

ゲーム理論（ナッシュ交渉解）による

橋梁維持管理計画の基礎的研究

The fundamental study of Bridge Maintenance Plan by game theory(Nash bargaining solution)

喜多敏春*, 近田康夫**

Toshiharu Kita, Yasuo Chikata

* 株式会社 日本海コンサルタント, 技術本部 (〒921-8042 石川県金沢市泉本町2丁目126番地)

**工博, 金沢大学教授, 理工学域環境デザイン学類 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

In this study, a fundamental study on game theory (Nash bargaining solution) approach to the bridge maintenance planning is presented. When a bridge is repaired at appropriate time, the gain of the bridge is maximized. Annual budget forces the repair schedule to be slid, so balanced modification of the repair planning is searched. Each bridge is considered as a player, and the bridge group gain is maximized at the same time as pursuing the maximization of an individual gain by adapting Nash bargaining solution with proper utility function. Also, it is shown that the maximized product of the sum of bridges' gain and the Nash product of bridges' gain is effective target for repair priority of a certain bridge.

Key Words: Brige Maintenance Plan, game theory, Nash bargaining solution, utility function

キーワード: 橋梁維持管理計画, ゲーム理論, ナッシュ交渉解, 効用関数

1. はじめに

戦後の高度経済成長期に道路整備と同時に大量の道路橋の整備が行われた。これらの橋梁が整備後50年を迎えはじめており、公共投資余力の減少の中、効率的・効果的な維持管理を行うことが急務となっている。こうした中、橋梁の長寿命化と、計画的で継続的な維持管理を目的とした橋梁アセットマネジメント手法(BAMS)の実用化が進んできている。

BAMSの構成要素の一つとして、限られた予算内での維持管理計画(予算の平準化)がある。ほとんどの自治体では予算が限られているため、管理する複数の橋梁の各部材の最適な補修時期(ライフサイクルコスト(LCC)が最小になる補修時期)がある年度に重なった場合には、橋梁の健全度を確保しつつ補修時期の前倒しや先送りを行い、各年度の予算内に補修費をおさめる必要がある。この場合に、どの橋梁を前倒しや先送りをするかを決める指標として、全対象橋梁の健全度やサービス水準の総和の最大化を評価関数(目的関数)としている事例が多く報告されている^{1)~4)}。この評価指標は、対象橋梁群全体の健全度は評価しているが、与えられた条

件下での個々の橋梁の健全度の最大化の再評価が行われないため、ある橋梁の健全度が必要以上に高い場合(一人勝ち)や必要以上に低い場合(一人負け)が生じる可能性がある。また、対象橋梁群全体の評価関数が最大であっても、個々の橋梁の健全度は必ずしもバランスのよいものになっていない可能性もある。これより、制約条件の下での個々の橋梁の評価指標を最大化しつつ橋梁群全体としての評価指標の最大化という多目的最適化問題を解く必要が生じる。

多目的最適化問題の解決手法の一つにゲーム理論の適用が考えられ、中でも協力ゲーム理論が最適制御問題に適用されている⁵⁾。

本研究でも、上記の問題を解決するために、各橋梁を意思決定者(プレイヤー)と考え、経済学の理論であるゲーム理論(ナッシュ交渉解^{6),7)}を援用し、各プレイヤーがお互いに協力することによってバランスのとれた前倒しや先送り補修時期の組み合わせを求めるときの基礎的な検討を行った。

2. ナッシュ交渉解のモデル

複数の意志決定者（プレイヤー）が存在し、それらが相互に協力してゲームを行い、全てのプレイヤーの利得（効用）がこれ以上同時に増加しないパレート最適となる解がナッシュ交渉解である。

交渉問題は、ゲーム参加プレイヤーの集合を N 、 n 人のプレイヤーが合意のうえで共同戦略をとったときに期待される利得ベクトルの集合を U 、プレイヤー間の連携なしで得られる利得集合（交渉が不成立のときに得られる利得集合）を d とし、 (N, U, d) で表現される。

ナッシュが提示した交渉解が満たすべき4つの公理を示す。（公理の詳細内容は、参考文献^{6),7)}を参照のこと。）

公理1. (強) パレート最適性

公理2. 対称性

公理3. 効用の正1次変換からの独立性

公理4. 無関係な結果からの独立性

以上の公理を満たす交渉問題 (N, U, d) の解 u_i は式 (1) で与えられる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \prod_{i=1}^n (u_i - d_i) \\ & \text{subject to } u \in U, u_i \geq d_i \end{aligned} \quad (1)$$

式 (1) はナッシュ積とも呼ばれ、 u_i を性質の違う独立変数と考えれば多目的最適化問題の解になっている。

以下に2人交渉問題の簡単な例を示す。A, B の2人のプレイヤーが協力して得た100万円の利益の分配を考える。Aの利得+Bの利得 \leq 100万円で図-1の利得となる。また、交渉が決裂した場合の分配は $0(d_i = 0)$ となる。

よって、 $(u_A - d_A) \times (u_B - d_B) = u_A \times u_B = 2500$ (図-1) となるナッシュ積が最大の $u_A = u_B = 50$ 万円がナッシュ交渉解である。

