Consideration about several evil and several problem by learning sectoral education

現在の数学教育における分野別・単元別学習による弊害と課題に関しての考察

米田力生

概要

本研究では、現在の算数・数学カリキュラムにおける分野別・単元別学習の問題点と課題を幾つかの具体的な例を観察することにより観察・考察し、今後の数学教育改革の必要性を提唱し、改革方法へ繋がる道筋になる解決法を考案することを目的とする。

現在、小学校・中学校・高等学校において行われている算数教育、数学教育にはカリキュラム不連続を中心とした多くの改善すべき問題が存在する。学年を跨いで連続した知識の上積みが必要となる教科であるだけに、何処かで躓くとそれ以降のすべての分野（単元）で理解が進まなくなってしまう。本研究では算数教育、数学教育における分野別（単元別）に学習することによる現在存在する弊害と課題を具体的な例を元に考察することにある。

数学学習には、「数列」・「関数」という代表的な学習対象（概念）があり、共に多くの単元と結び付けられて扱われる重要な対象であるが、現在のカリキュラムでは殆どそれらの間の関係を学ぶ機会がなく、最終的に全くの別物の単なる計算対象としてしか扱われないまま数学の学習を終了してしまっている現状がある。ここには大きな数学教育の問題点があると考えられる。数学で学んだ考察方法を身の周りの事象（物事）にどのように適用させていくのか、数学的な思考がいつどの場面で利用されているのかをより実感できていない問題が数学教育には現存するが、その問題解決は未だに棚上げになっているように感じる。この課題に取り組む一つの方法として、算数・数学教育の各単元の間の繋がりをより明確にするということにより解決することができるのではと考える。そこで先ず各単元の具体的例を考察することから始める。

連続的な確率変数 X が、任意の実数 a,

平成28年10月３日受理

b ($a < b$) に関して、

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

を満たす関数 $f(x)$ ($f(x) \geq 1$) を持つとき、関数 $f(x)$ を確率変数 X の確率密度関数と呼び、X は確率分布 $f(x)$ に従うと呼ぶ。ここで確率変数 X は連続的な値をとって変化し、その値は定積分の面積を求積することで算出される。

他方で、離散的な確率変数のときは、「 $P(X = a)$ は確率変数 X の値が a となる事象の確率 」 と考えて、$a < q_1, q_2, q_3, \cdots q_n < b$ に対して、$P(X = q_i) = p_i$ ($i = 1, 2, , \cdots n$) となるとき、

$$P(a < X \leq b) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots p_n$$

となる。これは連続的な確率変数の場合の定積分による面積を求めるという求積法と結ぶつけて考える上記の場合との間にはかなり大きなギャップがあり、説明や意味付けに行き詰まることになってしまう。すくなくともこれらの関係を理解している学生はごく少数であり、大半の学生はこれらの間にある関係性を知ることなく数学の学習を終了している現実がある（少なくとも文系学生は暗記ものとして公式を利用しているだけであろう)。

<u>**定積分の定義**</u>　先ず、定積分の定義を振り返る。連続な関数 $y = f(x)$ が $a \leq x \leq b$ の範囲で正の値をとるものとする。このとき、x 軸と区間 $[a, b]$ で囲まれた部分の図形の面積を求めることにする。そのとき、区間 $[a, b]$ を n 個に分割するとき、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i <$$

$\cdots < x_n = b$ とする。そして、底辺の長さが $(x_i - x_{i-1})$ で, その高さが $f(x_{i-1})$ の長方形を考えるとき、その面積は $(x_i - x_{i-1}) \times f(x_{i-1})$ となり、それらをすべて足し合わせると

$$R_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \times f(x_{i-1})$$

となり (R_n はリーマン和と呼ばれる)、更に分割を限りなく細かくすることを考える、すなわち、$n \to \infty$ のとき、R_n が一定の値に収束する（近づく）とき、その一定値を $f(x)$ の a から b までの定積分と呼び、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

で表わす。すなわち、$n \to \infty$ とするとき、リーマン和における一つ一つの長方形の面積であるということを重視して、それらを考察すると、定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は底辺が限りなく 0 に近い（ほぼ 0 である）長方形、底辺の無い棒を無限個足すということになり、結果的に x 軸と区間 $[a, b]$ 及び連続関数 $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めることと同義になる。この定義の解釈を上記の確率変数の問題に結び付けて考えることにより、離散的な確率変数と連続的な確率変数の確率の意味付けの間に存在する大きなギャップを埋めることができるのではと考える。更に、

