

博 士 論 文

隠れた QCD を含む古典的スケール不変な理論  
によるインフレーション

金沢大学大学院自然科学研究科  
数物科学専攻

学籍番号	(1924012004)
氏 名	楊 錦波
主任指導教員名	青木 真由美
提出年月	令和4年1月

## 目次

1	イントロダクション	1
1.1	はじめに	1
1.2	標準模型とは	2
1.3	標準模型の問題	5
1.4	宇宙論	7
1.5	インフレーション	13
2	スケール不変と隠れた QCD	15
2.1	スケール不変性とインフレーション	15
2.2	ニュートリノオプション	20
2.3	隠れた QCD	22
3	隠れた QCD を使うインフレーション模型	25
3.1	理論の各セクター	25
3.2	カイラル対称性破れによるスケールの生成	26
3.3	共形変換	30
3.4	谷近似	31
4	インフレーションについての数値計算	38
4.1	数値計算方法	38
4.2	数値計算結果	40
5	暗黒物質	43
5.1	質量スペクトル	43
5.2	暗黒物質の生成と崩壊過程	46
5.3	残存量	47
5.4	再加熱温度 $T_{RH}$ と残存量の関係	50
6	結論と展望	53
	付録 A: 一般相対性理論に関する表記	55
	付録 B: より効率的な接続係数と曲率テンソルの計算方法	57
	付録 C: NJL ポテンシャルへの曲がった時空修正	62

付録 D: $D$ 次元時空の共形変換	65
謝辞	68
参考文献	69

# 1 イントロダクション

## 1.1 はじめに

素粒子標準模型は、あらゆる物質を構成する素粒子とその間に働く電磁気、弱いおよび強い相互作用を記述する場の量子論である。2012年の大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider, LHC) でのヒッグス粒子の発見により、標準模型の粒子が全て見つかった [1, 2]。しかし、それにもかかわらず、標準模型では説明できない現象もいくつかある。標準模型のレプトンに、ニュートリノという種類の粒子は質量がないはずだが、ニュートリノ振動という現象より、微小な質量を持つことが明らかになっている [3]; 銀河の回転曲線を始め、天文観測や宇宙大規模構造の数値計算などの研究で、標準模型にはない暗黒物質の存在が示唆されている [4, 5]; 加えて、バリオン数の非対称性を説明することも、標準模型ではできない [6]。

これらの問題以外として、ヒッグス場の質量項は階層性問題を引き起こす [7]。実際、標準模型の19個のパラメーターにおいて、ヒッグス場の質量項が唯一質量次元を持つパラメーターである。この質量項のパラメーター  $\mu_H$  の受ける量子補正が特に大きい。標準模型のカットオフをプランクスケール  $M_{Pl} \sim 10^{19} \text{ GeV}$  だとすれば、LHCで測定されたヒッグス粒子の質量が約  $125 \text{ GeV}$  を説明するため、非常に不自然な微調整が必要になる。

超対称性理論は階層性問題を解決しようとする最も有名なアプローチである。その理論が標準模型の粒子のパートナー粒子を予測している [8]。しかし、LHC実験では、現在のところなんのパートナー粒子も発見されておらず [9]、超対称性理論への制限が厳しくなっている。代わりに、他のアプローチがだんだん注目されるようになる。本研究はその中のスケール不変理論という解決策に注目する。古典的なレベルで、理論が無次元のパラメーターしか持たない。しかし、実際我々住む宇宙がスケール不変ではないことから、スケール対称性を破らないといけないことがわかる。場の量子論において、スケールを生じる手法は Coleman-Weinberg (CW) 機構 [10] の他に、量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) のカイラル対称性破れ [11–13] のような非摂動的な機構がある。

重力自由度を含む完全な理論まで拡張しようとして、単純に Hilbert-Einstein 項を導入すれば、プランクスケールが最初から決まったので、重力自由度を記述する部分は明らかにスケール不変ではない。拡張した理論にスケール不変性を持つようにしようとしたら、プランクスケールがスケールの対称性破れで生じる特徴を持つべきである。一般相対論の代替理論、Brans-Dicke 理論がスカラー場の真空期待値でプランクスケールを生じる [14]。スカラー場  $S$  と Ricci スカラーとの非最小結合を持つ理論には、スカラー場  $S$  が真空期待値を持てば、Hilbert-Einstein 項  $M_{Pl}^2 R/2$  を出せる。特に、 $S^2 R$  の非最小結合のもう一つのメリットはインフレーション模型として宇宙背景マイクロ波 (Cosmic

Microwave Background, CMB) 観測と一致することである [15–17].

