

博士論文

古典的スケール不変な素粒子拡張模型に基づく
宇宙のインフレーション
Cosmic inflation based on a classically scale invariant
extended standard model

金沢大学大学院自然科学研究科
数物科学専攻

学籍番号	1824012008
氏名	富田 克樹
主任指導教員名	末松 大二郎
提出年月	令和3年8月6日

目次

1	導入	2
2	素粒子標準模型 (SM)	4
2.1	ヒッグスポテンシャルと自発的対称性の破れ	4
2.2	SM 粒子の質量	5
2.3	カイラル対称性の破れ、構成子質量と中間子	8
2.3.1	カレントクォーク質量とカイラル対称性	8
2.3.2	南部-ヨナ-ラシニオ模型	15
2.3.3	カイラル対称性の破れと構成子質量	17
3	標準宇宙論	43
3.1	宇宙原理とフリードマン-ロバートソン-ウォーカー計量	43
3.2	地平線問題 - 粒子地平線と因果律 -	47
3.3	時空と物質のダイナミクス - 一般相対論概説 -	49
3.4	宇宙における物質の大域的運動	52
3.5	宇宙の熱力学 - 宇宙膨張とエネルギー密度の減衰 -	53
3.6	フリードマン方程式と宇宙膨張	55
4	インフレーション宇宙論	59
4.1	最小結合インフレーション	59
4.2	非最小結合インフレーション	62
4.2.1	共形変換	62
4.2.2	アインシュタインフレームでのポテンシャル	65
4.2.3	アインシュタインフレームでのインフレーション	69
4.3	再加熱とその問題点	71
5	古典的スケール不変な素粒子拡張模型に基づく 宇宙のインフレーション	73
5.1	古典的スケール不変な素粒子拡張模型	74
5.2	インフレーション	75
5.3	真空の安定性	79
5.4	ユニタリティ問題	81
5.5	再加熱	84
5.6	TeV スケールの物理	86
6	まとめ	94

1 導入

現在の物理学は大きく二つの分野に分けられる。一つは物性物理学、もう一つは素粒子物理学である。大雑把には、物性物理学とは既に知られている物質(粒子)が織り成す様々な現象や諸法則を探究する学問であり、素粒子物理学とは未だ知られていない物質(粒子)そのものを探究する学問だと言えるだろう。しかし、物理学とは本来明確に複数の分野に分断できるものではなく、物性物理学における概念や手法が素粒子物理学で用いられることも、その逆もある。

素粒子物理学では2012年にCERNのLHC(Large Hadron Collider)でヒッグス粒子が発見 [1,2] されたことで素粒子標準模型 (Standard Model, SM) の正しさが示されたが、このヒッグスセクターにおける自発的対称性の破れ (Spontaneous Symmetry Breaking, SSB) はまさに物性物理学の分野でも用いられている概念である。自発的対称性の破れとは、ラグランジアンが持っていた対称性を真空が破ることである。SMにおいては質量を持つ全ての素粒子はこのSSBによって質量を獲得している。

SMではもう一つ別の対称性の破れと質量生成が起こっており、それはクォークとグルーオンの物理(量子色力学, Quantum Chromodynamics, QCD)におけるダイナミカルなカイラル対称性の破れ (Dynamical Chiral Symmetry Breaking, $D\chi SB$) である。この $D\chi SB$ によって陽子や中性子などの核子 (Nucleon) や中間子 (メソン, Meson) の質量は生成されている。物性物理学では超伝導現象の中で $D\chi SB$ と同様の SSB が起こっており、BCS理論と呼ばれている。

以上の例からわかるように、素粒子物理学においても物性物理学においても、もはや粒子のみを扱うのでは不十分(あるいは不可能)で、真空あるいは背景としてどのような量子状態が選ばれているかを考えることが非常に重要になっている。

SMにおける真空はヒッグス場のポテンシャルの最小値を取るような量子状態として定められているが、これはヒッグス場のポテンシャルに依存する。このヒッグスポテンシャルの形はSMにおいては何かから導かれるものではなく手で与えられるものであり、なぜそのような形をしているのかはわかっていない。特に、全てのSM素粒子の質量を与えるヒッグス場の質量パラメータはSMにおいて質量次元あるいはスケールを持つ唯一のパラメータである。SMはこの質量項を除いては古典的スケール不変な理論となっている。このヒッグス質量パラメータ、あるいはその存在によって生成される真空期待値 v_h 付近のスケールは電弱スケール $\Lambda_{EW} \sim \mathcal{O}(10^2)\text{GeV}$ と言われる。もう一つ重要なスケールとして、プランク質量(プランクスケール) $m_P \sim \mathcal{O}(10^{19})\text{GeV}$ がある。これは、古典重力を記述するアインシュタイン方程式やアインシュタイン-ヒルベルト作用に含まれており、重力の量子効果が無視できなくなるスケールであるとされる。この2つの重要なスケールの間には $\mathcal{O}(10^{17})\text{GeV}$ もの開きがあるが、なぜこれほどまでの開きがあるのかという問いは階層性問題と言われている。この問題を解決するということは、スケールの起源を説明するということである。プランクスケールの起源を説明する研究も行われている [3,4] が、本論文ではプランクスケールの存在は、素なラグランジアンレベルで仮定し、ヒッグス場の質量パラメータの起源、すなわち電弱スケールの起源のみを考える。もしヒッグス場の質量パラメータの起源を説明できればSMの全ての素粒子の質量の起源、スケールの起源を説明できることになる。QCDにおける $D\chi SB$ と同様の機構によってヒッグス場の質

量項を生成し、質量とスケールの起源を説明する模型として、[5]が提案されている。この論文ではヒッグス場の質量項を生成する Hidden-QCD セクターの $D\chi$ SB に伴う南部-ゴールドストーンボソン (NG boson) がダークマターとなることを示している。

上記の先行研究では、TeV スケールのシナリオとしては十分なものであるが、古典的スケール不変性を要求している以上、TeV スケールより上の現象も新たなスケールの導入無しで説明しなければならない。本論文では、先行研究の模型にどのような拡張を行えば宇宙のインフレーションを無矛盾に説明できるかを議論する。インフレーション宇宙論とは標準宇宙論 (Standard Cosmology) が記述する初期宇宙よりさらに初期の宇宙論であり、標準宇宙論における諸問題を解決できる理論である。その問題点とは、平坦性問題、地平線問題、モノポール問題、大規模構造の起源などである。これまでに様々なインフレーション模型が提案されてきたが、既に多くの模型が宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic microwave background (radiation), CMB(R)) の揺らぎの観測から棄却されている [6]。インフレーション理論の主流はインフラトン場と呼ばれるスカラー場によるインフレーション理論であるが、重力によるインフレーションも提案されている [7]。インフラトン場と重力の非最小結合のある模型では、PLANCK 衛星実験と非常に合うインフレーションを起こすことが調べられている。典型的な例はヒッグス場をインフラトン場として考えるヒッグスインフレーションである [8]。

インフレーションは標準宇宙論でのいわゆるビッグバン元素合成以前の現象であり、インフレーションが終了後には標準宇宙論が記述するビッグバン宇宙へ接続されなければならない。そこで、急激な膨張により冷めきった宇宙を加熱する機構が必要となる。これは宇宙の再加熱 (reheating) と呼ばれている。また、再加熱の初期段階には予熱、あるいはプレヒーティングと呼ばれている非摂動的な粒子生成現象も起こる [9]。本論文では、再加熱温度の見積もりも行ったが、プレヒーティングによる再加熱温度への影響は考えておらず、プレヒーティングにより生成された粒子の散乱によるユニタリティの破れの議論のみ行った。

本論文の構成は以下の通りである。まず、2章で素粒子標準模型の基本的な構造の解説を行う。特に2.3節ではQCDの低エネルギー有効理論としてのNJL模型の取り扱いについて解説する。3章では標準宇宙論の解説を行う。特に、地平線問題や平坦性問題についても解説する。4章ではインフレーション宇宙論について解説する。ここでは、単一のインフラトン場による最小結合のカオティックインフレーションと、非最小結合インフレーションの解説のみ行う。5章で、宇宙のインフレーションを古典的スケール不変な拡張模型に基づいて考える。ダークマターや電弱スケールの生成などのTeVスケールでの物理との無矛盾性のチェックも行う。6章では本論文のまとめを行う。

2 素粒子標準模型 (SM)

この章では素粒子標準模型 (SM) の中で本論文を読む上で必要、あるいは理解の助けになるものをまとめてある。既に SM を十分に知っている読者はこの章は飛ばして良い。

SM では全てのフェルミオンとベクトル場 (ゲージ場) はそれぞれカイラル対称性とゲージ対称性によって質量項を持つことが禁止されている。これらの粒子はヒッグス場が非自明な (0 でない) 真空期待値を持つことによって質量を獲得する。まず 2.1 節でヒッグスポテンシャルと自発的対称性の破れについて説明する。その後、2.2 節で SM 粒子の質量生成について説明する。続いて 2.3 節でカイラル対称性の破れとフェルミオンの質量生成について説明する。

2.1 ヒッグスポテンシャルと自発的対称性の破れ

この節の内容は基本的に [10] を参考にしている。

SM におけるヒッグス場 H は $SU(2)_L$ の基本表現 (二重項) であり、 $U(1)_Y$ のチャージは 1 である。そこで、以下のように表現できる。

$$H = \begin{pmatrix} H^+ \\ H^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\eta_1 \\ \phi_2 + i\eta_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ここで、添字の +, 0 はそれぞれの成分が $U(1)_{em}$ に対してどのようなチャージを持つかを表している。 H^+ は +1、 H^0 は 0 の電荷を持つ。これに関しては後ほど再び取り上げる。

ヒッグスポテンシャルは

$$V_H = -\mu^2(H^\dagger H) + \lambda_H(H^\dagger H)^2 \quad (2.2)$$

と表される。この形はゲージ対称性 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ とくりこみ可能性から一意的に定まる一般的なものである。 $\mu^2 < 0$ の時、 $-\mu^2(H^\dagger H)$ の項は単なる質量項となり、ヒッグスポテンシャルは

$$H^\dagger H = 0$$

で最小値を取る。しかし、 $\mu^2 > 0$ の時、 $-\mu^2(H^\dagger H)$ の項はもはや通常の質量項ではなくなり、ヒッグスポテンシャルは

$$H^\dagger H = \frac{\mu^2}{2\lambda_H} \quad (2.3)$$

で最小値を取る。

通常の場合の量子論では、真空状態とはポアンカレ不変性を持ち、エネルギーが最低の状態であると定める。したがって、 $\mu^2 > 0$ の時には、ヒッグス場の真空期待値 $\langle H \rangle$ が

$$\langle H \rangle^\dagger \langle H \rangle = \frac{\mu^2}{2\lambda_H} =: \frac{v_h^2}{2} \quad (2.4)$$

となる状態を真空と定義するべきである。新しく定義した v_h をヒッグス場の真空期待値 (Vacuum Expectation Value, VEV) という。係数の $1/2$ は v を複素場の期待値ではなく、実場の期待値として定義したために生じたものである。真空が $U(1)_{\text{em}}$ に対して不変であることを要求すると、 ϕ_1 のみが非自明な真空期待値を持ち、従って (2.1) から

$$\langle H \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_h \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

と書ける。ここで、今真空を (2.5) を満たす状態だと定義したが、この (2.5) は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の変換の下で不変ではない。これは、自発的対称性の破れ (SSB) の表現方法の一つである。SM における $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の自発的対称性の破れを特に、電弱対称性の破れ (ElectroWeak Symmetry Breaking, EWSB) という。なお、 $\langle H \rangle$ の上の成分は 0 であるので、この成分の複素位相のみを回す変換を行っても、 $\langle H \rangle$ は不変であり、真空も不変である。この破れずに残った不変性が $U(1)_{\text{em}}$ である。

量子場は真空からの揺らぎ (あるいは励起状態) として定義されるので、この真空の上でのヒッグス場 H は

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\eta_1 \\ v_h + h + i\eta_2 \end{pmatrix}$$

と書ける。この時、ヒッグスポテンシャル (2.2) は

$$V_H = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\mu)^2 h^2 + \lambda v_h h(\phi_1^2 + \eta_1^2 + h^2 + \eta_2^2) + \frac{\lambda_H}{4}(\phi_1^2 + \eta_1^2 + h^2 + \eta_2^2)^2 - \frac{1}{2} \frac{\lambda_H v_h^4}{2} \quad (2.6)$$

となる。ここで、 h は質量を持つが、他の実場 ϕ_1, η_1, η_2 は質量を持っていない。一般に、連続的対称性が破れた時には破れた対称性の生成子の数だけ質量 0 のボソンが存在する。これを南部-ゴールドストンの定理といい、質量 0 のボソンを南部-ゴールドストンボソン (NG ボソン) という。SM においては、 $SU(2)_L \times U(1)_Y$ の対称性があるが、生成子の数は $SU(2)_L$ の生成子 $\tau^a/2$ の 3 つと $U(1)_Y$ の生成子 Y 1 つの合計 4 つである。上述の通り、これが 1 つの生成子 Q を持つ部分群 $U(1)_{\text{em}}$ に破れるので、破れた対称性は 3 つであり、これに対応する NG ボソンが質量 0 の 3 つの実場 ϕ_1, η_1, η_2 である。

2.2 SM 粒子の質量

この節では、[10] に加えて、[11] も参考になっている。

前述の通り、SM における全てのフェルミオンとゲージ場はそれぞれカイラル対称性とゲージ対称性によって質量項を持つことができない。しかし、ヒッグス場が非自明な真空期待値 v_h を持ち、それが質量の役割を果たすことでこれらの粒子は質量を得る。これを陽に見るために、ユニタリーゲージを定義し、そのゲージの下で議論を行う。

H について動径方向の成分として $v_h + h$ を取り、位相場 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を用いると

$$H = \exp(-i\xi \cdot \tau/v_h) \begin{pmatrix} 0 \\ (v_h + h)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

と書ける。ここで τ はパウリ行列であり、 $SU(2)_L$ の生成子 (の定数倍) として用いている。SM は $SU(2)_L \times U(1)_Y$ のゲージの自由度を持つので、その自由度を使うことで以下のよう (2.7) の位相場を消すことができる。

$$H^u = \exp(i\xi \cdot \tau/v_h)H = \begin{pmatrix} 0 \\ (v_h + h)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

このゲージをユニタリーゲージと呼び、このゲージでのヒッグス場を H^u と書く。

位相場を用いた表式 (2.7) は、位相をテイラー展開するとわかるように、元の量子場が複数の量子場の積として表されていることになり、正確には正しくない。しかし、量子場は小さな揺らぎであり、二次以降の影響は小さいと思えば、その範囲では近似的に正しいと言える。ユニタリーゲージではウィークボソンのプロパゲータが高エネルギーで振る舞いが悪くなるが、これは位相場を用いたヒッグス場の表式の正当性が破れていることを示している。

ゲージ場の質量項はヒッグス場の共変微分を用いた運動項から出てくる。SM における共変微分は

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a \frac{\tau^a}{2} + ig'B_\mu \frac{Y}{2}$$

である。ただし、今は特に電弱理論を考えているので、量子色力学の対称性 ($SU(3)_C$) は無視した。ゲージ場の質量項は

$$|D_\mu H^u|^2 \ni \frac{v_H^2}{8} [g^2 W_\mu^1 W^{1\mu} + g^2 W_\mu^2 W^{2\mu} + g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - 2gg'B_\mu W^{3\mu} + g'^2 B_\mu B^\mu] \quad (2.9)$$

となる。ここで、 W_μ^3 と B_μ は混合 (mixing) している (場の二乗の形になっていない) ので、mixing を解いて質量固有状態にする必要がある。 W_μ^3 と B_μ についてベクトル表記し、質量行列を対角化すると

$$\begin{aligned} & \frac{v_H^2}{8} [g^2 W_\mu^3 W^{3\mu} - 2gg'B_\mu W^{3\mu} + g'^2 B_\mu B^\mu] \\ &= \frac{v_H^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} gg & -gg' \\ -gg' & g'g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_Z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$m_Z^2 = \frac{v_h^2(g^2 + g'^2)}{4}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g/\sqrt{g^2 + g'^2} & -g'/\sqrt{g^2 + g'^2} \\ g'/\sqrt{g^2 + g'^2} & g/\sqrt{g^2 + g'^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。この回転角 θ_W をワインバーグ角という。ここに現れた Z_μ が Z ボゾンであり、中性ベクトル場である。 A_μ が電磁場である。 W_μ^1 と W_μ^2 は mixing していない実場であるので、複素場として以下のように統一できる。

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (2.10)$$

この複素場の質量は (2.9) から

$$m_W^2 = \frac{g^2 v_H^2}{4}$$

となる。

次にフェルミオンの質量生成について説明する。SM ではフェルミオンは左巻きと右巻きで相互作用が異なる。これはゲージ理論の言葉で言うと、右巻きと左巻きで別々に変換する対称性を持つということである。このような対称性をカイラル対称性といい、カイラル対称性を持つ理論をカイラルな理論という。このカイラルなゲージ対称性のために、フェルミオンは質量項を持つことができない。フェルミオンの質量はヒッグス場との湯川相互作用項を通してヒッグス場の真空期待値から生成される。

ゲージ対称性とくりこみ可能性、そしてラグランジアンのエルミート性から、フェルミオンとヒッグス場との湯川結合は以下のようになる。

$$\mathcal{L}_Y = Y_{ij}^u \bar{Q}_{Li} \tilde{H} u_{Rj} + Y_{ij}^d \bar{Q}_{Li} H d_{Rj} + Y_{ij}^e \bar{L}_{Li} H e_{Rj} + h.c. \quad (2.11)$$

ここで、

$$\tilde{H} = i\tau^2 H^*$$

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} u_{Li} \\ d_{Li} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \right)$$

$$u_{Ri} = \begin{pmatrix} u_R & c_R & t_R \end{pmatrix}$$

$$d_{Ri} = \begin{pmatrix} d_R & s_R & b_R \end{pmatrix}$$

$$e_{Ri} = \begin{pmatrix} e_R & \mu_R & \tau_R \end{pmatrix}$$

$$L_{Li} = \begin{pmatrix} \nu_{Li} \\ e_{Li} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \right)$$

である。ユニタリーゲージ (2.8) では湯川相互作用項 (2.11) は

$$\mathcal{L}_Y = \bar{u}_{Li} \left(\frac{Y_{ij}^u v_h}{\sqrt{2}} \right) u_{Rj} + \bar{d}_{Li} \left(\frac{Y_{ij}^d v_h}{\sqrt{2}} \right) d_{Rj} + \bar{e}_{Li} \left(\frac{Y_{ij}^e v_h}{\sqrt{2}} \right) e_{Rj} + h.c. \quad (2.12)$$

となり、フェルミオンの質量項が生成されたことがわかる。しかし、W ボゾンの場合と同様に、mixing しているので、質量固有状態を求めてやる必要がある。(2.12) を見ると、全ての項にヒッグス場の真空期待値 v_h が一次で入っており、対角化する回転行列には寄与しないことがわかる。湯川結合定数行列を対角化したものに v_h がかかったものが質量であると言える。そこで質量固有状態では、湯川相互作用項 (2.11) は

$$\mathcal{L}_Y = \bar{u}_{Li}^m \left(\frac{Y_i^u \delta_{ij} v_h}{\sqrt{2}} \right) u_{Rj}^m + \bar{d}_{Li}^m \left(\frac{Y_i^d \delta_{ij} v_h}{\sqrt{2}} \right) d_{Rj}^m + \bar{e}_{Li}^m \left(\frac{Y_i^e \delta_{ij} v_h}{\sqrt{2}} \right) e_{Rj}^m + h.c. \quad (2.13)$$

ここで、 Y_i^A は湯川結合定数行列を対角化した時の成分である。また、添字の m は質量固有状態であることを意味する。フェルミオンの質量は

$$m_i^A = \frac{Y_i^A}{\sqrt{2}} v_h$$

と書ける。

2.3 カイラル対称性の破れ、構成子質量と中間子

前節 2.2 で、電弱対称性の破れによる質量生成機構を見た。この機構により前述の通りクォークも質量を得ることが出来る。そのようにヒッグス場により与えられるクォーク質量はカレントクォーク質量と呼ばれる。ここで、アップクォークやダウンクォークは核子や π 中間子、 σ 中間子を構成するクォークであるが、これらクォークのカレントクォーク質量はたかだか数 MeV であり、核子の約 1GeV や π 中間子の百数十 MeV、 σ 中間子の約 500MeV と比べて遥かに小さい。核子や σ 中間子などのハドロンの大きな質量は電弱対称性の破れとは別の対称性の破れによって与えられる。その対称性はカイラル対称性であり、その破れに伴い生成される質量を構成子質量という。この節ではこのカイラル対称性とその破れ、そして構成子質量と中間子の物理について解説する。これは、5章で扱う QCD ライクな隠れたセクターを持つ古典的スケール不変な拡張模型を扱う上での基礎となる。この節は主に [12–16] を参考にした。

2.3.1 カレントクォーク質量とカイラル対称性

ハドロンなどの QCD の物理は、あるスケール $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200\text{MeV}$ 以下において現れる。これは QCD の相互作用である $SU(3)_c$ のゲージ場の結合定数がこのスケールで発散し、カラーの閉じ込めが起こることでクォークが単体では存在できなくなるからである。このスケール Λ_{QCD} は電弱対称性が破れるスケールに比べて非常に小さい。そこで、QCD のラ

ラグランジアンには電弱対称性が破れ、カレントクォーク質量が生成された後のものを用いる。すなわち、

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}^T (i\not{D} - \mathbf{m})q - \frac{1}{2} \text{tr}_3 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

を用いる。ただし、クォーク q は

$$q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \\ q^5 \\ q^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ c \\ s \\ t \\ b \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

であり、それぞれのクォークは

$$q^i = \begin{pmatrix} q^{iR} \\ q^{iG} \\ q^{iB} \end{pmatrix}$$

と、 $SU(3)_c$ の基本表現である。すなわち、添字の R 、 G 、 B はカラーである。 q の転置 q^T は

$$q^T = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

であり、下付きクォーク q_i は q^i の転置であるとする。すなわち

$$q_i = (q_{iR}, q_{iG}, q_{iB}) = (q^i)^T = (q^{iR}, q^{iG}, q^{iB})$$

とする。スピノールの四成分の足は省略した。 D_μ は $SU(3)_c$ のゲージ場に対する共変微分であり

$$D_\mu = \mathbf{1}\partial_\mu - igG_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$$

である。ここで、電弱相互作用はこの節では扱わないので無視した。 G_μ^a が $SU(3)_c$ のゲージ場であるグルーオン場であり、 λ_a はゲルマン行列である。 $\lambda_a/2$ で $SU(3)_c$ の生成子となる。¹添字 a は 1 ~ 8 を走り、これはグルーオンの数に対応する。また、この共変微分はクォーク場の $SU(3)_c$ 基本表現 q_i に作用するので R 、 G 、 B を走るクォークのカラーの足 A を持ち、成分で書くと

$$(D_\mu)^A_B = \delta_B^A \partial - igG_\mu^a \frac{(\lambda_a)^A_B}{2}$$

と書ける。 G_μ^a と $\lambda_a/2$ の和を取ったものとして

$$G_\mu = G_\mu^a \frac{\lambda_a}{2}$$

¹これは単なる規格化である。

と定義する。これもクォークのカラーの足 A を持つ。同様に $G_{\mu\nu}$ は場の強さであるが、

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - g\epsilon^a{}_{bc}G_\mu^b G_\nu^c$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a \frac{\lambda_a}{2}$$

である。 m は質量行列であり、

$$\mathbf{m} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6) = \text{diag}(m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b)$$

である。すなわち、ここでのクォークは質量固有状態である。場の強さの二乗の項の tr_3 はクォークのカラーの足 A についてのトレースを表す。足を用いて成分表示すると

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}} &= \bar{q}_{iA} (i\not{D}_B^A - m_i \delta_j^i \delta_B^A) q^{jB} - \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^A G^{\mu\nu B}_A \\ &= \bar{q}_{iA} \left[i\gamma^\mu \left(\delta_B^A \partial_\mu - ig G_\mu^a \frac{\lambda_a^A{}_B}{2} \right) - m_i \delta_j^i \delta_B^A \right] q^{jB} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。ここで、ゲルマン行列 λ_a の規格化条件

$$\text{tr}_3 \lambda_a \lambda_b = 2\delta_{ab} \quad (2.15)$$

を用いた。

本節の初めに述べた通り、アップ、ダウン、ストレンジクォークのカレントクォーク質量は、それらクォークが構成する核子や σ 中間子の質量に比べて遥かに小さい。このことから、これらの軽い三種のクォークから成るハドロンの物理においてはこの三種類の軽いクォークのカレントクォーク質量を無視する近似が意味を持つことが予想される。この三種類の軽いクォークに対するラグランジアン \mathcal{L}_{QCD} は、全クォークに対するラグランジアンと同様に

$$\mathcal{L}_{uds} = \bar{q}^T (i\not{D} - \mathbf{m}) q - \frac{1}{2} \text{tr}_3 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$$

と書ける。ただし、ここではクォーク場 q は (2.14) から重いクォーク c, t, b を取り除いたものとし、質量行列 \mathbf{m} もこれらを除いたものとして定義する。すなわち、

$$q = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3) = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$$

である。質量行列 \mathbf{m} を無視する近似の下では

$$\mathcal{L}_{uds} \simeq \bar{q}^T i\not{D} q - \frac{1}{2} \text{tr}_3 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \quad (2.16)$$

と書ける。この近似においては、ラグランジアン \mathcal{L}_{uds} はクォークの右巻きと左巻きを別々に変換しても不変である。

ここで言う、右巻き、左巻きとはヘリシティの意味ではなく、カイラリティの意味である。ヘリシティは素朴に粒子の進行方向に対するスピンの向きという概念である。カイラリティはローレンツ群、あるいはポアンカレ群の右巻き表現か左巻き表現かという概念である。これらは γ^5 に対する固有値によって区別される。 γ^5 に対する固有値が +1 であれば右巻き表現、-1 ならば左巻き表現である。カイラル表現では γ^5 は

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

で定義される。 $\mathbf{1}_2$ は 2×2 の単位行列である。この表現の元で、ディラックスピノル ψ は二つの 2-スピノル、またはワイルスピノル φ_L 、 φ_R を用いて

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi_L \\ \varphi_R \end{pmatrix}$$

と表される。これらの具体的表現の元で γ^5 の固有値と表現の対応を確認することは簡単である。カイラリティは場の質量が 0 の時にはヘリシティと一致するので、ここでカイラリティの右巻き、左巻きという名を付けることが出来る。

右巻き表現と左巻き表現を区別する γ^5 の固有値は ± 1 であるので、

$$P_L = \frac{\mathbf{1}_2 - \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_R = \frac{\mathbf{1}_2 + \gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$$

という演算子 (行列) を定義すると、これらはそれぞれ、四成分のディラックスピノル ψ から二成分のワイルスピノル φ_L 、 φ_R の情報を抜き出す射影演算子となっており、実際に ψ にこれらを作用させると左巻き成分のみ、あるいは右巻き成分のみを持つスピノル

$$\psi_L := P_L \psi = \begin{pmatrix} \varphi_L \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi_R := P_R \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_R \end{pmatrix}$$

が得られる。

これらの射影演算子を用いることで、ディラックスピノル ψ の右巻き、または左巻き成分のみを変換する演算子を定義出来る。左巻き成分のみの位相を θ_L だけ変化させる演算子 $U_L(\theta_L)$ は

$$U_L(\theta_L) = e^{-i\theta_L P_L}$$

と書ける。これが左巻き成分のみの位相変換になっていることは微小変換を実際に計算すると簡単にわかる。また、保存カレント j_L^μ は

$$j_L^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi$$

となる。同様に、右巻き成分のみの位相を θ_R だけ変化させる演算子 $U_R(\theta_R)$ は

$$U_R(\theta_R) = e^{-i\theta_R P_R}$$

と書けて、ネーターカレント j_R^μ は

$$j_R^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu P_R \psi$$

となる。左巻き成分のみの位相変換の群を $U(1)_L$ 、右巻き成分のみの位相変換の群を $U(1)_R$ と書く。射影演算子 P_L 、 P_R はその定義から、

$$P_C^2 = P_C, \quad (C = L, R)$$

$$P_L P_R = P_R P_L = 0 \quad (2.17)$$

が従う。一つ目は、既に射影したものをその後何度同じ方向に射影しても何も変化が無いと主張しているだけであり、二つ目は、既にある方向に射影したものは直行する方向の成分を持たないので、直行する二つの方向に射影させようとしても0になると主張しているだけである。これらの性質を用いると、 $U_L(\theta_L)$ と $U_R(\theta_R)$ は可換であり、左巻き成分の位相と右巻き成分の位相をそれぞれ任意の角度だけ回す変換はそれぞれの変換の直積となる。すなわち、変換の演算子は

$$U_{LR}(\theta_L, \theta_R) = U_L(\theta_L) \times U_R(\theta_R)$$

とかけ、この変換の群は $U(1)_L \times U(1)_R$ である。このような右巻き表現と左巻き表現で全く独立な変換をカイラルな変換という。この変換において特に、左右で変換する角度 θ_L と θ_R が等しいとすると、左右で同じ変換をしていることになり、変換の演算子は一つのパラメーター θ_V で

$$U_V(\theta_V) = e^{-i\theta_V}$$

と書ける。ネーターカレント j^μ は

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

となる。このカレントはベクトルとして振る舞い、この変換の群をベクトルの V を取って $U(1)_V$ と書く。また、この変換の下で右巻き表現と左巻き表現は全く同等に変換されており、このように左右の区別が無いような変換をベクトル型の変換という。次に、 θ_R が $-\theta_L$ に等しく、左右で全く逆に変換されるとすると、変換の演算子はやはり一つのパラメーター θ_A のみで

$$U_A(\theta_A) = e^{-i\theta_A \gamma^5}$$

と書ける。ネーターカレント $j^{5\mu}$ は

$$j^{5\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$$

となる。このカレントはアクシャルベクトル (軸性ベクトル、擬ベクトル) として振る舞い、この変換の群をアクシャルベクトルの A を取って $U(1)_A$ と書く。 $U(1)_V$ も $U(1)_A$ も $U(1)_L \times U(1)_R$ の特殊な場合であり、部分群である。一方、この部分群の直積 $U(1)_V \times U(1)_A$ は元の直積群と同等である。すなわち

$$U(1)_V \times U(1)_A = U(1)_L \times U(1)_R$$

である。これは、生成子を基底と見なした場合にその基底を変換することに対応する。 P_L と P_R を基底としても、 $\mathbf{1}_4$ と γ^5 を基底としても同じ変換の演算子を表現できる。

これまでは位相変換のみを考えていたが、同様に、左巻き表現の $SU(N)$ の N 重項を変換する演算子 $U_L(\boldsymbol{\theta}_L)$ は

$$U_L(\boldsymbol{\theta}_L) = e^{-i\boldsymbol{\theta}_L \cdot \mathbf{T}P_L} = e^{-i\theta_L^a T_a P_L}$$

と書ける。ここで

$$\boldsymbol{\theta}_L = (\theta_L^1, \dots, \theta_L^{N^2-1})$$

は変換のパラメーターで、

$$\mathbf{T}P_L = (T^1 P_L, \dots, T^{N^2-1} P_L)$$

は変換の生成子である。この変換の群を $SU(N)_L$ と書こう。対応するネーターカレント j_{La}^μ は

$$j_{La}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu T_a P_L \psi \quad (a = 1, \dots, N^2 - 1)$$

となる。生成子が $N^2 - 1$ 個あるので、カレントも $N^2 - 1$ 種類ある。同様に、右巻き表現の $SU(N)$ の N 重項を変換する演算子 $U_R(\boldsymbol{\theta}_R)$ は

$$U_R(\boldsymbol{\theta}_R) = e^{-i\boldsymbol{\theta}_R \cdot \mathbf{T}P_R} = e^{-i\theta_R^a T_a P_R}$$

と書け、

$$\boldsymbol{\theta}_R = (\theta_R^1, \dots, \theta_R^{N^2-1})$$

は変換のパラメーターで、

$$\mathbf{T}P_R = (T^1 P_R, \dots, T^{N^2-1} P_R)$$

は変換の生成子である。この変換の群を $SU(N)_R$ と書こう。対応するネーターカレント j_{Ra}^μ は

$$j_{Ra}^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu T_a P_R \psi \quad (a = 1, \dots, N^2 - 1)$$

となる。射影演算子 P_L 、 P_R の性質 (2.17) のおかげで、左右を別々に任意に回す変換の演算子 $U_{LR}(\boldsymbol{\theta}_L, \boldsymbol{\theta}_R)$ は

$$U_{LR}(\boldsymbol{\theta}_L, \boldsymbol{\theta}_R) = U_L(\boldsymbol{\theta}_L) \times U_R(\boldsymbol{\theta}_R)$$

というように、それぞれの群の直積で書ける。この直積群の部分群として、左右で同じ角度だけ回す変換の演算子 $U_V(\boldsymbol{\theta}_V)$ は

$$U_V(\boldsymbol{\theta}_V) = e^{-i\boldsymbol{\theta}_V \cdot \mathbf{T}}$$

となり、ネーターカレントは

$$j_a^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi$$

となる。この部分群を $SU(N)_V$ と書く。同様に、左右で逆に回す変換の演算子 $U_A(\boldsymbol{\theta}_A)$ は

$$U_A(\boldsymbol{\theta}_A) = e^{-i\boldsymbol{\theta}_A \cdot \mathbf{T} \gamma^5}$$

となり、ネーターカレントは

$$j_a^{5\mu} = \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \gamma^5 \psi$$

となる。この部分群を $SU(N)_A$ と書く。これらの部分群の直積群は元の直積群と同等である。

$$SU(N)_V \times SU(N)_A = SU(N)_L \times SU(N)_R$$

これを示すには、具体的に変換の演算子の積を計算し、 $SU(N)$ の生成子の交換子、すなわち二次の項は交換関係から必ず一次の項になることを使えば良い。

一般に、 $U(1)$ と $SU(N)$ の直積群は $U(N)$ と同じものとして考えて良い。すなわち、

$$U(N) = U(1) \times SU(N)$$

である。したがって、

$$U(N)_L \times U(N)_R = U(1)_L \times SU(N)_L \times U(1)_R \times SU(N)_R$$

である。このカイラルな変換の下で (2.16) は古典的に不変である。まず、第二項について、これらの変換の元でグルーオン場は不変であるので不変である。したがって第一項のクォーク場の共変的運動項の変換のみを考えれば良い。カイラルな変換には射影演算子 P_L 、または P_R が含まれているが、これら射影演算子の中の γ^5 は運動項の γ^μ と \bar{q} の γ^0 を通り抜ける時に反交換関係

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$

によって二度符号を変え、元に戻る。その結果、変換の演算子が打ち消し、不変に保たれる。しかし、量子論においてはアノマリー (量子異常) によって $U(1)_A$ は破れる。したがって、QCD における (近似的な) ラグランジアン (2.16) における量子的な対称性は

$$SU(N)_L \times SU(N)_R \times U(1)_V \tag{2.18}$$

となる。

2.3.2 南部-ヨナ-ラシニオ模型

Λ_{QCD} 以下のスケールでは、グルーオン場はもはや観測されない。 Λ_{QCD} 付近以下のスケールでの三種類の軽いクォークを記述する有効ラグランジアンとして、グルーオン場が積分されて四体フェルミと六体フェルミ相互作用に変化したような

