K. Kobayashi, On the global uniqueness of Stokes' wave of extreme form, IMA Journal of Applied Mathematics, 掲載決定, 査読有.
2. K. Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using singular functions, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 26 [2/3] (2009), 493-516, 査読有.
3. K. Kobayashi, On the critical case of Okamoto's continuous non-differentiable functions, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Vol. 85 [8] (2009), pp. 101-104, 査読有.
4. 小林健太, メッシュリファインメントを用いた有限要素解の事前誤差評価, 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1614 (2008), pp. 180-186, 査読無.
5. K. Hashimoto, K. Kobayashi, M. T. Nakao, Verified numerical computation of solutions for the stationary Navier-Stokes equation in nonconvex polygonal domains, Hokkaido Mathematical Journal, vol. 36 [4] (2007), pp. 777-799, 査読有.

[学会発表] (計25件)

1. Kenta Kobayashi, On the interpolation constant over triangular elements,

International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2010 (INVA2010), Hotel Lido Azzurro(Tokyo), 2010.3.13.

2. 小林健太, 三角形領域上の補間誤差定数について, 北陸応用数理研究会 2010, 金沢大学サテライト・プラザ (石川県), 2010.2.12.

3. Kenta Kobayashi, An a priori constant which appear in bi-harmonic problems, Dagstuhl Seminar : Computer-assisted proofs - tools, methods and applications, Schloss Dagstuhl(Germany), 2009.11.18.

4. Kenta Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using mesh refinement, International Conference on Engineering and Computational Mathematics (ECM2009), The Hong Kong Polytechnic University(China), 2009.5.28.

5. Kenta Kobayashi, An a priori constant which appears in bi-harmonic problems, International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2009 (INVA2009), Hotel Breeze Bay Marina(Okinawa), 2009.3.24.

6. 小林健太, Numerical verification method and its applications, 第10回北東数学解析研究会, 東北大学理学部(宮城県), 2009.2.17.

7. Kenta Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using a mesh refinement, 1st African Conference on Computational Mechanics (AfriCOMP 2009), Sun City Convention Center(South Africa), 2009.1.7.

8. 小林健太, 三角形要素上の補間誤差定数について, 流れ問題のための高品質数値解法と計算機援用解析学, KKRホテル金沢(石川県), 2008.11.18.

9. 小林健太, 非凸領域における有限要素

法の事前誤差評価について, 第3回岐阜非線形ワークショップー計算科学の基盤としての数値解析ー, 岐阜大学地域科学部棟(岐阜県), 2008.10.27.

10. Kenta Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using mesh refinement, International Workshop on Numerical Verification and its Applications 2008 (INVA2008), Tokyo Dai-ichi Hotel OKINAWA GRAND MER RESORT(Okinawa), 2008.3.6.

11. 小林健太, メッシュリファインメントを用いた有限要素解の事前誤差評価, 研究集会: 計算科学の基盤技術として的高速アルゴリズムとその周辺, 京都大学数理解析研究所(京都府), 2007.11.16.

12. Kenta Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using mesh refinement, The 3rd East Asia SIAM Conference, Xiamen University(China), 2007.11.3.

13. Kenta Kobayashi, Michael Plum, Some numerical results for the explicit L^∞ error bounds, COE Conference on the Development of Dynamic Mathematics with High Functionality (DMHF2007), Fukuoka Recent Hotel(Fukuoka), 2007.10.4.

14. 小林健太, 水面波方程式に対する計算機援用証明, 日本数学会 2007 年度秋季総合分科会, 特別講演, 東北大学川内北キャンパス(宮城県), 2007.9.23.

15. Kenta Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using mesh refinement, Conference on Inequalities and Applications '07, De La Motte Castle(Hungary), 2007.9.11.

16. Kenta Kobayashi, A constructive a priori error estimation for finite element discretizations in a non-convex domain using mesh refinement, International

Conference on Recent Developments of
Numerical Schemes for Flow Problems
(INSF2007), Kyushu University Nishijin
Plaza(Fukuoka), 2007.6.29.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 健太 (KOBAYASHI KENTA)

金沢大学・数物科学系・准教授

研究者番号 : 60432902