インフレーションの研究は素粒子理論に対して、特別な意義がある。早期宇宙にさかのぼり、宇宙がビッグバンという輻射優勢的な時期があった。その時期に、宇宙の構成物がほぼ相対論的な粒子である。より古くなるほど、宇宙の温度が高くなり、つまりエネルギースケールが高くなる。すると、早期宇宙の研究と素粒子物理学と繋がっている。インフレーションが提案される前に、ビッグバン宇宙にはフラット問題やホライズン問題、モノポール問題がある。インフレーションは、宇宙がビッグバンより古い時期に十分加速膨張した仮定で、その三つの問題を解決した。現在のインフレーションモデルは常に標準模型以外のスカラー場を導入してインフレーションをドライブする。そのスカラー場がインフラトンと呼ばれる。それにもかかわらず、すべてのインフレーションモデルは標準模型以外の粒子の必要があるわけではない。ヒッグス場自身が前節の述べた Ricci スカラーと非最小結合するシナリオ、いわばヒッグスインフレーションモデルがある [15, 16]。ヒッグスインフレーションは CMB の温度揺らぎの観測と一致する予測値を出せるが、ヒッグスと Ricci スカラーとの非最小結合パラメーターが 10 の 4 乗ぐらいになり、ユニタリー性を破る恐れがある [16].

本研究は隠れた QCD を含む標準模型を超える素粒子模型 (Beyond Standard Model, BSM) を考慮する。その素粒子模型を古典的なスケール対称性を持つように重力セクターまで拡張し、インフレーション模型を構築する。隠れた QCD のセクターに新しいスカラー場  $S$  が導入され、他のセクターのポータルになり、インフラトンにもなる。標準模型の QCD 部分と類似するカイラル対称性自発的な破れによって、スカラー場  $S$  が真空期待値  $v_S$  を獲得する。Ricci スカラーとの非最小結合で、プランクスケール  $M_{\text{Pl}}$  が生じる。ニュートリノ質量とヒッグス質量項については、ニュートリノオプションというアプローチで生成する [18, 19]。右巻きニュートリノは湯川結合と真空期待値  $v_S$  で質量を獲得し、量子補正でヒッグス質量項を、タイプ I シーソー機構で左巻きニュートリノ質量を生成する。カイラル対称性破れの偽南部-ゴールドストーン (Nambu-Goldstone, NG) 粒子が暗黒物質候補となる。

本論文の構成は以下のとおりである。第一章本節以外の部分は標準模型と問題点、宇宙論とインフレーションを紹介する。第二章では、先行研究のスケール不変性、ニュートリノオプションと隠れた QCD を紹介する。第三章は本研究の隠れた QCD を含む古典的スケール不変な理論によるインフレーション模型を構築する。第四章では、この理論に基づいて、数値計算の方法と結果を示す。第五章では、暗黒物質残存量を入れた結果を紹介する。第六章は、結論をまとめ、将来より広い課題について話す。

## 1.2 標準模型とは

本節は素粒子標準模型を詳しく説明する。標準模型のすべての粒子は図 (1) にまとめる。まず、物質を構成する素粒子は、強い相互作用をするかどうかによって、クォークとレプトン二種類に分けられる。強い相互作用をするのはクォークであり、強い相互作用をしないのはレプトンである。クォー

		フェルミオン			ボゾン	
		第一世代	第二世代	第三世代		
クォーク		u アップ	c チャーム	t トップ	g グルオン	
		d ダンウ	s ストレンジ	b ボトム	γ フォトン	
レプトン		e 電子	μ ミューオン	τ タウオン	Z Z ボゾン	
		ν <sub>e</sub> 電子 ニュートリノ	ν <sub>μ</sub> ミュー ニュートリノ	ν <sub>τ</sub> タウ ニュートリノ	W W ボゾン	
					h ヒッグス ボゾン	