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q}^T(i\not{\partial} - \mathbf{m})q + G\text{tr}_3(\Phi^\dagger\Phi) + G_D(\det_3\Phi + \det_3\Phi^\dagger) \quad (2.19)$$

がある。ここで、 Φ は 3×3 の行列場、あるいは複合場であり、

$$\Phi = \bar{q}(1 - \gamma^5)q^T = 2\bar{q}P_Lq^T = 2\overline{q_R}q_L^T \quad (2.20)$$

で定義される。したがって、そのエルミート共役は

$$\Phi^\dagger = \bar{q}(1 + \gamma^5)q^T = 2\bar{q}P_Rq^T = 2\overline{q_L}q_R^T$$

となる。成分で書くと

$$\Phi^i_j = \bar{q}^i(1 - \gamma^5)q_j = 2\bar{q}^iP_Lq_j = 2\overline{q_R^i}q_{Lj}$$

$$\Phi^{\dagger i}_j = \bar{q}^i(1 + \gamma^5)q_j = 2\bar{q}^iP_Rq_j = 2\overline{q_L^i}q_{Rj}$$

がわかる。行列表記では

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \bar{q}^1(1 - \gamma^5)q_1 & \bar{q}^1(1 - \gamma^5)q_2 & \bar{q}^1(1 - \gamma^5)q_3 \\ \bar{q}^2(1 - \gamma^5)q_1 & \bar{q}^2(1 - \gamma^5)q_2 & \bar{q}^2(1 - \gamma^5)q_3 \\ \bar{q}^3(1 - \gamma^5)q_1 & \bar{q}^3(1 - \gamma^5)q_2 & \bar{q}^3(1 - \gamma^5)q_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{q}^1q_1 & \bar{q}^1q_2 & \bar{q}^1q_3 \\ \bar{q}^2q_1 & \bar{q}^2q_2 & \bar{q}^2q_3 \\ \bar{q}^3q_1 & \bar{q}^3q_2 & \bar{q}^3q_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \bar{q}^1i\gamma^5q_1 & \bar{q}^1i\gamma^5q_2 & \bar{q}^1i\gamma^5q_3 \\ \bar{q}^2i\gamma^5q_1 & \bar{q}^2i\gamma^5q_2 & \bar{q}^2i\gamma^5q_3 \\ \bar{q}^3i\gamma^5q_1 & \bar{q}^3i\gamma^5q_2 & \bar{q}^3i\gamma^5q_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。 Φ は 3×3 の行列であるので、恒等演算子 $\mathbf{1}_3$ とゲルマン行列 λ_a $a = 1, \dots, 8$ を完全系として展開できる。²ここでは (2.15) を満たすように恒等演算子 $\mathbf{1}_3$ を

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\mathbf{1}_3$$

というようにゲルマン行列に統合して、行列場 Φ は

$$\Phi = \Phi^a \frac{\lambda_a}{2}$$

というように展開する。係数の $1/2$ は $SU(3)$ の生成子と対応させるために付けてある。添字 a は $0 \sim 8$ を走る。(2.15) と Φ の定義を用いると展開の係数場 Φ^a は

$$\Phi^a = \text{tr}_3[\Phi\lambda^a] = \bar{q}^i(1 - \gamma^5)q_j\lambda^{aj}_i = \bar{q}_i\lambda^{a_i}{}^j(1 - \gamma^5)q^j = \bar{q}^T\lambda^{aT}(1 - \gamma^5)q \quad (2.21)$$

$$= 2\bar{q}^T(\lambda^{aT}/2)q + 2i\bar{q}^T i\gamma^5(\lambda^{aT}/2)q \quad (2.22)$$

²ゲルマン行列だけでは、トレースレスな行列しか表現することができない。

と求まる。したがって複合場 Φ は

$$\Phi = 2\bar{q}^T(\lambda^{aT}/2)q\frac{\lambda_a}{2} + 2i\bar{q}^T i\gamma^5(\lambda^{aT}/2)q\frac{\lambda_a}{2} \quad (2.23)$$

と表せる。

(2.19) は質量項を無視すれば QCD の近似的な対称性 (2.18) を持つ。まず Φ はその定義から、 $U(1)_L \times U(1)_R \times SU(3)_L \times SU(3)_R$ の変換の元で

$$\Phi \rightarrow U_R^\dagger(\theta_R)U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta}_R)\Phi U_L(\theta_L)U_L(\boldsymbol{\theta}_L)$$

と変換される。ただし、今、 Φ の定義の中でスピノルの足は既に縮約されているので、ここで用いた変換の演算子は上述のものとは全く同一ではない。ここでは生成子としての射影演算子 P_L 、 P_R は 4×4 の行列ではなく、単純に

$$P_C q_D = q_D P_C = q_C \delta_{CD} \quad (C, D = L, R)$$

を満たすような演算子であるとする。この変換の元で、四体フェルミ相互作用項 $\text{tr}_3(\Phi^\dagger\Phi)$ は

$$\begin{aligned} \text{tr}_3(\Phi^\dagger\Phi) &\rightarrow \text{tr}_3[U_L^\dagger(\boldsymbol{\theta}_L)U_L^\dagger(\theta_L)\Phi^\dagger U_R(\boldsymbol{\theta}_R)U_R(\theta_R) \cdot U_R^\dagger(\theta_R)U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta}_R)\Phi U_L(\theta_L)U_L(\boldsymbol{\theta}_L)] \\ &= \text{tr}_3(\Phi^\dagger\Phi) \end{aligned}$$

のように不変である。元々の NJL 模型ではこの四体フェルミ相互作用のみが導入されていた。しかし、この項だけでは、アノマリーによる $U(1)_A$ の破れを反映できておらず、そのため、行列式型の六体フェルミ相互作用項 $\det_3(\Phi)$ が必要となる。六体フェルミ相互作用項が $U(1)_A$ のみを破ることを見よう。まず、 $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ 変換のもとでは

$$\begin{aligned} \det_3(\Phi) &\rightarrow \det_3[U_R^\dagger(\theta_V)U_R^\dagger(\boldsymbol{\theta}_R)\Phi U_L(\theta_V)U_L(\boldsymbol{\theta}_L)] \\ &= U^\dagger(\theta_V)U(\theta_V)\det_3[U_R(\boldsymbol{\theta}_R)]\det_3(\Phi)\det_3[U_L(\boldsymbol{\theta}_L)] \\ &= 1 \cdot \det_3(\Phi) \cdot 1 = \det_3(\Phi) \end{aligned}$$

となり、不変である。ここで、添字 L 、 R の無い演算子 $U(\theta_V)$ は生成子としての P_L 、 P_R がクォークに作用して固有値 1 を吐き出した後のものであり、ただの位相因子である。また、 $SU(3)_L$ も $SU(3)_R$ も特殊ユニタリー群であるので、定義から行列式は 1 である。一方、 $U(1)_A$ 変換に対しては

$$\begin{aligned} \det_3(\Phi) &\rightarrow \det_3[U_R^\dagger(-\theta_A)\Phi U_L(\theta_A)] = U^\dagger(-\theta_A)U(\theta_A)\det_3(\Phi) \\ &= U(2\theta_A)\det_3(\Phi) \neq \det_3(\Phi) \end{aligned}$$

となり、不変ではないことがわかる。したがって、ラグランジアン (2.19) は質量項を除いて、QCD の近似的、量子的な対称性 (2.18) と同じ対称性を持つ。この対称性のおかげで、ラグランジアン (2.19) は QCD の低エネルギー領域をよく記述できる。

2.3.3 カイラル対称性の破れと構成子質量

質量項があるとディラック場はカイラル対称性を持っていないことから、南部-ヨナ-ラシニオ模型 (2.19) において、複合場 Φ が非自明な真空期待値を持ち、フェルミオン場 q の二次の項、すなわち質量項が生成されると、近似的なカイラル対称性 (2.18) がダイナミカルに破れると期待できる。そこで、複合場 Φ の真空期待値を $\langle \Phi \rangle$ とし、その真空からの揺らぎ、あるいは励起 $\delta\Phi$ をヒッグス場の場合と同様に

$$\delta\Phi = \Phi - \langle \Phi \rangle \quad (2.24)$$

と定義する。この展開を NJL ラグランジアン (2.19) に代入し、カイラル対称性が自発的に破れた後のクォーク場の振る舞いを見よう。ただし、行列式型の六体フェルミ相互作用 $\det_3\Phi$ はそのままでは計算しにくいので、ケーリー・ハミルトンの定理を用いて、トレース型の相互作用に書き直す。ケーリー・ハミルトンの定理とは、「任意の n 次正方行列 A に対して、 $\det_n(A - \lambda\mathbf{1}_n)$ を展開して得られる λ の多項式の形式は λ を行列 A に置き換えても保持される」、という主張である。この定理をある任意の 3 次正方行列 $A = (A^i_j)$ に対して適用しよう。まず、 $\det_3(A - \lambda\mathbf{1}_3)$ は

$$\begin{aligned} \det_3(A - \lambda\mathbf{1}_3) &= \begin{vmatrix} A^1_1 - \lambda & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 - \lambda & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + (A^1_1 + A^2_2 + A^3_3)\lambda^2 \\ &\quad + (A^2_3A^3_2 + A^1_2A^2_1 + A^1_3A^3_1 - A^1_1A^2_2 - A^2_2A^3_3 - A^3_3A^1_1)\lambda \\ &\quad + (A^1_1A^2_2A^3_3 + A^1_2A^2_3A^3_1 + A^1_3A^2_1A^3_2 \\ &\quad - A^1_1A^2_3A^3_2 - A^1_2A^2_1A^3_3 - A^1_3A^2_2A^3_1) \\ &= -\lambda^3 + \text{tr}_3A\lambda^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} [(A^1_1A^1_1 + A^1_2A^2_1 + A^1_3A^3_1) + (A^2_1A^1_2 + A^2_2A^2_2 + A^2_3A^3_3) \\ &\quad + (A^3_1A^1_3 + A^3_2A^2_3 + A^3_3A^3_3) \\ &\quad - (A^1_1A^1_1 + A^2_2A^2_2 + A^3_3A^3_3) - 2(A^1_1A^2_2 + A^2_2A^3_3 + A^3_3A^1_1)] \lambda \\ &\quad + \det_3A \\ &= -\lambda^3 + \text{tr}_3A\lambda^2 + \frac{1}{2} [A^i_jA^j_i - (A^1_1 + A^2_2 + A^3_3)^2] \lambda + \det_3A \\ &= -\lambda^3 + \text{tr}_3A\lambda^2 + \frac{1}{2} [\text{tr}_3(A^2) - (\text{tr}_3A)^2] \lambda + \det_3A \end{aligned}$$

となる。ただし、行列式の定義

$$\det_3A = \varepsilon^{ijk} A^1_i A^2_j A^3_k$$

と、トレースの定義

$$\text{tr}_3A = A^i_i$$

$$\text{tr}_3(AA) = (AA)^i_i = A^i_j A^j_i$$

を用いた。ケーリー・ハミルトンの定理から λ を行列 A で置き換えてもこの等式は成立するので、

$$\det_3(A - A\mathbf{1}_3) = 0 = -A^3 + \text{tr}_3(A)A^2 + \frac{1}{2}[\text{tr}_3(A^2) - (\text{tr}_3 A)^2]A + \det_3 A\mathbf{1}_3$$

を得る。これの両辺のトレースを取り、整理することで、

$$\det_3 A = \frac{1}{3}\text{tr}_3(A^3) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(A^2)\text{tr}_3 A + \frac{1}{6}(\text{tr}_3 A)^3$$

を得る。ここから、行列式型の六体フェルミ相互作用 $\det_3 \Phi$ は

$$\det_3 \Phi = \frac{1}{3}\text{tr}_3(\Phi^3) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\Phi^2)\text{tr}_3 \Phi + \frac{1}{6}(\text{tr}_3 \Phi)^3 \quad (2.25)$$

と求まる。これを用いてラグランジアン (2.19) を展開し、揺らぎの定義 (2.24) を用いることで実際に質量が生成されることを見よう。ただし、まずは複合場 Φ 揺らぎ (励起) $\delta\Phi$ のダイナミクスではなく、ラグランジアン (2.19) に元々入っているクォーク場 q の質量生成のみを見たいので、揺らぎ $\delta\Phi$ を無視する近似を行う。その際、揺らぎ $\delta\Phi$ の一次の項は揺らぎの定義 (2.24) を用いると必ず元のクォーク場 q の二次の項、すなわち質量項の形に持っていけるので、質量を漏れなく評価するためにこれを行う。すなわち、 A 、 B 、 C を行列場とすると

$$\begin{aligned} AB &= (\langle A \rangle + \delta A)(\langle B \rangle + \delta B) = \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle \delta B + \delta A \langle B \rangle + \delta A \delta B \\ &= \langle A \rangle \langle B \rangle + \langle A \rangle (B - \langle B \rangle) + (A - \langle A \rangle) \langle B \rangle + \delta A \delta B \\ &= \langle A \rangle B + A \langle B \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle + \delta A \delta B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABC &= (\langle A \rangle + \delta A)(\langle B \rangle + \delta B)(\langle C \rangle + \delta C) \\ &= \langle A \rangle \langle B \rangle \langle C \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle \delta C + \langle A \rangle \delta B \langle C \rangle + \delta A \langle B \rangle \langle C \rangle \\ &\quad + \langle A \rangle \delta B \delta C + \delta A \langle B \rangle \delta C + \delta A \delta B \langle C \rangle + \delta A \delta B \delta C \\ &= \langle A \rangle \langle B \rangle \langle C \rangle + \langle A \rangle \langle B \rangle (C - \langle C \rangle) + \langle A \rangle (B - \langle B \rangle) \langle C \rangle + (A - \langle A \rangle) \langle B \rangle \langle C \rangle \\ &\quad + \langle A \rangle \delta B \delta C + \delta A \langle B \rangle \delta C + \delta A \delta B \langle C \rangle + \delta A \delta B \delta C \\ &= \langle A \rangle \langle B \rangle C + \langle A \rangle B \langle C \rangle + A \langle B \rangle \langle C \rangle - 2\langle A \rangle \langle B \rangle \langle C \rangle \\ &\quad + \langle A \rangle \delta B \delta C + \delta A \langle B \rangle \delta C + \delta A \delta B \langle C \rangle + \delta A \delta B \delta C \end{aligned}$$

と変形する。この公式を用いると、ラグランジアン (2.19) 中の四体フェルミ相互作用 $\text{tr}_3(\Phi^\dagger \Phi)$ と六体フェルミ相互作用 $\det_3 \Phi$ 中の $\text{tr}_3(\Phi^3)$ 、 $\text{tr}_3(\Phi^2)\text{tr}_3 \Phi$ 、 $\text{tr}_3(\Phi)^3$ はそれぞれ、

$$\text{tr}_3(\Phi^\dagger \Phi) = \text{tr}_3(\langle \Phi \rangle^\dagger \Phi) + \text{tr}_3(\Phi^\dagger \langle \Phi \rangle) - \text{tr}_3(\langle \Phi \rangle^\dagger \langle \Phi \rangle) + \text{tr}_3(\delta \Phi^\dagger \delta \Phi)$$

$$\begin{aligned} \text{tr}_3(\Phi^2)\text{tr}_3(\Phi) &= \text{tr}_3(\langle \Phi \rangle^2)\text{tr}_3 \Phi + 2\text{tr}_3(\langle \Phi \rangle \Phi)\text{tr}_3 \langle \Phi \rangle - 2\text{tr}_3(\langle \Phi \rangle^2)\text{tr}_3 \langle \Phi \rangle \\ &\quad + 2\text{tr}_3(\langle \Phi \rangle \delta \Phi)\text{tr}_3 \delta \Phi + \text{tr}_3(\delta \Phi^2)\text{tr}_3 \langle \Phi \rangle + \text{tr}_3(\delta \Phi^2)\text{tr}_3 \delta \Phi \end{aligned}$$

$$\text{tr}_3(\Phi^3) = 3\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^2\Phi) - 2\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^3) + 3\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\delta\Phi^2) + \text{tr}_3(\delta\Phi^3)$$

$$(\text{tr}_3\Phi)^3 = 3(\text{tr}_3\langle\Phi\rangle)^2\text{tr}_3\Phi - 2(\text{tr}_3\langle\Phi\rangle)^3 + 3\text{tr}_3\langle\Phi\rangle(\text{tr}_3\delta\Phi)^2 + (\text{tr}_3\delta\Phi)^3$$

となる。これらをラグランジアン (2.19) に代入し、

\mathcal{L}_{NJL}

$$\begin{aligned} &= \bar{q}^T(i\cancel{\partial} - \mathbf{m})q + G[\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^\dagger\Phi) + \text{h.c.}] - G\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^\dagger\langle\Phi\rangle) \\ &\quad + G_D \left[\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^2\Phi) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^2)\text{tr}_3\Phi - \text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\Phi)\text{tr}_3\langle\Phi\rangle + \frac{1}{2}(\text{tr}_3\langle\Phi\rangle)^2\text{tr}_3\Phi + \text{h.c.} \right] \\ &\quad - 2G_D[\det_3\langle\Phi\rangle + \text{h.c.}] \\ &\quad + G\text{tr}_3(\delta\Phi^\dagger\delta\Phi) \\ &\quad + G_D \left[\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\delta\Phi^2) - \text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\delta\Phi)\text{tr}_3\delta\Phi - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\delta\Phi^2)\text{tr}_3\langle\Phi\rangle + \frac{1}{2}\text{tr}_3\langle\Phi\rangle(\text{tr}_3\delta\Phi)^2 + \text{h.c.} \right] \\ &\quad + G_D \left[\frac{1}{3}\text{tr}_3(\delta\Phi^3) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\delta\Phi^2)\text{tr}_3\delta\Phi + \frac{1}{6}(\text{tr}_3\delta\Phi)^3 + \text{h.c.} \right] \\ &= \mathcal{L}_{\text{MFA}} + \mathcal{L}_{\text{res}} \end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MFA}} &= \bar{q}^T(i\cancel{\partial} - \mathbf{m})q + G[\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^\dagger\Phi) + \text{h.c.}] - G\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^\dagger\langle\Phi\rangle) \\ &\quad + G_D \left[\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^2\Phi) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle^2)\text{tr}_3\Phi - \text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\Phi)\text{tr}_3\langle\Phi\rangle + \frac{1}{2}(\text{tr}_3\langle\Phi\rangle)^2\text{tr}_3\Phi + \text{h.c.} \right] \\ &\quad - 2G_D[\det_3\langle\Phi\rangle + \text{h.c.}] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{\text{res}} = G\text{tr}_3(\delta\Phi^\dagger\delta\Phi)$$

$$\begin{aligned} &+ G_D \left[\text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\delta\Phi^2) - \text{tr}_3(\langle\Phi\rangle\delta\Phi)\text{tr}_3\delta\Phi - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\delta\Phi^2)\text{tr}_3\langle\Phi\rangle + \frac{1}{2}\text{tr}_3\langle\Phi\rangle(\text{tr}_3\delta\Phi)^2 + \text{h.c.} \right] \\ &+ G_D \left[\frac{1}{3}\text{tr}_3(\delta\Phi^3) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\delta\Phi^2)\text{tr}_3\delta\Phi + \frac{1}{6}(\text{tr}_3\delta\Phi)^3 + \text{h.c.} \right] \end{aligned}$$

である。揺らぎ $\delta\Phi$ を含まない部分 \mathcal{L}_{MFA} は (近似的な) カイラル対称性 (2.18) が破れた後のクォーク場のラグランジアンに対応する。そこで、揺らぎ $\delta\Phi$ を含む項、すなわち揺らぎ $\delta\Phi$ の二次以上の項を無視する近似を行うと、それは元の四点、および六点フェルミ相互作用による質量生成の効果を真空期待値、あるいは平均場 $\langle\Phi\rangle$ として取り入れたような近似になっている。このような近似を (自己無頓着、あるいは自己整合的な) 平均場近似 ((Self-Consistent) Mean-Field Approximation, (SC)MFA) という。 \mathcal{L}_{MFA} は平均場近似を行なった後のラグランジアンという意味である。自己無頓着、あるいは自己整合的と付いている理由は後で述べる。MFA で無視した揺らぎ $\delta\Phi$ を含む部分 \mathcal{L}_{res} は、クォークの質量生成には寄与しなかった相互作用で、残留相互作用 (residual interaction) と呼ばれる。定義 (2.24) から明らかのように、揺らぎ $\delta\Phi$ は真空上のボゾンの励起を記述する演

算子であると予想できる。より詳しくは、クォーク場と反クォーク場を同じ位置に同時に生成、あるいは消滅させ、真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ を引いてカイラル凝縮による効果を取り入れることで、スピン統計的にボゾンとして振る舞う場の生成消滅を記述する。このことから、この揺らぎ $\delta\Phi$ はクォーク-反クォーク対から成る中間子に対応することがわかる。この中間子の生成消滅を記述すると期待される残留相互作用 \mathcal{L}_{res} を無視する平均場近似では、系のラグランジアンは \mathcal{L}_{MFA} であるが、生成された質量は (2.20) で定義されるクォークの複合場 Φ の真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ によって与えられている。しかし、期待値を取った後には、(次元や係数の違いを除いて) これは単なる古典的な多成分のスカラー場と擬スカラー場の線形和であるので、複合場 Φ の真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ を多成分のスカラー場と擬スカラー場の線形和 φ の真空期待値 $\langle \varphi \rangle$ であると考え直しても良い。つまり、

$$\langle 2\bar{q}^T(\lambda^{aT}/2)q \rangle = -\frac{g}{G}\langle \sigma^a \rangle$$

となるようなスカラー場 σ と

$$\langle 2\bar{q}^T i\gamma^5(\lambda^{aT}/2)q \rangle = -\frac{g}{G}\langle \phi^a \rangle$$

となるような擬スカラー場 ϕ^a との線型結合

$$\varphi^a = \sigma^a + i\phi^a$$

を考え、また、多成分場 φ を

$$\varphi = \varphi^a \frac{\lambda_a}{2}$$

と定義して、 \mathcal{L}_{MFA} の中の真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ を $\langle \varphi \rangle$ を用いて

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{\text{MFA}}|_{\langle \Phi \rangle \rightarrow \langle \varphi \rangle} \\ &= \bar{q}^T(i\cancel{\partial} - \mathbf{m})q - g[\text{tr}_3(\langle \varphi \rangle^\dagger \Phi) + \text{h.c.}] - \frac{g^2}{G}\text{tr}_3(\langle \varphi \rangle^\dagger \langle \varphi \rangle) \\ & \quad + \frac{g^2 G_D}{G^2} \left[\text{tr}_3(\langle \varphi \rangle^2 \Phi) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\langle \varphi \rangle^2)\text{tr}_3 \Phi - \text{tr}_3(\langle \varphi \rangle \Phi)\text{tr}_3 \langle \varphi \rangle + \frac{1}{2}(\text{tr}_3 \langle \varphi \rangle)^2 \text{tr}_3 \Phi + \text{h.c.} \right] \\ & \quad + \frac{2g^3 G_D}{G^3} [\det_3 \langle \varphi \rangle + \text{h.c.}] \end{aligned}$$

としても、得られる質量は同じである。ここで、複合場との関係性から φ は中間子を表す場である。係数の G は σ と ϕ 、そして φ の次元をスカラーの次元として適切な 1 にするために付けてあり、 g は新たに導入した無次元の (結合) 定数である。また、係数のマイナス符号は、中間子場の期待値が正となるように付けている。この置き換えによって、フェルミオンであるクォークのみの物理を、スカラー場または擬スカラー場である中間子とクォークの物理へと解釈し直すことができる。すなわち、クォークの質量生成をクォークの複合場 Φ の平均場 $\langle \Phi \rangle$ によるものとして考えるのではなく、中間子場 φ の平均場 $\langle \varphi \rangle$ によるものであると解釈できる。この観点から、 $\mathcal{L}_{\text{MFA}}|_{\langle \Phi \rangle \rightarrow \langle \varphi \rangle}$ は中間子場 φ を真空期待値 $\langle \varphi \rangle$ と励起 $\delta\varphi$ に分離して

$$\varphi = \langle \varphi \rangle + \delta\varphi$$

とした時の中間子場の励起 $\delta\varphi$ を無視した最低次の近似におけるラグランジアンであると解釈できる。したがって、このラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{MFA}}|_{\langle\Phi\rangle\rightarrow\langle\varphi\rangle}$ の $\langle\varphi\rangle$ を φ に置き換えることにより、中間子場の励起も含めた物理を記述するラグランジアンを復元することができる。これは、平均場近似において無視した残留相互作用項 \mathcal{L}_{res} の効果を取り入れたことに相当する。この操作をして得られるラグランジアンは

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{STDMFA}} &= \mathcal{L}_{\text{MFA}}|_{\langle\Phi\rangle\rightarrow\varphi} \\ &= \bar{q}^T(i\cancel{\partial} - \mathbf{m})q - g[\text{tr}_3(\varphi^\dagger\Phi) + \text{h.c.}] - \frac{g^2}{G}\text{tr}_3(\varphi^\dagger\varphi) \\ &\quad + \frac{g^2G_D}{G^2} \left[\text{tr}_3(\varphi^2\Phi) - \frac{1}{2}\text{tr}_3(\varphi^2)\text{tr}_3\Phi - \text{tr}_3(\varphi\Phi)\text{tr}_3\varphi + \frac{1}{2}(\text{tr}_3\varphi)^2\text{tr}_3\Phi + \text{h.c.} \right] \\ &\quad + \frac{2g^3G_D}{G^3}[\det_3\varphi + \text{h.c.}]\end{aligned}$$

である。これは平均場を時空間に依存する量子場とした近似であり、時空間依存する平均場近似 (Space-Time-Dependent Mean-Field Approximation, STDMFA) である。このラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{STDMFA}}$ を用いることで、クォークと中間子の物理を記述できるが、中間子場 φ はこの段階では運動項を持っておらず、ダイナミカルな場ではないことに注意すべきである。これは中間子場 φ が元を辿れば複合場 (またはクォーク-反クォーク対) Φ であってクォーク場とは独立な場ではなく、基本的な自由度ではないことを反映している。中間子場はクォーク場のダイナミクスにより生成される。中間子に注目し、中間子の運動を記述したい場合にはクォーク場を積分して、中間子のみ有効作用を作れば良い。その際、ラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{STDMFA}}$ を複合場 Φ を用いた形ではなく、 A を任意の多成分の行列として $\bar{q}^T A q$ というクォーク q と反クォーク \bar{q} の双線型なスカラーとして表記しておくことクォーク場での積分が簡単になるので、これを行うと

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{STDMFA}} &= \bar{q}^T \left[i\cancel{\partial} - \mathbf{m} - 2g(\sigma^T + i\gamma^5\phi^T) \right. \\ &\quad + \frac{4g^2G_D}{2G^2} \left\{ (\sigma^T)^2 - i\gamma^5\sigma^T\phi^T - i\gamma^5\phi^T\sigma^T - (\phi^T)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{g^2G_D}{2G^2} \left\{ (\sigma_a)^2 - 2i\gamma^5\sigma_a\phi^a - (\phi_a)^2 \right\} \\ &\quad - \frac{2\sqrt{6}g^2G_D}{2G^2} \left\{ \sigma_0\sigma^T - i\gamma^5\phi_0\sigma^T - \phi_0\phi^T - i\gamma^5\sigma_0\phi^T \right\} \\ &\quad \left. + \frac{3g^2G_D}{2G^2} \left\{ (\sigma_0)^2 - 2i\gamma^5\sigma_0\phi^0 - (\phi_0)^2 \right\} \right] q \\ &\quad - \frac{g^2}{2G} \left\{ (\sigma_a)^2 + (\phi_a)^2 \right\} + \frac{4g^3G_D}{3G^3}\text{tr}_3 \left\{ (\sigma^T)^3 - 3\sigma^T(\phi^T)^2 \right\} \\ &\quad - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{g^3G_D}{G^3} \left\{ \sigma_0(\sigma_a)^2 - 2\phi_0\sigma_a\phi^a - \sigma_0(\phi_a)^2 \right\} \\ &\quad + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{g^3G_D}{G^3} \left\{ (\sigma_0)^3 - 3\sigma_0(\phi_0)^2 \right\} \\ &= \bar{q}^T [i\cancel{\partial} - \Pi[\sigma, \phi]] q + C[\sigma, \phi]\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}_3(A\Phi) &= A^i_j \Phi^j_i = A^i_j \bar{q}^j (1 - \gamma^5) q_i = A^i_j \bar{q}_j (1 - \gamma^5) q^i \\ &= \bar{q}_j A_i^j (1 - \gamma^5) q^i = \bar{q}^T A^T (1 - \gamma^5) q\end{aligned}$$

と

$$\mathrm{tr}_3(\lambda_a^T \lambda_b^T) = \lambda_{aj}^i \lambda_{bi}^j = \lambda_a^j_i \lambda_b^i_j = \mathrm{tr}_3(\lambda_a \lambda_b) = \delta_{ab}$$

を用いた。また

$$\begin{aligned}\Pi[\sigma, \phi] &= \mathbf{m} + 2g (\sigma^T + i\gamma^5 \phi^T) \\ &\quad - \frac{4g^2 G_D}{2G^2} \left\{ (\sigma^T)^2 - i\gamma^5 \sigma^T \phi^T - i\gamma^5 \phi^T \sigma^T - (\phi^T)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{g^2 G_D}{2G^2} \left\{ (\sigma_a)^2 - 2i\gamma^5 \sigma_a \phi^a - (\phi_a)^2 \right\} \\ &\quad + \frac{2\sqrt{6}g^2 G_D}{2G^2} \left\{ \sigma_0 \sigma^T - i\gamma^5 \phi_0 \sigma^T - \phi_0 \phi^T - i\gamma^5 \sigma_0 \phi^T \right\} \\ &\quad - \frac{3g^2 G_D}{2G^2} \left\{ (\sigma_0)^2 - 2i\gamma^5 \sigma_0 \phi^0 - (\phi_0)^2 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C[\sigma, \phi] &= -\frac{g^2}{2G} \left\{ (\sigma_a)^2 + (\phi_a)^2 \right\} + \frac{4g^3 G_D}{3G^3} \mathrm{tr}_3 \left\{ (\sigma^T)^3 - 3\sigma^T (\phi^T)^2 \right\} \\ &\quad - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^3 G_D}{G^3} \left\{ \sigma_0 (\sigma_a)^2 - 2\phi_0 \sigma_a \phi^a - \sigma_0 (\phi_a)^2 \right\} \\ &\quad + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^3 G_D}{G^3} \left\{ (\sigma_0)^3 - 3\sigma_0 (\phi_0)^2 \right\}\end{aligned}$$

とした。場を積分するときには分配関数 Z が必要であり、

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\phi \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \cdot e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{\mathrm{STDMFA}}}$$

と定義される。クォーク場 q と反クォーク場 \bar{q} で積分すると

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\phi \cdot \mathrm{Det}_{3,\gamma,x} [(i\cancel{\partial}_x \mathbf{1}_3 - \Pi) \delta(x-y)] \cdot e^{i \int d^4x C} \quad (2.26)$$

を得る。ここで、フェルミオン場の積分の公式

$$\begin{aligned}\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \cdot e^{i \int d^4x \bar{\psi}(x) M(x) \psi(x)} &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \cdot e^{i \int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) M(x) \delta(x-y) \psi(y)} \\ &= \mathrm{Det}[M(x) \delta(x-y)]\end{aligned}$$

を用いた。ただし、最初の文字が大文字の Det は連続値を走る足 (添字) としての座標 x を含む全ての足に対する行列式である。具体的にどの足に対する行列式になっているかを明示的にするために、右下に添字を付けることがある。例えば、 $\mathrm{Det}_{3,\gamma,x}$ はカイラル

変換の 3×3 行列の足 i 、 γ 行列の足、すなわちスピノルの足 a 、そして座標 x についての行列式を意味する。より具体的には、 M をこれら全ての足を持つものとする、その成分が $M_j^{i,a,b}(x,y) = M^{i,a,x}_{j,b,y} = M^A_B$ というように元の足の組で定義される二つの足 $A = (i, a, x)$ 、 $B = (j, b, y)$ を持つような行列として扱い、行列式を定義する。ただし、これは数学的に厳密な定義ではなく、直感的な定義である。ここで、積分を実行する際に

$$\int d^4x \bar{\psi}(x) M(x) \psi(x) = \int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) M(x) \delta(x-y) \psi(y)$$

というように、 $\delta(x-y)$ を用いて座標を足に持つ行列とベクトルの積として表現し直したことに注意すべきである。 $\delta(x-y)$ は無限次元の単位行列 $\mathbf{1}_x$ の成分表示としての役割を果たし、

$$(\mathbf{1}_x)^x_y = \delta(x-y)$$

である。分配関数 Z を

$$Z = \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\phi \cdot \exp \left[i \left(-i \log \text{Det}_{3,\gamma,x} [(i\partial_x \mathbf{1}_3 - \Pi) \delta(x-y)] + \int d^4x C \right) \right]$$

というように、全て指数の肩に乗せるように整理すると、その肩が中間子場 σ 、 ϕ に対する作用 S_{meson} に相当し、

$$S_{\text{meson}} = -i \log \text{Det}_{3,\gamma,x} [(i\partial_x \mathbf{1}_3 - \Pi) \delta(x-y)] + \int d^4x C \quad (2.27)$$

であることがわかる。この作用は中間子場について最低次、すなわち tree レベルの有効作用である。この作用を中間子場 σ^a 、 ϕ^a で汎関数微分して、中間子場を時空に依存しない古典場、すなわち真空期待値 $\langle \sigma \rangle$ 、 $\langle \phi \rangle$ で置き換えることで中間子場の逆プロパゲータや頂点関数などを求められる。しかし、代入する中間子場の真空期待値 $\langle \sigma \rangle$ 、 $\langle \phi \rangle$ 、あるいはカイラル凝縮 $\langle \Phi \rangle$ の値をまだ求めていないのでこれを求めてやる必要がある。真空期待値は一般に、(有効)作用 S_{eff} から得られる有効ポテンシャル V_{eff} の最低点を与える値として求まる。しかし、有効ポテンシャル V_{eff} を評価する前に、まずは対称性から真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ 、あるいは $\langle \sigma \rangle$ 、 $\langle \phi \rangle$ の大まかな形を求め、そのあとに有効ポテンシャルを評価しよう。まずカレントクォーク質量 m が 0 のカイラル極限を考える。この場合には、カイラル対称性 (2.18) が厳密に成り立つ。ベクターライクなゲージ相互作用をする理論においては大域的でベクターライクな対称性は破れないことがヴァファ-ウィッテンにより示されている [17]。したがって、真空は対称性が破れたあとでも $SU(3)_V$ の対称性は満たさなければならないので、真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ は非対角成分を持たず、さらに各成分の値は同じである。すなわち