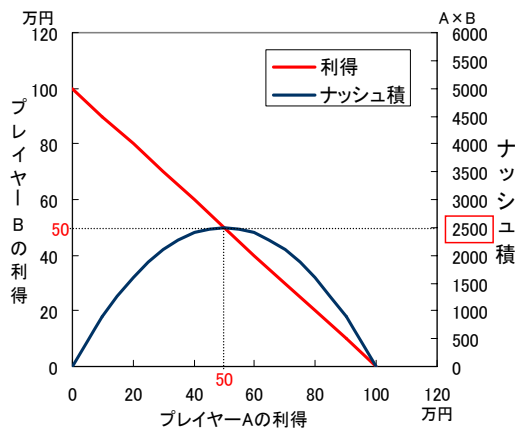


図-1 利得分配とナッシュ積

線型計画法などでよく用いられる和の最大化では、本例のような常に利得の和が一定（100万円）であるときに、ただ1つの妥協点を決めることができない。また、和の最大化は、意思決定主体が1人の場合とか、すべてのプレイヤーが協力したとしても、1人負けや1人勝ち

の犠牲的状态を許容し全体としての利得を最大にする場合のルールであり、独立の主体が複数いて、それぞれの自己の利益も最大化する場合の利益配分の問題には不適切である。

ナッシュ交渉解は、各プレイヤーの利得の最大化と集団全体の利益の最大化を同時に実現できる経済学の理論解である。

3. 効用関数の設定

本研究では、効用値を各橋梁の利得とし、限られた予算内で補修の前倒しや先送りを行い式 (1) でナッシュ積を算定し、ナッシュ交渉解となる維持管理計画の組合せを求める。

各橋梁に劣化曲線が与えられており、LCCの観点から健全度2で補修する場合が最適（管理目標は健全度2）であるとする。この場合、補修時期の期待効用値を表す効用関数を図-2のように設定できる。健全度2で補修した場合に効用値が最も高くなり、健全度2以上で補修すれば効用は減少するので、ここでは、健全度5から単純増加の一次関数とした。また、管理目標値である健全度2を下まわると効用値が急激に減少するように設定した。

50年間を補修計画の対象期間としたときの一般的な橋梁部材の健全度の推移のイメージを図-3に示す。図-3の健全度に図-2の効用値を乗じたものが図-4の50年間の効用値関数となり、その積分が効用値となる。