図1 標準模型の粒子

クもレプトンもスピン 1/2 のフェルミオンである。相対論的な場の量子論において、スピン-統計定理がある。四次元時空では、スピンが半整数の粒子はフェルミ-ディラック統計に従い、フェルミオンと呼ばれ、スピンが整数の粒子はボース-アインシュタイン統計に従い、ボゾンと呼ばれる [20]。\*1 このフェルミオンは三世代がある。第一世代のクォークとレプトンは最も軽く、第三世代のは最も重い。第一世代のフェルミオンには、レプトンの電子が含まれる。電子は原子核と共にあらゆる物質を構成する原子を組み立てる。原子核を構成する陽子と中性子は第一世代のアップクォークとダウンクォークによって構成されている。第二世代のチャームとストレンジ、第三世代のトップとボトムを含めて、クォークは常にハドロンという複合粒子を構成する。三つのクォークで構成されるハドロンはバリオンであり、二つで構成されるのはメソンである。電子以外のレプトンは、第二世代のミューオン、第三世代のタウオンと各世代の対応する中性のニュートリノである。標準模型のフェルミオンの種類の違いはフレーバーと言う。

次はフェルミオンの間の相互作用を伝達する媒介粒子を紹介する。媒介粒子はスピン 1 のボゾンである。クォークの間に働く強い相互作用は八つのグルオンで、核壊変と関連する弱い相互作用は電荷を持つ W ボゾンと中性の Z ボゾンで、電磁気相互作用はフォトンで媒介する。最後は、クォークと荷電レプトン、W ボゾンと Z ボゾンに質量を与えるヒッグス場の粒子、スピン 0 のヒッグスボゾンである。

標準模型を支配する原理はゲージ対称性原理と言える。強い相互作用を記述する非可換ゲージ理

\*1 三次元時空、つまり二次元空間プラス一次元時間の場合はフェルミ-ディラック統計もボース-アインシュタイン統計も従わないエニオン (anyon) があり得る [21].

論の QCD から話そう [9, 20]. クォークには色荷がある. 実際人の目で見える光の色ではないが、光の三原色の赤、緑、青を参照して名付けられる. 本段落で、クォークを記述する量子場  $\psi_i(x)$  に、添字  $i, j = 1, 2, 3$  で色の違いを表記する. 時空点ごとに、式

$$\psi_i(x) \rightarrow \psi'_i(x) = U_{ij}(x)\psi_j(x), \quad (1.1)$$

のように色の違うクォーク場の線形結合をとっても、理論が変わらない. この性質はゲージ対称性と呼ばれる. 変換行列  $U_{ij}$  は非可換群  $SU(3)$  の基本表現を属する. 非可換は、二個異なる変換行列  $U_{ij}^{(1)}$  と  $U_{ij}^{(2)}$  を行う順番が違えば、結果が変わることである. つまり、普通は

$$U_{ik}^{(2)}U_{kj}^{(1)} \neq U_{ik}^{(1)}U_{kj}^{(2)}, \quad (1.2)$$

となる. もし変換行列  $U_{ij}$  が時空点  $x$  に依存しなければ、対称性はゲージではなく、グローバルと呼ばれる. 場の微分項を考えると、ゲージ対称性を保つために、普通微分項  $\partial_\mu\psi$  を共変微分

$$\partial_\mu\psi_i(x) \rightarrow D_\mu\psi_i(x) = (\partial_\mu - igG_\mu^a T_{ij}^a)\psi_j(x), \quad (1.3)$$

に変えなければならない. 共変微分に変わること、グルオンを記述するゲージベクターボソン  $G_\mu^a$  が導入される.  $T_{ij}^a$  はゲージ群  $SU(3)$  の生成子の基本表現での行列である. グルオンが八つあるのは、 $SU(3)$  が八つの生成子を持つからである.  $SU(3)$  ゲージ変換を行ったら、ゲージベクターボソンのグルオンは随伴表現で変換される. このように、クォークとクォークの間の相互作用は色荷の  $SU(3)$  ゲージ対称性によって支配されている.