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \bar{u}(1-\gamma^5)u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \bar{d}(1-\gamma^5)d \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \bar{s}(1-\gamma^5)s \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}^T (1-\gamma^5) q \rangle \mathbf{1}_3$$

というように単位行列 $\mathbf{1}_3$ の定数倍の形に限定される。さらに、同じくヴァファ-ウィッテンにより、パリティ対称性を持つベクターライクなゲージ理論においてはパリティ対称性

は自発的には破れないことが知られている [18] ので、パリティ対称性を持つ QCD の元ではパリティが奇である γ^5 を含む部分の真空期待値は 0 になる。すなわち、

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \bar{u}u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \bar{d}d \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \bar{s}s \rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \langle \bar{q}^T q \rangle \mathbf{1}_3 \quad (2.28)$$

の形に限定される。ただし、ここでは NJL 模型がベクターライクなゲージ理論である QCD の低エネルギー有効模型だということを用いて真空の形を決定したのであり、NJL のラグランジアン (2.19) だけからはこのようなことは言えない。もし NJL 模型を用いる時に高エネルギーではベクターライクなゲージ理論になっていると仮定しない場合は非対角成分も 0 でないとして計算をするべきであり、パリティが奇の部分も 0 でないとして計算すべきである。奇パリティの部分が 0 でない場合の計算は γ^5 の性質を用いることを除いて、以下で行う方法と同様に計算できる。ここまでは、カレントクォーク質量 m を 0 にし、カイラル対称性 (2.18) が厳密に成り立つカイラル極限で考えていた。しかし、実際にはカレントクォーク質量 m は 0 でなく、カイラル対称性 (2.18) は近似的な対称性であるため、真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ も厳密には (2.28) の形にはならない。しかし、カレントクォーク質量 m は対角的であるため、ゲルマン行列のうちの対角的な生成子 $\lambda_3/2$ 、 $\lambda_8/2$ で生成されるベクターライクな変換に対してラグランジアン \mathcal{L}_{NJL} は不変である。上で述べたように、ベクターライクな大域的対称性はベクターライクなゲージ理論の元では自発的に破れないので、近似的カイラル対称性 (2.18) が破れたあとであってもこの対称性は残る。これは真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ が対角的な形で保持されることを意味し、

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \langle \bar{u}u \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \bar{d}d \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \bar{s}s \rangle \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

の形まで制限される。これを中間子場 σ^a 、 ϕ^a で書き換えると

$$\langle \sigma^0 \rangle = -\frac{G}{g} \langle \bar{q}^T \lambda^{0T} q \rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{G}{g} (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle + \langle \bar{s}s \rangle)$$

$$\langle \sigma^3 \rangle = -\frac{G}{g} \langle \bar{q}^T \lambda^{3T} q \rangle = -\frac{G}{g} (\langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{d}d \rangle)$$

$$\langle \sigma^8 \rangle = -\frac{G}{g} \langle \bar{q}^T \lambda^{8T} q \rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}} \frac{G}{g} (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle - 2\langle \bar{s}s \rangle)$$

$$\langle \sigma^a \rangle = -\frac{G}{g} \langle \bar{q}^T \lambda^{aT} q \rangle = 0 \quad \text{for } a = 1, 2, 4, 5, 6, 7$$

$$\langle \phi^a \rangle = -\frac{G}{g} \langle \bar{q}^T i\gamma^5 \lambda^{aT} q \rangle = 0$$

となり、これから

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^a \rangle \frac{\lambda_a}{2} = 0$$

$$\langle \varphi \rangle = \langle \sigma \rangle = \langle \sigma^a \rangle \frac{\lambda_a}{2} = -\frac{G}{g} \langle \Phi \rangle$$

を得る。真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ の形が求まったので、これを用いて真空期待値 $\langle \bar{u}u \rangle$ 、 $\langle \bar{d}d \rangle$ 、 $\langle \bar{s}s \rangle$ 、または $\langle \sigma^0 \rangle$ 、 $\langle \sigma^3 \rangle$ 、 $\langle \sigma^8 \rangle$ を求めよう。一般に、真空期待値は有効ポテンシャルの最低点での値として求まるので、一旦、ここで有効ポテンシャルについて一般的に議論しよう。一般に場の組を ϕ とし、その有効作用を $S_{\text{eff}}[\phi]$ とする。真空期待値は時空間に依存しないので、時空間に依存しない古典場 $\bar{\phi}$ で表されるようなポテンシャルを評価することになる。この時空間に依存しない古典場 $\bar{\phi}$ を有効作用 $S_{\text{eff}}[\phi]$ に代入することで、場の微分、すなわち運動項に当たる部分が0になり、自動的にポテンシャル項に相当する部分のみ残る。この残るポテンシャル項の被積分関数が有効ポテンシャル V_{eff} である。すなわち、

$$S_{\text{eff}}[\phi = \bar{\phi}] = - \int d^4x V_{\text{eff}}[\bar{\phi}]$$

である。 $V_{\text{eff}}[\bar{\phi}]$ は時空間に依存しないので四次元体積積分の外に出すことができ、したがって

$$V_{\text{eff}}[\bar{\phi}] = - \frac{S_{\text{eff}}[\phi = \bar{\phi}]}{\int d^4x}$$

が得られる。一般の有効ポテンシャルを定義したので、(2.27) の中間子場の有効作用 S_{meson} から有効ポテンシャル V_{meson} を導こう。時空間に依存しない古典的な中間子場を $\bar{\sigma}^a$ 、 $\bar{\phi}^a$ とする。上で行なった真空期待値に対する対称性による制限から $\langle \phi \rangle = 0$ と決まっているので、

$$\bar{\phi} = 0$$

として良い。また、同様に、

$$\bar{\sigma}^0 = \sqrt{\frac{2}{3}} (\bar{\sigma}^1_1 + \bar{\sigma}^2_2 + \bar{\sigma}^3_3)$$

$$\bar{\sigma}^3 = (\bar{\sigma}^1_1 - \bar{\sigma}^2_2)$$

$$\bar{\sigma}^8 = \sqrt{\frac{1}{3}} (\bar{\sigma}^1_1 + \bar{\sigma}^2_2 - 2\bar{\sigma}^3_3)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}^3_3 \end{pmatrix}$$

として良い。これらを $\Pi[\sigma, \phi]$ 、 $C[\sigma, \phi]$ に代入すると

$$\begin{aligned}
\bar{\Pi}[\bar{\sigma}] \mathbf{1}_\gamma &= \Pi[\sigma = \bar{\sigma}, \phi = \bar{\phi} = 0] \\
&= \left[\mathbf{m} + 2g\bar{\sigma}^\top - \frac{4g^2G_D}{2G^2} (\bar{\sigma}^\top)^2 + \frac{g^2G_D}{2G^2} (\bar{\sigma}_a)^2 + \frac{2\sqrt{6}g^2G_D}{2G^2} \bar{\sigma}_0\bar{\sigma}^\top - \frac{3g^2G_D}{2G^2} (\bar{\sigma}_0)^2 \right] \mathbf{1}_\gamma \\
&= \left[\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} + 2g \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^1_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}^3_3 \end{pmatrix} - \frac{2g^2G_D}{G^2} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^2_2\bar{\sigma}^3_3 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^3_3\bar{\sigma}^1_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma}^1_1\bar{\sigma}^2_2 \end{pmatrix} \right] \mathbf{1}_\gamma \\
&= \begin{pmatrix} \bar{\Pi}_1[\bar{\sigma}] & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\Pi}_2[\bar{\sigma}] & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\Pi}_3[\bar{\sigma}] \end{pmatrix} \mathbf{1}_\gamma \tag{2.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}[\bar{\sigma}] &= C[\sigma = \bar{\sigma}, \phi = \bar{\phi} = 0] \\
&= -\frac{g^2}{2G} (\bar{\sigma}_a)^2 + \frac{4g^3G_D}{3G^3} \text{tr}_3 [(\bar{\sigma}^\top)^3] - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^3G_D}{G^3} \bar{\sigma}_0 (\bar{\sigma}_a)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{g^3G_D}{G^3} (\bar{\sigma}_0)^3 \\
&= -\frac{g^2}{G} [(\bar{\sigma}^1_1)^2 + (\bar{\sigma}^2_2)^2 + (\bar{\sigma}^3_3)^2] + \frac{4g^3G_D}{G^3} \bar{\sigma}^1_1 \bar{\sigma}^2_2 \bar{\sigma}^3_3 \tag{2.31}
\end{aligned}$$

を得る。ただし、

$$\bar{\Pi}_1[\bar{\sigma}] = m_1 + 2g\bar{\sigma}^1_1 - \frac{2g^2G_D}{G^2} \bar{\sigma}^2_2 \bar{\sigma}^3_3 \tag{2.32}$$

$$\bar{\Pi}_2[\bar{\sigma}] = m_2 + 2g\bar{\sigma}^2_2 - \frac{2g^2G_D}{G^2} \bar{\sigma}^3_3 \bar{\sigma}^1_1 \tag{2.33}$$

$$\bar{\Pi}_3[\bar{\sigma}] = m_3 + 2g\bar{\sigma}^3_3 - \frac{2g^2G_D}{G^2} \bar{\sigma}^1_1 \bar{\sigma}^2_2 \tag{2.34}$$

とした。ここで $\bar{\Pi}$ がフレーバーの 3×3 行列に関して対角的になっていることで、後の計算が簡単になる。(2.27) の有効作用 S_{meson} にこれらを代入すると

$$\begin{aligned}
\bar{S}_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= S_{\text{meson}}[\sigma = \bar{\sigma}, \phi = \bar{\phi} = 0] \\
&= -i \log \text{Det}_{3,\gamma,x} [(i\bar{\phi}_x \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma) \delta(x-y)] + \int d^4x \bar{C}
\end{aligned}$$

となるが、第一項の連続変数の足に対する行列式がよくわからないので、まず公式

$$\log \text{Det} M = \text{Tr} \text{Log} M$$

を用いてトレースに直すことを考える。ここで、行列式 Det の場合と同様に、最初の文字が大文字の Tr 、 Log はそれぞれ、連続値を走る足 (添字) としての座標 x を含む全ての足の組を足とする行列のトレース、対数として定義される。また、具体的にどの足に対する

トレース、または対数であるかを明示的にするために、右下に添字を付けることがある。より具体的に、成分が $M^i_j{}^a_b(x, y) = M^{i,a,x}{}_{j,b,y} = M^A_B$ というように元の足の組で定義される二つの足 $A = (i, a, x)$ 、 $B = (j, b, y)$ を持つような行列 M の対数は

$$(e^{\text{Log}M})^A{}_B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\text{Log}M)^n \right)^A{}_B = M^A{}_B$$

を満たすものとして定義される。これを用いると

$$\bar{S}_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] = -i\text{Tr}_{3,\gamma,x}\text{Log}_{3,\gamma,x}[(i\partial_x\mathbf{1}_3 - \bar{\Pi}\mathbf{1}_\gamma)\delta(x-y)] + \int d^4x\bar{C}$$

となる。ここで、行列 $(i\partial_x\mathbf{1}_3 - \bar{\Pi}\mathbf{1}_\gamma)\delta(x-y)$ もであるが、座標 x を足に持ち、物理的な作用に含まれる行列 $A(x, y)$ は、局所場の理論においては必ず成分が $A^a_b(x)\delta(x-y)$ というように座標の足を一つしか持たない部分 $A^a_b(x)$ と座標の足を二つ持つ単位行列の成分 $\delta(x-y)$ の積の形になる。この形から、行列 $A^a_b(x)\delta(x-y)$ は対角的であると言える。行列 $A^a_b(x)$ は基本的に逆プロパゲーターであり微分を含むので、一般的に証明するのは難しいが、具体的に $A^a_b(x)$ の形が与えられれば、部分積分によって

$$\begin{aligned} & \int d^4y A^a_b(x)\delta(x-y)A^b_c(y)\delta(y-z) \\ &= \int d^4y A^a_b(x)A^b_c(x)\delta(x-y)\delta(y-z) \\ &= A^a_b(x)A^b_c(x)\delta(x-z) \end{aligned}$$

が示せて、 $A^a_b(x)\delta(x-y)$ が対角行列であると示せる。さらに、行列の対数の定義を用いて示せるように対角行列の対数は元の行列の各対角成分をそれぞれの対数にしたものになる、つまり

$$\text{Log}[\text{diag}(a_1, \dots, a_n)] = \text{diag}(\log[a_1], \dots, \log[a_n])$$

となるので、

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{x,a}\text{Log}_{x,a}[A(x)\delta(x-y)] &= \text{Tr}_{x,a}(\log_a[A(x)]\delta(x-y)) \\ &= \text{Tr}_x(\text{tr}_a[\log_a A(x)]\delta(x-y)) = \text{Tr}_x(\log[\det_a A(x)]\delta(x-y)) \\ &= \text{Tr}_x\text{Log}_x([\det_a A(x)]\delta(x-y)) = \text{Tr}_x\text{Log}_x\det_a A(x, y) \end{aligned}$$

を得る。これを用いると

$$\bar{S}_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] = -i\text{Tr}_x(\log[\det_{3,\gamma}(i\partial_x\mathbf{1}_3 - \bar{\Pi}\mathbf{1}_\gamma)]\delta(x-y)) + \int d^4x\bar{C}$$

を得る。次に、微分があるとわかりにくいので、連続変数における恒等演算子 $\mathbf{1}_x$ 、またはデルタ関数 $\delta(x-y)$ をフーリエ展開をして微分を消すと

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= -i\text{Tr}_x \left(\log[\det_{3,\gamma}(i\partial_x\mathbf{1}_3 - \bar{\Pi}\mathbf{1}_\gamma)] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik\cdot(x-y)} \right) + \int d^4x\bar{C} \\ &= -i\text{Tr}_x \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k\mathbf{1}_3 - \bar{\Pi}\mathbf{1}_\gamma)] e^{-ik\cdot(x-y)} \right) + \int d^4x\bar{C} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\log[\det_{3,\gamma}(i\partial_x \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)]$ は微分を含む時空依存性のない演算子であるため、 $e^{-ik \cdot x}$ に掛かった時には微分 ∂ を運動量 k に置き換えるだけで良いことを用いた。次に、トレース Tr_x は座標を足とする行列のトレースであるので、行と列の等しい対角成分の和で定義され、

$$\text{Tr}_x A(x, y) = \int d^4x \int d^4y \delta(x - y) A(x, y)$$

となる。これを用いると

$$\begin{aligned} \bar{S}_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= -i \int d^4x \int d^4y \delta(x - y) \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] e^{-ik \cdot (x-y)} \right) + \int d^4x \bar{C} \\ &= -i \int d^4x \left(\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] \right) + \int d^4x \bar{C} \\ &= \left[\int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] + \bar{C} \right] \int d^4x \\ &= -V_{\text{meson}} \int d^4x \end{aligned}$$

すなわち、有効ポテンシャル

$$V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] - \bar{C}$$

を得る。あとはフレーバーの変換の行列の足とガンマ行列の足についての行列式を計算すれば普通の数の積分になる。まず、ガンマ行列を消去すると、

$$\begin{aligned} V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] + i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] - \bar{C} \\ &= i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] + i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(-k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] - \bar{C} \\ &= i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma) \det_{3,\gamma}(-k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] - \bar{C} \\ &= i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma) (-k \mathbf{1}_3 - \bar{\Pi} \mathbf{1}_\gamma)] - \bar{C} \\ &= i \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \log[\det_{3,\gamma}(-k^2 \mathbf{1}_3 \mathbf{1}_\gamma + \bar{\Pi}^2 \mathbf{1}_\gamma)] - \bar{C} \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) = \int_{\infty}^{-\infty} d(-k) f(-k) = \int_{\infty}^{-\infty} -dk f(-k) = \int_{-\infty}^{\infty} dk f(-k)$$

と対数の性質

$$\log[a] + \log[b] = \log[ab]$$

と行列式の性質

$$\det(A)\det(B) = \det(AB)$$

とガンマ行列の定義

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

を用いた。さらに、再びトレースと行列式の性質、そして、対角行列の対数の性質を用いると

$$\begin{aligned} V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= i\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_{3,\gamma} \log_{3,\gamma}[-k^2 \mathbf{1}_3 \mathbf{1}_\gamma + \bar{\Pi}^2 \mathbf{1}_\gamma] - \bar{C} \\ &= i\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_{3,\gamma} \log_3[-k^2 \mathbf{1}_3 + \bar{\Pi}^2] \mathbf{1}_\gamma - \bar{C} \\ &= 2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_3 \log_3[-k^2 \mathbf{1}_3 + \bar{\Pi}^2] - \bar{C} \end{aligned}$$

を得る。 $\bar{\Pi}$ は (2.30) のように対角行列であり、対角行列の対数の性質を用いて

$$\begin{aligned} V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= 2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_3 \log_3 \text{diag}([-k^2 + \bar{\Pi}_1^2], [-k^2 + \bar{\Pi}_2^2], [-k^2 + \bar{\Pi}_3^2]) - \bar{C} \\ &= 2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{tr}_3 \text{diag}(\log[-k^2 + \bar{\Pi}_1^2], \log[-k^2 + \bar{\Pi}_2^2], \log[-k^2 + \bar{\Pi}_3^2]) - \bar{C} \\ &= 2i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^3 \log[-k^2 + \bar{\Pi}_i^2] - \bar{C} \end{aligned}$$

を得る。あとは積分を実行すればよいが、簡単のため、ユークリッド化して計算を行う。すなわち、

$$ik_{\text{E}}^0 = k^0$$

$$k_{\text{E}}^i = k^i$$

$$\eta_{\text{E}}^{\mu\nu} = -2\delta^{\mu\nu}$$

を用いて、

$$\begin{aligned} V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= 2i \int \frac{dk^0 d^3k}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^3 \log[-k^2 + \bar{\Pi}_i^2] - \bar{C} \\ &= -2 \int \frac{dk_{\text{E}}^0 d^3k_{\text{E}}}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^3 \log[k_{\text{E}}^2 + \bar{\Pi}_i^2] - \bar{C} \\ &= -2 \int \frac{d^4k_{\text{E}}}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^3 \log[k_{\text{E}}^2 + \bar{\Pi}_i^2] - \bar{C} \end{aligned}$$

とする。ここで、本来ならば、 k^0 がもともと実軸上の積分の変数としていたので、 k_E は虚軸上の積分の変数になるが、今の場合は実軸上の積分に直すことができ、 $d^4 k_E$ の積分は全て実数の積分になっている。そこで、四次元の極座標表示を用いれば微小体積要素 $d^4 k_E$ は

$$d^4 k_E = |k_E|^3 d|k_E| \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi d\chi$$

とかけ、

$$\begin{aligned} \int f(|k_E|) d^4 k_E &= \int f(|k_E|) |k_E|^3 d|k_E| \sin^2 \theta \sin \phi d\theta d\phi d\chi \\ &= \int f(|k_E|) |k_E|^3 d|k_E| \times 2\pi^2 = \pi^2 \int f(|k_E|) k_E^2 d(k_E^2) \end{aligned}$$

を得る。これを用いれば

$$\begin{aligned} V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] &= -2 \int \frac{d(k_E^2)}{16\pi^2} \sum_{i=1}^3 k_E^2 \log[k_E^2 + \bar{\Pi}_i^2] - \bar{C} \\ &= -\sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{16\pi^2} (k_E^2)^2 \log[k_E^2 + \bar{\Pi}_i^2] \right]_0^{\Lambda_{\text{QCD}}^2} + \sum_{i=1}^3 \int_0^{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \frac{d(k_E^2)}{16\pi^2} (k_E^2)^2 \frac{1}{k_E^2 + \bar{\Pi}_i^2} - \bar{C} \\ &= -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{16\pi^2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 \log[\Lambda_{\text{QCD}}^2 + \bar{\Pi}_i^2] + \sum_{i=1}^3 \int_{\bar{\Pi}_i^2}^{\Lambda_{\text{QCD}}^2 + \bar{\Pi}_i^2} \frac{d(l^2)}{16\pi^2} \left(l^2 - 2\bar{\Pi}_i^2 + \frac{\bar{\Pi}_i^4}{l^2} \right) - \bar{C} \\ &= -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{16\pi^2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 \log[\Lambda_{\text{QCD}}^2 + \bar{\Pi}_i^2] \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1}{2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 - \bar{\Pi}_i^2 \Lambda_{\text{QCD}}^2 + \bar{\Pi}_i^4 \log \left[\frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2 + \bar{\Pi}_i^2}{\bar{\Pi}_i^2} \right] \right) - \bar{C} \\ &= -\sum_{i=1}^3 \frac{1}{16\pi^2} \left(\Lambda_{\text{QCD}}^4 \log \left[1 + \frac{\bar{\Pi}_i^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right] - \bar{\Pi}_i^4 \log \left[1 + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\bar{\Pi}_i^2} \right] + \bar{\Pi}_i^2 \Lambda_{\text{QCD}}^2 \right) - \bar{C} \\ &\quad - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{16\pi^2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 \log[\Lambda_{\text{QCD}}^2] + \frac{1}{32\pi^2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 \end{aligned}$$

となる。ここで、ユークリッド化された運動量 k_E の積分範囲は $(-\infty, \infty)$ のままだと発散するので、有限の値で打ち切り (cut-off して)、 $(-\Lambda_{\text{QCD}}, \Lambda_{\text{QCD}})$ とした。これは数学的には単なる正則化 (regularization) であるが、物理的には、クォークを積分して見えなくするということが低エネルギーでのみ有効であり、 Λ_{QCD} 以上のエネルギーを持つ状態を考慮してはいけないことを表している。ここで、

$$I_0(m) = \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \log[\det_\gamma(k - m\mathbf{1}_\gamma)]$$

とおくと

$$\begin{aligned}
I_0(m) &= 2 \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \log[-k^2 + m^2] = 2 \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \log[k_E^2 + m^2] = 2 \int \frac{d(k_E^2)}{16\pi^2} k_E^2 \log[k_E^2 + M_i^2] \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \left(\Lambda_{\text{QCD}}^4 \log \left[1 + \frac{m^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right] - m^4 \log \left[1 + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{m^2} \right] + m^2 \Lambda_{\text{QCD}}^2 \right) \\
&\quad + \frac{1}{16\pi^2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 \log[\Lambda_{\text{QCD}}^2] - \frac{1}{32\pi^2} \Lambda_{\text{QCD}}^4 \\
&= \frac{1}{16\pi^2} \left(\Lambda_{\text{QCD}}^4 \log \left[1 + \frac{m^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right] - m^4 \log \left[1 + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{m^2} \right] + m^2 \Lambda_{\text{QCD}}^2 \right) + I_0(0)
\end{aligned}$$

となり、

$$V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] = - \sum_{i=1}^3 I_0(\bar{\Pi}_i) - \bar{C} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{16\pi^2} \left(\Lambda_{\text{QCD}}^4 \log \left[1 + \frac{\bar{\Pi}_i^2}{\Lambda_{\text{QCD}}^2} \right] - \bar{\Pi}_i^4 \log \left[1 + \frac{\Lambda_{\text{QCD}}^2}{\bar{\Pi}_i^2} \right] + \bar{\Pi}_i^2 \Lambda_{\text{QCD}}^2 \right) - \bar{C} \\
&\quad (2.36)
\end{aligned}$$

$$- \sum_{i=1}^3 I_0(0) \quad (2.37)$$

を得る。最後の項は $\bar{\Pi}$ に依存せず、したがって $\bar{\sigma}$ に依存しないので、真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ を求める際には無視して良い。この有効ポテンシャル V_{meson} の最小値を与える $\bar{\sigma}$ の値が真空期待値 $\langle \sigma \rangle$ である。すなわち、 $\langle \sigma \rangle$ は

$$V_{\text{meson}}[\langle \sigma \rangle] \leq V_{\text{meson}}[\bar{\sigma}] \quad \forall \bar{\sigma}$$

を満たす。この条件が満たされる必要条件是停留性条件で、

$$\frac{\partial V_{\text{meson}}}{\partial \sigma^i} = 0$$

である。時空に依存する平均場近似の元でのラグランジアン $\mathcal{L}_{\text{STDMFA}}$ の形と $\bar{\Pi}$ 、 $\bar{\Pi}_i$ の定義から $\bar{\Pi}_i[\langle \sigma \rangle]$ はフレーバーが i のクォークの質量、 $\bar{\Pi}[\langle \sigma \rangle]$ は質量行列になっている。そこで

$$M_i = \bar{\Pi}_i[\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle]$$

$$\mathbf{M} = \bar{\Pi}[\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle]$$

と書こう。また、

$$C_0 = \bar{C}[\bar{\sigma} = \langle \sigma \rangle]$$

と置く。行列式の微分が余因子行列と行列の微分の積のトレースになるという公式

$$\frac{d\det A(x)}{dx} = \text{tr} \tilde{A} \frac{dA(x)}{dx}$$

と余因子行列が行列式と逆行列の積になること

$$\tilde{A} = \det[A]A^{-1}$$

から、

$$\frac{d\log\det A(x)}{dx} = \text{tr} A^{-1} \frac{dA(x)}{dx}$$

となるので、この公式と停留性の条件から

$$\begin{aligned} M_1 - m_1 &= 2g\langle\sigma\rangle^1_1 - \frac{2g^2G_D}{G^2}\langle\sigma\rangle^2_2\langle\sigma\rangle^3_3 \\ &= 2g\frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_1} \\ &\quad - \frac{2g^2G_D}{G^2}\left[\frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_2}\langle\sigma\rangle^3_3 + \frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_3}\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^2_2\langle\sigma\rangle^3_3\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 - m_2 &= 2g\langle\sigma\rangle^2_2 - \frac{2g^2G_D}{G^2}\langle\sigma\rangle^3_3\langle\sigma\rangle^1_1 \\ &= 2g\frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_2} \\ &\quad - \frac{2g^2G_D}{G^2}\left[\frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_3}\langle\sigma\rangle^1_1 + \frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_1}\langle\sigma\rangle^3_3 - \langle\sigma\rangle^3_3\langle\sigma\rangle^1_1\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 - m_3 &= 2g\langle\sigma\rangle^3_3 - \frac{2g^2G_D}{G^2}\langle\sigma\rangle^1_1\langle\sigma\rangle^2_2 \\ &= 2g\frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_3} \\ &\quad - \frac{2g^2G_D}{G^2}\left[\frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_1}\langle\sigma\rangle^2_2 + \frac{G}{g}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\text{tr}_\gamma\frac{i}{\not{k}-\Pi_2}\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^1_1\langle\sigma\rangle^2_2\right] \end{aligned}$$

を得る。これは、クォークの質量 \mathbf{M} のうち元々持っていたカレントクォーク質量 \mathbf{m} 以外の部分 $\mathbf{M} - \mathbf{m}$ はクォーク凝縮 $\langle\bar{q}q^T\rangle = -(g/G)\langle\sigma\rangle$ の値によって決まるが、その値はまた、クォーク凝縮の効果により質量を得たクォーク自身のループにより決まることを表している。すなわち、クォークの質量は、その質量を持ったクォーク自身のループにより自己整合的、あるいは自己無頓着 (Self-Consistent) に生成される。このような条件を南部-ヨナ-ラシニオの自己無頓着条件 (Self-Consistency condition) と呼ばれる。自己無頓着平均場近似の自己無頓着とは、このような意味である。この時、時空に依存しない平均場近似におけるクォーク場のラグランジアン \mathcal{L}_{MFA} は

$$\mathcal{L}_{\text{MFA}} = \bar{q}^T(i\not{\partial} - \mathbf{M}\mathbf{1}_\gamma)q + C_0$$

となり、実際に M がクォークの質量となっていることがわかる。この、クォーク自身のループの効果によって生成されるクォークの質量 M や M_i を構成子質量 (constituent mass) と呼ぶ。

真空やクォークの質量生成について議論したので、続いてその真空上の励起である中間子の物理について議論する。中間子の作用は (2.27) であるが、微分は第一項にのみ含まれるので、中間子場の運動項はこの第一項から出てくる。すなわち、クォークのループを通して中間子の運動項は出てくる。ここで、後のためにこの第一項に関連していくつか記法を導入する。まず、第一項の $(i\partial\mathbf{1}_3 - \Pi)\delta(x - y)$ を

$$\mathbf{L}[\sigma, \phi](x, y) = (i\partial_x\mathbf{1}_3 - \Pi[\sigma, \phi](x))\delta(x - y)$$

と置く。この演算子 (行列) の逆を $\mathbf{S}[\sigma, \phi]$ と置く。すなわち、 \mathbf{S} は

$$\mathbf{L}\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{L} = \mathbf{1}_x\mathbf{1}_3\mathbf{1}_\gamma$$

であり、言い換えると

$$\mathbf{S} = \mathbf{L}^{-1}$$

である。 $\sigma = \langle\sigma\rangle$ 、 $\phi = \langle\phi\rangle = 0$ の下では

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0(x, y) &= \mathbf{L}[\sigma = \langle\sigma\rangle, \phi = 0](x, y) = (i\partial_x\mathbf{1}_3 - \mathbf{M}\mathbf{1}_\gamma)\delta(x - y) \\ &= \text{diag}(i\partial_x - M_1\mathbf{1}_\gamma, i\partial_x - M_2\mathbf{1}_\gamma, i\partial_x - M_3\mathbf{1}_\gamma)\delta(x, y) \end{aligned}$$

となり、これはクォーク場 q に対する逆プロパゲーター (行列) である。この時、 \mathbf{S} は定義から q のプロパゲーター (行列) となり、その (x, y) 成分は

$$\begin{aligned} S_0(x, y) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k\mathbf{1}_3 - \mathbf{M}\mathbf{1}_\gamma} e^{-ik\cdot(x-y)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{diag} \left(\frac{1}{k - M_1\mathbf{1}_\gamma}, \frac{1}{k - M_2\mathbf{1}_\gamma}, \frac{1}{k - M_3\mathbf{1}_\gamma} \right) e^{-ik\cdot(x-y)} \end{aligned}$$

となる。一行目の表現は二行目の表現の略記である。これらを用いて中間子の物理を議論する。物理的な質量はプロパゲーターの分母が0になるような四元運動量の二乗のルートで定義される。言い換えると、運動量表示の逆プロパゲーターが0になるような四元運動量のノルムである。そこで、中間子場の逆プロパゲーターを求めよう。座標表示の逆プロパゲーターは座標表示での中間子場で中間子場の作用を二回汎関数微分すると求まる。同様に、運動量表示の逆プロパゲーターは運動量表示での中間子場で中間子場の作用を二回汎関数微分すると求まる。運動量表示での擬スカラー場の逆プロパゲーターは、

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\phi, ab}^{-1}(p, q) &= \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} S_{\text{meson}} \Big|_{\text{VEV}} = \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \left[-i \log \text{Det}_{x, 3, \gamma} \mathbf{L} + \int d^4x C \right] \Big|_{\text{VEV}} \\ &= -i \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \log \text{Det}_{x, 3, \gamma} \mathbf{L} \Big|_{\text{VEV}} + \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \int d^4x C \Big|_{\text{VEV}} \end{aligned}$$

を計算することで得られる。ただし、 $|_{\text{VEV}}$ は汎関数微分を全て行なった後で中間子場に真空期待値を代入することを表す。ここで、第一項を計算するのにまずは行列式の微分を考える必要がある。一般に、ある変数 t に依存するある行列 A の余因子行列を \tilde{A} とすると、

$$\frac{d}{dt} \det A = \text{tr} \left[\frac{dA}{dt} \tilde{A} \right]$$

が成り立つ。さらに、 A の行列式 $\det A$ が 0 でなく、 A が逆行列 A^{-1} を持つとき

$$\tilde{A} = \det[A] A^{-1}$$

であるので、

$$\frac{d}{dt} \log \det A = \frac{1}{\det A} \text{tr} \left[\frac{dA}{dt} \det[A] A^{-1} \right] = \text{tr} \left[\frac{dA}{dt} A^{-1} \right]$$

を得る。これを用いると作用 S_{meson} の第一項に対する一階の汎関数微分は計算できる。二階汎関数微分については一階汎関数微分により現れた逆行列 $\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{S}$ の汎関数微分を計算しなければならないので、逆行列の微分についての一般論を述べる。逆行列の定義から行列 A に対して

$$A^{-1} A = \mathbf{1}$$

であるが、単位行列 $\mathbf{1}$ の微分は 0 であるので、

$$0 = \frac{d}{dt} \mathbf{1} = \frac{dA^{-1}}{dt} A + A^{-1} \frac{dA}{dt}$$

となり、

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1} \frac{dA}{dt} A^{-1}$$

を得る。 A が連続変数の足を持ち、その成分が $A(x, y)$ である行列の場合は、

$$\frac{dA^{-1}}{dt}(x, y) = \int du \int dv \left[-A^{-1}(x, u) \frac{dA}{dt}(u, v) A^{-1}(v, y) \right]$$

となる。これらを用いると、擬スカラー場の運動量表示での逆プロパゲーターは

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\phi, ab}^{-1}(p, q) &= -i \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \text{Tr}_{x, 3, \gamma} \left[\left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{L} \right) \mathbf{S} \right] \Big|_{\text{VEV}} + \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \int d^4 x C \Big|_{\text{VEV}} \\ &= -i \text{Tr}_{x, 3, \gamma} \left[\left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{L} \right) \mathbf{S} + \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{L} \right) \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S} \right) \right] \Big|_{\text{VEV}} \\ &\quad + \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \int d^4 x C \Big|_{\text{VEV}} \\ &= -i \text{Tr}_{x, 3, \gamma} \left[\left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{L} \right) \mathbf{S} - \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{L} \right) \mathbf{S} \left(\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{L} \right) \mathbf{S} \right] \Big|_{\text{VEV}} \\ &\quad + \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}^b(q)} \int d^4 x C \Big|_{\text{VEV}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 \mathbf{L} のうち中間子場に依存するのは $-\Pi(x)\delta(x-y)$ の項なので、

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{\phi,ab}^{-1}(p,q) &= i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left[\left(\frac{\delta^2\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)\delta\tilde{\phi}^b(q)}\delta(x-y) \right) \mathbf{S} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^b(q)}\delta(x-y) \right) \mathbf{S} \left(\frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)}\delta(x-y) \right) \mathbf{S} \right] \Big|_{\text{VEV}} \\
&\quad + \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \int d^4x C(x) \Big|_{\text{VEV}} \\
&= i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left[\frac{\delta^2\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)\delta\tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{S}(x,y) \right. \\
&\quad \left. + \int d^4z \frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{S}(x,z) \frac{\delta\Pi(z)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S}(z,y) \right] \Big|_{\text{VEV}} \\
&\quad + \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \int d^4x C(x) \Big|_{\text{VEV}}
\end{aligned}$$

となる。あとは Π や C の汎関数微分や、種々の行列計算を行えば良い。ただし、今、運動量表示での擬スカラー中間子場 $\tilde{\phi}_a(p)$ で汎関数微分しているので、

$$\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \phi^b(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta\tilde{\phi}^b(k)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} e^{-ik\cdot x} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \delta_a^b \delta(k-p) e^{-ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta_a^b e^{-ip\cdot x}$$