図中の○部に示すように、前倒し補修をすれば、効用値が減少することになる。

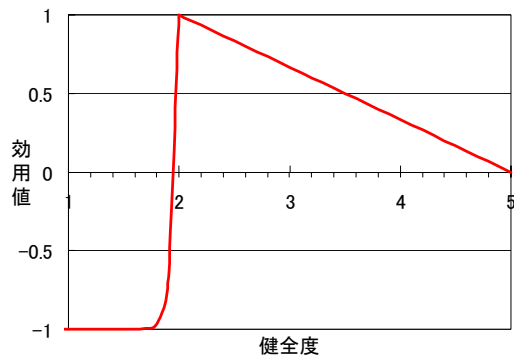


図-2 効用関数

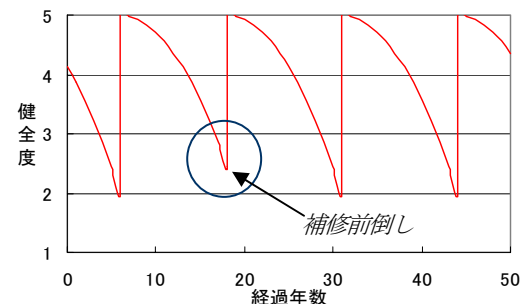


図-3 50年間の健全度

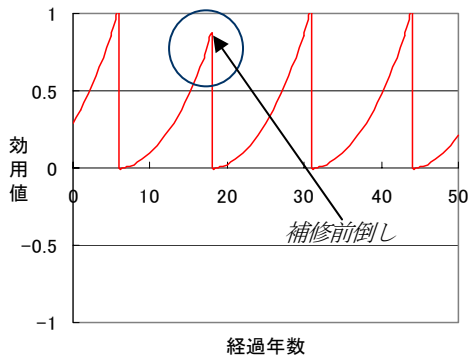


図-4 50年間の効用値関数

4. ナッシュ交渉解による数値計算例

4.1 ナッシュ交渉解による計算フローチャート

図-5 に示す手順に従って以降の計算例を実施した。

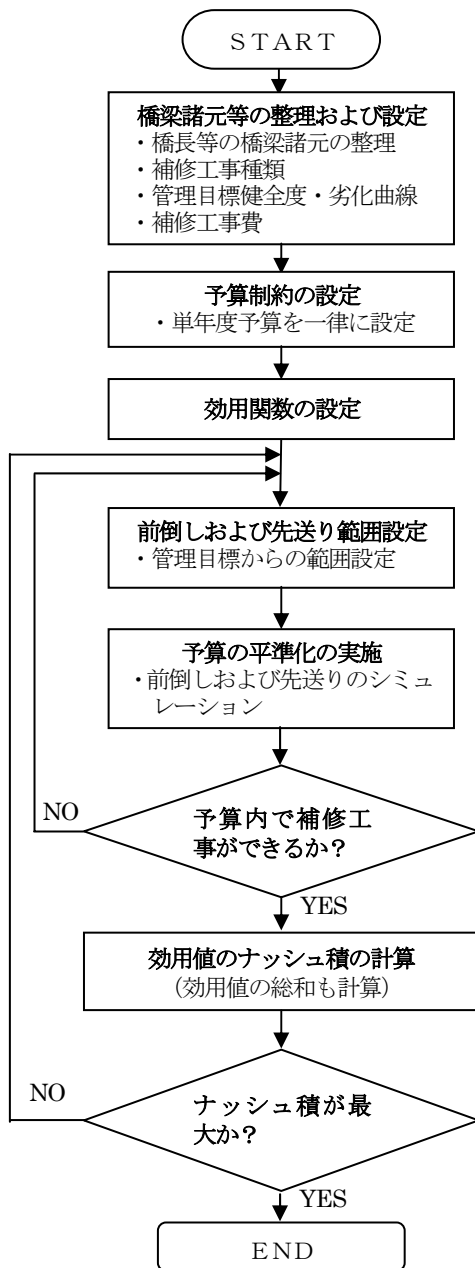


図-5 ナッシュ交渉解による計算フローチャート

4.2 補修対象橋梁の諸元

補修計画の対象期間を 50 年間、対象橋梁を 5 橋、各橋梁の補修部材を 2 部材とした。表-1 に、各橋梁の諸元を示す。

表-1 各橋梁諸元

| 橋梁名・橋梁諸元 | | 補修諸元・工事費 | |
|----------|--------------------|----------------------------|-----|
| A橋 | | 桁塗装工事 | |
| | | 管理目標健全度 | 2 |
| | | 補修周期 | 8年 |
| 橋種 | 非合成鈹桁 | 劣化曲線： $5-0.0469 \cdot X^2$ | |
| 橋長 | 30m | 床版疲労補修工事 | |
| 幅員 | 8m | 管理目標健全度 | 2 |
| 橋面積 | 240 m ² | 補修周期 | 20年 |
| 経過年数 | 5年 | 劣化曲線： $5-0.0075 \cdot X^2$ | |
| B橋 | | 桁塗装工事 | |
| | | 管理目標健全度 | 2 |
| | | 補修周期 | 10年 |
| 橋種 | 非合成鈹桁 | 劣化曲線： $5-0.0300 \cdot X^2$ | |
| 橋長 | 28m | 床版疲労補修工事 | |
| 幅員 | 7m | 管理目標健全度 | 2 |
| 橋面積 | 196 m ² | 補修周期 | 20年 |
| 経過年数 | 5年 | 劣化曲線： $5-0.0075 \cdot X^2$ | |
| C橋 | | 桁経年劣化補修工事 | |
| | | 管理目標健全度 | 2 |
| | | 補修周期 | 13年 |
| 橋種 | PCT桁 | 劣化曲線： $5-0.0178 \cdot X^2$ | |
| 橋長 | 30m | 桁中性化補修工事 | |
| 幅員 | 8m | 管理目標健全度 | 2 |
| 橋面積 | 240 m ² | 補修周期 | 25年 |
| 経過年数 | 20年 | 劣化曲線： $5-0.0048 \cdot X^2$ | |
| D橋 | | 桁経年劣化補修工事 | |
| | | 管理目標健全度 | 2 |
| | | 補修周期 | 13年 |
| 橋種 | PCT桁 | 劣化曲線： $5-0.0178 \cdot X^2$ | |
| 橋長 | 30m | 桁塩害補修工事 | |
| 幅員 | 8m | 管理目標健全度 | 2 |
| 橋面積 | 240 m ² | 補修周期 | 8年 |
| 経過年数 | 5年 | 劣化曲線： $5-0.0469 \cdot X^2$ | |
| E橋 | | 桁塗装工事 | |
| | | 管理目標健全度 | 2 |
| | | 補修周期 | 7年 |
| 橋種 | 非合成鈹桁 | 劣化曲線： $5-0.0612 \cdot X^2$ | |
| 橋長 | 25m | 床版疲労補修工事 | |
| 幅員 | 6m | 管理目標健全度 | 2 |
| 橋面積 | 150 m ² | 補修周期 | 20年 |
| 経過年数 | 5年 | 劣化曲線： $5-0.0075 \cdot X^2$ | |

ここでは、ナッシュ交渉解の適用性を手計算で確かめるために、対象橋梁 5 橋で各橋梁の補修部材を 2 部材と少数の部材に限定した。さらに、補修周期は健全度 5 から管理基準健全度（健全度 2）までの補修周期とし、一般的な 100 年間の補修計画対象期間ではなく 50 年間の補修対象期間とし、補修周期は一般的な補修周期の 1/2 とした。また、劣化曲線は 2 次曲線を採用した。