次の例も単元間のギャップに関する理解方法を埋めることに有効に働く例になると考える。

「数列」・「関数」問題として以下で取り上げることにする。$s>1$ のとき、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は次のように定義される：

$$\zeta(s)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots.$$

このゼータ関数 $\zeta(s)$ は $s>1$ のとき存在する。すなわち $s>1$ のとき、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は収束し、$s\leq 1$ のとき、ゼータ関数 $\zeta(s)$ は発散する。この事実は $y=\frac{1}{x^s}$ のグラフを書いて、関数と x 軸に囲まれた部分の面積と、そのリーマン和の比較をすると、

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots\frac{1}{n^s}$$

$$<1+\int_1^n\frac{1}{x^s}dx=1+\frac{n^{1-s}-1}{1-s}$$

となる。$1-s<0$ なので、更に $n\to\infty$ として極限をとると、

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$$

$$<1+\frac{-1}{1-s}=1+\frac{1}{s-1}<\infty.$$

よってゼータ関数が収束することが証明される。そして、$s=1$ のとき、

$$\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}$$
$$<1+\log n.$$

そして、$n\to\infty$ のとき、$\log n$, $\log(n+1)$ はそれぞれ共に発散するので、はさみうちの原理により、$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ も発散することがわかる。$s<1$ のときも同様に発散することが確認できる。一方で定積分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}ds$ も $s>1$ のとき収束し、$s\leq 1$ のとき発散することが無限積分を利用して実際に計算することで確認出来る。ゆえに、この**連続的** な関数に対する無限積分の収束・発散問題は、**離散的** なゼータ関数 $\zeta(s)$ の収束・発散と密に関係した結果になっており、「数列」・「関数」問題の代表的な例であることがわかるであろう。それゆえに、この内容を文系・理系問わずに数学教育のカリキュラムに取り入れることは今後必要でないかと考える。

次に離散変数と連続変数の繋がりに、より直接的に学ぶことができる学習対象として、現行カリキュラムでは全く触れられたことのない **和分・差分** という概念を定義から紹介する。

和分・差分の定義 微分・積分は変数（である定義域）も、関数値（である値域）も共に実数で定義される関数を扱う。和分・差分は変数（である定義域）を自然数に限定して定義されるものである。微分は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と定義される。この定義は 実数 h を限りなく 0 に近づけるわけであるが、差分では定義域（変数）が自然数に制限されているため、 $10\to 9\to 8\to 7\to\cdots\to$

$3 \to 2 \to 1$ という感じで 0 に近づけることすらできない。最終的には 1 で近付けるのは終わることになり、導関数と同様に考えると、以下の様なこととなる：

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{1} = f(x+1) - f(x).$$

この Δf は関数 f の差分（階差）と呼ばれる。この定義で関数 $f(x) = 2^x$ の差分を計算すると $\Delta f(x) = 2^x$ になり、これは関数 $f(x) = e^x$ の微分が $f'(x) = e^x$ であることに相当する結果になる。次に階乗関数 $x^{(n)}$ を定義する：

$$x^{(n)} := \begin{cases} x(x-1)(x-2)\cdots(x-(n-1)) & (n > 0) \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

さらに $f(x)$ の n 階乗は以下のように定義される：

$$f(x)^{(n)} := \begin{cases} f(x)f(x-1)\cdots f(x-(n-1)) & (n > 0) \\ 1 & (n = 0). \end{cases}$$

微分の代表的な公式と比較してみると、パラレルな公式になっていることがわかる。例えば、$f(x) = x^n, g(x) = e^x$ のとき，それぞれの微分は $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(x) = e^x$ となり、$h(x) = x^{(n)}, I(x) = 2^x$ のとき，それぞれの差分は $\Delta h(x) = nx^{(n-1)}$,$\Delta I(x) = 2^x$ となる。さらに微分の基本的な計算公式（和・差・積・商の公式）として、

- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

があるが、対応する差分の基本的な計算公式（和・差・積・商の公式）としては、

- $\Delta(f(x) \pm g(x)) = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$
- $\Delta(f(x)g(x)) = g(x+1)\Delta f(x) + f(x)\Delta g$
- $\Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x+1)g(x)}$

となる。積の公式及び商の公式に軽微な差があるのは、差分の定義域（変数）を自然数に制限されているために生じるものである。これらの差を除けば、パラレルな結果になっていることがわかる。

不定積分の定義　$F'(x) = f(x)$ のとき、$F(x)$ を $f(x)$ の**不定積分**と呼び、

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と表わす。

不定和分の定義　$\Delta F(x) = f(x)$ のとき、$F(x)$ を $f(x)$ の **不定和分** と呼び、

$$\Delta^{-1} f(x) = F(x)$$

と表わす。

ここで差分が 0 になる関数は、$\Delta C(x) = C(x+1) - C(x) = 0$ なので $C(x+1) = C(x)$ となり、定数関数 0 の不定和分は周

期を持ち、周期 1 の関数であることがわかる。結果的に

$$\Delta^{-1}f(x) = F(x) + C(x)$$

となる。ここで、$C(x)$ は 1 周期としてもつ周期関数（定関数を含む）。変数 x が自然数だけをとる場合には、$C(x)$ は定数関数になるので、ただ単に C と表わし、和分定数と呼ぶこともある。そして不定和分の基本的公式は以下のようになる。

- $\Delta^{-1}x^{(n)} = \dfrac{1}{n+1}x^{(n+1)} + C(x)$

  $\cdots(1.1)$

- $\Delta^{-1}(ax+b)^{(n)} = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{(n+1)}$

$+C(x) \qquad \cdots(1.2)$

- $\Delta^{-1}2^x = 2^x + C(x)$

  $\cdots(1.3).$

不定積分の基本的公式は以下のようになる。

- $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

  $\cdots(2.1)$

- $\displaystyle\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$

  $\cdots(2.2)$

- $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

  $\cdots(2.3)$

不定和分の公式 (1.1),(1.2),(1.3) は不定積分の公式 (2.1),(2.2),(2.3) とそれぞれ対応する公式になっている。そして実は積分公式に対応した 3 つの公式 (1.1),(1.2),(1.3) を利用することで、下記の数列の和の公式を積分と同様の考察方法で導き出せるわけである。

- $1+2+3+4+5+\cdots+n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$

  $\cdots(3.1)$

- $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+\cdots+n(n+1)$

$= \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

  $\cdots(3.2)$

- $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)$

  $= \dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

  $\cdots(3.3)$

- $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

  $\cdots(3.4)$

- $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{1}{2}n(n+1)\right)^2$

  $\cdots(3.5)$

- $1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots+n^4$

  $= \dfrac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$

  $\cdots(3.6)$

現行のカリキュラムでは、上記の公式 (3.1),(3.2),(3.3),(3.4),(3.5),(3.6) は、もち

ろん数列の第n部分和の公式なので、数列の考え方で直接公式は証明され、計算されている。しかし、まったく無関係と思われている積分公式と同様の考え方で導かれるのであるから、これは単元間の隙間を埋める概念であることがわかるであろう。この事実は高校以下のカリキュラムでは全く扱われてはいない。そして、数列の和と積分が理論的にリンクしていることは大半の学生は知らないまま数学学習を終了しているのが現状である。そして、この現実も含めて、離散変数（数列を含む）と連続関数（微分積分を含む）の繋がりがまったく触れられてはいない。このように、別単元で別々の対象として学習する内容が理論的に繋がれていない（不連続な教育カリキュラムである）という問題が数学教育全般にまだまだ数多く存在する。数学を身の周りのどの事象に応用されているのか、どのように適用できるのかという問題も、なかなか学ぶ機会も無い問題がある。それを分野別学習による弊害と併せて、数学教育改革が今後必要であると考える。

参考文献

1 小寺平治, 大学入試数学のルーツ、現代数学社, 2001 年.
2 水田義弘、詳解演習微分積分、サイエンス社, 1996 年.

Faculty of teacher education
Institute of human and social sciences
Kanazawa university
Kakuma-machi, Kanazawa,
Ishikawa, 920-1192, Japan
rikioyoneda@staff.kanazawa-u.ac.jp