となることに注意すべきである。

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \int d^4x C(x) \Big|_{\text{VEV}} \\
&= \left[-\frac{g^2}{G} \delta_{ab} \right. \\
&\quad - \frac{4}{3} \frac{g^3 G_D}{G^3} \{ \langle \sigma \rangle_1^1 + \langle \sigma \rangle_2^2 + \langle \sigma \rangle_3^3 \} \delta_{a0} \delta_{b0} \\
&\quad + 2 \frac{g^3 G_D}{G^3} \langle \sigma \rangle_3^3 (\delta_{a1} \delta_{b1} + \delta_{a2} \delta_{b2} + \delta_{a3} \delta_{b3}) \\
&\quad + 2 \frac{g^3 G_D}{G^3} \langle \sigma \rangle_2^2 (\delta_{a4} \delta_{b4} + \delta_{a5} \delta_{b5}) \\
&\quad + 2 \frac{g^3 G_D}{G^3} \langle \sigma \rangle_1^1 (\delta_{a6} \delta_{b6} + \delta_{a7} \delta_{b7}) \\
&\quad + \frac{2}{3} \frac{g^3 G_D}{G^3} \{ 2\langle \sigma \rangle_1^1 + 2\langle \sigma \rangle_2^2 - \langle \sigma \rangle_3^3 \} \delta_{a8} \delta_{b8} \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{g^3 G_D}{G^3} \{ \langle \sigma \rangle_1^1 - \langle \sigma \rangle_2^2 \} (\delta_{a0} \delta_{b3} + \delta_{a3} \delta_{b0}) \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g^3 G_D}{G^3} \{ \langle \sigma \rangle_1^1 - \langle \sigma \rangle_2^2 \} (\delta_{a3} \delta_{b8} + \delta_{a8} \delta_{b3}) \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{g^3 G_D}{G^3} \{ \langle \sigma \rangle_1^1 + \langle \sigma \rangle_2^2 - 2\langle \sigma \rangle_3^3 \} (\delta_{a8} \delta_{b0} + \delta_{a0} \delta_{b8}) \right] \delta(p+q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \Pi(x) \Big|_{\text{VEV}} \\
&= i\gamma^5 \left[\left\{ 2g - 2\frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right\} \frac{\lambda_a^T}{2} \right. \\
&\quad + 2\frac{g^2 G_D}{G^2} \left\{ \text{diag}(\langle\sigma\rangle^1_1, \langle\sigma\rangle^2_2, \langle\sigma\rangle^3_3) \frac{\lambda_a^T}{2} + \frac{\lambda_a^T}{2} \text{diag}(\langle\sigma\rangle^1_1, \langle\sigma\rangle^2_2, \langle\sigma\rangle^3_3) \right\} \\
&\quad - \sqrt{6} \frac{g^2 G_D}{G^2} \text{diag}(\langle\sigma\rangle^1_1, \langle\sigma\rangle^2_2, \langle\sigma\rangle^3_3) \delta_{a0} \\
&\quad \left. + \frac{g^2 G_D}{G^2} \left\{ -\sigma_a + \sqrt{6} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \delta_{a0} \right\} \mathbf{1}_3 \right] \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \frac{\delta}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \Pi(x) \Big|_{\text{VEV}} \\
&= \frac{g^2 G_D}{G^2} \left[2 \left\{ \frac{\lambda_a^T \lambda_b^T}{2} + \frac{\lambda_b^T \lambda_a^T}{2} \right\} - \sqrt{6} \left\{ \frac{\lambda_a^T}{2} \delta_{b0} - \frac{\lambda_b^T}{2} \delta_{a0} \right\} + \{3\delta_{a0}\delta_{b0} - \delta_{ab}\} \mathbf{1}_3 \right] \\
&\quad \times \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot x}
\end{aligned}$$

であり、ここから、

$$\begin{aligned}
& i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left(\frac{\delta^2 \Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^a(p) \delta\tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S}(x, y) \right) \Big|_{\text{VEV}} \\
&= -\delta(p+q) \frac{g^2 G_D}{G^2} \\
&\quad \left[\frac{2}{3} [I_1(M_1) + I_1(M_2) + I_1(M_3)] \delta_{a0} \delta_{b0} \right. \\
&\quad - I_1(M_3) (\delta_{a1} \delta_{b1} + \delta_{a2} \delta_{b2} + \delta_{a3} \delta_{b3}) \\
&\quad - I_1(M_2) (\delta_{a4} \delta_{b4} + \delta_{a5} \delta_{b5}) \\
&\quad - I_1(M_1) (\delta_{a6} \delta_{b6} + \delta_{a7} \delta_{b7}) \\
&\quad - \frac{1}{3} [2I_1(M_1) + 2I_1(M_2) - I_1(M_3)] \delta_{a8} \delta_{b8} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} [I_1(M_1) - I_1(M_2)] (\delta_{a0} \delta_{b3} + \delta_{a3} \delta_{b0}) \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{3}} [I_1(M_1) - I_1(M_2)] (\delta_{a3} \delta_{b8} + \delta_{a8} \delta_{b3}) \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{2}}{6} [I_1(M_1) + I_1(M_2) - 2I_1(M_3)] (\delta_{a8} \delta_{b0} + \delta_{a0} \delta_{b8}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left[\int d^4z \frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{S}(x,z) \frac{\delta\Pi(z)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S}(z,y) \right] \\
&= -\delta(p+q) \\
& \quad \left[\frac{2}{3} \left\{ \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right)^2 I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \right. \\
& \quad \quad + \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^3_3 + \langle\sigma\rangle^1_1) \right)^2 I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \quad \left. \left. + \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \delta_{a0}\delta_{b0} \right. \\
& \quad + \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right)^2 [I_2(p^2, M_1, M_2) + I_2(p^2, M_2, M_1)] (\delta_{a1}\delta_{b1} + \delta_{a2}\delta_{b2}) \\
& \quad + \left\{ \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right)^2 [I_2(p^2, M_1, M_1) + I_2(p^2, M_2, M_2)] \right. \\
& \quad \quad \left. + \left(\frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^2_2) \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \delta_{a3}\delta_{b3} \\
& \quad + \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^2_2 \right)^2 [I_2(p^2, M_3, M_1) + I_2(p^2, M_1, M_3)] (\delta_{a4}\delta_{b4} + \delta_{a5}\delta_{b5}) \\
& \quad + \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^1_1 \right)^2 [I_2(p^2, M_2, M_3) + I_2(p^2, M_3, M_2)] (\delta_{a6}\delta_{b6} + \delta_{a7}\delta_{b7}) \\
& \quad + \frac{1}{3} \left\{ \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right)^2 I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \\
& \quad \quad + \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right)^2 I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \quad \left. \left. + \left(2g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \delta_{a8}\delta_{b8} \right] \\
& \hspace{15em} \text{for } a = b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left[\int d^4z \frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{S}(x,z) \frac{\delta\Pi(z)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S}(z,y) \right] \\
& = -\delta(p+q) \\
& \quad \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \right. \\
& \quad - \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^3_3 + \langle\sigma\rangle^1_1) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \left. \left. - \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^2_2) I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. (\delta_{a0}\delta_{b3} + \delta_{a3}\delta_{b0}) \right. \\
& \quad + \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \\
& \quad - \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \left. \left. + \left(2g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^2_2) I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. (\delta_{a3}\delta_{b8} + \delta_{a8}\delta_{b3}) \right. \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \right. \\
& \quad \quad \quad \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) I_2(p^2, M_1, M_1) \\
& \quad \quad + \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^3_3 + \langle\sigma\rangle^1_1) \right) \\
& \quad \quad \quad \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \quad - \left(2g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) \\
& \quad \quad \quad \left. \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} (\delta_{a8}\delta_{b0} + \delta_{a0}\delta_{b8}) \\
& \quad + i \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right)^2 [I_2(p, M_2, M_1) - I_2(p^2, M_1, M_2)] (\delta_{a1}\delta_{b2} - \delta_{a2}\delta_{b1}) \\
& \quad + i \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^2_2 \right)^2 [I_2(p, M_3, M_1) - I_2(p^2, M_1, M_3)] (\delta_{a4}\delta_{b5} - \delta_{a5}\delta_{b4}) \\
& \quad + i \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^1_1 \right)^2 [I_2(p, M_3, M_2) - I_2(p^2, M_2, M_3)] (\delta_{a6}\delta_{b7} - \delta_{a7}\delta_{b6}) \left. \right] \\
& \quad \quad \quad \text{for } a \neq b
\end{aligned}$$

を得る。ただし

$$I_1(m) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr}_\gamma \frac{1}{\not{k} - m\mathbf{1}_\gamma}$$

$$I_2(p^2, m_1, m_2) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr}_\gamma i\gamma^5 \frac{1}{(\not{k} - \not{p}) - m_1\mathbf{1}_\gamma} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} - m_2\mathbf{1}_\gamma}$$

である。 I_2 が外線 p の一次でなく二次の p^2 に依存することは、積分を計算するとわかる。ここで、逆プロパゲーターは対称行列であり、 $\tilde{D}_{\phi,ab}^{-1}(p, q) = \tilde{D}_{\phi,ba}^{-1}(p, q)$ となるべきなので、

$$\begin{aligned} I_2(p^2, m_1, m_2) &= \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr}_\gamma i\gamma^5 \frac{1}{(\not{k} - \not{p}) - m_1\mathbf{1}_\gamma} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} - m_2\mathbf{1}_\gamma} \\ &= I_2(p^2, m_2, m_1) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \text{tr}_\gamma i\gamma^5 \frac{1}{(\not{k} - \not{p}) - m_2\mathbf{1}_\gamma} i\gamma^5 \frac{1}{\not{k} - m_1\mathbf{1}_\gamma} \end{aligned}$$

であることがわかる。これは実際に積分を実行することによっても示せる。したがって、

$$\begin{aligned}
& i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left[\int d^4 z \frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{S}(x, z) \frac{\delta\Pi(z)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S}(z, y) \right] \\
&= -\delta(p+q) \\
& \quad \left[\frac{2}{3} \left\{ \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right)^2 I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \right. \\
& \quad \quad + \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^3_3 + \langle\sigma\rangle^1_1) \right)^2 I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \quad \left. \left. + \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \delta_{a0}\delta_{b0} \right. \\
& + 2 \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right)^2 I_2(p^2, M_1, M_2) (\delta_{a1}\delta_{b1} + \delta_{a2}\delta_{b2}) \\
& + \left\{ \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right)^2 [I_2(p^2, M_1, M_1) + I_2(p^2, M_2, M_2)] \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^2_2) \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \delta_{a3}\delta_{b3} \\
& + 2 \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^2_2 \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_1) (\delta_{a4}\delta_{b4} + \delta_{a5}\delta_{b5}) \\
& + 2 \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^1_1 \right)^2 I_2(p^2, M_2, M_3) (\delta_{a6}\delta_{b6} + \delta_{a7}\delta_{b7}) \\
& + \frac{1}{3} \left\{ \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right)^2 I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \\
& \quad + \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right)^2 I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \left. \left. + \left(2g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right)^2 I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \delta_{a8}\delta_{b8} \right]
\end{aligned}$$

for $a = b$

$$\begin{aligned}
& i\text{Tr}_{x,3,\gamma} \left[\int d^4z \frac{\delta\Pi(x)}{\delta\tilde{\phi}^b(q)} \mathbf{S}(x,z) \frac{\delta\Pi(z)}{\delta\tilde{\phi}^a(p)} \mathbf{S}(z,y) \right] \\
& = -\delta(p+q) \\
& \quad \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \right. \\
& \quad - \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^3_3 + \langle\sigma\rangle^1_1) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \left. \left. - \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^2_2) I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. (\delta_{a0}\delta_{b3} + \delta_{a3}\delta_{b0}) \right. \\
& \quad + \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_1, M_1) \right. \\
& \quad - \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} \langle\sigma\rangle^3_3 \right) I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \left. \left. + \left(2g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^2_2) I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} \right. \\
& \quad \quad \quad \left. (\delta_{a3}\delta_{b8} + \delta_{a8}\delta_{b3}) \right. \\
& \quad + \frac{\sqrt{2}}{3} \left\{ \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^2_2 + \langle\sigma\rangle^3_3) \right) \right. \\
& \quad \quad \quad \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^2_2 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) I_2(p^2, M_1, M_1) \\
& \quad \quad + \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^3_3 + \langle\sigma\rangle^1_1) \right) \\
& \quad \quad \quad \left(g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (2\langle\sigma\rangle^1_1 - \langle\sigma\rangle^3_3) \right) I_2(p^2, M_2, M_2) \\
& \quad \quad - \left(2g - \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) \\
& \quad \quad \quad \left. \left. \left(g + \frac{g^2 G_D}{G^2} (\langle\sigma\rangle^1_1 + \langle\sigma\rangle^2_2) \right) I_2(p^2, M_3, M_3) \right\} (\delta_{a8}\delta_{b0} + \delta_{a0}\delta_{b8}) \right] \\
& \quad \quad \quad \text{for } a \neq b
\end{aligned}$$

となる。この逆プロパゲーターは ϕ^0 、 ϕ^3 、 ϕ^8 については対角化されていない。つまり、混合している。そこで対角化された逆プロパゲーターを $\tilde{D}_{D,\phi,ab}^{-1}$ と書こう。この時 $\tilde{D}_{D,\phi,ab}^{-1}(p, q)$ は中間子の足 a と運動量 p について対角的であり、 $\delta_{ab}\delta(p+q)$ に比例しているので、

$$\tilde{D}_{D,\phi,a}^{-1}(p^2) = \frac{\tilde{D}_{\phi,ab}^{-1}(p, q)}{\delta_a\delta(p+q)}$$

という量を定義する。ここで、外線運動量 p に対しては p^2 という二乗の形で依存することに注意する。この量が0になるような外線運動量 p のノルムが擬スカラー場の質量であ

る。すなわち、擬スカラー場 ϕ^a の質量を $m_{\phi,a}$ とすると、この質量は

$$\tilde{D}_{D,\phi,a}^{-1}(p^2 = m_{\phi,a}^2) = 0$$

を満たすものとして定義される。また、波動関数繰り込みも $\tilde{D}_{D,\phi,a}^{-1}(p^2)$ を用いて求めることができる。スカラー場の逆プロパゲーターやそこから求まる質量、波動関数繰り込みも同様に求められる。また、頂点関数も逆プロパゲーターを求めるのと同様に、有効作用を場で汎関数微分し、真空期待値を代入することで求められる。

3 標準宇宙論

この章では、標準宇宙論の中で本論文に関連のあるものをまとめてある。主に [19] と久保治輔先生の宇宙論の講義を参考にした。

3.1 宇宙原理とフリードマン-ロバートソン-ウォーカー計量

宇宙には、小さな揺らぎを除いて空間的に等方的で一様に分布している電磁波が存在する。この電磁波を宇宙マイクロ波背景放射 (Cosmic Microwave Background (radiation), CMB(R)) と呼ぶ。この観測の結果から、宇宙原理 (Cosmological principle) と呼ばれる原理が仮定される。宇宙原理とは、揺らぎを無視した大きなスケールでは、宇宙が空間的に一様で等方的に見えるような座標系が存在する、というものである。幾何学の言葉で言うと、宇宙の時空には空間的に一様等方的な計量が存在する、というものである。ここで、一様性 (homogeneity) とは特別な点が存在しないということであり、等方性 (isotropy) とは特別な方向が存在しないということである。

そのような一様等方的な計量はフリードマン-ロバートソン-ウォーカー (FRW) 計量と呼ばれており、

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -a^2(t) \left(\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

で定義され、極座標表示では以下のように定義される。

$$g_{\mu\nu}^{\text{pol}} = \text{diag} \left(1, -a^2(t) \frac{1}{1 - Kr^2}, -a^2(t)r^2, -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \right) \quad (3.2)$$

ここで、 $a(t)$ はスケール因子と呼ばれ、宇宙の膨張や収縮を記述する。一方、任意の点の空間座標 x^i 、 r 、 θ 、 ϕ などは宇宙の膨張、収縮などの時間発展では変化しない。つまり、空間の膨張や収縮に合わせて二点間の目盛自体を広げたり縮めたりすることで、目盛で測った二点間の距離を一定に保つような座標系となっている。このような座標系を共動座標系という。 K は宇宙の空間的な曲率が正か負か0かを表す量であり、 $K = 1$ では曲率は正で球のように閉じた時空であり、 $K = -1$ では曲率は負で開いた空間、 $K = 0$ では平坦な時空であることを意味する。一様性と等方性のみから、この計量が導出される。ここで時間依存性が $a(t)$ にのみ入っていることが重要である。この事実から、大きなスケールでは時空のダイナミクスは膨張か収縮しかないということがわかる。この節ではこれ以降は極座標表示の計量はいらず、(3.1) を用いる。FRW 計量の逆は、空間の一様等方性と計量の逆になるべきという要請から

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} (\delta^{ij} - K x^i x^j) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

となる。空間の等方性から、計量の時間的な成分と空間的な成分が完全に分離できており、空間的な成分のみからなる空間的な計量について考えることは意味のあることである。そこで、このFRW計量の空間成分から、FRW時空の空間計量 h_{ij} を

$$h_{ij} := -g_{ij} = a^2 \left(\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right) \quad (3.4)$$

によって定義する。この空間計量の逆 h^{ij} はFRW計量の逆 $g^{\mu\nu}$ の空間成分を用いて

$$h^{ij} = -g^{ij} = \frac{1}{a^2} (\delta^{ij} - K x^i x^j) \quad (3.5)$$

と表される。

一般に、第一種クリストフェル記号 $\Gamma_{\mu\nu\rho}$ は

$$\Gamma_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\rho g_{\nu\mu} - \partial_\mu g_{\nu\rho})$$

と表され、第二種クリストフェル記号、またはアフィン接続 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ は

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\rho})$$

と表される。また、(3.4) で定義された空間計量 h_{ij} の第一種、および第二種クリストフェル記号を ${}^3\Gamma_{ijk}$ 、 ${}^3\Gamma_{jk}^i$ とすると、これらは

$${}^3\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} (\partial_j h_{ki} + \partial_k h_{ji} - \partial_i h_{jk}) = -\Gamma_{ijk}$$

$${}^3\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} h^{il} (\partial_j h_{kl} + \partial_k h_{jl} - \partial_l h_{jk}) = \Gamma_{jk}^i$$

と表せる。FRW計量の下では

$$\partial_i h_{jk} = K a^2 \left(\frac{\delta_{ij} x_k + x_j \delta_{ik}}{1 - K \mathbf{x}^2} + 2K \frac{x_i x_j x_k}{(1 - K \mathbf{x}^2)^2} \right)$$

となるので、まず空間計量 h_{ij} に対して

$${}^3\Gamma_{ijk} = \frac{K}{1 - K \mathbf{x}^2} x_i h_{jk}$$

$${}^3\Gamma_{jk}^i = \frac{K}{a^2} x^i h_{jk}$$

時空計量 $g_{\mu\nu}$ に対して

$$\Gamma_{ijk} = \frac{K}{1 - K \mathbf{x}^2} x_i g_{jk}$$

$$\Gamma_{jk}^i = -\frac{K}{a^2} x^i g_{jk}$$

$$\Gamma_{0ij} = -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} = \Gamma_{ij}^0 = -\Gamma_{i0j} = -\Gamma_{ij0}$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i = \Gamma_{j0}^i$$

$$\Gamma_{i00} = \Gamma_{0i0} = \Gamma_{00i} = \Gamma_{00}^i = \Gamma_{i0}^0 = \Gamma_{0i}^0 = \Gamma_{000} = \Gamma_{00}^0 = 0$$

を得る。

一般に、リーマン曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\tau}$ 、リッチテンソル $R_{\mu\nu}$ 、リッチスカラー R はそれぞれ

$$R^\mu{}_{\nu\rho\tau} = \partial_\rho \Gamma_{\nu\tau}^\mu - \partial_\tau \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\alpha\rho}^\mu \Gamma_{\nu\tau}^\alpha - \Gamma_{\alpha\tau}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\alpha$$

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

と表される。FRW 計量の下では、まず空間計量 h_{ij} に対して

$$\begin{aligned} {}^3R^i{}_{jkl} &= \partial_k {}^3\Gamma_{jl}^i - \partial_l {}^3\Gamma_{jk}^i + {}^3\Gamma_{mk}^i {}^3\Gamma_{jl}^m - {}^3\Gamma_{ml}^i {}^3\Gamma_{jk}^m \\ &= \frac{K}{a^2} (\delta_k^i h_{jl} - \delta_l^i h_{jk}) \end{aligned}$$

$${}^3R_{ij} = \frac{2K}{a^2} h_{ij}$$

$${}^3R = \frac{6K}{a^2}$$

を得る。時空計量 $g_{\mu\nu}$ に対しては、

$$\begin{aligned} R^i{}_{jkl} &= {}^3R^i{}_{jkl} + \Gamma^i{}_{0k} \Gamma^0{}_{jl} - \Gamma^i{}_{0l} \Gamma^0{}_{jk} \\ &= -\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2} \right) (\delta_k^i g_{jl} - \delta_l^i g_{jk}) \end{aligned}$$

$$R^i{}_{00j} = -\frac{\ddot{a}}{a} \delta_j^i = -R^i{}_{0j0}$$

$$R^0{}_{i0j} = -\frac{\ddot{a}}{a} g_{ij} = -R^0{}_{ij0}$$

$$R_{jk0}^i = R_{j0k}^i = R_{0jk}^i = R_{j00}^i = R_{000}^i = R_{ijk}^0 = R_{0ij}^0 = R_{000}^0 = 0$$

$$R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{K}{a^2}\right) g_{ij}$$

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$

$$R_{0i} = R_{i0} = 0$$

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{K}{a^2}\right)$$

を得る。

これまでは空間座標からのみスケールファクター a を括り出し、計量 $g_{\mu\nu}$ の空間成分にのみスケールファクター a が含まれていた。そこで、時間成分からも a を括り出し、計量の時間成分に吸収させることで、計量 $g_{\mu\nu}$ をスケールファクターとテンソルの積で書けるような座標系を定義する。すなわち、新しい時間座標 η を

$$dt = a d\eta$$

となるように定義する。この η を共形時間という。このように座標変換した後の計量を $g_{\mu\nu}^{\text{conf}}$ と書くことにすると

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}^{\text{conf}} &= \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \left(\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right) \end{pmatrix} \\ &= a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \left(\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right) \end{pmatrix} \\ &= a^2 \tilde{g}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ を

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & - \left(\delta_{ij} + K \frac{x_i x_j}{1 - K \mathbf{x}^2} \right) \end{pmatrix}$$

と定義した。ここで、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ はスケールファクターと完全に分離されたことにより、時間依存性が無い。この時、 $\tilde{g}_{\mu\nu}$ 自体をある系の計量であるとする、この計量に対して固有時 $d\tilde{\tau}$ を以下のように定義できる。

$$d\tilde{\tau} := \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

一方、元の計量 $g_{\mu\nu}^{\text{conf}}$ に対する固有時 $d\tau$ は

$$d\tau = g_{\mu\nu}^{\text{conf}} dx^\mu dx^\nu = a^2 \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = a^2 d\tilde{\tau}$$

と書ける。これは共形変換の定義式である。時間発展によって a が変化するので、時間発展は共形変換になっている。

3.2 地平線問題 - 粒子地平線と因果律 -

前節では、「宇宙は大きいスケールでは一様等方である」という宇宙原理を満たす一般的な計量として、FRW 計量を導入した。この節では FRW 時空、すなわち宇宙における因果的領域について考える。因果関係を持ちうる領域とは粒子が到達し得る領域であり、粒子が到達可能な領域の境界線は粒子地平線と呼ばれている。標準宇宙論における地平線問題とは、因果律を持ち得ないはずの領域間の温度がなぜほとんど同じになっているのか、という問題であるが、この節ではこの問題を解説することを目的とする。

まずは、因果的領域、すなわち因果関係を持ち得る領域とはどのような領域であるかを正確に定義するために、簡単な例を考える。座標 x_A^μ の点 A に置いてある風船を、点 A から距離 r_{AB} だけ離れた座標 x_B^μ の点 B から弾速 v の銃で打って割ることを考える。ある時刻 t_i で発砲したとすると $t_{\text{hit}} - t_i = r/v$ を満たす時刻 t_{hit} で弾丸が点 A に到達し、風船を割る。この時、点 B での発砲という事象と点 A での風船の破裂という事象は因果関係を持つ。しかし、 $t_{\text{before}} - t_i < r/v$ となる時刻 t_{before} の時点では、まだ因果関係を持っていない。この例から、ある二点間の因果関係の有無を議論するときにはその間の距離 r とその間を伝搬する物体の速さ v 、そして片方から物体が射出された初期時刻 t_i と、どの時点での因果関係を考えたいかを表す時刻 t が必要であることがわかる。

この事実を踏まえ、さらに宇宙で物体が到達可能な最高速度が光速であることを考慮すると、「宇宙における因果的領域とはどのような領域か」という問いのより正確な問いは、「FRW 時空において、ある初期時刻 t_i にあらゆる点から同時に光速 c で光子がある点 A に向けて射出された場合、どの程度点 A に近い点から射出された光子であれば、ある時刻 t までに点 A に到達しているか、その距離 r を求めよ」である。以下で、これを数式を用いて考えていく。

この節ではある点 A からの距離を考えたいので、距離と角度でパラメトライズされている前節 3.1 の (3.2) で定義した極座標表示での FRW 計量 $g_{\mu\nu}^{\text{pol}}$ を用いる。この計量の下では固有時は

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \quad (3.6)$$

と書ける。

FRW 時空の空間的一様等方性から、ある点 A を座標系の原点に設定して良い。すなわち $r_A = 0$ である。別の任意の点 $(r, \theta, \phi) = (r_i, \theta_i, \phi_i)$ から原点 $r_A = 0$ に向けて初期時刻 t_i で光子を射出する。この光子の角度は θ_i, ϕ_i から変化せず、原点からの距離 r のみ r_i から変化する。また、光子は固有時が常に一定 (あるいは定義できない) である。これらを考慮すると、固有時 (3.6) から

$$\frac{dt^2}{a^2} = \frac{dr^2}{1 - Kr^2}$$

を得る。この光子が時刻 t で距離 r の点に到達したとすると

$$\int_{t_i}^t \frac{dt}{a} = \int_{r_i}^r \frac{-dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_r^{r_i} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

となる。スケールファクターは時間の関数なので左辺において時間積分が実行されなければならない。もし時刻 t においてこの光子が原点に到達したとすると、この光子の射出された点と原点との間の距離 r_i がこの時刻 t において点 A と因果関係を持ち得る最大の距離である。この $r = r_i$ 一定の線 (実際は面) を粒子の地平線、という意味で、粒子地平線 (particle horizon) と呼ぶ。そこで、このように初期時刻 t_i において射出された光子が時刻 t において原点に到達するような距離を $r_H(t_i, t)$ と書こう。ここで H はホライズンの意味である。この距離 $r_H(t_i, t)$ は上の式で到達した距離 r を原点の 0 で置き換えた

$$\int_{t_i}^t \frac{dt}{a} = \int_0^{r_H(t_i, t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \quad (3.7)$$

によって時刻 t と関連づけられる。

$r_H(t_i, t)$ が原点と因果関係を持ち得る最大の距離であると上で述べたが、このような概念は宇宙が生まれた瞬間が存在する場合にのみ意味がある。言い換えると、それ以上過去へ遡れないような初期時間が存在する場合にのみ意味がある。もしそのような初期時間が存在せず、この宇宙はどこまでも過去に遡ることができるかすると、光子の射出される時刻もどこまでも過去に設定することができるので、全ての領域で因果関係を持っていることになる。具体的には、原点からある距離 r だけ離れた点からある時刻 t_i に射出された光子が別の時刻 t に原点に到達していないとしても、その光子が射出されるよりも前の時刻 $t = t_{\text{before}}$ でその点 r から射出された光子は時刻 t に原点に到達することができ、これを繰り返すことで無限に遠くの領域と因果関係を持つということが言える。

この $r = r_H(t_i, t)$ 一定面である粒子地平線と原点 $r = 0$ の間の、時刻 \tilde{t} での物理的な距離を $d_H(\tilde{t}; t_i, t)$ と書く。 $r_H(t_i, t)$ は初期時刻 t_0 と観測時刻 t が決まれば決まるので d_H の変数として、 $r_H(t_i, t)$ の代わりに t_i と t を用いた。物理的な距離は $dt = d\theta = d\phi = 0$ とした時の世界間隔として与えられる。世界間隔 ds^2 は負の固有時として定義されるので、(3.6) から

$$\begin{aligned} d_H(\tilde{t}; t_i, t) &= \int_0^{r_H(t_i, t)} ds(t', r, \theta, \phi) \Big|_{t'=\tilde{t}, d\theta=d\phi=0} \\ &= a(\tilde{t}) \int_0^{r_H(t_i, t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(\tilde{t}) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる。ここで、最後の等式で (3.7) を用いた。 $d_H(\tilde{t}; t_i, t)$ はどの時刻 \tilde{t} で考えるかで値が変わるが、これは単に、同じ共動距離 $r_H(t_i, t)$ に対する物理的距離であっても宇宙の膨張、あるいは収縮の結果、物理的距離は時間により変化することを反映している。

最後に地平線問題について触れる。宇宙には大きいスケールで一様等方的な分布を持つ CMB と呼ばれる背景電磁波が存在している。この CMB は宇宙の始まりではなく、宇宙の晴れ上がりの時期に放出された光子である。ここで、宇宙の晴れ上がり (再結合、recombination) とは、原子核や電子が結合して中性化したことにより光子がこれらの荷電粒子の相互作用から解放され、自由に長距離を飛び続けられるようになることである。晴れ上がり以前の光子は荷電粒子との相互作用によってほとんど存在できないので、現在背景放射として観測される光子は晴れ上がり以降の光子である。ある二点がこの晴れ上がり

の時期において因果関係を持っていれば、その二点からの CMB の温度がほとんど等しいことは自然である。例えば、地球の位置を原点 $r = 0$ に設定し、ある方向の CMB を観測したとする。CMB は光子であるので、この光子の初期位置 (晴れ上がり時の位置) は (3.7) において、初期時刻 t_i を晴れ上がりの時刻 t_r で置き換えた式

$$\int_{t_r}^t \frac{dt}{a} = \int_0^{r_H(t_r, t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

を満たす。宇宙は空間的に一様等方であり、また今、地球を原点に取るので、反対側から来た光子に対しても同じ式が成り立つが、さらにそれを

$$\int_{t_r}^t \frac{dt}{a} = \int_0^{r_H(t_r, t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{-r_H(t_r, t)}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

と変形する。この二つの式を足し合わせると

$$2 \int_{t_r}^t \frac{dt}{a} = \int_{-r_H(t_r, t)}^{r_H(t_r, t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

を得るが、右辺はこの二つの光子の初期位置間の共動距離 (と共に増加する関数) になっている。そこでこの量が、宇宙誕生 $t = 0$ から晴れ上がり t_r までの粒子地平線に対する式

$$\int_0^{t_r} \frac{dt}{a} = \int_0^{r_H(0, t_r)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}$$

より小さければ、すなわち、

$$\frac{\int_{-r_H(t_r, t)}^{r_H(t_r, t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}}{\int_0^{r_H(0, t_r)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}} = \frac{2 \int_{t_r}^t \frac{dt}{a}}{\int_0^{t_r} \frac{dt}{a}} < 1 \quad (3.9)$$

であれば、この二つの光子の初期位置が晴れ上がりの時点で因果関係を持っていたと言える。CMB が等方性は自然だと言える。しかし、標準宇宙論では、宇宙は過去において常に放射、または物質優勢であったとしており、そのために上の条件が満たされているためには現在の時刻 t は晴れ上がりの時刻 t_r と近い値でなければならず、これは現実と合わない。したがって標準宇宙論では、晴れ上がり (CMB の生成) の時期において因果関係を持っていなかったはずの二点の CMB の強度が同じになるという不自然さが残る。これが地平線問題である。これは、宇宙が過去において常に放射か物質優勢であったと仮定したことにより導かれた結論であり、ダークエネルギー優勢のインフレーションによってこの地平線問題を解決できる。

3.3 時空と物質のダイナミクス - 一般相対論概説 -

この節では、時空のダイナミクスと物質のダイナミクスを繋ぐアインシュタイン方程式を FRW 計量の下で考える。これにより、宇宙膨張と物質の分布の関係がわかる。

まずはFRW計量を仮定する前に、一般的な議論を行う。アインシュタイン方程式は重力の作用であるアインシュタイン-ヒルベルト作用 S_G と物質場の作用 S_M の和 S を変分することで得られる。 S_G は

$$S_G = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda)$$

で与えられ、物質場の作用は物質場全体のラグランジアンを \mathcal{L}_M として

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M$$

と書かれる。 G は万有引力定数、あるいはニュートン定数であり、アインシュタイン方程式のニュートン近似がポアソン方程式と一致し、ニュートン力学を再現するために必要である(もちろん次元勘定の観点からも必要である)。また、 Λ は宇宙定数である。 \mathcal{L}_M は物質場 i の自由ラグランジアン \mathcal{L}_i と、その場 i と相互作用する全ての物質場 j との相互作用ラグランジアン \mathcal{L}_{ij} の和として

$$\mathcal{L}_M = \sum_i \left(\mathcal{L}_i + \sum_j \mathcal{L}_{ij} \right)$$

と書ける。ただし、重複が無いように和を取る。実際にはこのように物質場間に相互作用があるが、宇宙論の大部分ではこの相互作用は小さいとして無視し、

$$\mathcal{L}_M = \sum_i \mathcal{L}_i$$

とすることが多い。これらの作用は一般共変性を要請して得られる最も簡単なものである。電磁場などの通常のゲージ場とは異なり、どのような物質場も存在さえすれば例外無く重力場と相互作用をする。さらにこの相互作用の決まり方は全ての物質で共通である。この構造は等価原理を表している。のちに触れることになる、重力と物質場との非最小結合を導入すると重力との相互作用の仕方や大きさが物質によって異なることになるので、等価原理が破れる。

変分によってアインシュタイン方程式が得られるが、この時に必要となる変分は

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad (3.10)$$

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = (\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)\delta g^{\mu\nu} = \nabla_\alpha [(\delta_\mu^\alpha\nabla_\nu - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\nabla_\beta)\delta g^{\mu\nu}] \quad (3.11)$$

である。これらを用いると重力の作用 S_G の変分は

$$\begin{aligned} \delta S_G &= -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\delta\sqrt{-g}(R + 2\Lambda) + \sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \right] \\ &= -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

となる。ただし最後の項は (3.11) から全微分の項に直せるので、無限遠で変分 $g^{\mu\nu} = 0$ だとすると消える。物質場の作用 S_M の変分は

$$\begin{aligned}\delta S_M &= \int d^4x [\delta\sqrt{-g}\mathcal{L}_M + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L}_M] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{M\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}\end{aligned}$$

で、これは物質場のエネルギー運動量テンソル $T_{M\mu\nu}$ の定義式である。

これら変分の結果から、アインシュタイン方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{M\mu\nu}$$

を得る。ここで、左辺の二項の和はビアンキ恒等式を用いると共变的発散によって恒等的に消える量であることが示せる。この二項はしばしばまとめて

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

と定義され、アインシュタインテンソルと呼ばれる。既に述べたように

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \quad (3.13)$$

である。この量を用いるとアインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{M\mu\nu} \quad (3.14)$$