また、補修工法や補修数量、補修単価および補修周期は、『道路アセットマネジメントハンドブック』⁸⁾を参照し設定した。

各橋梁の1工事当りの工事費を表-2に示す。

表-2 各橋梁の1工事当り工事費

| 橋梁名 | 工事名 | 工種等 | 金額 |
|-----|------------------|--------------------------|------------------------------------|
| A橋 | 1. 桁塗装 工事 | 塗装単価 (3種ケレン) | 0.30 万円/m ² |
| | | 足場単価 (吊足場) | 0.45 万円/m ² |
| | | 橋面積当り塗装面積 | 3.1 m ² /m ² |
| | | 塗装面積=3.1×橋面積 | 744 m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 270 m ² |
| | | 工事費 | 345 万円 |
| | 2. 床版疲労補 修工事 | 橋面積当り炭素繊維接着単価 | 5.0 万円/m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 270 m ² |
| | | 工事費 | 1322 万円 |
| | | | |
| B橋 | 1. 桁塗装 工事 | 塗装単価 (3種ケレン) | 0.30 万円/m ² |
| | | 足場単価 (吊足場) | 0.45 万円/m ² |
| | | 橋面積当り塗装面積 | 3.1 m ² /m ² |
| | | 塗装面積=3.1×橋面積 | 607.6 m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 224 m ² |
| | | 工事費 | 283 万円 |
| | 2. 床版疲労補 修工事 | 橋面積当り炭素繊維接着単価 | 5.0 万円/m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 224 m ² |
| | | 工事費 | 1081 万円 |
| | | | |
| C橋 | 1. 桁経年劣化 補修工事 | 橋面積当り経年劣化補修単価 | 0.50 万円/m ² |
| | | 工事費 | 120 万円 |
| | 2. 桁中性化補 修工事 | 橋面積当り桁補修単価 (2層炭素繊維接着) | 5.0 万円/m ² |
| | | 足場単価 (吊足場) | 0.45 万円/m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 270 m ² |
| | | 工事費 | 1322 万円 |
| D橋 | 1. 桁経年劣化 補修工事 | 橋面積当り経年劣化補修単価 | 0.50 万円/m ² |
| | | 工事費 | 120 万円 |
| | 2. 桁塩害 補修工事 | 橋面積当り桁表面塗装単価 | 3.5 万円/m ² |
| | | 足場単価 (吊足場) | 0.45 万円/m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 270 m ² |
| | | 工事費 | 962 万円 |
| E橋 | 1. 桁塗装 工事 | 塗装単価 (3種ケレン) | 0.30 万円/m ² |
| | | 足場単価 (吊足場) | 0.45 万円/m ² |
| | | 橋面積当り塗装面積 | 3.1 m ² /m ² |
| | | 塗装面積=3.1×橋面積 | 465 m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 175 m ² |
| | | 工事費 | 218 万円 |
| | 2. 床版疲労補 修工事 | 橋面積当り炭素繊維接着単価 | 5.0 万円/m ² |
| | | 足場面積=(幅員+1m)×橋長 | 175 m ² |
| | | 工事費 | 829 万円 |
| | | | |

4.3 予算制約と本モデルのナッシュ交渉解

各年度の予算を一律 (1400 万円) に設定し、その予算内に入るように補修時期の前倒しおよび先送りのシミュレーションを行い、各橋梁の補修部材の 50 年間の効用値 u_i のナッシュ積が最も大きい組み合わせをナッシュ交渉解とする。

また、交渉が決裂した場合には、全ての橋梁の補修が

できないと考えて利得(効用)を $d_i = 0$ とする。よって、ナッシュ交渉解 u_i は式 (2) となる。

$$\begin{aligned} & \text{maximize} \prod_{i=1}^n u_i \\ & \text{subject to } u \in U, u_i \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

4.4 前倒しおよび先送りの範囲の設定

前倒しの範囲は、管理目標値である健全度 2 から 3 未滿とし、先送りは健全度 2 から 1 以上の範囲とする(図-6)。

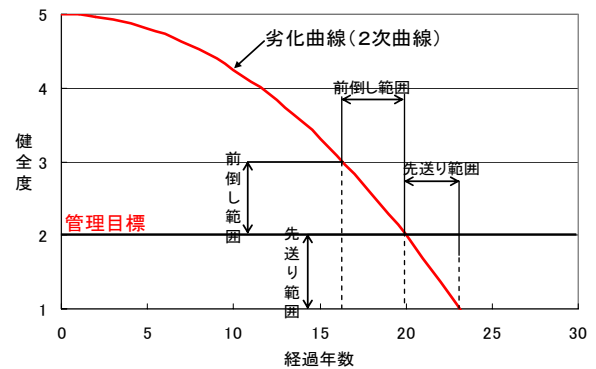


図-6 健全度と前倒しおよび先送り範囲

4.5 数値計算例結果

予算制約を満足しつつ効用値の総和 (Σ) が最大になるように手計算による試行錯誤シミュレーションで求めた 5 サンプルの結果を図-7に示す。この程度の規模でも、前倒し補修に伴う再前倒しまで考慮すると、膨大な組合せ数となりすべての場合をチェックすることはできなかったが、最大値に近い値は得られたと考えられる。

なお、図-7の縦軸は、当初(平準化前)の効用値に対する予算の平準化を行ったときの効用値の比で示している。

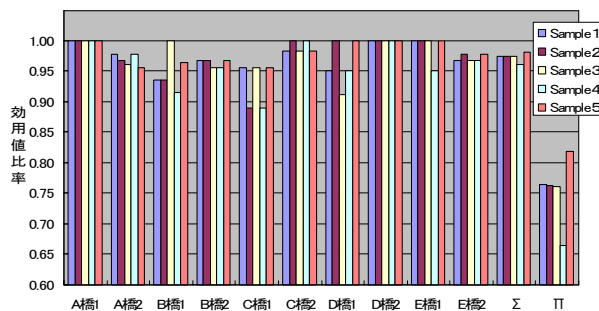


図-7 数値計算結果一覧

効用値の総和は表-3に示すように5サンプルともに効用値比率の差は 0.02 (0.981~0.961) の範囲におさまっている。また、Sample1 から Sample3 には、ほとんど差はみられない。このように、効用値の総和を評価関数(目的関数)とした場合には、差がほとんどないためどのサンプルも組合せ最適解とみなせる可能性がある。

しかし、図-7からも判るように、Sample1 から Sample3 の効用値の総和はほぼ同じでも、個々の橋梁にバラツキがあることが判る。これは、個々の橋梁の利得（効用値）を考慮しておらず、対象橋梁群全体の利得（効用値）を判断基準としているからである。