フェルミオンの間に働く電磁気と弱い相互作用は、Weinberg-Salam 理論という別のゲージ理論によって記述される [20, 22, 23]. 理論のゲージ群は  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  である. QCD のような単純な構造ではなく、Weinberg-Salam 理論のゲージ場は、フェルミオンの左巻き成分と右巻き成分を区別して結合する.  $SU(2)_L$  群のゲージベクターボソンを  $W_\mu^i$  で表記する. ここで、添字  $i, j = 1, 2, 3$  は  $SU(2)_L$  の三つの生成子と対応する成分を表す.  $W_\mu^i$  と結合するのはフェルミオンの左巻き成分のみ、この左巻き成分は  $SU(2)_L$  ゲージ変換のタレットとなり、右巻き成分に対するゲージ変換はシングレットとなる. 可換ゲージ群の  $U(1)_Y$  に対しても、フェルミオンは左右分けて異なる  $U(1)_Y$  電荷、いわばハイパーチャージを持つ. フェルミオンの  $SU(2)_L$  と  $U(1)_Y$  チャージは表1にまとめている. Weinberg-Salam 理論の一部として、ヒッグス機構が組まれている. この機構で、ヒッグス場が自発的にゲージ対称性を破り、弱い相互作用を伝達するウィークボソン、クォークと荷電レプトンに質量を与える. ヒッグス場も  $SU_L(2)$  のタレットだが、三つの成分が南部-ゴールドストーン粒子であり、三つのゲージベクター場の縦波成分となる. 荷電の W ボソンと中性的な Z ボソンはこのように縦波成分を獲得し、質量を得る. ヒッグス場の CP 偶成分の励起がヒッグス粒子となり、真空期待値が湯川結合を通じてフェルミオンに質量を与える.

標準模型のパラメーター数を数えよう [9, 20]. QCD のカラーの  $SU(3)_c$ 、左手の  $SU(2)_L$  とハイ

粒子	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$q_L = (u_L, d_L)^T$	<b>2</b>	1/6
$u_R$	<b>1</b>	2/3
$d_R$	<b>1</b>	-1/3
$L = (\nu, e_L)^T$	<b>2</b>	-1/2
$e_R$	<b>1</b>	-1

表1 電弱相互作用のゲージ対称性破る前に、第一世代のフェルミオンのチャージ.  $q_L$  はクォークの左巻き成分;  $u_R$  はアップの右巻き成分;  $d_R$  はダウンの右巻き成分;  $L$  はレプトンの左巻き成分;  $e_R$  は電子の右巻き成分; 標準模型のニュートリノは無質量の Weyl フェルミオンであり、右巻き成分がない. 第二、第三世代は同じ.

パーチャージの  $U(1)_Y$ 、三つのゲージ群があるので、ゲージ結合定数が三つある. QCD の非摂動的な効果の  $\theta$ -真空で、 $\theta$  というパラメーターがある. ヒッグス場のポテンシャルには

$$V_{\text{Higgs}} = -\mu_H^2 H^\dagger H + \lambda_H (H^\dagger H)^2, \quad (1.4)$$

質量項の  $\mu_H$  と四点自己結合の  $\lambda_H$ 、二つのパラメーターがある. ヒッグス場との湯川結合には、三種類の荷電レプトン、フレーバーの違う六種類のクォークと、クォークのフレーバー構造のカビボ-小林-益川 (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, CKM) 行列の四つのパラメーターがある. 標準模型は合計 19 個のパラメーターを持っている. ヒッグスの質量パラメーター  $\mu_H$  は実質的な唯一の質量次元を持つパラメーターである.

### 1.3 標準模型の問題

本節では、標準模型のいくつかの問題点をあげる.

#### 1.3.1 ニュートリノ質量

ニュートリノ振動という、ニュートリノのフレーバーが周期的に変化する現象は過去十数年において確認されていた [24–29]. いくつかのニュートリノ振動と相関するパラメーターをより精密的に測定する実験は近年で行った [30–33]. ニュートリノのフレーバー状態がエネルギーの固有状態ではないと解釈されている. 例えば、核反応で電子ニュートリノが生成されて、飛行中に各エネルギーの固有状態のフェーズが変わり、探測された時は別のフレーバー、ミューニュートリノあるいはタウニュートリノとなる. もし標準模型のとおり、ニュートリノは無質量だとすれば、運動量が同じ時エネルギーも同じで、別のフレーバーに変わることがない. フレーバーの変化が確認されたことによって、ニュートリノが質量を持つことが明らかになっている.