と書き直せる。ここで左辺第二項は宇宙項と呼ばれているが、左辺に置くか右辺に置くかでこの項の解釈が異なる。左辺においた場合は幾何学的な量、あるいは重力理論における量であると解釈でき、右辺におき、

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{M\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.15)$$

とした場合には物質場の一種として解釈できる。左辺に置いた (3.14) では「物質が無い真空」とは $T_{M\mu\nu} = 0$ であり、宇宙項は存在するので真空解はフラットなミンコフスキー時空にはならない。一方で、右辺に置いた (3.15) では「物質が無い真空」と言ったときには宇宙項も含めてゼロであるという意味になるので、真空解はフラットなミンコフスキー時空となる。ここでは宇宙項を右辺に置き物質場の一部であると考え (3.15) の立場で議論を行う。この立場では Λ をダークエネルギーと呼び、物質場と同様にエネルギー運動量テンソルを

$$T_{\Lambda\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

と定義すると便利である。また、この時、 $T_{M\mu\nu}$ と $T_{\Lambda\mu\nu}$ を合わせた全物質のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を

$$T_{\mu\nu} = T_{M\mu\nu} + T_{\Lambda\mu\nu}$$

と定義するとアインシュタイン方程式はよりシンプルに

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

と書ける。

アインシュタイン方程式 (3.17) の両辺を共変微分することで (3.13) から

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (3.18)$$

を得る。これは共変的なエネルギー運動量保存則を表している。

3.4 宇宙における物質の大域的運動

ここからはFRW計量を仮定して議論を行う。この節ではFRW時空において、大きなスケールで物質がどのように振る舞うかを見る。

まず、3.1節で求めたリッチスカラー $R_{\mu\nu}$ の結果から

$$R_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$$

となることがわかるので、さらにアインシュタイン方程式 (3.17) とアインシュタインテンソルの定義 (3.12) から

$$T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$$

がわかる。計量の逆 $g^{\mu\nu}$ をかけて足を一つ上げることで T^{μ}_{ν} は

$$T^{\mu}_{\nu} \propto \delta^{\mu}_{\nu}$$

と対角的になっていることがわかる。また、空間成分はすべて等しい

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3$$

ことがわかる。このようなエネルギー運動量テンソルを持つもので最も簡単なものは完全流体である。完全流体の一般的なエネルギー運動量テンソルは

$$T^{\mu\nu}(x) = [\rho(x) + p(x)]U^{\mu}(x)U^{\nu}(x) - p(x)g^{\mu\nu}(x)$$

で与えられる。ここで、 $\rho(x)$ 、 $p(x)$ 、 $U^{\mu}(x)$ はそれぞれ流体のエネルギー密度場、圧力場、四元速度場である。空間、または計量 $g^{\mu\nu}$ の等方性から速度場は空間的に成分を持たず、時間成分のみ持つので

$$U^{\mu}(t) = \delta^{\mu 0} \quad (3.19)$$

となる。ここで、四元速度のノルムは(自然単位系では)必ず1になることを用いた。また、空間の一様性から、 $\rho(x)$ 、 $p(x)$ は時間にのみ依存する。すなわち、 $\rho(t)$ 、 $p(t)$ と書ける。これらを用いるとエネルギー運動量テンソルは

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= [\rho(t) + p(t)]\delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0} - p(t)g^{\mu\nu}(x) \\ &= \rho(t)\delta^{\mu 0}\delta^{\nu 0} - p(t)g^{ij}(x)\delta_i^\mu\delta_j^\nu \\ &= \begin{pmatrix} \rho(t) & 0 \\ 0 & (-p(t)g^{ij}(x)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.20)$$

となる。足を一つ下げると

$$T^\mu{}_\nu(t) = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)(t) \quad (3.21)$$

を得る。

計算を進める前に、(3.19)の意味について触れる。粒子の四元速度 U^μ は

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

で定義される。これは四元ベクトルであるので、自身との内積、すなわちノルム $U_\mu U^\mu$ はスカラーであり、座標変換の下で不変である。座標変換によりこの粒子の静止系に移ると

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0) = \delta^{\mu 0}$$

を得る。これは(ベクトル場か、ある曲線上のベクトルかの差はあるが)(3.19)と同じ式である。つまり、FRW時空においては流体は静止していることがわかる。空間の一様等方性を仮定するだけで物質は静止していなければならないことが導かれたわけである。ただし、空間の一様等方性は大きいスケールで成り立つ近似的な対称性として仮定しているだけであり、物質を大きいスケールで平均化して見たときには静止しているように見えるということである。よりミクロな目で見るともちろん様々な物質が様々な速度で運動をしている。

3.5 宇宙の熱力学 - 宇宙膨張とエネルギー密度の減衰 -

次に、FRW時空における共変的エネルギー運動量保存則について触れる。FRW計量の下でのエネルギー運動量テンソル(3.20)を保存則(3.18)に入れ、共変微分を実行するとき $\delta^{\mu 0}$ がベクトル量であることに注意して、

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \left(\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} \right) \delta^{\nu 0} = 0$$

を得る。これを变形し、

$$d(\rho a^3) = -pd(a^3) \quad (3.22)$$

を得る。ここで、共動座標 x^i における体積を共動体積と呼び、 v と置くと、物理的な体積 $V(t)$ は

$$V(t) = a^3(t)v$$

と書ける。共動座標 x^i が時間に依存しないため共動体積 v は時間発展しないが、物理的な体積 $V(t)$ は $a^3(t)$ がかけられているため時間変化する。この定義から (3.22) は

$$d\left(\frac{\rho V(t)}{v}\right) = -pd\left(\frac{V(t)}{v}\right)$$

と書くことができる。 ρ がエネルギー密度、 p が圧力であることを思い出すと、これはエントロピー変化のない場合の、準静的、あるいは可逆過程における共動体積あたりのエネルギー保存則、あるいは熱力学第一法則であるということが出来る。エントロピーの変化が無いという結論は、物質が完全流体として振る舞うと仮定したことから来ている。

熱力学第一法則 (3.22) というものが出て来たので、宇宙は熱力学で記述できる側面を持つことが示唆される。そこで、熱力学において基本となる状態方程式を導入する。

$$p = \omega\rho \tag{3.23}$$

ω は様々な値を取りうるが、特に物質場として何が優勢かによって

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{放射 (相対論的物質)} \\ 0 & \text{物質 (非相対論的物質)} \\ -1 & \text{ダークエネルギー (宇宙定数)} \end{cases} \tag{3.24}$$

となる。ここで、放射 (相対論的物質) とは運動量が質量より非常に大きいような物質であり、物質 (非相対論的物質) とは質量が運動量より非常に大きいような物質である。ダークエネルギー優勢の場合の $\omega = -1$ は FRW 時空での完全流体のエネルギー運動量テンソル (3.20) にダークエネルギーの運動量テンソルの定義式 (3.16) を代入することで、直ちに

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \frac{1}{8\pi G}\Lambda$$

と得られる。放射優勢の場合や物質優勢の場合の ω の値は、一般共変性を用いて局所慣性系に行き、自由な点粒子の集団のエネルギー運動量テンソルを平均化したものを (3.20) に代入し、相対論的な場合と非相対論的な場合を考えれば得られる。気体分子運動論などの熱統計力学の知識や、のちに導出するエネルギー密度の宇宙膨張による減衰の仕方を仮定することによっても得られる。

熱力学第一法則 (3.22) と状態方程式 (3.23) から、エネルギー密度 ρ とスケールファクター a の間の微分方程式

$$\frac{d\rho}{\rho} = -(1 + \omega)\frac{d(a^3)}{a^3}$$

を得る。 ω が定数であるとするると簡単に積分を実行できて、

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)} \tag{3.25}$$

が得られる。(3.24)を代入することで、

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-4} & \text{放射優勢 } (\omega = 1/3) \\ a^{-3} & \text{物質優勢 } (\omega = 0) \\ a^0 = \text{const.} & \text{宇宙定数優勢 } (\omega = -1) \end{cases}$$

を得る。物質(非相対論的物質)のエネルギー密度への寄与のほとんどは膨張により変化しない質量であり、膨張によるエネルギー密度の減少割合は数密度の減少割合、すなわち体積の膨張割合に比例するはずなので、この結果は整合的である。放射(相対論的物質)のエネルギー密度への寄与のほとんどは膨張により変化する運動量(\propto 速度)であり、数密度の減少以外に、運動量の減少も考慮しなければならないので、これも整合的である。

3.6 フリードマン方程式と宇宙膨張

次に、アインシュタイン方程式(3.17)から直接スケールファクター a やその微分とエネルギー密度 ρ 、圧力 p との関係を得る。アインシュタイン方程式(3.17)、アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ の定義(3.12)、FRW計量の定義(3.1)、FRW時空での完全流体のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ の式(3.20)、そして3.1節で求めたFRW時空でのリッチテンソル $R_{\mu\nu}$ やリッチスカラー R の式を用いると

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (3.26)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = -8\pi Gp \quad (3.27)$$

を得る、第一式は00成分から、第二式は ii 成分から出る。第一式を特に、フリードマン方程式と呼ぶ。この二式の差を取ることで、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)$$

を得る。この式に状態方程式(3.23)を用いると、

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(1 + 3\omega)\rho$$

を得る。この式から、 $0 < \omega < 1/3$ である場合には、スケールファクター a の二回微分 \ddot{a} は必ず負になる。(3.24)から、ダークエネルギー以外の通常の物質に対してはこれは必ず満たされているので、(非)相対論的物質優勢の宇宙であれば $\ddot{a} < 0$ と言える。もしスケールファクター a の一階微分 \dot{a} が正であれば減速膨張していることになる。また、過去において常に(非)相対論的物質優勢であったとすると $a(t)$ は時間に関する上に凸な関数となっており、過去のある時刻で必ずスケールファクター a が0になることがわかる。これは空間が無限に小さくなる時刻で、特異点であり、この付近で古典重力理論は破綻する。

宇宙の膨張率を表す量として、ハッブルパラメータ $H(t)$ を

$$H(t) := \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.28)$$

で定義し、その現在 $t = t_0$ における値 $H(t_0)$ を H_0 と置く。ハッブルパラメータ H を用いるとフリードマン方程式 (3.26) は

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad (3.29)$$

と書ける。曲率 K を含む第二項は曲率項と呼ばれ、宇宙の発展の仕方は曲率 K の値によって変わる。 $K = 0$ の時、宇宙は平坦な空間であり、これは $K = 1$ の閉じた空間、あるいは $K = -1$ の開いた空間の間の臨界点に対応する。そこで、 $K = 0$ の場合のエネルギー密度を臨界密度と呼び、 ρ_c と書いて

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.30)$$

となる。この臨界密度を用いて無次元に規格化したエネルギー密度

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (3.31)$$

を密度パラメータと呼ぶ。この密度パラメータを用いるとフリードマン方程式は

$$\frac{K}{H^2 a^2} = \Omega - 1$$

と書ける。この時、曲率 K の値と密度パラメータ Ω 値は

$$\begin{aligned} K = 1 &\leftrightarrow \Omega > 1 \quad \text{閉じた宇宙} \\ K = 0 &\leftrightarrow \Omega = 1 \quad \text{平坦な宇宙} \\ K = -1 &\leftrightarrow \Omega < 1 \quad \text{開いた宇宙} \end{aligned}$$

と対応する。便宜的に曲率 K の密度パラメータ Ω_K を

$$\Omega_K := -\frac{K}{H^2 a^2} = -\frac{K}{\dot{a}^2}$$

と置くと、フリードマン方程式はよりシンプルに

$$\Omega + \Omega_K = 1$$

となる。これは宇宙のエネルギー密度の割合を表す式であると読むことができる。 \dot{a} の現在の値 \dot{a}_0 が正で宇宙が現在において膨張しており、かつ、過去において常に放射か物質で満たされていて \ddot{a} が負であるなら、 \dot{a} は時間を遡れば大きくなるので、 \dot{a} の逆数に比例する曲率 K の密度パラメータ Ω_K は過去に行けば行くほど小さくなる。観測から、 Ω_K の現在の値は非常に小さいことがわかっているので、放射や物質で満たされている限りは過去において常に Ω_K は非常に小さく、ほとんど平坦な宇宙だと考えて良い。実際、過去の

ほとんどの間で物質や放射優勢であったとわかっているの、過去においては現在よりも Ω_K の値は小さく、過去に行けば行くほど平坦であったということが言える。しかし、現在でさえ非常に平坦であるのに、その現在の平坦さを実現できるほど過去においてさらに精度よく平坦であったというのは、不自然に思える。これが標準宇宙論における平坦性問題、あるいは微調整問題である。これは、標準宇宙論が、過去は常に放射または物質で満たされており、 $\ddot{a} < 0$ であると仮定した結果であり、宇宙のさらに初期においてダークエネルギー優勢の時期があれば指数関数的膨張により、曲率項あるいは曲率の密度パラメータが小さいことを説明でき、解決できる。これがインフレーションである。

インフレーションがあったとすると、それ以降においては物質の密度パラメータは

$$\Omega \approx 1$$

であるので、密度パラメータ Ω の定義 (3.31) から、物質のエネルギー密度 ρ は臨界密度 ρ_c に非常に近く、したがって臨界密度 ρ_c の定義 (3.30) からハッブルパラメータの二乗 H^2 とエネルギー密度 ρ はほとんど比例関係にあることがわかる。この事実と、エネルギー密度 ρ とスケールファクター a の関係 (3.25) を用いることで

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \propto a^{-3(1+3\omega)}$$

というハッブルパラメータ H とスケールファクターの関係を与える。この式にハッブルパラメータの定義式 (3.28) を用いることで

$$\dot{a} \propto a^{-(1+3\omega)/2} \quad \text{for } \omega \neq -1$$

$$H = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = \text{const.} =: H_i \quad \text{for } \omega = -1 \quad (3.32)$$

の二式を得る。積分を実行することで

$$t = \int \frac{da}{\dot{a}} \propto \begin{cases} a^{3(1+\omega)/2} & \text{for } \omega \neq -1 \\ H_i^{-1} \log a & \text{for } \omega = -1 \end{cases}$$

あるいは、

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{2/[3(1+\omega)]} & \text{for } \omega \neq -1 \\ e^{H_i t} & \text{for } \omega = -1 \end{cases} \quad (3.33)$$

を得る。 ω に具体的な値 (3.24) を代入すると

$$t \propto \begin{cases} a^2 & \text{for } \omega = 1/3 \\ a^{3/2} & \text{for } \omega = 0 \\ H_i^{-1} \log a & \text{for } \omega = -1 \\ a & \text{for } \omega = -1/3 \end{cases}$$

あるいは

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & \text{for 放射優勢} & (\omega = 1/3) \\ t^{2/3} & \text{for 物質優勢} & (\omega = 0) \\ e^{H_i t} & \text{for ダークエネルギー優勢} & (\omega = -1) \\ t & \text{for 曲率優勢} & (\omega = -1/3) \end{cases} \quad (3.34)$$

を得る。ただし $\omega = -1/3$ は曲率項優勢という意味で、 Ω_K が他の物質の密度パラメータ Ω に比べて非常に大きい場合である。 $\omega \neq -1$ に対しては、このスケールファクター a と時刻 t との関係から、 \dot{a} は

$$\dot{a}(t) \propto \frac{2}{3(1+\omega)} t^{2/[3(1+\omega)]} - 1$$

となることがわかり、さらにハッブルパラメータの定義 (3.28) に代入することで

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{1}{t}$$

を得る。ハッブルパラメータ H と時刻 t は逆数の関係になっていることがわかる。 ω に具体的な値 (3.24) を代入することで

$$t = \frac{2}{3(1+\omega)} \frac{1}{H} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{1}{H} & \text{放射優勢} \\ \frac{2}{3} \frac{1}{H} & \text{物質優勢} \\ \frac{1}{H} & \text{曲率優勢} \end{cases}$$

を得る。この関係から、時間 t の代わりにハッブルパラメータの逆数 H^{-1} を用いることができるので、 H^{-1} はハッブル時間とも呼ばれ、宇宙の大まかな時刻を議論する時に用いられる。なお、ダークエネルギー優勢の場合、ハッブルパラメータ H は (3.32) で見たように一定であり、時間の指標として用いることはできない。また、(3.33) あるいは (3.34) から、放射あるいは物質優勢の場合にはスケールファクター a は時間 t のべき乗で増大するが、ダークエネルギー優勢の場合には指数関数的に増大する。インフレーション中はこのようなことが起こっている。

4 インフレーション宇宙論

前章3で標準宇宙論の一部とその問題点について解説した。標準宇宙論における問題点はいくつかあるが、特に重要なものは3.2節で触れた地平線問題と3.6節で触れた平坦性問題である。これらは共に、宇宙は過去において常に物質、あるいは放射優勢であったと仮定した結果として得られたものであり、より初期において宇宙定数、あるいはダークエネルギーとして振る舞う何者かで満たされており指数関数的な膨張(インフレーション)を引き起こすとした場合、解決できる。このような理論をインフレーション宇宙論という [20, 21]。

4.1 最小結合インフレーション

前章3に引き続き、この節では [19] の解説に従う。

指数関数的膨張(インフレーション)により、標準宇宙論の問題を解決できると上で述べたが、インフレーションが起こるのは $\omega = -1$ の宇宙定数、あるいはダークエネルギー優勢の場合であると3.6節で述べた。しかし定数である場合、宇宙のある一時期にのみインフレーションを起こし、その後にインフレーションが終了する理論を作ることは難しい。そこで、宇宙の一時期にのみ宇宙定数、あるいはダークエネルギーとして振る舞うものとして、古典的な実スカラー場を考える。この節では、重力と最小結合している場合を考える。

重力と最小結合している実スカラー場 ϕ の作用は V を ϕ のポテンシャルとして

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (\nabla_\mu \phi)(\nabla^\mu \phi) - V(\phi) \right]$$

である。すなわち、作用積分の中の不変体積要素 $d^4x \sqrt{-g}$ の $\sqrt{-g}$ と内積における計量 $g_{\mu\nu}$ を通してのみ結合している。足を持つ場合は共変微分のクリストフェル記号 $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ を通して結合する。このとき、 ϕ のエネルギー運動量テンソルはこのスカラー場の作用を計量 $g_{\mu\nu}$ で変分することにより

$$T_{\mu\nu} = (\nabla_\mu \phi)(\nabla_\nu \phi) - \mathcal{L}_\phi g_{\mu\nu}$$

となる。ただし、変分公式(3.10)と(3.11)を用いた。ここから、FRW計量(3.1)の下ではエネルギー運動量テンソルは(3.21)と書けるので、エネルギー密度 ρ と圧力 p は

$$\rho = T^0_0 = \frac{1}{2} (\nabla^0 \phi)(\nabla_0 \phi) - \frac{1}{2} (\nabla^i \phi)(\nabla_i \phi) + V(\phi) \approx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)$$

$$p = -T^i_i = \frac{1}{2} (\nabla^0 \phi)(\nabla_0 \phi) - \frac{1}{2} (\nabla^i \phi)(\nabla_i \phi) - V(\phi) \approx \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

とわかる。ここで、インフレーションの最中と直後にはその指数関数的な膨張により ϕ の空間的な変化は時間的な変化に比べて十分小さくなるので、空間微分は無視した。また $\dot{\phi}$ はスカラー場 ϕ の時間に関する一階微分である。このとき、状態方程式(3.23)は

$$\omega = \frac{p}{\rho} \approx \frac{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi)}$$

なので、ポテンシャル V の値が運動項 $(1/2)\dot{\phi}^2$ に比べて十分大きいとき、すなわち、

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V \quad (4.1)$$

のとき、

$$\omega \approx -1$$

となり、真空エネルギー優勢な宇宙が実現し、(3.34) で求めたように宇宙の指数関数的膨張 (インフレーション) が実現される。 ϕ に対する一般共変的な四元運動量保存則 (3.18)、または作用 S_ϕ の ϕ での変分から ϕ の運動方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' \approx 0 \quad (4.2)$$

を得る。 V' のプライムは ϕ での一階微分を表す。ここでも指数関数的な膨張により空間微分が無視できることを用いた。また、この方程式はインフレーション中は他の場との相互作用による効果は宇宙の膨張による効果より十分小さいとし、無視した場合にのみ得られるものであり、一般には ϕ と結合している場の影響を考えなければならない。再加熱、プレヒーティングの議論では相互作用が重要になってくる。

地平線問題や平坦性問題などの標準宇宙論における問題を解決するためには、インフレーションは十分長い時間起こる必要がある。したがって、インフラトン場 ϕ の運動方程式 (4.2) の時間に対する二階微分の項は一階微分の項より小さくなければならない。つまり、場の時間変化が急激に大きくなることがあってはならない。したがって、インフレーション中は以下の条件

$$|\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}| \quad (4.3)$$

が成り立っているとす。これはスローロール条件と呼ばれる。この条件の下では、運動方程式 (4.2) は

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V'}{3H} \quad (4.4)$$

となる。また、フリードマン方程式 (3.29) は

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{1}{3}\frac{8\pi}{m_{\text{P}}^2}\rho = \frac{1}{3}\frac{1}{M_{\text{P}}^2}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right) \approx \frac{V(\phi)}{3M_{\text{P}}^2} \quad (4.5)$$

となる。ただし 3.6 節で述べたように、インフレーションが起こるとスケール因子 a は指数関数的に増大し、その結果インフレーションの最中と直後ではスケールファクター a に反比例する曲率項は時間と共に小さくなるので、無視する近似を用いた。また、

$$m_{\text{p}} = \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$M_{\text{p}} = \frac{m_{\text{p}}}{\sqrt{8\pi}}$$

で、 m_p はプランク質量である。 ϕ の運動方程式 (4.4) とインフレーションの条件 (4.1) から

$$V'^2 \approx 9H^2 \dot{\phi}^2 \ll 18H^2 V$$

が得られ、さらにフリードマン方程式 (4.5) と合わせると

$$\frac{V'^2}{V} \ll 18H^2 \approx 18 \frac{V}{3M_P^2}$$

となる。以上からスローロールパラメータ ϵ を

$$\epsilon := \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \quad (4.6)$$

により定義すると

$$\epsilon \ll 1 \quad (4.7)$$

を得る。また、ポテンシャル V のインフラトン場での二階微分 V'' は運動方程式 (4.4) とフリードマン方程式 (4.5) を用いて

$$V'' \approx \frac{d}{d\phi} (-3H\dot{\phi}) = -3\dot{\phi} \frac{d}{d\phi} H \approx -3\dot{\phi} \frac{d}{d\phi} \sqrt{\frac{V}{3M_P^2}} = -\frac{\sqrt{3}\dot{\phi}}{2M_P} \frac{V'}{\sqrt{V}}$$

したがって、スローロールパラメータ η を

$$\eta := M_P^2 \frac{V''}{V} \approx M_P^2 \left(-\frac{\sqrt{3}\dot{\phi}}{2M_P} \frac{V'}{\sqrt{V}} \right) \frac{1}{V} = -\frac{\sqrt{3}}{2} M_P \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{V}} \frac{V'}{V} \quad (4.8)$$

により定義すると

$$|\eta| \ll 1 \quad (4.9)$$

が得られる。スローロールインフレーションの条件 (4.3) から二式 (4.7)、(4.9) は得られたので、この二式をスローロール条件と呼ぶこともある。観測量の CMB のスペクトル指数 n_s 、テンソル-スカラー比 r 、スカラー揺らぎ A_s はスローロールパラメータにより書き表すことができ、

$$\begin{aligned} n_s &= 1 - 6\epsilon + 2\eta \\ r &= 16\epsilon \\ A_s &= \frac{V}{24\pi^2 M_P^4 \epsilon} \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。膨張の度合いを表す e-folding 数 N_* はスケールファクター a の変化前後の割合の指数として

$$N_* := \log \left(\frac{a_{\text{end}}}{a_*} \right) \approx H_{\text{inf}}(t_f - t_*) = H_{\text{inf}} \int_{t_*}^{t_f} dt = H_{\text{inf}} \int_{\phi_*}^{\phi_f} \frac{1}{\dot{\phi}} d\phi$$

で与えられ。標準宇宙論における問題の解決のためには、

$$50 \lesssim N_* \lesssim 60$$

程度の e-foldings 数が必要であることがわかっている。

4.2 非最小結合インフレーション

4.1 節で触れた最小結合インフレーションでは、これまで様々なポテンシャルが考えられてきたが、最も簡単な ϕ^2 や ϕ^4 のポテンシャルの場合には CMB の観測量 (4.10) を合わせるできない [6]。しかし、重力との非最小結合を考えると、 ϕ^4 のスカラーポテンシャルの理論でも観測と合うインフレーション理論を構築できる [22, 23]。この節では主に [24] を参考にした。

以下のように、重力とインフラトン場 ϕ が非最小結合している状況を考える。

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} R - \frac{1}{2} F(\phi) R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - V(\phi) \right] \quad (4.11)$$

第一項はアインシュタイン-ヒルベルト作用に対応し、第二項が重力とインフラトン場 ϕ の非最小結合項であり、 $F(\phi)$ は ϕ の関数である。第三項と第四項は最小結合インフレーションでのインフラトン場の作用と同じ形をしている。

$$f(\phi) = \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left(1 + \frac{F(\phi)}{M_{\text{P}}^2} \right) \quad (4.12)$$

と置くと S_J は

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-f(\phi) R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - V(\phi) \right] \quad (4.13)$$

となる。インフレーションの議論をするために、共形変換を行い、非最小結合を消すことを考える。

4.2.1 共形変換

通常共形変換では、座標が共形次元を持っており、

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu$$

と変換した時に、固有時 $d\tau^2$ が

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \rightarrow d\hat{\tau}^2 = g_{\mu\nu} d\hat{x}^\mu d\hat{x}^\nu = \Omega^2(x) g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

となるような変換である。この変換式から

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\beta} = \Omega^2(x) g_{\alpha\beta}$$

となる。したがって、通常共形変換では計量は変化しない。しかし、座標に共形次元を持たせず、計量に共形次元を持たせることで、座標を不変にし、計量が代わりに変換されるように定義し直すことができる。この時には、定義から

$$x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu = x^\mu$$

$$\hat{g}_{\mu\nu} \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\beta} = \hat{g}_{\alpha\beta} = \Omega^2(x) g_{\alpha\beta}$$

となる。ここではこの定義を用いる。ここで、変換後の量にはハット^を付けることにする。変換後の計量 $\hat{g}_{\mu\nu}$ の逆は

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2(x)} g^{\mu\nu}$$

となる。また、

$$\sqrt{-\hat{g}} = \sqrt{-\det(\Omega^2(x)g_{\mu\nu})} = \sqrt{\Omega^{2 \times 4}(x)(-\det(g_{\mu\nu}))} = \Omega^4(x)\sqrt{-g}$$

である。クリストッフエル記号は

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\rho}^\mu &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\lambda\nu} - \partial_\lambda g_{\nu\rho}) \\ \rightarrow \hat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu &= \frac{1}{2}\hat{g}^{\mu\nu}(\partial_\nu \hat{g}_{\lambda\rho} + \partial_\rho \hat{g}_{\lambda\nu} - \partial_\lambda \hat{g}_{\nu\rho}) \\ &= \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \frac{1}{\Omega(x)}(\delta_\nu^\mu \nabla_\rho \Omega + \delta_\rho^\mu \nabla_\nu \Omega - g_{\nu\rho} \nabla^\mu \Omega) \end{aligned}$$

同様に、リーマン曲率テンソルは

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{\nu\rho\tau} &= \partial_\rho \Gamma_{\nu\tau}^\mu - \partial_\tau \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}^\mu \Gamma_{\tau\nu}^\lambda - \Gamma_{\tau\lambda}^\mu \Gamma_{\rho\nu}^\lambda \\ \rightarrow \hat{R}^\mu{}_{\nu\rho\tau} &= \partial_\rho \hat{\Gamma}_{\nu\tau}^\mu - \partial_\tau \hat{\Gamma}_{\nu\rho}^\mu + \hat{\Gamma}_{\rho\lambda}^\mu \hat{\Gamma}_{\tau\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\tau\lambda}^\mu \hat{\Gamma}_{\rho\nu}^\lambda \\ &= R^\mu{}_{\nu\rho\tau} - \frac{1}{\Omega}[\delta_\rho^\mu \nabla_\tau \nabla_\nu \Omega - \delta_\tau^\mu \nabla_\rho \nabla_\nu \Omega - g_{\nu\rho} \nabla_\tau \nabla^\mu \Omega + g_{\nu\tau} \nabla_\rho \nabla^\mu \Omega] \\ &\quad + \frac{1}{\Omega^2}[2\delta_\rho^\mu (\nabla_\nu \Omega)(\nabla_\tau \Omega) - 2\delta_\tau^\mu (\nabla_\nu \Omega)(\nabla_\rho \Omega) \\ &\quad - 2g_{\rho\nu} (\nabla^\mu \Omega)(\nabla_\tau \Omega) + 2g_{\nu\tau} (\nabla^\mu \Omega)(\nabla_\rho \Omega) \\ &\quad - (\delta_\rho^\mu g_{\nu\tau} - \delta_\tau^\mu g_{\nu\rho})(\nabla_\lambda \Omega)(\nabla^\lambda \Omega)] \end{aligned}$$

リッチテンソルは

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\rightarrow \hat{R}_{\mu\nu} = \hat{R}^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} \\ &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{\Omega}[2\nabla_\nu \nabla_\mu \Omega + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \Omega] \\ &\quad + \frac{1}{\Omega^2}[4(\nabla_\mu \Omega)(\nabla_\nu \Omega) - g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda \Omega)(\nabla^\lambda \Omega)] \end{aligned}$$

リッチスカラーは

$$R \rightarrow \hat{R} = \hat{R}_{\mu\nu} \hat{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{\Omega^2} \left(R - \frac{6}{\Omega} \nabla_\lambda \nabla^\lambda \Omega \right) \quad (4.14)$$

と変換される。ただし、この共形変換においては、座標 x^μ は不変であるので、下付きの偏微分 ∂_μ も不変であること、すなわち

$$\partial_\mu \rightarrow \hat{\partial}_\mu = \partial_\mu$$

を用いた。一方、計量 $g^{\mu\nu}$ が不変でないために、上付きの偏微分 ∂^μ は不変ではない。したがって、

$$\hat{\nabla}^\mu \Omega = \frac{1}{\Omega^2} \nabla^\mu \Omega$$

$$\hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega = \frac{2}{\Omega} (\hat{\nabla}_\mu \Omega) (\hat{\nabla}^\mu \Omega) + \frac{1}{\Omega^2} \nabla_\mu \nabla^\mu \Omega$$

または、

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Omega = \Omega^2 \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - 2\Omega (\hat{\nabla}_\mu \Omega) (\hat{\nabla}^\mu \Omega)$$

を得る。これを $R(4.14)$ に代入し、

$$R = \Omega^2 \hat{R} + 6\Omega \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - 12(\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \quad (4.15)$$

となり、変換前のリッチスカラー R を変換後の量だけで書きあらわすことができる。共形変換前の量と変換後の量を結びつけるこれらの関係式を元の作用積分 (4.13) に代入することで、元の作用積分に含まれていた非最小結合を消すことができる。ただし、共形因子 $\Omega(x)$ を適切に定めてやる必要がある。まず、元の作用積分の非最小結合の項は \hat{R} と R の関係式を代入することで

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} (-1) f(\phi) R \\ &= \int d^4x \frac{1}{\Omega^4} \sqrt{-\hat{g}} (-1) f(\phi) \left[\Omega^2 \hat{R} + 6\Omega \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - 12(\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[\frac{f(\phi)}{\Omega^2} \hat{R} + 6 \frac{f(\phi)}{\Omega^3} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - 12 \frac{1}{\Omega^4} (\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \right] \end{aligned}$$

となる。今、非最小結合を消し、アインシュタイン-ヒルベルト作用を再現したいので、第一項に注目し、

$$\frac{f(\phi)}{\Omega^2} = \frac{M_{\text{P}}^2}{2}$$

を課す。ここから、

$$\Omega = \sqrt{1 + \frac{F(S)}{M_{\text{P}}^2}} \quad (4.16)$$

を得る。この要請を用いて計算を進めると、元の非最小結合項は

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} (-1) f(\phi) R \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega} \hat{\nabla}_\mu \hat{\nabla}^\mu \Omega - \frac{6M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} (\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + 3M_{\text{P}}^2 \hat{\nabla}_\mu \left(\frac{1}{\Omega} \hat{\nabla}^\mu \Omega \right) - \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} (\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} - \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} (\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} (\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) \right] \quad (4.17) \end{aligned}$$

となる。ただし、共形変換後の共変微分 $\hat{\nabla}_\mu$ についての chain rule

$$\hat{\nabla}_\mu(AB^\nu) = (\hat{\nabla}_\mu A)B^\nu + A\hat{\nabla}_\mu B^\nu$$

とガウスの発散定理

$$\int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \hat{\nabla}_\mu A^\mu = \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu(\Omega^4 A^\mu) = \int dS_\mu \Omega^4 A^\mu = 0$$

を用いた。

次に、共形変換によってインフラトン場 ϕ の自由な作用積分に対応する項は

$$\begin{aligned} & \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \frac{1}{\Omega^4} \left[\frac{1}{2} \Omega^2 \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \phi) (\hat{\nabla}_\nu \phi) - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{1}{2\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \phi) (\hat{\nabla}_\nu \phi) - \hat{V}(\phi) \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

と変換される。ただし、

$$\hat{V}(\phi) = \frac{V(\phi)}{\Omega^4} \quad (4.19)$$

と置いた。作用積分の各項がどのように変換されるかを見たので、全体の変換を見ると、(4.13)、(4.17)、(4.18) から

$$\begin{aligned} S_J &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[-f(\phi)R + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \phi) (\nabla_\nu \phi) - V(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} (\hat{\nabla}_\nu \Omega) (\hat{\nabla}^\nu \Omega) + \frac{1}{2\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \phi) (\hat{\nabla}_\nu \phi) - \hat{V}(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \Omega) (\hat{\nabla}_\nu \Omega) + \frac{1}{2\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \phi) (\hat{\nabla}_\nu \phi) - \hat{V}(\phi) \right] \\ &= S_E \end{aligned} \quad (4.20)$$

となる。変換前の量で書かれた作用積分をジョルダンフレームでの作用、変換後の量で書かれた作用積分をアインシュタインフレームでの作用と呼ぶ。見ての通り、両方の作用積分は完全に等価である。

4.2.2 アインシュタインフレームでのポテンシャル

さて、今、 Ω は (4.16) のようにインフラトン場 ϕ を含むように決められているので、(4.20) の第二項はインフラトン場の微分を含み、したがって、インフラトン場の運動項はカノニカルではなく、

$$\begin{aligned} S_E &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{3M_{\text{P}}^2}{\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \Omega) \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} (\hat{\nabla}_\nu \phi) \frac{\partial \Omega}{\partial \phi} + \frac{1}{2\Omega^2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \phi) (\hat{\nabla}_\nu \phi) - \hat{V}(\phi) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{1}{2\Omega^2} \left\{ 1 + 6M_{\text{P}}^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \phi} \right)^2 \right\} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu \phi) (\hat{\nabla}_\nu \phi) - \hat{V}(\phi) \right] \end{aligned}$$