表-3 サンプル毎の効用値の総和とナッシュ積

| サンプル | 効用値の総和 | | 効用値のナッシュ積 | |
|---------|---------|-------|-----------|-------|
| | Σ | 比率 | Π | 比率 |
| 当初 | 167.413 | 1.000 | 1.722E+12 | 1.000 |
| Sample1 | 163.048 | 0.974 | 1.317E+12 | 0.765 |
| Sample2 | 163.063 | 0.974 | 1.312E+12 | 0.762 |
| Sample3 | 163.010 | 0.974 | 1.311E+12 | 0.762 |
| Sample4 | 160.829 | 0.961 | 1.145E+12 | 0.665 |
| Sample5 | 164.195 | 0.981 | 1.411E+12 | 0.819 |

一方、効用値のナッシュ積（Π）が評価関数（目的関数）の場合は、効用値比率の差が0.154（0.819～0.665）の範囲となる。この5サンプルでは予算平準化後の補修時の最適な組合せであるナッシュ交渉解はナッシュ積の最大の Sample5 である。

ナッシュ交渉解である Sample5 の補修時期一覧を表-4 に示す。表-4 では、補修対象範囲内で、補修工事がない年度を除いて表示してある。表-4 を見ると、特に 35 年目に 6 補修工事と多くの補修工事が重なっている。そのため 31 年目から 34 年目の間に補修工事の前倒しをしている。また、32 年目には当初は補修工事の重なりはなかったが、A 橋補修工事 2 の前倒しにより C 橋補修工事 1 と重なったため、C 橋補修工事 1 を前倒ししている。

Sample5 の効用値一覧表（表-5）と効用値比率図（図-8）を示す。

ナッシュ交渉解である Sample5 の場合は、図-7、図-8 に示すように効用値比率のバラツキが小さく、一人勝ちや一人負けの橋梁（プレイヤー）がないバランスのよい結果となっている。これは、各橋梁の個々の利得（効用値）の最大化が図られていると考えられる。また、効用値の総和が最大になっていることから判るように橋梁全体の利得（効用値）の最大化を同時に実現していると考えられる。

表-4 最適補修時期一覧表（Sample5）

| 補修対象期間 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 15 | 16 | 18 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 37 | 43 | 44 | 45 | 47 | 50 | |
|--------|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|--|
| A橋 | 補修工事1 | | | ○ | | | | | | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | ○ | | ○ | | | | |
| | 補修工事2 | | | | | | | | | | | | ○ | ○ | | | | | | | | | | | | ○ | | | | | | | | |
| B橋 | 補修工事1 | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 補修工事2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| C橋 | 補修工事1 | | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 補修工事2 | | | | ○ | ○ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| D橋 | 補修工事1 | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 補修工事2 | | | ○ | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| E橋 | 補修工事1 | ○ | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | ○ | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 補修工事2 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

注記：補修工事のない年度を表示していない。

凡例 ○：当初補修時期
 ○：前倒し後補修時期 □：当初に補修の重なる年度
 ○：前倒し前補修時期

表-5 最適補修時期効用値計算一覧表（Sample5）

| 橋名 | 補修工事名 | 当初効用値 a | 平準化後効用値 b | 比率 b/a |
|--------------|-----------|-----------|-----------|--------|
| A橋1 | 桁塗装工事 | 17.266 | 17.266 | 1.000 |
| A橋2 | 床版疲労補修工事 | 16.063 | 15.353 | 0.956 |
| B橋1 | 桁塗装工事 | 16.750 | 16.150 | 0.964 |
| B橋2 | 床版疲労補修工事 | 16.063 | 15.538 | 0.967 |
| C橋1 | 桁経年劣化補修工事 | 16.953 | 16.207 | 0.956 |
| C橋2 | 桁中性化補修工事 | 16.680 | 16.392 | 0.983 |
| D橋1 | 桁経年劣化補修工事 | 17.189 | 17.189 | 1.000 |
| D橋2 | 桁塩害補修工事 | 17.266 | 17.266 | 1.000 |
| E橋1 | 桁塗装工事 | 17.122 | 17.122 | 1.000 |
| E橋2 | 床版疲労補修工事 | 16.063 | 15.713 | 0.978 |
| Σ（効用値の総和） | | 167.413 | 164.195 | 0.981 |
| Π（効用値のナッシュ積） | | 1.722E+12 | 1.411E+12 | 0.819 |

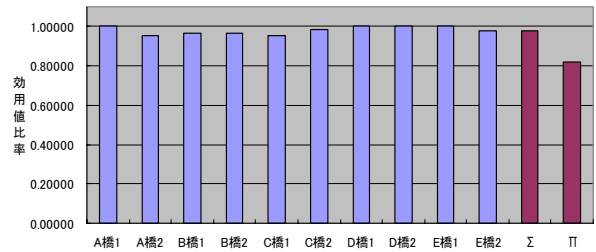


図-8 効用値比率図（Sample5）

4.6 総和の最大化とナッシュ積の最大化の特徴

図-7 の右端部を拡大して図-9 に再掲する。効用値の総和より、ナッシュ積の方の感度が圧倒的に良い。これは、各橋梁の効用値が小さな変化であっても、ナッシュ積は橋梁数に応じた効用値のべき乗であるためであり、橋梁数が多くなると感度がさらに良くなる。

また、総和の最大値にはほとんど差はないが、ナッシュ積の差は大きくなる。遺伝的アルゴリズム（GA）により、膨大な補修時期の組合せの中から組合せの最適解を求める場合には、総和を評価関数（目的関数）にすると、先に示した5サンプルとも最適解とする可能性がある。一方、ナッシュ積を評価関数（目的関数）にすれば、