ニュートリノの質量を説明するため、シーソー機構が提唱されていた [34]. シーソー模型では、質量が重いマヨラナフェルミオンの右巻きニュートリノが導入される. ヒッグス場の真空期待値  $v_H$  や

湯川結合  $y_\nu$  を通じ、左巻きニュートリノは常に

$$m_\nu \sim \frac{y_\nu^2 v_H^2}{m_N} \quad (1.5)$$

によって、マヨラナ質量  $m_\nu$  が与えられる。  $m_N$  は右巻きニュートリノの質量である。これで、シーソー模型は左巻きニュートリノがマヨラナフェルミオンの粒子であると示唆する。マヨラナフェルミオンの粒子と反粒子が同じとなるので、ニュートリノ無しのダブル  $\beta$  崩壊 ( $0\nu 2\beta$ ) は可能となり、左巻きニュートリノがマヨラナフェルミオンである決定的な証拠となる。  $0\nu 2\beta$  はまだ確認されていないので、ニュートリノがマヨラナフェルミオンか否かについて、まだ断言できない。

### 1.3.2 暗黒物質

色々な天文学的な観測から、暗黒物質の存在が示唆されている。銀河の回転曲線の測定について、見える物質だけで、銀河の外側の星々の回転速度が早すぎる [3]。銀河のハローにおいて大量な暗黒物質が存在すればこの予想以上の回転速度を解釈できる。重力レンズも暗黒物質の存在に証拠を与えている [4]。宇宙大規模構造についての数値計算によると、もし冷たい暗黒物質が存在しないと、見られた宇宙大規模構造が現在までに形成するのはかなり困難である [5]。

宇宙背景マイクロ波 (Cosmic Microwave Background, CMB) で宇宙膨張の測定から、宇宙は空間が極めて平坦で、エネルギー成分の  $\sim 70\%$  がダークエネルギー、 $\sim 26\%$  が冷たい暗黒物質、僅か  $4\%$  が素粒子物理学の標準模型で記述されていることがわかる [35–40]。WIMP や非対称暗黒物質、新しい粒子を導入するシナリオ以外、原始ブラックホールが暗黒物質の全部あるいは一部となるシナリオ [41, 42] や暗黒物質が存在せず、Einstein の一般相対論や Newton 引力理論が大きいスケールで破綻するシナリオ [43] もある。

### 1.3.3 バリオン非対称

我々の宇宙では、物質 (バリオン) の量が反物質 (反バリオン) より多くなっている。この非対称性を解釈するのは、サハロフの三条件を満たさないといけない [6]。サハロフの三条件は:

- (i) バリオン数  $B$  非保存;
- (ii) 電荷  $C$  対称性と  $CP$  対称性の破れ;
- (iii) 非熱平衡;

である。標準模型の電弱相互作用を記述する Weinberg-Salam 理論には、スファレロンというバリオン数を破る非摂動的な過程があり、CKM 行列によって  $CP$  が破れる。標準模型はサハロフの三条件を満たせる。しかし、得られたバリオン非対称性は小さい。シーソー模型には、右巻きニュートリノがマヨラナ質量項を持ち、レプトン数の保存を破る。これによるレプトジェネシスがバリオン非対称を説明する可能性がある [44–48]。最近、原始ブラックホールによるバリオジェネシスのような新しいシナリオも提唱される [49–51]。