のようになる。カノニカルな運動項を得るために、場の再定義を行う。つまり、

$$\frac{1}{2\Omega^2} \left\{ 1 + 6M_{\text{P}}^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} \right)^2 \right\} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu\phi)(\hat{\nabla}_\nu\phi) = \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu\chi)(\hat{\nabla}_\nu\chi)$$

を満たすような場 χ を定義する。 χ は ϕ に依存するので、 χ の共変微分 $\hat{\nabla}_\mu\chi$ は

$$\hat{\nabla}_\mu\chi = \partial_\mu\chi = (\partial_\mu\phi) \frac{d\chi}{d\phi} = (\hat{\nabla}_\mu\phi) \frac{d\chi}{d\phi}$$

となる。したがって、右辺は

$$\frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu\chi)(\hat{\nabla}_\nu\chi) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\phi} \right)^2 \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu\phi)(\hat{\nabla}_\nu\phi)$$

となるので、

$$\frac{d\chi}{d\phi} = \frac{1}{\Omega^2} \sqrt{1 + 6M_{\text{P}}^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} \right)^2} \quad (4.21)$$

を得る。これを S_E に代入し、

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} (-1) \left[-\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \hat{R} + \frac{1}{2} \hat{g}^{\mu\nu} (\hat{\nabla}_\mu\chi)(\hat{\nabla}_\nu\chi) - \hat{V}(\phi) \right] \quad (4.22)$$

を得る。ジョルダンフレームでの重力とインフラトン場の非最小結合が

$$F(\phi) = \xi\phi^2 \quad (4.23)$$

である時、共形因子 Ω は (4.24) から

$$\Omega = \sqrt{1 + \frac{\xi\phi^2}{M_{\text{P}}^2}} \quad (4.24)$$

となるので、

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\phi} = \frac{1}{\Omega} \frac{\xi\phi}{M_{\text{P}}^2}$$

が言える。ここから、

$$\frac{d\chi}{d\phi} = \sqrt{\frac{1}{\Omega^2} + \frac{1}{\Omega^4} \frac{6\xi^2\phi^2}{M_{\text{P}}^2}} = \sqrt{\left(1 + \frac{\xi\phi^2}{M_{\text{P}}^2}\right)^{-1} + 6\xi \left(1 + \frac{\xi\phi^2}{M_{\text{P}}^2}\right)^{-2} \frac{\xi\phi^2}{M_{\text{P}}^2}} \quad (4.25)$$

を得る。現在のようなインフラトン場の値が小さい ($\phi \ll M_{\text{P}}/\sqrt{\xi}$) 時には、

$$\frac{d\chi}{d\phi} \approx \sqrt{1 + 6\xi \cdot 1 \cdot 0} = 1$$

となり、

$$\chi \approx \phi$$

と言える。これは、低エネルギーでは共形変換が恒等変換となっていることを示す。これは(4.24)を用いて

$$\Omega \approx 1$$

となることから直接わかることでもある。この事実から、どちらのフレームの時間発展を考えても、最終的には同じ振る舞いをするのがわかる。一方、インフレーションの最中などのインフラトン場の値が非常に大きい時 ($\phi \gg M_P/\sqrt{\xi}$) には(4.25)は

$$\frac{d\chi}{d\phi} \approx \sqrt{\left(\frac{\xi\phi^2}{M_P^2}\right)^{-1} + 6\xi \left(\frac{\xi\phi^2}{M_P^2}\right)^{-2} \frac{\xi\phi^2}{M_P^2}} = \sqrt{\frac{M_P^2}{\xi\phi^2} \sqrt{1+6\xi}} = M_P \sqrt{6 + \frac{1}{\xi} \frac{1}{\phi}}$$

となるので、積分することで

$$\chi \approx M_P \sqrt{6 + \frac{1}{\xi}} \log \phi + \text{const.}$$

または、

$$\phi \approx C \exp\left(\frac{\chi}{M_P \sqrt{6 + 1/\xi}}\right) \quad (4.26)$$

を得る。ただし C は積分定数で、低エネルギーで χ と S が一致するように決まっている。ただし、低エネルギーでは振る舞いが違うので、簡単に求めることはできない。また、 C は次元を持つ。ジョルダンフレームでのインフラトン場のポテンシャル V が

$$V = \frac{\lambda_\phi}{4} \phi^4$$

の時、アインシュタインフレームでのポテンシャル \hat{V} は(4.19)、(4.26)から

$$\begin{aligned} \hat{V} &= \frac{\lambda_\phi \phi^4}{4 \Omega^4} = \frac{\lambda_\phi}{4} \left(1 + \frac{\xi\phi^2}{M_P^2}\right)^{-2} \phi^4 = \frac{\lambda_\phi M_P^4}{4\xi^2} \left(1 + \frac{M_P^2}{\xi} \frac{1}{\phi^2}\right)^{-2} \\ &\approx \frac{\lambda_\phi M_P^4}{4\xi^2} \left[1 + \frac{M_P^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_P \sqrt{6 + 1/\xi}}\right)\right]^{-2} \\ &\xrightarrow{\chi \rightarrow \infty} \frac{\lambda_\phi M_P^4}{4\xi^2} \end{aligned}$$

となり、インフラトン場の値が大きい時にはアインシュタインフレームでのポテンシャル \hat{V} は平坦になるのがわかる。より具体的に、ポテンシャル \hat{V} の再定義されたインフラ

トン場 χ での一階微分 \hat{V}' と二階微分 \hat{V}'' は

$$\begin{aligned}
\hat{V}' &= \frac{d\hat{V}}{d\chi} \\
&\approx (-2) \frac{\lambda_\phi M_{\text{P}}^4}{4\xi^2} \left[1 + \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-3} \\
&\quad \times \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \left(-\frac{2}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}} \right) \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \\
\hat{V}'' &= \frac{d^2\hat{V}}{d\chi^2} \\
&\approx 6 \frac{\lambda_\phi M_{\text{P}}^4}{4\xi^2} \left[1 + \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-4} \\
&\quad \times \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \left(-\frac{2}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}} \right) \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^2 \\
&\quad + (-2) \frac{\lambda_\phi M_{\text{P}}^4}{4\xi^2} \left[1 + \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-3} \\
&\quad \times \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \left(-\frac{2}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}} \right)^2 \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right)
\end{aligned}$$

となり、指数関数的に小さくなることが見て取れる。ポテンシャルとの比は

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{V}'}{\hat{V}} &\approx -2 \left[1 + \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-1} \\
&\quad \times \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \left(-\frac{2}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}} \right) \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \\
&\approx \frac{4M_{\text{P}}}{\xi\sqrt{6+1/\xi}} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \\
&= \frac{4M_{\text{P}}}{\xi\sqrt{6+1/\xi}} \left[C \exp\left(\frac{\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-2} \approx \frac{4M_{\text{P}}}{\xi\sqrt{6+1/\xi}} \frac{1}{\phi^2} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{V}'''}{\hat{V}} &\approx 6 \left[1 + \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-2} \\
&\quad \times \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \left(-\frac{2}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^2 \\
&\quad + (-2) \left[1 + \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-1} \\
&\quad \times \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi} \left(-\frac{2}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right)^2 \frac{1}{C^2} \exp\left(-\frac{2\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \\
&\approx -\frac{8}{6\xi+1} \left[\frac{1}{C^2} \exp\left(\frac{\chi}{M_{\text{P}}\sqrt{6+1/\xi}}\right) \right]^{-2} \approx -\frac{8}{6\xi+1} \frac{1}{\phi^2} \tag{4.28}
\end{aligned}$$

となる。スローロールパラメータを評価する時にこれらを用いる。

4.2.3 アインシュタインフレームでのインフレーション

アインシュタインフレームでは再定義されたインフラトン場 χ と重力との非最小結合はなく、最小結合のインフレーションの理論がそのまま使える。この時、スローロールパラメータ ϵ と η はアインシュタインフレームでのポテンシャル \hat{V} を用いて (4.6)、(4.8) と同様にそれぞれ、

$$\epsilon \equiv \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left(\frac{\hat{V}'}{\hat{V}} \right)^2 = \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left(\frac{1}{\hat{V}} \right)^2 \left(\frac{d\hat{V}}{d\chi} \right)^2$$

$$\eta \equiv M_{\text{P}}^2 \frac{\hat{V}''}{\hat{V}} = M_{\text{P}}^2 \frac{1}{\hat{V}} \frac{d^2\hat{V}}{d\chi^2}$$

と定義される。ただし今、再定義された場 χ がインフラトン場として振る舞うので、ポテンシャルの微分は χ での微分になる。スローロールインフレーションはポテンシャルの値が大きく、また平坦な領域で起こる、つまりインフラトン場の値が大きい領域で起こるので、(4.27) と (4.28) を用いるとインフレーション中のスローロールパラメータは

$$\epsilon \approx \frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left(\frac{4M_{\text{P}}}{\xi\sqrt{6+1/\xi}} \frac{1}{\phi^2} \right)^2 = \frac{8M_{\text{P}}^4}{6\xi^2 + \xi} \frac{1}{\phi^4} \approx \frac{4M_{\text{P}}^4}{3\xi^2\phi^4} \tag{4.29}$$

$$\eta \approx M_{\text{P}}^2 \left(-\frac{8}{6\xi+1} \frac{1}{\phi^2} \right) = -\frac{8M_{\text{P}}^2}{6\xi+1} \frac{1}{\phi^2} \approx -\frac{4M_{\text{P}}^2}{3\xi\phi^2} \tag{4.30}$$

となる。ただし、後にわかるように、 ξ は非常に大きい ($\xi \gg 1$) ことを用いた。この結果から、今の ϕ^4 ポテンシャルの非最小結合インフレーションでのスローロールパラメータには

$$\epsilon \approx \frac{3}{4}\eta^2$$

という関係が成り立つ。インフレーションが終わるのはスローロール条件 (4.7)、(4.9) が満たされなくなる ($\epsilon, \eta \approx 1$) 時なので、その時のインフラトン場 ϕ の値 ϕ_{end} は (4.29) または (4.30) から

$$\phi_{\text{end}}^2 \approx 2\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{\text{P}}^2}{\xi}$$

となる。e-folding 数 N_* は

$$\begin{aligned} N_* &= \int_{\chi_*}^{\chi_{\text{end}}} \frac{H_{\text{inf}}}{\dot{\chi}} d\chi \approx - \int_{\chi_*}^{\chi_{\text{end}}} \frac{3H_{\text{inf}}^2}{\hat{V}'} d\chi \approx - \int_{\chi_*}^{\chi_{\text{end}}} \frac{3}{\hat{V}'} \frac{\hat{V}}{3M_{\text{P}}^2} d\chi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}M_{\text{P}}} \int_{\chi_{\text{end}}}^{\chi_*} \left[\frac{M_{\text{P}}^2}{2} \left(\frac{\hat{V}'}{\hat{V}} \right)^2 \right]^{-1/2} d\chi = \frac{1}{\sqrt{2}M_{\text{P}}} \int_{\chi_{\text{end}}}^{\chi_*} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} d\chi \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}M_{\text{P}}} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} \sqrt{\frac{3\xi^2\phi^4}{4M_{\text{P}}^4} \frac{d\chi}{d\phi}} d\phi \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2}M_{\text{P}}} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} \sqrt{\frac{3\xi^2\phi^4}{4M_{\text{P}}^4}} M_{\text{P}} \sqrt{6 + \frac{1}{\xi} \frac{1}{\phi}} d\phi \approx \frac{3}{2M_{\text{P}}^2/\xi} \int_{\phi_{\text{end}}}^{\phi_*} \phi d\phi \\ &= \frac{3}{4} \frac{\phi_*^2 - \phi_{\text{end}}^2}{M_{\text{P}}^2/\xi} \approx \frac{3}{4} \frac{\phi_*^2}{M_{\text{P}}^2/\xi} \approx \frac{3}{4} \sqrt{\frac{4}{3}} \frac{1}{\epsilon_*} = \sqrt{\frac{3}{4}} \frac{1}{\epsilon_*} \end{aligned}$$

となり、 N_* と ϵ_* が一対一に対応する。ここから、

$$\epsilon_* \approx \frac{3}{4} N_*^{-2}$$

$$\eta_* \approx -N_*^{-1}$$

が言える。以前述べたように、観測量のスペクトル指数 n_{s*} 、テンソル-スカラー比 r_* 、スカラー揺らぎ A_{s*} はスローロールパラメータ ϵ_* と η_* を用いてかけるので、

$$n_{s*} = 1 - 6\epsilon_* + 2\eta_* \approx 1 - \frac{9}{2} N_*^{-2} - 2N_*^{-1}$$

$$r_* = 16\epsilon_* \approx 12N_*^{-2}$$

$$A_{s*} = \frac{\hat{V}}{24\pi^2 M_{\text{P}}^4 \epsilon_*} \approx \frac{1}{24\pi^2 M_{\text{P}}^4} \frac{\lambda_S M_{\text{P}}^4}{4\xi^2} \frac{4N_*^2}{3} = \frac{\lambda_S N_*^2}{72\pi^2 \xi^2}$$

インフレーション理論では

$$50 \lesssim N_* \lesssim 70 \tag{4.31}$$

程度の e-folding 数があれば標準宇宙論の問題を解決できる。 $N_* = 60$ では

$$n_{s*} \sim 0.965 \quad (4.32)$$

$$r_* \sim 0.03 \quad (4.33)$$

となり、PLANCK の観測結果とよく合う。また、スカラー揺らぎ A_{s*} の観測結果は

$$A_{s*} \approx 2.5 \times 10^{-9} \quad (4.34)$$

で、これを用いることで λ_S と ξ の関係

$$\xi \approx \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\lambda_\phi} \times 10^5 \quad (4.35)$$

を得る。さらに、これを用いることでインフレーション終了時のインフラトン場の値 ϕ_{end} は λ_ϕ を用いて

$$\phi_{\text{end}} \approx \lambda_\phi^{-1/4} \times 10^{16} \quad (4.36)$$

を得る。

4.3 再加熱とその問題点

インフレーション直後はその急激な空間の膨張によってあらゆる粒子が互いに引き離され、宇宙の粒子数密度や温度は極端に低くなっている。しかし、インフレーションの後には標準宇宙論に接続されていなければならないので、何らかの機構によって高温高密度の火の玉宇宙が実現されなくてはならない。インフレーションはインフラトンの場の値が非常に大きいことによって引き起こされており、したがってインフレーション直後のインフラトンのエネルギー密度は非常に高くなっている。このエネルギーによって一気に粒子生成が起こることで高温高密度の火の玉宇宙が実現されたと考える。これが宇宙の再加熱である。

再加熱温度を評価するのによく用いられる方法は、インフラトンの運動方程式 (4.2) に他の場への崩壊の影響を表す項 $\Gamma_\phi \dot{\phi}$ を加えた

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi \dot{\phi} + V' \approx 0 \quad (4.37)$$

を用いる方法である [19, 25]。ここで、 Γ_ϕ はインフラトン場の他の場への崩壊幅である。この方程式を用いることで再加熱温度を比較的簡単に出すことはできるが、いくつかの点で、この方程式の正当性、妥当性に疑問が残る。

まず、このインフラトンの崩壊を記述する項は元々場の量子論的に導出されたものではなく、現象論的に手で入れられたものである。いくつかの条件の下、この項を場の量子論から導出した仕事が存在するが [25–28]、その条件は場の値が大きく振動するような状況では満たされない。そこで、インフレーション直後で場の値が大きく、かつ、激しく振動

する状況下での系の振る舞いが場の理論的に解析され、非摂動的な効果により粒子生成が起こることが発見された [9, 25, 29–31]。これらの研究によると、摂動的に評価した再加熱温度を劇的に変えてしまうほどの粒子生成が起こるためには、結合定数などのパラメータに関して微調整が必要であり、典型的には摂動的な評価で見積れることがわかる。ただし、プレヒーティングの時期にインフラトンの激しい振動により非摂動的に生成される励起は非常にエネルギーが高くなる場合があり、インフレーション模型として適応限界がプランクスケールより大幅に低い模型を用いている場合には、励起のエネルギーがその理論の適用限界を超えてしまい、ユニタリティが破れる可能性がある。これをユニタリティの問題といい、前節で議論した非最小結合を含むインフレーション模型でも発生する場合がある。 [32–34]。

5 古典的スケール不変な素粒子拡張模型に基づく 宇宙のインフレーション

1章で言及したように、素粒子論における重要なスケールとして電弱スケール $\Lambda_{EW} \sim \mathcal{O}(10^2)\text{GeV}$ とプランクスケール $m_P \sim \mathcal{O}(10^{19})\text{GeV}$ があり、これら二つのスケールになぜこれ程までの大きな開きがあるのかという問いは階層性問題と呼ばれている。階層性問題を解決するには、電弱スケールがどのように生成されるかという起源を説明できれば良い。ここでは、プランクスケールの存在は素なラグランジアンレベルで仮定している³。スケールの起源を説明するには、一旦、素なラグランジアンレベルでスケールを全て禁止し、ダイナミクスによってスケールを生成すれば良い。SMにおいては、ゲージ対称性によってフェルミオン場とゲージ場の質量項が禁止されているが、ヒッグス場の質量項は禁止されておらず、ヒッグス質量パラメータがSMラグランジアン中の唯一のスケールであり、これがまさに電弱スケールになる。古典的スケール不変性を課すことで、ヒッグス場の質量項を禁止し、電弱スケールも素なラグランジアンレベルで禁止できる。ただし、プランクスケールの存在は認めるという立場を取るため、この古典的スケール不変性はプランクスケール以下で近似的に成り立つ対称性として要求するわけである。

スケールをダイナミクスによって生成する方法は大きく分けて、摂動的にスケールを生成する方法と、非摂動的にスケールを生成する方法がある。前者はColeman-Weinberg機構と呼ばれており、この機構を用いてEWSBを起こす模型の研究は例えば、[36,37]などで行われている。一方、後者の例はQCDにおける $D\chi$ SBである。この機構を用いて電弱スケールを生成する模型の研究も行われている [5,38–40]。これらの $D\chi$ SBを用いた先行研究では、基本的にTeVスケールの物理を議論しているが、(プランクスケール以下での)古典的スケール不変性を要求する以上、プランクスケール以下のスケールを新たにラグランジアンに導入すること無しで、高エネルギー物理を全て説明できなくてはならない。プランクスケール以下の物理で最もエネルギーの高い現象の一つが宇宙のインフレーションであり、本章では先行研究 [5] で提案された古典的スケール不変模型をさらに拡張することで、インフレーションをTeVスケールの物理と同時に説明することを目指す。

この先行研究の模型では、QCD-likeな隠れた (hidden QCD, HQCD) セクターを導入し、そこでの $D\chi$ SBによって生成されるHQCDスケール Λ^{HQCD} を、新たに導入したSMシングレット実スカラー場 S によってヒッグス場に伝達することで、EWスケールを説明している。この時、 $D\chi$ SBに伴うpNGボソンとしてhiddenパイオンが生成されるが、これがダークマターとして振る舞う。この模型では高エネルギーではスカラー場が二種類のみ存在し、それはヒッグス場 H と S である。インフレーションが起きるためには、スカラー場のポテンシャルの形状が非常に重要であり、従って、スカラー場間の結合定数が非常に重要となる。トップクォークの湯川結合定数には大きな不定性があるが、この湯川結合定数が大きい場合には1ループレベルでヒッグス場 H の4点結合定数 λ_H はあるエネルギースケールで0を横切り、より高エネルギーで負となることがわかる。この模型ではヒッグス場 H と S との結合定数 $-\lambda_{HS}$ も負であり、ポテンシャルの谷での値が負になっ

³プランクスケール m_P を質量や結合定数と捉えるのではなく、光速 c やプランク定数 h と同様に、基礎定数と捉えるべきという考え方もある [35]。

てしまう。スローロールインフレーションはポテンシャルの谷をゆっくりと転がることで起こるが、その時のポテンシャルの値が負ではインフレーションは起こせない。

そこで、本章では SM シングレットな実スカラー場 η をさらに追加してヒッグス場 H との大きな結合定数 $\lambda_{H\eta}$ を持たせることで、インフレーションのスケール以下で λ_{HS} の符号を変えて S 軸上に谷を作り、インフレーションを実現する。副産物として、ここで新たに導入したスカラー場 η によって、ヒッグス場の自己結合定数 λ_H も常に正とすることができる。負となる場合には、真空の不安定性を引き起こす可能性があり、解析が複雑になるため、本章ではプランクスケールまで常に正になることを要求する。 η とヒッグス場との相互作用 $\lambda_{H\eta}$ は大きくなければならないが、この制約により、インフラトンとして振る舞えるのは S のみとなる。もしヒッグス場や η がインフラトンとして振る舞った場合、 $\lambda_{H\eta}$ が大きいために、プレヒーティング期に生成される励起のエネルギーが模型の適用限界を超え、ユニタリティの問題が発生するためである。再加熱はインフレーション後には必須であるが、古典的スケール不変性の要請によってインフレーション直後には S は質量を持たないため、効率的には起こらず、HQCD セクターで $D\chi$ SB が起こって S が質量を得た後に起こる。

本章の構成は、以下の通りである。5.1 節では本章で扱う模型が持つ対称性や場の説明を行う。5.2 節では、インフレーションのスケールでのスカラーポテンシャルの形状と CMB 観測からの制限について触れる。5.3 節では、一度インフレーションから離れ、スカラーポテンシャルに関連して、真空の安定性について議論する。5.4 節では、単一インフラトン場の場合の一般的なユニタリティ問題についてのレビューを行い、さらにユニタリティからのスカラー場間の結合定数への制限を導出する。5.5 節では、再加熱過程について議論し、荒い近似ではあるが再加熱温度の見積もりを行う。5.6 節では、電弱スケール生成のレビューを行い、ダークマターの物理も議論する。特に、新たに導入された実スカラー場 η が現在の観測結果に抵触しないかどうかを議論する。

5.1 古典的スケール不変な素粒子拡張模型

この節では、SM に導入する場や対称性を紹介する。基本的な構造は先行研究 [5] の模型と同様で、まず SM に古典的スケール不変性を課すことで、ヒッグス場の質量項を禁止し、QCD に似た構造を持つ Hidden QCD (HQCD) セクターを導入してスケールを生成させ、その隠れたセクターと SM をつなぐ実スカラー場を導入することで生成されたスケールを電弱スケールに移す。先行研究と比べて新しい点は、 Z_2 -奇のシングレット実スカラー場 η を導入する点である。具体的には、表 1 ような場を導入する。 G_{SM} は SM のゲージ対称性を表し、 $SU(3)_H$ は隠れたセクターのゲージ対称性を表す。 q_i は HQCD セクターの hidden クォークで、ベクターライクフェルミオンであり、QCD におけるクォークに対応する。添え字の i はフェルミオンのフレーバーを表し、フレーバー数は 3 である。 S が Z_2 -偶なシングレット実スカラー場、 η が Z_2 -奇なシングレット実スカラー場である。 Z_2 対称性はヒッグス粒子の混合の小ささにとって重要である。ここで、本章での解析は全て、[5, 40] や 2.3 節と同様にグルーオン場やカラー自由度が陽に現れない南部-ヨナ-ラシニオ (NJL) の方法で取り扱うので、hidden グルーオン場は省略した。hidden セクター

	q_i	S	η
G_{SM}	1	1	1
$SU(3)_H$	3	1	1
Z_2	even	even	odd

表 1: 新たに導入される場と対称性。 G_{SM} は SM のゲージ対称性を表し、 $SU(3)_H$ は隠れたセクターのゲージ対称性を表す。 隠れたセクターのクォーク場 q_i とシングレットスカラー場 S は先行研究のモデルで既に導入されているものであるが、 Z_2 -奇のシングレットスカラー場 η は導入されていない。 この新しいスカラー場 η がインフレーションにおいて重要な役割を果たす。

のラグランジアンは

$$\mathcal{L}_H = \bar{q}_i(i\cancel{\partial} - yS)q_i$$

と表され、スカラーポテンシャルは

$$V = \lambda_H(H^\dagger H)^2 - \frac{1}{2}\lambda_{HS}S^2H^\dagger H + \frac{1}{4}\lambda_S S^4 + \frac{1}{2}\lambda_{H\eta}\eta^2H^\dagger H + \frac{1}{4}\lambda_{S\eta}S^2\eta^2 + \frac{1}{4}\lambda_\eta\eta^4 \quad (5.1)$$

である。簡単のために hidden クォーク q_i と S の湯川結合定数 y は全てのフレーバーに対して同一とした。この場合、 $D\chi\text{SB}$ 後に残るフレーバー対称性は $SU(3)_V$ となる。 $D\chi\text{SB}$ やそれにより引き起こされる EWSB、ダークマターとして振る舞う hidden パイオンの物理などの詳細は 5.6 節で議論する。

5.2 インフレーション

3 章や 4 章で述べたように、宇宙の初期に標準宇宙論では物質と放射のみが存在すると仮定したため、

- 地平線問題
- 平坦性
- 大規模構造の起源

という初期値問題が発生するが、これらの問題は宇宙初期に宇宙項として振る舞うものが存在していれば解決される。最も簡単な例の一つはスローロールインフレーションであるが、4.1 で解説した単純なカオティックインフレーションは PLANCK 観測から既に排除されている [6]。しかし、4.2 で解説したように、インフラトンと重力との非最小結合を持つインフレーションモデルは観測と矛盾しない CMB ゆらぎを再現できる [22, 23]。特に、SM のヒッグス場がインフラトン場として振る舞うヒッグスインフレーションでは、この非最小結合によって観測と矛盾しない CMB ゆらぎを再現している [8, 41, 42]。本章では S が重力との非最小結合 ξ_S を持ち、インフラトンとして振る舞うというシナリオを考える。

スローロールインフレーションでは宇宙の量子力学的状態での場の期待値たる古典場の値がフィールドスペース上をゆっくりと転がることにより起こり、そして古典的に考える限り、谷ではなく尾根の上を転がることもできる。しかし、実際には量子ゆらぎが存在しているため、ナイーブに考えると尾根を転がり続けることはできず、谷に落ち込むため、谷を転がるのがより自然である。この節では、本章で提案するモデルのポテンシャルについて議論する前に、まずその元となった先行研究のモデルのポテンシャル形状について議論し、新たな拡張無しにはインフレーションを説明することが難しいことを見る。その後、拡張の一つの方向性として Z_2 -奇な実スカラー場 η の導入を考えることで S 軸上の谷の存在が可能となり、 S 軸上でのインフレーションが可能となることを見る。単一インフラトン場が重力との非最小結合を持つモデルでの、CMB 観測結果からの制限としてのインフラトン自己結合定数と非最小結合定数との関係は既に 4.2 節で詳しく議論を行なったので、ここではその結果から引用し、提示するのみとする。

先行研究のモデルでは、 η は存在せず、ヒッグス場 H と実スカラー場 S のみが存在し、そのポテンシャルは (5.1) において $\eta = 0$ と置くことで求められ、

$$\tilde{V}(h, S) = V(H = h/\sqrt{2}, S, \eta = 0) = \frac{1}{4}\lambda_H h^4 - \frac{1}{4}\lambda_{HS} h^2 S^2 + \frac{1}{4}\lambda_S S^4$$

となる。ただし、 h はヒッグス場の動径方向成分である。EWSB が正しく起こるためには、ヒッグス場 H と S の間の結合定数 λ_{HS} は電弱スケールで正でなければならない。さらに、この結合定数は繰り込み群のフローから、プランクスケールまで常に正であることが計算できる。つまり、先行研究のモデルでは常に

$$\lambda_{HS} > 0$$

である。

ポテンシャル上の谷の候補がどこか見るために、 h と S を

$$\begin{aligned} h &= \phi \sin \theta, \\ S &= \phi \cos \theta \end{aligned}$$

というように再定義し、この新たな自由度 ϕ と θ を用いると、ポテンシャルは

$$\tilde{V}(\phi, \theta) = \frac{1}{4}\lambda_H \phi^4 \sin^4 \theta - \frac{1}{4}\lambda_{HS} \phi^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{1}{4}\lambda_S \phi^4 \cos^4 \theta$$

と書ける。谷は少なくともポテンシャルの θ 方向微分が 0 となる場所であるので、

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} = \left[\left(\lambda_H + \frac{1}{2}\lambda_{HS} \right) \sin^2 \theta - \left(\lambda_S + \frac{1}{2}\lambda_{HS} \right) \cos^2 \theta \right] \phi^4 \sin \theta \cos \theta = 0$$

を満たす。この方程式の解は

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0, \\ \cos \theta &= 0, \\ \sin^2 \theta &= \frac{1}{2} \frac{\lambda_{HS} + 2\lambda_S}{\lambda_H + \lambda_{HS} + \lambda_S} \end{aligned}$$

の3パターン存在する。1つ目と2つ目の解はそれぞれ h 軸と S 軸に対応する。従って、 h 軸と S 軸は尾根か谷のどちらかになる。尾根であるか谷であるかを見るために、 h と S を自由度として扱う元のポテンシャルにおいて、 h 方向、 S 方向それぞれの2階微分を求めると

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial h^2}(h=0, S) &= -\frac{1}{2}\lambda_{HS}S^2, \\ \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2}(h, S=0) &= -\frac{1}{2}\lambda_{HS}h^2\end{aligned}$$

となるが、元の模型では λ_{HS} は常に正であるために、これら2階微分は負となる。これは、 h 軸と S 軸は谷ではなく、尾根であることを表している。従って、 h 軸上でも S 軸上でも、インフレーションは起き得ない。このような場合、谷を表し、インフレーション軌道となり得るのは、3つ目の解である。 $\lambda_S > 0$ かつ $\lambda_{HS} > 0$ であるので、角度 θ が実数であるためには、

$$\lambda_H + \lambda_{HS} + \lambda_S > 0$$

である必要がある。さらに、インフレーションがこの谷に沿って起こるためには、ポテンシャルのこの谷上での値が正である必要があり、

$$\tilde{V}|_{\text{valley}} = \frac{1}{4}\phi^4 \frac{4\lambda_H\lambda_S - \lambda_{HS}^2}{4(\lambda_H + \lambda_{HS} + \lambda_S)} > 0$$

を得る。従って最終的に、先行研究の模型でインフレーションが起こる条件として

$$4\lambda_H\lambda_S - \lambda_{HS}^2 > 0$$

が得られる。もしヒッグス場の自己結合定数 λ_H がインフレーションのスケールで負であった場合、この条件は破られ、インフレーションは起こり得ないことがわかる。SM や先行研究の模型ではヒッグス場の自己結合定数 λ_H はトップクォークの湯川結合定数 y_t の値に大きく依存しており、またその値は実験的に不定性がある。従って、今後の観測結果によっては先行研究の模型のままでもインフレーションが起こせる可能性はある。しかしながら、繰り込み群方程式による解析によって求まる y_t の値 (5.3) では、 λ_H があるスケールで負になることは避けられず、インフレーションの説明はできない。この場合、スローロールインフレーションが起きるためには、

- ヒッグス場 H の自己結合定数 λ_H を正、かつ、 $\lambda_{HS}^2/4\lambda_S$ より大きくし、 h - S 混合場をインフラトン場として振る舞わせる
- ヒッグス場 H と S との間の結合定数 λ_{HS} をインフレーションのスケールで負にすることで、 h 軸と S 軸を谷にし、 h または S をインフラトン場とする
- 新たにインフラトン場としてスカラー場を導入する

という方向性があるが、本章では2つ目の方向性を考え、 S -インフレーションのケースを考えるわけである。

本章で提案するモデルでは、 h と S 間の結合定数 λ_{HS} は

$$(4\pi)^2 \mu \frac{d\lambda_{HS}}{d\mu} = -2\lambda_{HS} \left(2\lambda_{HS} - 3\lambda_S + \frac{9}{4}g_2^2 + \frac{3}{4}g_1^2 - 3y_t^2 - 6\lambda_H - 18y^2 \right) - \lambda_{H\eta}\lambda_{S\eta} \quad (5.2)$$

という繰り込み群方程式に従う。 y_t 、 g_1 、 g_2 はそれぞれ、トップクォークの湯川結合定数、 $U(1)_Y$ ゲージ結合定数、 $SU(2)_L$ ゲージ結合定数である。これら結合定数と $SU(3)_C$ ゲージ結合定数の数値として、トップクォーク質量スケール $\mu = 173\text{GeV}$ で

$$\begin{aligned} y_t &= 0.937, \\ g_1 &= 0.359, \\ g_2 &= 0.648, \\ g_3 &= 1.17 \end{aligned} \quad (5.3)$$

という数値を用いる [43]。さらに、hidden カラー $SU(3)_H$ ゲージ結合定数をエネルギースケール $\mu = 1\text{TeV}$ で

$$g_4 = 4\pi \quad (5.4)$$

と取る。先行研究のモデルでは、 $6\lambda_{HS}y_t^2$ という項が支配的かつ、正であるために、 λ_{HS} は単調増加し、常に正となる。一方、本章のモデルでは、新たに $-\lambda_{H\eta}\lambda_{S\eta}$ という項が現れるが、もしこの項が負であり、その絶対値が $6\lambda_{HS}y_t^2$ より大きければ、 λ_{HS} は減少して負となり得る。すぐ下や5.4節で見ると、 S と η 間の結合定数 $\lambda_{S\eta}$ はユニタリティからの制限によって、大きな値は取れない。よって、ヒッグス場 H と η 間の結合定数 $\lambda_{H\eta}$ を大きく取る。 $\lambda_{H\eta} \sim \mathcal{O}(10^0 \sim^{-1})$ の時、 λ_{HS} は図1のように λ_{HS} はインフレーションのスケールで負となることができる。従って、このスケール以上では S 軸上に谷ができ、 S がインフラトンとして振る舞える。どのスケールで符号が変わるかは主に λ_{HS} の初期値 (電弱スケールでの値) で決まり、 $(10^{-4}, 7 \times 10^{-4})$ の範囲では、そのスケールは $\mathcal{O}(10^{5 \sim 13})\text{GeV}$ となる。電弱スケールでの λ_{HS} の値が大きければ大きいほど、符号の変わるスケールは高くなる。5.5節にて再加熱温度を計算する際にある近似を行なっているが、この近似にとって λ_{HS} の符号が変わるスケールは重要な量となる。

なお、 $\lambda_{H\eta}$ も常に正になるため、ヒッグス場や η の軸上にも谷はできるが、これらの場でインフレーションが起こったとすると、5.4でも見るように H - η 間の相互作用が大きすぎ、プレヒーティング中にユニタリティが破れるため、ヒッグス場と η はインフラトンにはなれない。⁴

上で述べたように、重力と最小結合しているインフラトン場によるカオティックインフレーションモデルは既にCMBの観測によって排除されている [6]。CMBの観測結果を正し

⁴5.6で見ると、HQCDセクターで $D\chi\text{SB}$ が起こった後には σ メソンが現れるが、本章で提案するモデルではこの破れのスケールはインフレーションのスケールに比べて非常に低い (TeV スケール) ため、インフラトン候補とはならない。このような σ メソンがインフラトンとして振る舞うシナリオ、あるいはモデルは [44, 45] で議論されている。