Sample5 を最適解に選ぶ確率は非常に高くなると考えられる。

Sample5 の個々の橋梁の効用値比率のパラツキはない。これはナッシュ交渉解の公理1のパレート最適性を表している。これ以上同時に利得(効用)の増加がない組合せである。

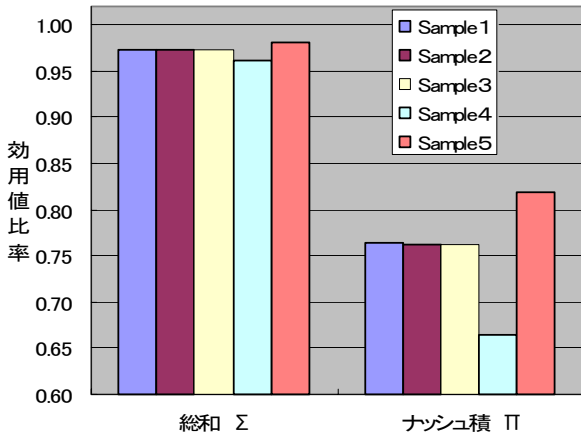


図-9 感度比較図

また、ナッシュ交渉解ではないが Sample1 と Sample2 で、効用値総和とナッシュ積の大きさに逆転現象が生じている。これは、図-10 と図-11 に示すように、Sample2 ではC橋の1(経年劣化工事)の効用値の1人負けがあり、Sample1 では効用値の極端に小さくなっているような1人負け状態はなく比較的均等になっている。これは、個々の補修部材の利得(効用)の最大化を図ることにつながっており、効用値の総和の最大化が、個々の効用値の最大化とならない例を表現していると考えられる。

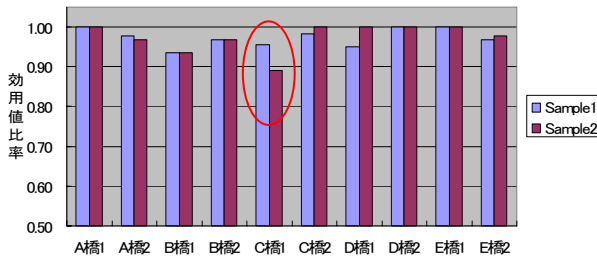


図-10 Sample1 と Sample2 の効用比率

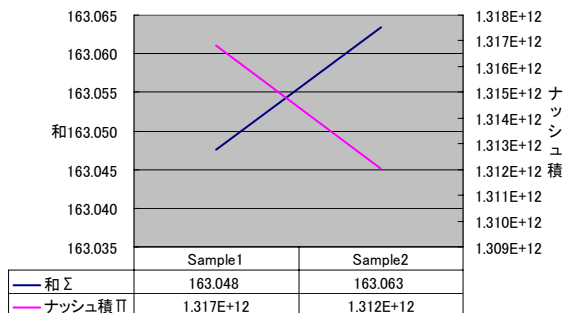


図-11 Sample1 と Sample2 の和とナッシュ積の比較図

本研究では、補修の先送りが選ばれる補修工事がなかった。これは、健全度2以下になると効用値が急激に小さくなると設定したためである。管理目標を超えて先送りすることは、リスクを正當に評価し管理することがことが前提となるが、先送りを認める場合は先送りの妥当性を評価できる効用関数の設定を行う必要がある。

4.7 効用関数の変更による計算結果

効用関数を単純に2倍(正一次変換)した場合の効用値の総和とナッシュ積の変化についての計算結果を示す。ここでは、先に示した Sample5 について効用関数を2倍した補修部材を含んだ3パターン(パターン1、パターン2、パターン3)の計算結果を示す。また、効用関数を変更した3パターンの特徴を下記に示す。

- パターン1: 前倒し有りの部材の効用関数を2倍
- パターン2: 前倒し無しの部材の効用関数を2倍
- パターン3: パターン1とパターン2の混合

図-12に当初の効用関数と2倍した効用関数を示す。

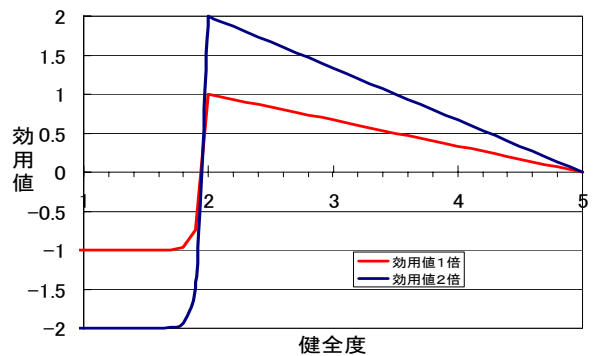


図-12 効用値1倍及び2倍の効用関数

表-6に効用関数の変更パターンの一覧表を示す。

表-6 Sample5における効用関数の変更パターン

| 橋名 | 前倒しの有無 | 変更前効用関数倍数 | 効用関数の変更倍数 | | |
|-----|--------|-----------|-------------|---------------|-------------|
| | | | パターン1 | パターン2 | パターン3 |
| | | | 前倒部材の効用関数2倍 | 前倒部材以外の効用関数2倍 | パターン1, 2の混合 |
| A橋1 | | 1 | 1 | 2 | 2 |
| A橋2 | 有 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| B橋1 | 有 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| B橋2 | 有 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| C橋1 | 有 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| C橋2 | 有 | 1 | 2 | 1 | 1 |
| D橋1 | | 1 | 1 | 2 | 1 |
| D橋2 | | 1 | 1 | 2 | 1 |
| E橋1 | | 1 | 1 | 2 | 2 |
| E橋2 | 有 | 1 | 2 | 1 | 1 |