### 1.3.4 階層性問題

場の量子論では、場の質量項および結合定数が常に量子補正を受ける。ヒッグス場がスカラー場であるため、その質量パラメーター  $\mu_H$  の二乗の受ける量子補正が特に大きく、リーディングオーダーが常にカットオフ  $\Lambda$  の二乗と比例する。つまり、補正は

$$\delta\mu_H^2 \sim \Lambda^2, \quad (1.6)$$

となる。測定でわかるパラメーターは、裸の値に量子補正を加えて得たものと思われる。つまり、ヒッグスの質量パラメーターは

$$\mu_H^2 = \mu_{H,\text{bare}}^2 + \delta\mu_H^2, \quad (1.7)$$

により与えられる。標準模型は重力の自由度を含まないので、少なくともプランクスケール  $M_{\text{Pl}} \sim 10^{19}\text{GeV}$  以下の有効理論だと思われる。カットオフ  $\Lambda$  をプランク質量  $M_{\text{Pl}}$  だとすれば、LHC で測定されたヒッグス粒子の質量が約  $125\text{GeV}$  であることから、裸の質量パラメーターの二乗  $\mu_{H,\text{bare}}^2$  が  $\sim 10^{38}\text{GeV}^2$  となってしまう、34桁ほどの極めて厳しい相殺を行わなければならない。これが非常に不自然だと思われ、階層性問題と言われている。

### 1.3.5 インフラトン

現在の宇宙論では、インフレーションと言い、ビッグバン、つまり宇宙の輻射優勢以前、宇宙が急激に加速膨張した時期があったと思われる。加速膨張をドライブするものはインフラトンと呼ばれ、多くのインフレーションモデルにおいては標準模型以外のスカラー場と考えられる。ヒッグス粒子の発見以来、ヒッグスインフレーションというヒッグス場がインフラトンとなるシナリオが再び多く考えられるようになる。しかし、ヒッグスインフレーションには、ヒッグス場と、重力自由度を記述する計量から構造された Ricci スカラーとの非最小結合  $H^\dagger H R$  が必要となる。インフレーションの予言した CMB 観測を説明するため、この非最小結合の結合定数  $\xi$  が  $\sim 10^4$  となり、ユニタリーを破る恐れがある。したがって、インフラトンはまだ正体不明である [15, 16]。

## 1.4 宇宙論

前節で、標準模型で説明できない問題は宇宙論と繋がる方が多いことがわかった。膨張宇宙が早い時期になるほど、温度やエネルギースケールが大きくなる。したがって、「はじめに」の節で言ったとおり、初期宇宙の研究と素粒子物理学とは深く関連している。

本節は宇宙論と、インフレーションが提出される前にの均一性問題、平坦性問題とモノポール問題を簡単に紹介する。

20世紀初、ハッブルは遠い星雲の距離と後退速度を測定し、星雲が実は我々の銀河系以外の銀河であることを確認し、宇宙が膨張していることを発見した [40, 52, 53]。ほぼ全部の観測された別の銀

河は赤方偏移があり、我々と遠ざかっていくことが示された。赤方偏移の測定で、後退速度  $v$  という遠ざかっていく度合を示す量と距離  $d$  との関係はほぼ

$$v = H_0 d, \quad (1.8)$$

となり、比例している。この比例関係はハッブル法則と、比例係数  $H_0$  は現在のハッブル定数と呼ばれる。

宇宙膨張が確認された前に、アインシュタインは自分の創立した一般相対性理論を宇宙全体に適用するのを試みた [40, 52, 53]。当時アインシュタインの考えたのは、一般相対論に基づいて、宇宙空間が一様等方で、有限かつ境界なしの静的な模型だった。一様というのは、宇宙が大きいサイズスケールで、星々が均一的に分布していることである。任意の星の視点から見ると、宇宙の各方向がほぼ同じに見えるのは等方である。宇宙が一様等方のことは宇宙原理と呼ばれる。しかし、アインシュタインの静的な宇宙模型では、星々がダストと見なされるアインシュタイン方程式によると、静的な宇宙を記述する解を得るため、宇宙定数項を導入しなければならない。宇宙定数項を持つアインシュタイン方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = M_{\text{Pl}}^{-2}T_{\mu\nu}, \quad (1.9)$$

である。 $T_{\mu\nu}$  はエネルギー-運動量テンソルで、物質の分布で決まる量である。本論文では、自然単位系  $\hbar = c = 1$  が用いられる。ニュートン引力定数  $G_N$  をプランク質量で、

$$G_N = \frac{1}{8\pi M_{\text{Pl}}^2}, \quad (1.10)$$

と表記する。宇宙論では、エネルギー-運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  は常に完全流体