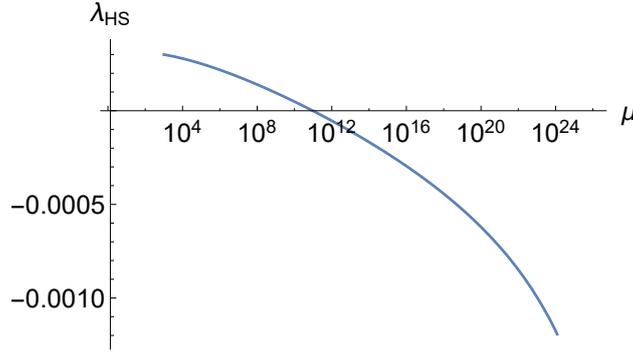


図 1: λ_{HS} のくりこみ群フロー。 $\lambda_{H\eta}$ からの寄与により $\mathcal{O}(10^{11})\text{GeV}$ で符号が変わる。このスケールはインフレーションの起こる $\mathcal{O}(10^{16})\text{GeV}$ より低いため、ポテンシャルは S 軸上に谷を持ち、谷はインフラトン経路になる。

く再現するには非最小結合を取り入れればよく [8, 22, 23, 41, 42]、 $N_* = 60$ では、(4.32) と (4.33) で記載したように、スペクトル指数 n_{s*} とテンソル-スカラー比 r_* は

$$n_{s*} \simeq 0.965,$$

$$r_* \simeq 0.03$$

となり、観測とよく合う。非最小結合定数への制限は (4.34) で記載したスカラー揺らぎ A_{s*} の観測結果

$$A_{s*} \approx 2.5 \times 10^{-9}$$

から来ており、(4.35) で既に導出してある。しかし、5.5 節での一般的な議論のために、表記を変えたものを再度提示する。まず、インフラトン場に関する量には添字 I を付けることにする。つまり、リッチスカラーとの非最小結合定数を ξ_I とし、自己 4 点結合定数を λ_I とする。 ξ_I と λ_I の関係への制限は

$$\xi_I \simeq 4.7 \times 10^4 \sqrt{\lambda_I} \quad (\text{at inflationary scale}) \quad (5.5)$$

となる。

5.3 真空の安定性

この節では、インフレーションから少し離れ、本章のモデルでの真空の安定性について議論する。

SM ではヒッグス場の 4 点結合定数 λ_H に対するくりこみ群方程式は 1 ループのレベルで

$$(4\pi)^2 \mu \frac{d\lambda_H}{d\mu} = \lambda_H (-9g_2^2 - 3g_1^2 + 12y_t^2) + 24\lambda_H^2 + \frac{3}{4}g_2^4 + \frac{3}{8}(g_1^2 + g_2^2)^2 - 6y_t^4 \quad (5.6)$$

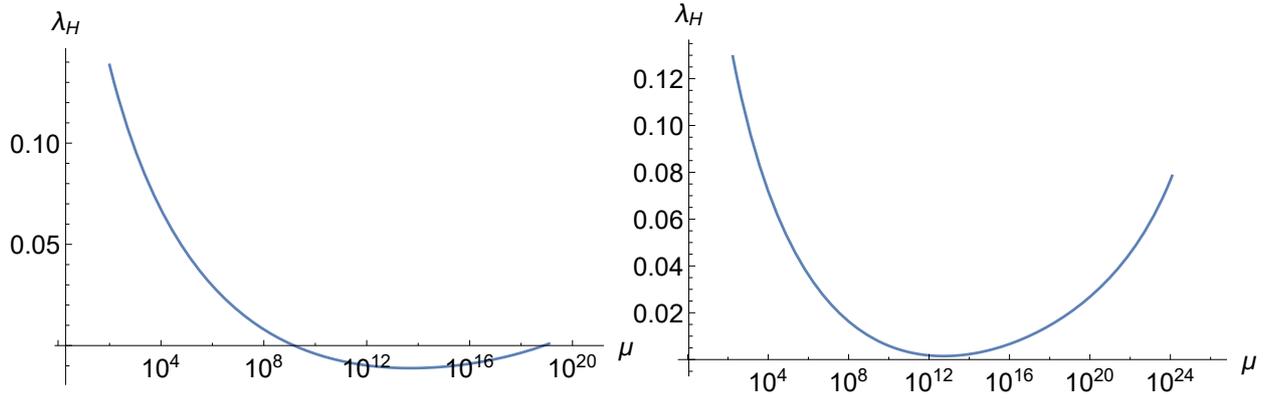


図 2: λ_H の SM 中 (左) と本章の模型中の **BP3** (ベンチマークポイント 3)(右) でのくりこみ群フロー。SM では λ_H は $\mathcal{O}(10^9)$ GeV で負になるが、本章の模型では $\lambda_{H\eta}$ により常に正となり得る。

とかける。 y_t はトップクォークとの湯川結合定数であるが、これが大きいために $-6y_t^4$ という負の寄与を与える項の影響が大きく、 λ_H は図 2 の左のように負になりうる。実際に λ_H が負になるかどうか、負に変わる場合、スケールはどの辺りか、そして、ポテンシャルの大域的な最小値はどのくらいか、は全てトップクォークの湯川結合定数の値に非常に強く依存している。このような λ_H の振る舞いは、真空の不安定性を導く可能性がある [46–49]。現時点ではトップクォークの湯川結合定数の不定性が大きいので、 λ_H が負になるかどうか、真空が不安定となるかどうか、はっきりとしたことは言えない。安定な可能性も、準安定 (metastable) な可能性もある。

先行研究で用いられた模型ではヒッグス場にスカラー場 S が λ_{HS} で結合しており、 λ_H に対する正の寄与を与えはするが、 λ_{HS} の値が小さいために、この状況は大きくは改善されていない。一方、本章で考える模型では新たにスカラー場 η が導入されていることで、くりこみ群方程式は

$$(4\pi)^2 \mu \frac{d\lambda_H}{d\mu} = \lambda_H (-9g_2^2 - 3g_1^2 + 12y_t^2) + 24\lambda_H^2 + \frac{3}{4}g_2^4 + \frac{3}{8}(g_1^2 + g_2^2)^2 - 6y_t^4 + \frac{1}{2}(\lambda_{HS}^2 + \lambda_{H\eta}^2) \quad (5.7)$$

と改善され、さらに η とヒッグス場との結合定数 $\lambda_{H\eta}$ は $\lambda_{H\eta} \sim \mathcal{O}(10^0 \sim -1)$ 程度に大きいので、状況が大きく変わりうる。つまり、 λ_H が図 2 の右のように常に正の値を取り得る [37]。 $\lambda_{H\eta} \lesssim 0.38$ の時には、 λ_H が負となる領域が出てくる。一方、 $\lambda_{H\eta} \gtrsim 0.55$ の時には、 λ_H はプランクスケール $M_P \simeq 1.22 \times 10^{19}$ GeV 以下の領域でランダウポールを持ち、摂動計算が信用できなくなる。上記の計算では、(5.3) のパラメータセットを用いたが、上述の通り、トップクォークの湯川結合定数 y_t の値には不定性がある。実は、より小さい y_t に対しては、 $\lambda_{H\eta}$ は上記の下限值はより下がり得て、0 となることも可能である。しかしながら、本章では 5.2 節で述べたように、インフラトン軌道として S 軸上に谷が生成されるシナリオを考えているため、これによって $\lambda_{H\eta}$ には $0.1 \lesssim \lambda_{H\eta}$ という制限がつく。真空安定性について詳細に議論を行うと複雑になるので、簡単のために本章では y_t の値はパラ

メータセット (5.3) の値で固定し、その値での絶対安定性 $\lambda_H > 0$ を課す。これによって、 $\lambda_{H\eta} \in (0.38, 0.55)$ という制限を得る。

スカラーポテンシャル中の $-(\lambda_{HS}/2)(H^\dagger H)S^2$ という項は表 2 と (5.10) で表されるベンチマークポイントでは EWSB を説明するために EW スケールで負の符号を持つが、 λ_{HS} の値は安定性の条件

$$2\sqrt{\lambda_H\lambda_S} - \lambda_{HS} > 0$$

を満たすに十分小さく、また、5.2 節で議論したように、エネルギースケールの増加に伴って λ_{HS} は負となるので、プランクスケール以下の全てのエネルギースケールで、この安定性の条件が破られることはない。他のスカラー結合定数の安定性条件

$$\begin{aligned} \lambda_H > 0, \lambda_S > 0, \lambda_\eta > 0, \\ 2\sqrt{\lambda_H\lambda_\eta} + \lambda_{H\eta} > 0, 2\sqrt{\lambda_S\lambda_\eta} + \lambda_{S\eta} > 0 \end{aligned}$$

も全て、表 2 と (5.10) で表されるベンチマークポイント付近では常に満たされている。

5.4 ユニタリティ問題

アインシュタイン重力理論と SM のカットオフスケールはプランクスケール m_P である。しかし、ヒッグスインフレーションや本章で考えるようなインフラトンが重力と非最小結合しているモデルでは、カットオフスケールがプランクスケール m_P より大幅に下がってしまう可能性がある。このような場合、カットオフスケール以上の運動量を持つ散乱過程に対して、摂動的ユニタリティが破れる。プレヒーティング中に生成される励起は非常に大きな運動量を持つ可能性があり、これら励起の典型的な運動量がカットオフスケールを越えないかを確認する必要がある。

以下で、複数のスカラー場 ϕ_j が存在し、そのうちのひとつ ϕ_I のみがインフラトンとして振る舞い、かつ、インフラトン場 ϕ_I がリッチスカラーと非最小結合しているようなモデルに対するカットオフスケールの表式を一般的な形で与える。ここで、添字 j は j 番目のスカラー場に関する量、 I をインフラトン場に関する量とする。また、アインシュタインフレームで考える。アインシュタインフレームでは、 ϕ_I はカノニカルに規格化されており、規格化された場を χ_I とする。カットオフスケール $\Lambda_E(\chi_I)$ は

$$\Lambda_E(\chi_I) \simeq \begin{cases} M_P/\xi_I & \chi_I \ll M_P/\xi_I & (\phi_I \ll M_P/\xi_I) \\ \chi_I & M_P/\xi_I \ll \chi_I \ll M_P & (M_P/\xi_I \ll \phi_I \ll M_P/\sqrt{\xi_I}) \\ M_P & M_P \ll \chi_I & (M_P/\sqrt{\xi_I} \ll \phi_I) \end{cases}$$

と表される [33]。ここで、 M_P は

$$M_P = \frac{m_P}{\sqrt{8\pi}} \simeq 2.44 \times 10^{18} \text{ GeV}$$

で定義される。散乱現象のスケールにおいて、インフレーション中は宇宙の状態が真空状態ではなく、背景場としてインフラトン場が存在している状態となっているため、カッ

トオフスケールもインフラトン場 χ_I の値に (そしてしたがって、 ϕ_i にも) 依存している。 $\chi_I \simeq \phi_I \ll M_P/\xi_I$ でのカットオフ $\Lambda_E \simeq M_P/\xi_I$ は [32] でも言及されている真空上での散乱の場合のカットオフと一致する。

まずは、インフレーション中のユニタリティについて触れよう。インフレーション中に生成される励起の典型的な運動量はハッブルパラメータの値で見積もることができ、

$$\hat{H} \simeq \frac{\sqrt{\lambda_I} M_P}{4\xi_I}$$

程度となる。また、エネルギー密度は

$$\rho_S \simeq \hat{V}_I \simeq \frac{\lambda_I M_P^4}{4\xi_I^2}$$

というように見積もることができる。典型的運動量はカットオフスケール $\Lambda_E \simeq M_P$ より大幅に低く、また、エネルギー密度もカットオフスケールの4乗 $\Lambda_E^4 \simeq M_P^4$ より大幅に低いため、インフレーション中にはユニタリティの破れは起こらないと言って良い。

インフレーション後には再加熱が起こるが、その初期段階において非摂動的効果によって爆発的な粒子生成が起こる可能性が指摘されており、この時期を特にプレヒーティングという。次はプレヒーティング中のユニタリティについて議論する。プレヒーティング中に生成される j 番目の場の励起のアインシュタインフレームでの典型的な運動量は

$$k_{j,\text{typ}} \sim \begin{cases} q_j^{1/3} m_{I,\text{eff}} & (j \neq I) \\ \sqrt{\lambda_I} \chi_I & (j = I) \end{cases}$$

と表される [50, 51]。ここで、レゾナンスパラメータ q_j は

$$q_j \sim \frac{M_P^2}{m_{I,\text{eff}}^2} \frac{\lambda_{Ij}}{\xi_I}$$

で定義され、アインシュタインフレームでの正準規格化されたインフラトン場 χ_I の有効質量 $m_{I,\text{eff}}$ は

$$m_{I,\text{eff}}^2 = \frac{\lambda_I M_P^2}{3\xi_I^2}$$

で定義される。

ユニタリティの破れが起こらないためには、この典型的な運動量 $k_{j,\text{typ}}$ がカットオフ $\Lambda_E(\chi_I)$ を超えてはいけない。したがって、

$$k_{j,\text{typ}} \lesssim \Lambda(\chi_I)$$

の制限を得る。インフラトン場の4点結合定数 λ_I がインフレーションのスケールにおいてほとんど定数であれば、上の典型的運動量 $k_{j,\text{typ}}$ に対する制限は結合定数 λ_I 、 λ_{Ij} に対する制限

$$\begin{aligned} \lambda_I \lambda_{Ij} &\lesssim 3.7 \times 10^{-5} & \text{at } \chi_I \sim M_P/\xi_I & \quad (\mu = \phi_I \sim M_P/\xi_I), \\ \lambda_I &\lesssim 1 & \text{at } M_P/\xi_I \lesssim \chi_I \lesssim M_P & \quad (M_P/\xi_I \lesssim \mu = \phi_I \lesssim M_P/\sqrt{\xi_I}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

	λ_{HS}	λ_S	$\lambda_{H\eta}$	$\lambda_{S\eta}$	y
BP1	$= 7 \times 10^{-4}$	$= 5 \times 10^{-3}$	$= 0.55$	$\simeq 6.01 \times 10^{-3}$	$\simeq 7.63 \times 10^{-5}$
BP2	$= 5 \times 10^{-4}$	$= 5 \times 10^{-3}$	$= 0.38$	$\simeq 6.77 \times 10^{-3}$	$\simeq 7.63 \times 10^{-5}$
BP3	$= 3 \times 10^{-4}$	$= 4 \times 10^{-3}$	$= 0.38$	$\simeq 5.57 \times 10^{-3}$	$\simeq 6.11 \times 10^{-5}$
BP4	$= 5 \times 10^{-4}$	$= 4 \times 10^{-3}$	$= 0.38$	$\simeq 5.27 \times 10^{-3}$	$\simeq 6.11 \times 10^{-5}$

表 2: ベンチマークポイント。

	$\lambda_S \lambda_{HS}$	$\lambda_S \lambda_{S\eta}$	λ_S
BP1	$\simeq 2.0 \times 10^{-6}$	$\simeq 3.7 \times 10^{-5}$	$\simeq 5.1 \times 10^{-3}$
BP2	$\simeq 8.3 \times 10^{-7}$	$\simeq 3.7 \times 10^{-5}$	$\simeq 5.1 \times 10^{-3}$
BP3	$\simeq 1.1 \times 10^{-6}$	$\simeq 2.5 \times 10^{-5}$	$\simeq 4.1 \times 10^{-3}$
BP4	$\simeq 2.2 \times 10^{-9}$	$\simeq 2.3 \times 10^{-5}$	$\simeq 4.1 \times 10^{-3}$

表 3: ベンチマークポイントでのエネルギースケール $\mu \simeq 10^{15} \text{GeV}$ での結合定数やその積の値

を与える。ここで、走る結合定数のエネルギースケール μ としてはアインシュタインフレームでの正準規格化されたインフラトン場 χ_I ではなく、ジョルダンフレームでのインフラトン場 ϕ_I を用いた。くりこみ群方程式を求める際には重力との非最小結合はくりこみ不可能になることから無視しており、この時にはアインシュタインフレームへの変換自体が行えないため、ジョルダンフレームで計算していると解釈しているわけである⁵。

この制限 (5.8) を、本章で扱う模型での S がインフラトンとして振る舞う S -インフレーションの場合に焼き直すと

$$\begin{aligned}
\lambda_S \lambda_{HS} &\lesssim 3.7 \times 10^{-5} & \text{at } \mu \sim M_{\text{P}}/\xi_S \\
\lambda_S \lambda_{S\eta} &\lesssim 3.7 \times 10^{-5} & \text{at } \mu \sim M_{\text{P}}/\xi_S \\
\lambda_S &\simeq \text{const.} \lesssim 1 & \text{at } M_{\text{P}}/\xi_I \lesssim \mu \lesssim M_{\text{P}}/\sqrt{\xi_I}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

を得る。ただし、インフラトン場の自己結合定数がインフレーションスケールでほぼ一定であるという条件も入れ込んだ。

この制限 (5.9) を満たすベンチマークポイントは表 2 の通りである。ただし、全てのベンチマークポイントに対して、

$$\lambda_H \simeq 0.129, \lambda_\eta = 10^{-2} \tag{5.10}$$

とした。これらのベンチマークポイントにおいて、ユニタリティからの制限 (5.9) は満たされていることが表 3 からわかる。 $\lambda_S \lambda_{HS}$ の値はユニタリティの制限 (5.9) の上限に近くなっているが、超えてはいない。許されるパラメータスペースは表 2 と (5.10) で表される

⁵フレームによる場の値の差はプレヒーティングのユニタリティを議論する際には、ほとんど影響はない。フレームの差の影響が出るのはインフレーション中のユニタリティや摂動論の信頼性を考える場合である。もしアインシュタインフレームでの場の値 χ_I をエネルギースケールとして用いるなら、全ての結合定数がプランクスケール m_{P} を超えるスケールでもランダウポールが無いことを示す必要がある。

ベンチマークポイントに非常に近く、また非常に狭い。もし λ_S がベンチマークポイントでの値より大幅に大きいと摂動的ユニタリティが破れる。一方で、 λ_S がベンチマークポイントでの値より大幅に小さいと S の粒子がヒッグス粒子と大きく混合してしまったり、hidden パイオンの残存量がダークマターの残存量の観測値 $\Omega_{\text{DM}} \hat{h} \simeq 0.12$ より大きくなってしまう。

また、もう一つ重要な点として、 $\lambda_H \lambda_{H\eta}$ 、 $\lambda_\eta \lambda_{H\eta}$ 、 $\lambda_\eta \lambda_{S\eta}$ に対してはユニタリティからの制限 (5.8) を満たせないため、ヒッグス場と η はインフラトンとしては振る舞えないということがわかる。本章の模型において、SM パラメータのセットとして (5.3) を用いて、さらに h 軸と S 軸上の谷ができるようなシナリオでは、 S -インフレーションが唯一可能なインフレーションである。ここでは議論しないが、インフレーションスケールで λ_{HS} が負に変わることを要求せずに、 η がインフラトンとして振る舞える可能性はある。また、別の可能性として、[52,53] で議論されているような self-healing 機構によってユニタリティからの制限を緩和できれば、 h がインフラトンとして振る舞ったり、パラメータスペースが広がるかもしれない。

5.5 再加熱

インフレーション以前に宇宙に存在していた粒子はインフレーションによって希釈される。従って、インフレーション後には宇宙の量子状態は粒子が飛び回る熱平衡状態というよりもむしろ粒子が存在しない真空状態に近くなる。しかし、現在の宇宙を説明するためにはインフレーション後には高温・高密度の時代が必要である。非最小結合の有無を問わず、カオティックインフレーションではインフラトン場はインフレーション後も大きな場の値を持ち、従って大きなエネルギー密度を持つ。このインフラトン場のエネルギーが放射に転化されることで、インフレーションにより真空状態に近くなった宇宙を熱平衡状態に戻すことができる。これを再加熱という。この節では再加熱後の温度 (再加熱温度) T_R を求める。

5.6 節で見えるように、本章の模型では EWSB は HQCD セクターでの $D\chi\text{SB}$ によって引き起こされる。この $D\chi\text{SB}$ の起こるスケール (HQCD スケール) を Λ_{HQCD} と書こう。この HQCD スケールは以下の二式

$$\begin{aligned} 246\text{GeV} &= v_h = f \times v_h^{\text{QCD}}, \\ \Lambda^{\text{HQCD}} &= f \times \Lambda^{\text{QCD}} \end{aligned}$$

によって決定される。ここで、 f は現実の QCD での量から HQCD での量へのスケールアップ因子である。第一式は電弱スケールの物理から来るもので、第二式は現実の QCD の物理から来るものである。QCD スケール $\Lambda_{\text{QCD}} \sim \mathcal{O}(1)\text{GeV}$ は現実の中間子の物理を記述できるように決定される。 v_h^{QCD} は全てを現実の QCD でのパラメータで計算した場合のヒッグス場の真空期待値である。つまり、計算の流れとしては、まず現実の中間子の物理を最も精度よく記述できるように、パラメータを調整し、その後、そのパラメータの下での $D\chi\text{SB}$ を解析し、ヒッグス場の真空期待値 v_h^{QCD} を求める、そして最後にどれだけスケールアップするとヒッグス場の真空期待値が 246GeV になるかを求め、全ての QCD

パラメータを一斉にスケールアップするのである。表2でのベンチマークポイントにおいては、

$$f \sim \mathcal{O}(10^5)$$

となり、従って HQCD セクターでの $D\chi SB$ は

$$\Lambda^{\text{HQCD}} \sim \mathcal{O}(10^5)\text{GeV}$$

で起こる。5.2 節で言及したように電弱スケールで $\lambda_{HS} \in (10^{-4}, 7 \times 10^{-4})$ であれば、 λ_{HS} の符号は $\mathcal{O}(10^{5\sim 15})\text{GeV}$ 程度で変わる。ベンチマークポイントでは $\mathcal{O}(10^{9\sim 15})\text{GeV}$ 程度になる。従って、 $D\chi SB$ が起こる時には既に $-\lambda_{HS}$ は負となり、さらに、電弱スケールでの値と近い値を取れるので、以下ではインフラトン場 S は電弱スケールでの値と同様の真空期待値 v_S と質量 m_S を持つとして再加熱の議論を行う。

一旦 S が質量を持てば、 S の崩壊が可能になり、その崩壊幅は

$$\begin{aligned} \Gamma_S &= \Gamma_{S \rightarrow hh} + \Gamma_{S \rightarrow \eta\eta} + \Gamma_{S \rightarrow \phi\phi} \\ &= \frac{(\lambda_{HS}v_S)^2}{32\pi m_S^2} \sqrt{m_S^2 - (2m_h)^2} + \frac{(\lambda_{S\eta}v_S)^2}{32\pi m_S^2} \sqrt{m_S^2 - (2m_\eta)^2} + \frac{(Z_\phi\kappa_s)^2}{32\pi m_S^2} \sqrt{m_S^2 - (2m_\phi)^2} \\ &\simeq \Gamma_{S \rightarrow hh} = \frac{(\lambda_{HS}v_S)^2}{32\pi m_S^2} \sqrt{m_S^2 - (2m_h)^2} \sim \mathcal{O}(10^{-4})\text{GeV} \end{aligned} \quad (5.11)$$

とである。ここで、5.6 節で言及するように、hidden パイオン ϕ と η に対してレゾナンス条件 $m_\phi \simeq m_\eta \simeq m_S/2$ を課すので、部分幅 $\Gamma_{S \rightarrow \phi\phi}$ と $\Gamma_{S \rightarrow \eta\eta}$ は $\sqrt{m_S^2 - (2m_i)^2}$ ($i = \phi, \eta$) の因子で抑制される。さらに、hidden パイオンの波動関数くりこみ定数 Z_ϕ と hidden パイオンと S の 3 点結合定数 κ_s の積 $Z_\phi\kappa_s$ は $\lambda_{HS}v_S$ と比べて小さくなる。このような事情から、(5.11) では最後の表式で $\Gamma_{S \rightarrow \phi\phi}$ と $\Gamma_{S \rightarrow \eta\eta}$ の寄与は無視し、全崩壊幅 Γ_S を単に $\Gamma_{S \rightarrow hh}$ のみで評価した。

$D\chi SB$ が起こるまでは S のコヒーレント振動が宇宙の中で支配的であり、従って、宇宙の全エネルギー密度はこの S のコヒーレント振動のエネルギー密度とほぼ等しくなる。すなわち、

$$\rho_{\text{total}} \simeq \rho_S \simeq \lambda_S S^4 \quad (5.12)$$

となる。この (5.12) を用いることで、 $D\chi SB$ が起こる時のハッブルパラメータは

$$H = \sqrt{\frac{\rho_{\text{total}}}{3M_{\text{P}}^2}} \simeq \sqrt{\frac{\rho_S}{3M_{\text{P}}^2}} \simeq \sqrt{\frac{\lambda_S}{3}} \frac{S^2}{M_{\text{P}}} \simeq 10^{-10}\text{GeV} \quad (5.13)$$

と求まる。 S の崩壊幅 (5.11) とハッブルパラメータ (5.13) を比較すると

$$\Gamma_S \gg H \quad (5.14)$$

を得るが、これは $D\chi SB$ 後には S のコヒーレント振動から放射への崩壊が瞬時に起こることを意味する。このような状況下では、 S の振動のエネルギー ρ_S はほぼ全て放射へと転化されると考えて良い。従って、再加熱直後の放射のエネルギー密度 ρ_r は

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \simeq \rho_S \simeq \lambda_S S^4 \quad (5.15)$$

と求まる。(5.15)に $g_* \sim \mathcal{O}(10^2)$ 、 $\lambda_S \sim \mathcal{O}(10^{-3})$ を代入することで、再加熱温度

$$T_R \sim 10^{-1} \times S \sim 10^4 \text{GeV} \quad (5.16)$$

を得る。5.6節で見ると、ダークマターとして振る舞う hidden パイオンの質量 m_ϕ は (5.16) 以下である。従って、hidden パイオンは熱平衡に達しており、通常の freeze-out のシナリオで残存量が求まる。同様に、 η も熱平衡に達するため、残存量の計算は freeze-out のシナリオで行えて、ダークマターの割合としては十分少なくなり得ることをチェックすることができる。

5.6 TeV スケールの物理

ここまでは、インフレーションに関する物理、すなわちプランクスケール付近の高エネルギーの物理と再加熱を主に扱ってきたが、この節では TeV スケールの物理を議論する。具体的には、

- ヒッグス場の真空期待値
- ヒッグス粒子の質量
- ヒッグス場と他のスカラー場との混合
- ダークマター残存量
- スピン非依存弾性散乱断面積

からの制限について議論する。本章のモデルでは、ヒッグス場が真空期待値を持ち、場が質量を持ち、ヒッグス場が他のスカラー場と混合し、hidden パイオンが存在できるのは、HQCD セクターでの $D\chi\text{SB}$ が起こった後でのみである。従って、この $D\chi\text{SB}$ を定量的に扱う必要がある。5.1節で述べたように、HQCD セクターでの $D\chi\text{SB}$ や hidden パイオンの物理は 2.3 で解説した NJL の方法で扱う。つまり、hidden グルーオン場や hidden カラー自由度を陽に扱うのではなく、低エネルギーの有効理論としての NJL 模型 (2.19) から議論を出発する。ただし、クォーク場 q は現実の QCD における場ではなく、HQCD の場として解釈し、それに伴って複合場 Φ や中間子場 φ 、 ϕ 、 σ なども HQCD セクターにおけるものとする。また、質量行列 \mathbf{m} は湯川相互作用行列 $\mathbf{y}S$ に置き換わる。ここで、本章では HQCD セクターのフレーバー対称性として $SU(3)_V$ 対称な場合のみを考えるため、より正確には

$$\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{y}S = \text{diag}(yS, yS, yS) = yS\mathbf{1}_3 \quad (5.17)$$

というように置き換えるわけである。また、先行研究 [5] の記法と統一するために、4 体フェルミオン相互作用の結合定数を

$$G \rightarrow 2G$$

と置き換え、中間子場 φ の定義も定数倍変えている。

まず、NJL ラグランジアン (2.19) (で $G \rightarrow 2G$ としたもの) において平均場近似を行い、hidden クォーク場を積分して hidden 中間子に対する作用 (2.27) を得る。hidden 中間子の質量や相互作用頂点などを計算するには、まず真空期待値を求める必要がある。現実の QCD の場合の有効ポテンシャルは (2.37) で求まるが、HQCD セクターの場合は (5.17) の置き換えが成されるので、中間子場 σ の値のみならず、 S の値にも依存する。また、 $SU(3)_V$ 対称性のために、 σ は単位行列に比例する。この時、中間子場は

$$\langle \Phi \rangle^T \rightarrow -\frac{1}{4G}\varphi = -\frac{1}{4G}(\sigma + i\phi) = -\frac{1}{4G}(\sigma_a + i\phi_a)\lambda^a$$

というように定義すればよくなり、従って、

$$\begin{aligned} S_{\text{meson}} &= -3i \log \text{Det}[(i\phi_x \mathbf{1}_3 - \Pi)\delta(x-y)] + \int d^4x C, \\ \Pi[\sigma, \phi, S] &= yS\mathbf{1}_3 + (\sigma\mathbf{1}_3 + i\gamma^5\phi) - \frac{G_D}{8G^2} \{ \sigma^2\mathbf{1}_3 + i\gamma^5\sigma\phi + (\phi_a)^2\mathbf{1}_3 - \phi^2 \}, \\ C[\sigma, \phi] &= -\frac{1}{4G} \left\{ \frac{3}{2}(\sigma)^2 + (\phi_a)^2 \right\} + \frac{1}{6} \frac{G_D}{8G^3} \text{tr} \{ \sigma^3\mathbf{1}_3 - 3\sigma\phi^2 \} + \frac{3}{2} \frac{G_D}{8G^3} \sigma(\phi_a)^2 \\ &= -\frac{1}{4G} \left\{ \frac{3}{2}(\sigma)^2 + (\phi_a)^2 \right\} + \frac{1}{2} \frac{G_D}{8G^3} \{ \sigma^3 + \sigma(\phi_a)^2 \}, \end{aligned}$$

というようにまとまる。また、これらから有効ポテンシャルが

$$\begin{aligned} V_{\text{meson}}(\bar{\sigma}, \bar{S}) &= -3 \times 3I_0(\bar{\Pi}(\bar{\sigma}, \bar{S}), \Lambda_{\text{HQCD}}) - \bar{C}(\bar{\sigma}), \\ I_0(m, \Lambda) &= \int^\Lambda \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \log[\det_\gamma(\not{k} - m\mathbf{1}_\gamma)] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\Lambda^4 \log \left[1 + \frac{m^2}{\Lambda^2} \right] - m^4 \log \left[1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right] + m^2 \Lambda^2 \right) + I_0(0), \\ I_0(0, \Lambda) &= \frac{1}{16\pi^2} \Lambda^4 \log[\Lambda^2] - \frac{1}{32\pi^2} \Lambda^4, \\ \bar{\Pi}(\bar{\sigma}, \bar{S}) &= \Pi_{11}[\sigma = \bar{\sigma}, \phi = 0, S = \bar{S}] = y\bar{S} + \bar{\sigma} - \frac{G_D}{8G^2} \bar{\sigma}^2, \\ \bar{C}(\bar{\sigma}) &= C[\sigma = \bar{\sigma}, \phi = 0] = -\frac{3}{8G} \bar{\sigma}^2 + \frac{G_D}{16G^3} \bar{\sigma}^3 \end{aligned}$$

と求まる。ただし、 $\bar{\sigma}$ などのバー付きの量は位置依存性のない定数の古典場とし、hidden パイオン ϕ の第 0 成分 ϕ_0 は他の hidden パイオン場より重くなるため、省いた。さて、この hidden 中間子場のポテンシャルを用いると、本章で扱うモデルの全有効ポテンシャルは、素なスカラー場に関してツリーレベルでは (5.1) を加えればよく、

$$V_{\text{eff}}(\bar{\sigma}, \bar{S}, \bar{H}, \bar{\eta}) = V(\bar{H}, \bar{S}, \bar{\eta}) + V_{\text{meson}}(\bar{\sigma}, \bar{S}) \quad (5.18)$$

とかける。さて、(5.18) の最低点を求めれば真空期待値が求まるが、ヒッグス場の真空期待値が

$$v_h = |\langle H \rangle| = 246 \text{ GeV}$$

となる必要がある。これが TeV スケールの物理からの 1 つ目の制限である。素な場として導入されている場同士の結合定数はユニタリティや真空安定性からの制限などはあるものの、原理的には自由な値を取れる。しかし、 $SU(3)_H$ ゲージ理論の低エネルギー有効模型としての NJL 模型で導入される結合定数 G, G_D と HQCD スケール Λ^{HQCD} は高エネルギーでの物理により決定される量であり、原理的にそれぞれ独立に自由な値は取れない。ここでは HQCD のフレーバー数が 3 で、現実のクォーク場のうちでカイラル対称性が成り立つフレーバー数の 3 (アップ、ダウン、ストレンジの 3 種類) と同一であり、カレントクォーク 質量の細かな違いを除けば、低エネルギーを見る限りは $D\chi\text{SB}$ の起こるスケールの違いしかないため、上記の 3 つのパラメータ ($G, G_D, \Lambda^{\text{HQCD}}$) は QCD でのパラメータ ($G^{\text{QCD}}, G_D^{\text{QCD}}, \Lambda^{\text{QCD}}$) をそのままスケールアップさせたものと同じと考える。そこで、まず、現実の QCD での値 ($G^{\text{QCD}}, G_D^{\text{QCD}}, \Lambda^{\text{QCD}}$) を用いて計算して、その時の真空期待値 (v_σ, v_S, v_h) を求めてから、

$$f = \frac{v_h}{v_h^{\text{QCD}}} \quad (5.19)$$

で求まるスケールアップ因子で全ての真空期待値を一斉にスケールアップすることで求めることにする。ここで、現実の QCD でのパラメータセットとして、元の模型 [5] で用いた値と同一の値

$$(2G^{\text{QCD}})^{-1/2} = 326\text{MeV}, \quad (-G^{\text{QCD}})^{-1/5} = 437\text{MeV}, \quad \Lambda^{\text{QCD}} = 924\text{MeV}$$

を用いる。表 2 と (5.10) で表されるベンチマークポイントでは、スケールアップ因子 f の大きさは $f \sim \mathcal{O}(10^5)$ となる。ここから、HQCD スケール Λ^{HQCD} は

$$\Lambda^{\text{HQCD}} \sim \mathcal{O}(10^5)\text{GeV}$$

と求まる。なお、 η の真空期待値 v_η は Z_2 対称性により HQCD セクターとの結合がなく、また、 $\lambda_{H\eta}, \lambda_{H\eta}, \lambda_{S\eta}$ が全てベンチマークポイントで正であることから、0 となる。