表-7に効用関数の変更した場合の各パターンの計算結果を、図-13 に効用値の総和とナッシュ積の各パターン比率の変化を示す。

表-7 Sample5における効用関数の変更計算結果

| 検討パターン | 総和・ナッシュ積の区分 | 当初効用値 a | 前倒後効用値 b | 比率 b/a |
|--------|-------------|-----------|-----------|--------|
| 変更前 | Σ(総和) | 167.413 | 164.195 | 0.981 |
| | Π(ナッシュ積) | 1.722E+12 | 1.411E+12 | 0.819 |
| パターン1 | Σ(総和) | 265.983 | 259.546 | 0.976 |
| | Π(ナッシュ積) | 1.102E+14 | 9.030E+13 | 0.819 |
| パターン2 | Σ(総和) | 236.256 | 233.038 | 0.986 |
| | Π(ナッシュ積) | 2.756E+13 | 2.257E+13 | 0.819 |
| パターン3 | Σ(総和) | 250.676 | 245.623 | 0.980 |
| | Π(ナッシュ積) | 5.511E+13 | 4.515E+13 | 0.819 |

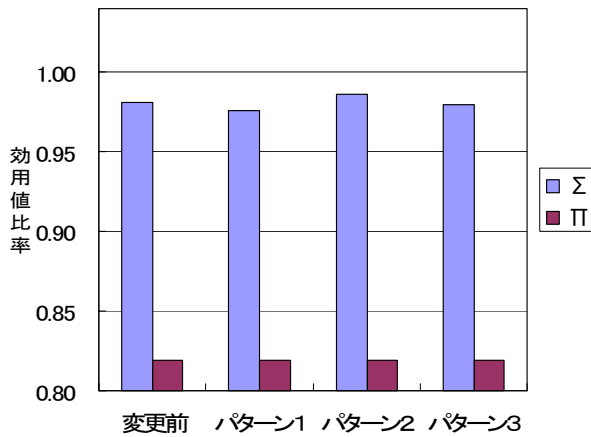


図-13 パターン毎の効用値総和及びナッシュ積の比率変化

ナッシュ積は、どの補修部材の効用関数を2倍しても前倒し後の効用値と当初の効用値との比率は0.819と全く変わっていない。これは、ナッシュ交渉解の公理3の効用の正1次変換からの独立性を証明していることになる。

一方、効用値の総和は、効用関数が2倍になっている部材を前倒して補修すると小さくなる。これは、効用値の大きい部材（効用関数2倍）を前倒し補修すると効用値の減少率が2倍となるためである。よって、効用関数の大きい部材の前倒しをせず、効用関数の小さい部材を優先的に前倒した方が効用値の総和が大きくなるのが判る。

効用関数を倍率変更して重みをつけた場合に、ナッシュ積は正1次変換までであれば、ナッシュ積の比率は全く変化しないが、効用値の総和は効用関数の重みに反応し変化することから、次節で述べるように優先的に補修時期厳守（前倒しおよび先送りをしない）をする橋梁を考慮することも可能になる。

4.8 効用関数の重みづけを利用した優先順位決定方法の提案

4.7で述べたように、効用関数を2倍した部材の補修を前倒しすれば効用値の総和は減少するためこの部材は前倒しをしない方が良いとの判断になる。ナッシュ積は、効用値に重みをつけても結果は全く変わらない。

よって、ナッシュ積によって個々の橋梁の利得（効用値）の最大化を図り、効用値の総和により優先度を表現する目的関数として、式(3)が考えられる。

$$\text{maximize} \prod_{i=1}^N u_i \cdot \sum_{i=1}^N u_i \quad (3)$$

先に提示したナッシュ積の値がほぼ同じであるSample1からSample3の3サンプルについて、特定の橋梁の優先度をあげるために重みを変えた次の2モデルの試算を式(3)により行う（表-8～表-11）。

モデル1：B橋の重み（効用値倍率）を10倍にする。

モデル2：D橋の重みを10倍にする。

表-8 各モデルと重み（効用値倍率）

| 橋名 | 重み（効用値倍率） | |
|----|-----------|------|
| | モデル1 | モデル2 |
| A橋 | 1 | 1 |
| B橋 | 10 | 1 |
| C橋 | 1 | 1 |
| D橋 | 1 | 10 |
| E橋 | 1 | 1 |

表-9 当初（重み1）の計算結果一覧表

| | ナッシュ積・Π | 総和・Σ | Π・Σ |
|---------|---------|-------|-------|
| Sample1 | 0.765 | 0.974 | 0.745 |
| Sample2 | 0.762 | 0.974 | 0.742 |
| Sample3 | 0.762 | 0.974 | 0.741 |

表-10 モデル1の計算結果一覧表

| | ナッシュ積・Π | 総和・Σ | Π・Σ |
|---------|---------|-------|-------|
| Sample1 | 0.765 | 0.959 | 0.734 |
| Sample2 | 0.762 | 0.959 | 0.731 |
| Sample3 | 0.762 | 0.977 | 0.744 |

表-11 モデル2の計算結果一覧表

| | ナッシュ積・Π | 総和・Σ | Π・Σ |
|---------|---------|-------|-------|
| Sample1 | 0.765 | 0.975 | 0.745 |
| Sample2 | 0.762 | 0.991 | 0.755 |
| Sample3 | 0.762 | 0.962 | 0.733 |