真空期待値について言及したので、次は粒子の質量 (と波動関数繰り込み定数) を求める。物理的質量はプロパゲータのポールで定義される。つまり、逆プロパゲータを 0 にする運動量の二乗 p^2 で定義される。逆プロパゲータは 2 点頂点関数であるが、2.3 でも述べたように、任意の n 点関数は有効作用を場で汎関数微分することで求まる。本章の模型ではスカラー場は混合しているため対角化が必要であり、質量は

$$\Gamma_{ij}(p^2 = m_k^2)\xi_j^k = 0$$

で定義される。ただし、固有ベクトル ξ_j^k は

$$\begin{pmatrix} h \\ S \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \xi_1^3 \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \xi_2^3 \\ \xi_3^1 & \xi_3^2 & \xi_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{S} \\ \tilde{\sigma} \end{pmatrix}$$

で定義される。 η の真空期待値 v_η は 0 となるので、 η は他の場と混合せず、 η の質量は最低次の近似で

$$m_\eta^2 = \frac{1}{2}\lambda_{H\eta}v_h^2 + \frac{1}{2}\lambda_{S\eta}v_S^2$$

	$m_{\tilde{\xi}}$	$m_{\tilde{\eta}}$	$m_{\tilde{\sigma}}$
BP1	$\simeq 580\text{GeV}$	$\simeq 290\text{GeV}$	$\simeq 15.1\text{TeV}$
BP2	$\simeq 686\text{GeV}$	$\simeq 343\text{GeV}$	$\simeq 17.9\text{TeV}$
BP3	$\simeq 792\text{GeV}$	$\simeq 396\text{GeV}$	$\simeq 23.1\text{TeV}$
BP4	$\simeq 614\text{GeV}$	$\simeq 307\text{GeV}$	$\simeq 17.9\text{TeV}$

表 4: ベンチマークポイントでのスカラー場の質量

と求まる。スカラー場の逆プロパゲータは

$$\begin{aligned}
\Gamma_{hh}(p^2) &= p^2 - 3\lambda_H v_h^2 + \frac{1}{2}\lambda_{HS} v_S^2, \\
\Gamma_{hS}(p^2) &= \Gamma_{Sh}(p^2) = \lambda_{HS} v_h v_S, \\
\Gamma_{h\sigma}(p^2) &= \Gamma_{\sigma h}(p^2) = 0, \\
\Gamma_{SS}(p^2) &= p^2 - 3\lambda_S v_S^2 + \frac{1}{2}\lambda_{HS} v_h^2 - 3 \times 3y^2 I_4(p^2, \bar{\Pi}, \bar{\Pi}), \\
\Gamma_{S\sigma}(p^2) &= \Gamma_{\sigma S}(p^2) = -3 \times 3y \left(1 - \frac{G_D}{4G^2} v_\sigma\right) I_4(p^2, \bar{\Pi}, \bar{\Pi}), \\
\Gamma_{\sigma\sigma}(p^2) &= -\frac{3}{4G} + \frac{3G_D}{8G^3} v_\sigma - 3 \times 3 \left(1 - \frac{G_D}{4G^2} v_\sigma\right)^2 I_4(p^2, \bar{\Pi}, \bar{\Pi}) + 3 \times 3 \frac{G_d}{G^2} I_2(\bar{\Pi})
\end{aligned}$$

となるが、 I_2 と I_4 は

$$\begin{aligned}
I_2(M) &= \int \frac{d^4 k}{i(4\pi)^4} \frac{M}{(k^2 - M^2)} = -\frac{1}{16\pi^2} M \left[\Lambda^2 - M^2 \log \left(1 + \frac{\lambda^2}{M^2}\right) \right], \\
I_4(p^2, M_1, M_2) &= \int \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[(\not{k} + M_1)(\not{k} - \not{p} + M_2)]}{(k^2 - M_1^2)((k-p)^2 - M_2^2)}
\end{aligned}$$

で定義される。これらの逆プロパゲータを用いると、ベンチマークポイントでのヒッグス粒子以外のスカラー粒子の質量は表4のようになる。ヒッグス粒子の質量は全てのベンチマークポイントで

$$m_h \simeq 125\text{GeV}$$

とならなければならない。これが TeV スケールの物理からの2つ目の制限である。3つ目の制限はヒッグス場と S との混合が観測の制限と矛盾しないこと、つまり

$$\xi_1^1 \simeq 1$$

となることである。hidden パイオン ϕ の質量も同様に求められる。逆プロパゲータは

$$\Gamma_{\phi\phi} = -\frac{1}{2G} + \frac{G_D}{8G^3} v_\sigma + 2 \times 3 \left(1 - \frac{G_D}{8G^2} v_\sigma\right)^2 I_1(p^2, \bar{\Pi}, \bar{\Pi}) + 3 \frac{G_D}{G^2} I_2(\bar{\Pi}) \quad (5.20)$$

となる。ここで、 I_1 は

$$I_1(p^2, M_1, M_2) = \int \frac{d^4k}{i(2\pi)^4} \frac{\text{tr}[(\not{k} + M_1)\gamma^5(\not{k} - \not{p} + M_2)\gamma^5]}{(k^2 - M_1^2)((k - p)^2 - M_2^2)}.$$

で定義される。後に詳しく述べるように、ダークマターの残存量と直接観測結果に矛盾しないためには、 ϕ と η にレゾナンス条件

$$m_\phi \simeq m_{\bar{\eta}} \simeq m_{\bar{S}}/2 \quad (5.21)$$

を課す必要がある。

質量以外に逆プロパゲータから得られる量として、波動関数くりこみ定数がある。ツリーレベルでは波動関数くりこみ定数は常に1になるが、NJL 模型において中間子の物理を扱う場合には、中間子場の運動項が必ずクォーク場のループから出てくることになるため、1からずれる。物理的な散乱断面積などを求めるためには波動関数くりこみ定数を求める必要があるが、

$$Z_\phi^{-1} = \left. \frac{d\Gamma_{\phi\phi}(p^2)}{dp^2} \right|_{p^2=m_\phi^2}$$

により求まる。

次に、hidden パイオン ϕ の相互作用を議論する。具体的には、頂点関数を議論する。HQCD セクターはスカラー場 S を通してのみ標準模型セクターと相互作用できる。表 2 と (5.10) で表されるベンチマークポイント付近では hidden クォーク場の湯川結合定数は $y \sim \mathcal{O}(10^{-4})$ というように小さくなるため、hidden パイオンの残存量と直接観測における散乱断面積の計算には ϕ - ϕ - S 相互作用頂点のみを考えれば良い。この頂点関数は

$$\Gamma_{\phi\phi S}(p, p', \bar{\Pi}) = -2 \times 3y \left(\frac{G_D}{8G^2} v_\sigma \right)^2 I_{5a}(p, p', \bar{\Pi}, \bar{\Pi}) - 2 \times 3y \frac{G_D}{8G^2} I_{5b}(p, p', \bar{\Pi})$$

と求まる。ただし、 I_{5a} 、 I_{5b} はそれぞれ

$$I_{5a}(p, p', M_1, M_2) = - \int \frac{d^4l}{i(2\pi)^4} \frac{\text{tr}(\not{l} + p + M_2)\gamma_5(\not{l} + M_1)\gamma_5(\not{l} - \not{p}' + M_2)}{((l+p)^2 - M_2^2)(l^2 - M_1^2)((l-p')^2 - M_2^2)} + (p \leftrightarrow p'),$$

$$I_{5b}(p, p', M) = - \int \frac{d^4l}{i(2\pi)^4} \frac{\text{tr}(\not{l} + \not{p} + \not{p}' + M)(\not{l} + M)}{((l+p+p')^2 - M^2)(l^2 - M^2)}$$

と定義される。残存量の計算には $p = p' = (m_\phi, \mathbf{0})$ を課した場合の値、直接観測における散乱断面積の計算には $p = -p'$ と $p^2 = m_\phi^2$ を課した場合の値が必要になるので、それぞれ κ_s 、 κ_t とすると、

$$\kappa_i = 2 \times 3y \left(1 - \frac{G_D v_\sigma}{8G^2} \right)^2 \gamma_a^i + 3y \frac{G_D}{4G^2} \gamma_b^i \quad (i = s, t)$$

と書ける。ただし、

$$\begin{aligned} \gamma_a^s &= I_{5a}(p, p', \bar{\Pi}, \bar{\Pi})|_{p=p'=(m_\phi, \mathbf{0})}, \\ \gamma_b^s &= I_{5b}(p, p', \bar{\Pi})|_{p=p'=(m_\phi, \mathbf{0})}, \\ \gamma_a^t &= I_{5a}(p, p', \bar{\Pi}, \bar{\Pi})|_{p'=-p, p^2=m_\phi^2}, \\ \gamma_b^t &= I_{5b}(p, p', \bar{\Pi})|_{p'=-p, p^2=m_\phi^2} \end{aligned}$$

である。

相互作用頂点の表式が得られたので、次に hidden パイオン ϕ と η の残存量と直接観測の散乱断面積の評価を行う。

hidden パイオン ϕ の対消滅過程への主な寄与は ϕ - ϕ - S 結合を一つ含む s -チャンネルの過程である。 $\phi\phi \rightarrow SS$ の過程が運動学的に許されていたとしても、その過程のツリーレベルの寄与は ϕ - ϕ - S - S 結合を含み、湯川結合定数 y が小さいので、無視できる。また、hidden パイオンの平均的な速度は質量 m_ϕ と比べて非常に小さく、 s 波の寄与のみを考慮すれば十分である。そしてこの s 波の寄与はレゾナンス条件 (5.21) によって増幅する。ここで、 η の導入により hidden パイオン ϕ は η への新たな対消滅過程を得られる場合があるが、この過程の寄与を考慮してもレゾナンス条件 (5.21) を外すことはできない。

η も離散対称性 Z_2 によって安定であるので、 η 粒子の残存量 $\Omega_\eta \hat{h}^2$ が観測値 $\Omega_{\text{DM}}^{\text{obs}} \hat{h}^2 \simeq 0.12$ を超えてはいけない。数値計算を行うと、 $\Omega_\eta \hat{h}^2 \leq \Omega_{\text{DM}}^{\text{obs}} \hat{h}^2 \simeq 0.12$ を満たすパラメータスペースは容易に見つかる。

hidden パイオン ϕ と η 両方に対して、対消滅の熱平均 $\langle v\sigma_i \rangle$ ($i = \eta, \phi$) への s 波の寄与は

$$\begin{aligned} \langle v\sigma_i \rangle = & \frac{Z_i^2}{32\pi m_i^3} \left[(m_i^2 - m_W^2)^{1/2} a_{i,W} + (m_i^2 - m_Z^2)^{1/2} a_{i,Z} \right. \\ & \left. + (m_i^2 - m_t^2)^{3/2} a_{i,t} + (m_i^2 - m_h^2)^{1/2} a_{i,h} \right] + \mathcal{O}(v^2) \end{aligned}$$

で与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} Z_\eta &= 1, \\ a_{\phi,W} &= 4 \left(\frac{\kappa_s}{v_h} \right)^2 |\Delta_{hs}|^2 m_W^4 \left(3 + 4 \frac{m_\phi^4}{m_W^4} - 4 \frac{m_\phi^2}{m_W^2} \right), \\ a_{\phi,Z} &= 2 \left(\frac{\kappa_s}{v_h} \right)^2 |\Delta_{hs}|^2 m_Z^4 \left(3 + 4 \frac{m_\phi^4}{m_Z^4} - 4 \frac{m_\phi^2}{m_Z^2} \right), \\ a_{\phi,t} &= 24 \left(\frac{\kappa_s}{v_h} \right)^2 |\Delta_{hs}|^2 m_t^2, \\ a_{\phi,h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_s}{v_h} \right)^2 \left(\frac{2m_W}{g} \right)^4 \left| 6\lambda_H \Delta_{hs} - \lambda_{HS} \frac{v_s}{v_h} \Delta_{ss} \right|^2, \\ a_{\eta,W} &= 4 \left| \lambda_{H\eta} \Delta_{hh} + \lambda_{S\eta} \frac{v_S}{v_h} \Delta_{hs} \right|^2 m_W^4 \left(3 + 4 \frac{m_\phi^4}{m_W^4} - 4 \frac{m_\phi^2}{m_W^2} \right), \\ a_{\eta,Z} &= 2 \left| \lambda_{H\eta} \Delta_{hh} + \lambda_{S\eta} \frac{v_S}{v_h} \Delta_{hs} \right|^2 m_Z^4 \left(3 + 4 \frac{m_\phi^4}{m_Z^4} - 4 \frac{m_\phi^2}{m_Z^2} \right), \\ a_{\eta,t} &= 24 \left| \lambda_{H\eta} \Delta_{hh} + \lambda_{S\eta} \frac{v_S}{v_h} \Delta_{hs} \right|^2 m_t^2, \\ a_{\eta,h} &= \frac{1}{2} \left| \lambda_{h\eta} + \left(\frac{2m_W}{g} \right)^2 \left(\frac{2\lambda_{H\eta}^2}{m_h^2 - 2m_\eta^2} + 6\lambda_{H\eta} \lambda_H \Delta_{hh} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (6\lambda_{S\eta} \lambda_H - \lambda_{H\eta} \lambda_{HS}) \frac{v_s}{v_h} \Delta_{hs} - \lambda_{S\eta} \lambda_{HS} \left(\frac{v_s}{v_h} \right)^2 \Delta_{ss} \right) \right|^2 \end{aligned}$$

で、

$$\begin{aligned}\Delta_{hs} &= \frac{\xi_2^2 \xi_1^2}{4m_\phi^2 - m_S^2 + i\gamma_S m_S} + \frac{\xi_2^1 \xi_1^1}{4m_\phi^2 - m_h^2}, \\ \Delta_{ss} &= \frac{\xi_2^2 \xi_2^2}{4m_\phi^2 - m_S^2 + i\gamma_S m_S} + \frac{\xi_2^1 \xi_2^1}{4m_\phi^2 - m_h^2}, \\ \Delta_{hh} &= \frac{\xi_1^2 \xi_1^2}{4m_\phi^2 - m_S^2 + i\gamma_S m_S} + \frac{\xi_1^1 \xi_1^1}{4m_\phi^2 - m_h^2}.\end{aligned}$$

と定義される。ここで、 γ_S は S の実効的な崩壊幅で

$$\gamma_S = \frac{(\lambda_{HS}\langle S \rangle)^2}{16\pi m_S^2} \sqrt{\frac{m_S^2}{4} - m_h^2}$$

で定義される。(5.11) の辺りで言及したように、レゾナンス条件 (5.21) によって全崩壊幅 Γ_S は典型的にはヒッグス粒子への部分幅 $\Gamma_{S \rightarrow hh}$ で評価して良い。残存量は公式

$$\Omega_i \hat{h}^2 = n_i \frac{Y_{i,\infty} s_0 m_i}{\rho / \hat{h}^2}$$

で近似的に求まる。ただし、

$$\begin{aligned}n_i &= \begin{cases} 1 & (i = \eta) \\ 8 & (i = \phi) \end{cases}, \\ Y_{i,\infty}^{-1} &= \frac{0.264 g_*^{1/2} M_p m_i \langle v \sigma_i \rangle}{x_i^f}, \\ x_i^f &= \log \frac{0.0764 M_p \langle v \sigma_i \rangle (5/4) m_i}{(g_* x_i^f)^{1/2}}.\end{aligned}$$

である。 g_* は freeze-out 時の実効的に相対論的に振る舞っている粒子の自由度の数である。実際には 80 程度になるが、残存量の計算結果にはほとんど影響しないせず、 $g_* = 116.75$ と固定した。

hidden パイオンと η は両方がダークマター候補となるので、TeV スケールの物理からの 4 つ目の制限は

$$\Omega_\phi \hat{h}^2 + \Omega_\eta \hat{h}^2 \lesssim 0.12. \quad (5.22)$$

となる。ここで、(近似) 等号までは要求せず、不等号とした理由は、hidden バリオンもダークマターの一成分として寄与する可能性があるからである。

この制限を満たすパラメータスペースはすぐに見つかるが、その広い範囲で、直接探索における散乱断面積 σ_{SI}^η が観測値 $\sigma_{SI}^{\text{obs}} \sim \mathcal{O}(10^{-47}) \text{cm}^2$ [54] を超えてしまう。直接観測の結果と矛盾しないためには、 η がダークマターのメインの成分ではなく、僅かな成分だとする他にない。これを実現するためには、 η に対してもやはりレゾナンス条件 (5.21) が必要となる。

直接探索における ϕ 、 η 、それぞれと核子とのスピン非依存の弾性散乱断面積は

$$\sigma_{\text{SI}}^{\eta} = \frac{\lambda_{H\eta}^2 m_N^4 \hat{f}^2}{4\pi m_{\eta}^2 m_h^2},$$

$$\sigma_{\text{SI}}^{\phi} = \frac{Z_{\phi}^2}{\pi} \left[\frac{\kappa_t \hat{f} m_N}{2v_h m_{\phi}} \left(\frac{\xi_2^2 \xi_1^2}{m_S^2} + \frac{\xi_2^1 \xi_1^1}{m_h^2} \right) \right]^2 \left(\frac{m_N m_{\phi}}{m_N + m_{\phi}} \right)^2$$

で与えられる。ダークマターの全散乱断面積は [55] に従うと、近似的に

$$\sigma_{\text{SI}} \simeq \frac{\Omega_{\eta}}{\Omega_{\text{DM}}} \sigma_{\text{SI}}^{\eta} + \frac{\Omega_{\phi}}{\Omega_{\text{DM}}} \sigma_{\text{SI}}^{\phi} \quad (5.23)$$

とかける。さらに、表2と(5.10)のベンチマークポイント付近においては、それぞれ

$$\sigma_{\text{SI}}^{\phi} \sim \mathcal{O}(10^{-57}) \text{cm}^2,$$

$$\sigma_{\text{SI}}^{\eta} \sim \mathcal{O}(10^{-45}) \text{cm}^2$$

程度になり、 ϕ の散乱断面積 $\sigma_{\text{SI}}^{\phi}$ が非常に小さいので

$$\sigma_{\text{SI}} \simeq \frac{\Omega_{\eta}}{\Omega_{\text{DM}}} \sigma_{\text{SI}}^{\eta}.$$

となる。上で述べたように、 $\sigma_{\text{SI}}^{\eta}$ は観測の制限を大きく超えているため、観測と矛盾しないためには、 Ω_{η} を減らす、つまり、 ϕ に比べて非常に僅かな成分である、というシチュエーションにせざるを得ない。これを達成するために、 η に対するレゾナンス条件(5.21)が必要になるわけである。

ベンチマークポイントでは、レゾナンス条件(5.21)を満たしており、 $\sigma_{\text{SI}} \sim \mathcal{O}(10^{-48 \sim -47}) \text{cm}^2$ となるが、この値は観測の制限 $\sigma_{\text{SI}}^{\text{obs}} \sim \mathcal{O}(10^{-47}) \text{cm}^2$ を超えず、近い値となっている。本章のモデルでは、残存量は hidden パイオン ϕ が支配的で、直接観測の散乱断面積は η が支配的になっているわけである。ただし、近似式(5.23)は複数のダークマターの残存量の差が今回のように大きい場合には正しくないかもしれない。しかしながら、具体的な数値にズレはあるかもしれないが、散乱断面積の大きな成分があっても、その粒子の残存量が十分に小さければ、全散乱断面積 σ_{SI} は小さくなるというのは定性的には正しいと言える。

本章の解析ではレゾナンス条件(5.21)を課したが、モデルの更なる拡張を行えば、この条件は緩和されうる。例えば、[40]で提案されているように、hidden クォークに $U(1)_Y$ のチャージを持たせることで、新たな対消滅過程ができ、 $m_{\phi} \simeq m_S/2$ の条件を課す必要は無くなる。一方、 Z_2 対称性を無くすか自発的に破るようになれば、 ηhh や ηhS といった相互作用項が現れるので、 η は崩壊ができるようになり、従って $m_{\eta} \simeq m_S/2$ を課す必要はなくなる。ただしこの場合、 η とヒッグス粒子の間の混合が大きな結合定数 $\lambda_{H\eta}$ によって大きくなり、加速器実験の観測と合わなくなり、また、 η はダークマターとしては振る舞えなくなる。

6 まとめ

本論文では、hiddenQCD セクターでの $D\chi$ SB によって電弱スケールの起源を説明し、同時にその $D\chi$ SB に伴う pNG ボゾンである hidden パイオン ϕ がダークマターとなる古典的スケール不変な素粒子模型を、宇宙のインフレーションも同時に説明できるように拡張を行った。プランクスケール以下での (近似的) 対称性として古典的スケール不変性を要請する限り、プランクスケール以下の新たなスケールを導入すること無しで、プランクスケール以下の現象を全て説明できなければならず、その現象の一つとしてインフレーションを説明可能にした訳である。

まず、事前準備として、2章で SM の基本的な構造や EWSB、 $D\chi$ SB やそれを記述するための NJL 模型などについて説明し、3章で標準宇宙論の基礎と問題点、インフレーションの必要性などについて確認し、4章で単一インフラトン場でのカオティックインフレーションについて解説した。

本論文での新しい提案は5章であり、古典的スケール不変模型をインフレーションを説明可能なように拡張を行なった。具体的には、まず

- インフレーションが起こりうるスカラーポテンシャルの形状とインフラトン軌道について議論し、それを基に、

- 先行研究の模型では、インフレーションを説明することが難しいことを議論した。そして Z_2 -奇の実スカラー場 η を導入することで、

- インフラトン軌道としての S -軸上の谷の生成
- ポテンシャルの安定化

を行った。また、インフレーション後の再加熱期について

- S -インフレーションではプレヒーティングによるユニタリティの破れが無いこと
- 再加熱温度が $\mathcal{O}(10^5)$ GeV 程度で、 ϕ と η の質量より大きく、ダークマターが freeze-out の考え方で定量的に計算できること

を確かめた。また、ダークマターの物理に関して、

- 残存量を観測値以下にするには hidden パイオンに対してレゾナンス条件 $m_\phi \simeq m_S/2$ が必要なこと
- 直接探索の結果と矛盾しないためには、 η がダークマターの内の僅かな成分となる必要があり、そのために η に対してレゾナンス条件 $m_\eta \simeq m_S/2$ が必要なこと
- 上記のレゾナンス条件を満たすパラメータスペースが存在し、その時、直接探索の制限に近い散乱断面積 σ_{SI} となりうること

を確認した。

以上の結果から、本論文で提案する模型は、先行研究の模型で達成されていた電弱スケールの起源の説明とダークマターとその質量起源の説明を崩すことなく、同時に宇宙のインフレーションと再加熱を説明することが可能な模型となっていることがわかる。

謝辞

本論文を執筆するにあたり、お世話になった方々に謝辞を申し上げます。指導教官の末松大二郎教授には、毎週の報告会にて、本論文には記載しなかった内容も含めて、非常に多岐に渡る内容に関して丁寧にご教示していただきました。鋭い指摘やアドバイスには幾度も救われました。武田真滋准教授と、退官された青木健一先生には、主にSUに関することをご指導をいただき、非常にお世話になりました。同じく、退官された久保治輔先生には、退官後でありながらも質問や相談に乗っていただき、大変助けられました。石渡弘治准教授には本論文のインフラトン経路や再加熱過程の内容についての大変有意義な議論やアドバイスをして頂き、また、研究以外のことに関しても、多くの質問や相談にお付き合いしていただきました。青木真由美准教授と齋川賢一助教授にも、物理に関する質問や議論をしていただき、また、雑談等にもお付き合いいただき、リラックスして学生生活を送れました。

研究室の若手の方々には、非常に有意義な研究生活を過ごさせていただきました。特に、同期の金子くんには研究に関することも、それ以外のSUや夏の学校に関することでも大変お世話になりました。また、同じく同期の大場さん、先輩の後藤さん、河内さん、坂井さん、藤田さん、平田さん、後輩の橋本くん、軍司くん、澁谷くんにも多方面で大変お世話になりました。他にも大学院での生活を送る上で沢山のの方々からのご支援があったからこそ今まで頑張ってくられました。ありがとうございました。

最後に、これまで支えてくれた家族に感謝いたします。

参考文献

- [1] G. Aad *et al.* [ATLAS], “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett. B* **716**, 1-29 (2012) [arXiv:1207.7214 [hep-ex]].
- [2] S. Chatrchyan *et al.* [CMS], “Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC,” *Phys. Lett. B* **716**, 30-61 (2012) [arXiv:1207.7235 [hep-ex]].
- [3] J. Kubo, M. Lindner, K. Schmitz and M. Yamada, “Planck mass and inflation as consequences of dynamically broken scale invariance,” *Phys. Rev. D* **100**, no.1, 015037 (2019) [arXiv:1811.05950 [hep-ph]].
- [4] J. Kubo, J. Kuntz, M. Lindner, J. Rezaeck, P. Saake and A. Trautner, “Unified Emergence of Energy Scales and Cosmic Inflation,” [arXiv:2012.09706 [hep-ph]].
- [5] M. Holthausen, J. Kubo, K. S. Lim and M. Lindner, “Electroweak and Conformal Symmetry Breaking by a Strongly Coupled Hidden Sector,” *JHEP* **12**, 076 (2013) [arXiv:1310.4423 [hep-ph]].
- [6] Y. Akrami *et al.* [Planck], “Planck 2018 results. X. Constraints on inflation,” *Astron. Astrophys.* **641**, A10 (2020) [arXiv:1807.06211 [astro-ph.CO]].
- [7] K. j. Hamada, S. Horata and T. Yukawa, “From CFT Spectra to CMB Multipoles in Quantum Gravity Cosmology,” *Phys. Rev. D* **81**, 083533 (2010) [arXiv:0908.0192 [astro-ph.CO]].
- [8] F. L. Bezrukov and M. Shaposhnikov, “The Standard Model Higgs boson as the inflaton,” *Phys. Lett. B* **659**, 703-706 (2008) [arXiv:0710.3755 [hep-th]].
- [9] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, “Reheating after inflation,” *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3195-3198 (1994) [hep-th/9405187].
- [10] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li, “Gauge Theory of elementary particle physics,” Oxford science publications, Clarendon Press, (1988)
- [11] 林 青司, “CP 対称性の破れ: 小林・益川模型から深める素粒子物理,” SGC ライブラリ 91, サイエンス社, (2012)
- [12] 国広 悌二, “クォーク・ハドロン物理学入門:真空の南部理論を基礎として,” SGC ライブラリ 100, サイエンス社, (2013)
- [13]

- [13] T. Kunihiro and T. Hatsuda, “A Self-Consistent Mean-Field Approach to the Dynamical Symmetry Breaking: The Effective Potential of the Nambu and Jona-Lasinio Model,” *Prog.Theor.Phys.* **71** (1984) 1332-1345
- [14] 飴谷 義高, “強結合 Hidden Sector による電弱対称性の破れについて (修士論文),” (2014)
- [15] 後藤 宏光, “スケール不変性に基づく標準模型の拡張と LHC 実験による検証可能性 (修士論文),” (2015)
- [16] S. P. Klevansky, “The Nambu-Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics,” *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649-708 (1992)
- [17] C. Vafa and E. Witten, “Restrictions on Symmetry Breaking in Vector-Like Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B* **234**, 173 (1984).
- [18] C. Vafa and E. Witten, “Parity Conservation in QCD,” *Phys. Rev. Lett.* **53**, 535 (1984).
- [19] E. W. Kolb and M. S. Turner, “The Early Universe,” *Front. Phys.* **69**, 1 (1990).
- [20] K. Sato, “First Order Phase Transition of a Vacuum and Expansion of the Universe,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **195**, 467-479 (1981) NORDITA-80-29.
- [21] A. H. Guth, “The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems,” *Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.* **3**, 139-148 (1987)
- [22] R. N. Lerner and J. McDonald, “Gauge singlet scalar as inflaton and thermal relic dark matter,” *Phys. Rev. D* **80**, 123507 (2009) [arXiv:0909.0520 [hep-ph]].
- [23] G. Ballesteros, J. Redondo, A. Ringwald and C. Tamarit, “Unifying inflation with the axion, dark matter, baryogenesis and the seesaw mechanism,” *Phys. Rev. Lett.* **118**, no.7, 071802 (2017) [arXiv:1608.05414 [hep-ph]].
- [24] 柏瀬 翔一, “拡張輻射ニュートリノ質量生成モデルにおけるインフレーションと宇宙のバリオン数生成 (博士論文),” (2016)
- [25] L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, “Towards the theory of reheating after inflation,” *Phys. Rev. D* **56**, 3258-3295 (1997) [hep-ph/9704452].
- [26] M. Morikawa and M. Sasaki, “Entropy Production in the Inflationary Universe,” *Prog. Theor. Phys.* **72**, 782 (1984)
- [27] M. a. Sakagami and T. Kubota, “PATH INTEGRAL APPROACH TO DISSIPATIVE PROCESSES,” *Prog. Theor. Phys.* **76**, 548 (1986)

- [28] A. Ringwald, “The evolution equation of the scalar field in the new inflationary universe,” *Z. Phys. C - Particles and Fields*, **34**, 481-490 (1987)
- [29] J. H. Traschen and R. H. Brandenberger, “Particle Production During Out-of-equilibrium Phase Transitions,” *Phys. Rev. D* **42**, 2491-2504 (1990)
- [30] Y. Shtanov, J. H. Traschen and R. H. Brandenberger, “Universe reheating after inflation,” *Phys. Rev. D* **51**, 5438-5455 (1995) [arXiv:hep-ph/9407247 [hep-ph]].
- [31] P. B. Greene, L. Kofman, A. D. Linde and A. A. Starobinsky, “Structure of resonance in preheating after inflation,” *Phys. Rev. D* **56**, 6175-6192 (1997) [hep-ph/9705347].
- [32] R. N. Lerner and J. McDonald, “Higgs Inflation and Naturalness,” *JCAP* **04**, 015 (2010) [arXiv:0912.5463 [hep-ph]].
- [33] F. Bezrukov, A. Magnin, M. Shaposhnikov and S. Sibiryakov, “Higgs inflation: consistency and generalisations,” *JHEP* **01**, 016 (2011) [arXiv:1008.5157 [hep-ph]].
- [34] M. P. Hertzberg, “On Inflation with Non-minimal Coupling,” *JHEP* **11**, 023 (2010) [arXiv:1002.2995 [hep-ph]].
- [35] N. Nakanishi, “重力場の量子論,” *物理学最前線* **3**, 共立出版 (1983)
- [36] S. Oda, N. Okada and D. s. Takahashi, “Classically conformal U(1)’ extended standard model and Higgs vacuum stability,” *Phys. Rev. D* **92**, no.1, 015026 (2015) [arXiv:1504.06291 [hep-ph]].
- [37] E. Gabrielli, M. Heikinheimo, K. Kannike, A. Racioppi, M. Raidal and C. Spethmann, “Towards Completing the Standard Model: Vacuum Stability, EWSB and Dark Matter,” *Phys. Rev. D* **89**, no.1, 015017 (2014) [arXiv:1309.6632 [hep-ph]].
- [38] T. Hur, D. W. Jung, P. Ko and J. Y. Lee, “Electroweak symmetry breaking and cold dark matter from strongly interacting hidden sector,” *Phys. Lett. B* **696**, 262-265 (2011) doi:10.1016/j.physletb.2010.12.047 [arXiv:0709.1218 [hep-ph]].
- [39] T. Hur and P. Ko, “Scale invariant extension of the standard model with strongly interacting hidden sector,” *Phys. Rev. Lett.* **106**, 141802 (2011) doi:10.1103/PhysRevLett.106.141802 [arXiv:1103.2571 [hep-ph]].
- [40] Y. Ametani, M. Aoki, H. Goto and J. Kubo, “Nambu-Goldstone Dark Matter in a Scale Invariant Bright Hidden Sector,” *Phys. Rev. D* **91**, no.11, 115007 (2015) doi:10.1103/PhysRevD.91.115007 [arXiv:1505.00128 [hep-ph]].
- [41] G. F. Giudice and H. M. Lee, “Unitarizing Higgs Inflation,” *Phys. Lett. B* **694**, 294-300 (2011) [arXiv:1010.1417 [hep-ph]].

- [42] H. M. Lee, “Light inflaton completing Higgs inflation,” *Phys. Rev. D* **98**, no.1, 015020 (2018) [arXiv:1802.06174 [hep-ph]].
- [43] L. Di Luzio and L. Mihaila, “On the gauge dependence of the Standard Model vacuum instability scale,” *JHEP* **06**, 079 (2014) doi:10.1007/JHEP06(2014)079 [arXiv:1404.7450 [hep-ph]].
- [44] T. Inagaki, S. D. Odintsov and H. Sakamoto, “Gauged Nambu-Jona-Lasinio inflation,” *Astrophys. Space Sci.* **360**, no.2, 67 (2015) doi:10.1007/s10509-015-2584-0 [arXiv:1509.03738 [hep-th]].
- [45] T. Inagaki, S. D. Odintsov and H. Sakamoto, “Inflation from the finite scale gauged Nambu–Jona-Lasinio model,” *Nucl. Phys. B* **919**, 297-314 (2017) doi:10.1016/j.nuclphysb.2017.03.024 [arXiv:1611.00210 [hep-ph]].
- [46] D. Buttazzo, G. Degrassi, P. P. Giardino, G. F. Giudice, F. Sala, A. Salvio and A. Strumia, “Investigating the near-criticality of the Higgs boson,” *JHEP* **12**, 089 (2013) [arXiv:1307.3536 [hep-ph]].
- [47] V. Branchina, E. Messina and A. Platania, “Top mass determination, Higgs inflation, and vacuum stability,” *JHEP* **09**, 182 (2014) [arXiv:1407.4112 [hep-ph]].
- [48] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, “Why should we care about the top quark Yukawa coupling?,” *J. Exp. Theor. Phys.* **120**, 335-343 (2015) [arXiv:1411.1923 [hep-ph]].
- [49] F. Bezrukov, J. Rubio and M. Shaposhnikov, “Living beyond the edge: Higgs inflation and vacuum metastability,” *Phys. Rev. D* **92**, no.8, 083512 (2015) [arXiv:1412.3811 [hep-ph]].
- [50] F. Bezrukov, D. Gorbunov and M. Shaposhnikov, “On initial conditions for the Hot Big Bang,” *JCAP* **06**, 029 (2009) [arXiv:0812.3622 [hep-ph]].
- [51] S. Rusak, “Destabilization of the EW vacuum in non-minimally coupled inflation,” *JCAP* **05**, 020 (2020) [arXiv:1811.10569 [hep-ph]].
- [52] Y. Ema, “Higgs Scalaron Mixed Inflation,” *Phys. Lett. B* **770**, 403-411 (2017) doi:10.1016/j.physletb.2017.04.060 [arXiv:1701.07665 [hep-ph]].
- [53] Y. Ema, “Dynamical Emergence of Scalaron in Higgs Inflation,” *JCAP* **09**, 027 (2019) doi:10.1088/1475-7516/2019/09/027 [arXiv:1907.00993 [hep-ph]].
- [54] E. Aprile *et al.* [XENON], “Dark Matter Search Results from a One Ton-Year Exposure of XENON1T,” *Phys. Rev. Lett.* **121**, no.11, 111302 (2018) [arXiv:1805.12562 [astro-ph.CO]].

- [55] S. Bhattacharya, P. Poullose and P. Ghosh, “Multipartite Interacting Scalar Dark Matter in the light of updated LUX data,” *JCAP* **04**, 043 (2017) doi:10.1088/1475-7516/2017/04/043 [arXiv:1607.08461 [hep-ph]].