上記の計算結果を図-14にまとめて示す。

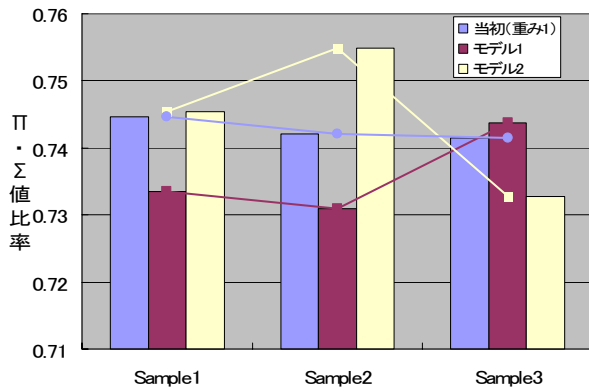


図-14 モデル別Π・Σ効用値比率

Sample1 から Sample3 までは、当初の比率はほぼ同じであるが、ある特定の橋梁の重みをつけることによって、順位が逆転していることが判る。モデル 1 の場合は、Sample3 が、他の 2 サンプルより効用値が大きい B 橋梁に重みをつけたため 3 サンプルの中で最も Π・Σ 値の比率が大きくなる。これは、B 橋を前倒しおよび先送りをしないサンプルが Π・Σ 値の比率が大きくなることを示している。モデル 2 の場合は、Sample2 が、他の 2 サンプルより効用値が大きい D 橋梁に重みをつけたため 3 サンプルの中で最も Π・Σ 値の比率が大きくなる。これは、D 橋を前倒しおよび先送りをしないサンプルが Π・Σ 値の比率が大きくなることを示している。ナッシュ積 Π がほぼ同じであっても優先度を上げたい橋梁に重みをつけることにより効用値の総和 Σ の大きいサンプルが Π・Σ 値が大きくなり、その橋梁の補修時期を変更（前倒しおよび先送り）しないサンプルを選定することになる。よって、提案した式(3)により、複数の橋梁の中から当初の補修時期を厳守する（前倒しおよび先送りしない）橋梁の優先順位をつけることができると考える。

5. あとがき

個々（各橋梁）の利得の最大化と全体（対象橋梁群全体）の利得の最大化を同時に図る手法を、ナッシュ交渉解を援用することで提示できたと考える。また、効用値に重みをつけ、ナッシュ積と総和の積により、当初計画の適切な補修時期を守る橋梁および補修部材の優先順位を設定する手法の提案ができたと考ええる。

現在まで土木分野でゲーム理論の援用が進んでいない要因は、各プレイヤーの利得を正当に設定することが難しいためである。本研究では、利得を健全度に対応した効用関数に変換し、利得を金額ではなく、どの時期に補修したらその橋梁(プレイヤー)にとって効用が高いかを効用値で表現したことで、ゲーム理論の援用の一手法を提示できたと考える。

また、本研究では補修時期の先送りが選ばれない効用

関数を設定したが管理目標を超えて補修の先送りを認める場合は、リスクを正当に評価した効用関数の設定が必要である。

本研究では、ナッシュ交渉解の適用性を手計算で確かめるために解析に使用したデータを少なく設定したが、実際の橋梁補修計画問題に適用する場合は、補修時期の組合せが膨大となるため、遺伝的アルゴリズム (GA) を援用した組合せ最適解を求める必要があると考える。

公共事業を対象にゲーム理論を援用する場合は、非協力ゲームのような市場競争原理を表現するゲーム（非協力ゲームの解はナッシュ均衡であり、パレート最適ではない）ではなく、ナッシュ交渉解のような協力ゲームを援用する方が、与えられた予算（税金）をパレート最適解として配分できるため非常に効率がよい。よって、協力ゲーム理論のひとつであるナッシュ交渉解は、さまざまな公共事業の分野の効率的な予算配分決定や優先順位決定には有効な解析ツールとなると考える。

参考文献

- 1) 中村秀明, 河村圭, 鬼丸浩幸, 宮本文穂: 遺伝的アルゴリズムおよび免疫アルゴリズムによる橋梁維持管理計画最適化の検証, 構造工学論文集, Vol.47A, pp.201-210, 2001
- 2) 古田均, 亀田学広, 中原耕一郎: 改良型遺伝的アルゴリズムによる複数橋梁の維持管理計画策定システムの実用化, 土木学会論文集 A, Vol.62/No3, pp.656-668, 2006
- 3) 古田均, 杉本博之, 井下泰具, 横田哲也, 廣瀬彰則, 中谷武弘: 中期事業計画問題への GA の応用, 構造工学論文集, Vol.44A, pp.497-502, 1998
- 4) 近田康夫, 西雄一, 廣瀬彰則, 城戸隆良: スケジュールを考慮した GA 援用橋梁補修計画支援の試み, 構造工学論文集, Vol.46A, pp.371-378, 2000
- 5) 中本邦博, 小西康夫, 近藤克哉, 石垣博行: 交渉ゲームを用いた PID コントローラの多目的最適設計, 日本機械学会論文集 (C 編), 64-626, pp.128-134, 1998
- 6) 岡田章: ゲーム理論, 有斐閣, pp.257-292, 1996
- 7) 鈴木光男: 新ゲーム理論, 勁草書房, pp.147-172, 1994
- 8) 財団法人道路保全技術センター, 道路構造物保全研究会編: 道路アセットマネジメントハンドブック, 鹿島出版会, 2008

(2009年9月24日受付)