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu), \quad (1.11)$$

の形にしている。<sup>\*2</sup> ダストと対応するのはプレッシャー  $p = 0$  の状況である。

静的宇宙の考えが提出された後、ハッブル法則の発見の前に、フリードマンとルメートルは独立で宇宙定数項なしの膨張宇宙を記述する解を得た。とりあえず、ハッブルによると、宇宙原理が成り立つスケールは星々のスケールではなく、銀河を遥かに超えたスケールであり、かつ宇宙は静的ではなく、膨張しているのである。膨張宇宙は、フリードマン-ロバートソン-ウォーカー (Friedmann-Robertson-Walker, FRW) 計量

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2\right), \quad (1.12)$$

によって記述されている。一様当方な三次元空間は、 $k = 0$  の三次元平面、 $k = 1$  の三次元球面と

---

<sup>\*2</sup> 共変計量  $g_{\mu\nu}$  の符号について、時間成分は負、空間成分は正、つまり  $\{-, +, +, +\}$  のコンベンションと逆の  $\{+, -, -, -\}$ 、二通りがある。異なる符号のコンベンションを使うと、時空の曲率テンソルとエネルギー-運動量テンソル  $T_{\mu\nu}$  にどんな影響があるかについては付録 A で議論する。本論文では  $\{+, -, -, -\}$  を使う。

$k = -1$  の三次元双曲面、三つの状況がある。計量(1.12)をアインシュタイン方程式に代入し、フリードマン方程式と局所エネルギー保存の方程式

$$\rho = 3 M_{\text{Pl}}^2 (H^2 + \frac{k}{a^2}), \quad (1.13)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (1.14)$$

が得られる。<sup>\*3</sup>  $H = \dot{a}/a$  はハッブルパラメーターである。理論的には、ハッブルパラメーターは宇宙時間  $t$  に依存する。

ダストや冷たい物質の宇宙が  $p = 0$  という状況から、局所エネルギー保存の式(1.14)は

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 = \text{Const}, \quad (1.15)$$

と解くことができる。式(1.13)に代入すれば、 $a(t)$  についての一次の微分方程式が得られ、 $k$  の状況に応じて、解は

$$k = 1 : \quad t = l \left( \frac{\pi}{2} \mp \left( \sqrt{\frac{a}{l} \left( 1 - \frac{a}{l} \right)} + \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{a}{l}} \right) \right) \right), \quad (1.16)$$

$$k = 0 : \quad t = \frac{2}{3} \frac{a^{3/2}}{\sqrt{l}}, \quad (1.17)$$

$$k = -1 : \quad t = l \left( \sqrt{\frac{a}{l} \left( 1 + \frac{a}{l} \right)} - \text{arcsinh} \left( \sqrt{\frac{a}{l}} \right) \right), \quad (1.18)$$

となる。ここで、 $l = \rho_0 a_0^3 / (3M_{\text{Pl}}^2)$  である。ただし、 $k = 1$  の場合、二つのブランチがある。ブランチ  $-$  は先の宇宙膨張、ブランチ  $+$  は後の宇宙収束と対応する。二つのブランチが  $a = \pi l / 2$  で繋がり、一つの厳密解となり、宇宙が最大サイズ  $a = \pi l / 2$  まで膨張した後に収束することを記述する。全部の状況では、 $t$  が  $a = 0$  でゼロとなるように積分定数をセットした。スケール因子と時間を無次元化し、物質優勢の解を図2で示す。

相対論的な粒子あるいは輻射優勢の場合、密度  $\rho$  とプレッシャー  $p$  との関係は

$$p = \frac{1}{3} \rho, \quad (1.19)$$

となるので、局所エネルギー保存を表す式(1.14)から、

$$\rho a^4 = \rho_0 a_0^4 = \text{Const}, \quad (1.20)$$

---

<sup>\*3</sup> 付録 B では、時空次元と空間部分の計量を特定せずにアインシュタインテンソルを計算した。あちらの結果に  $D = 4$  を代入すれば、すぐ式(1.13)と式(1.14)が得られる。

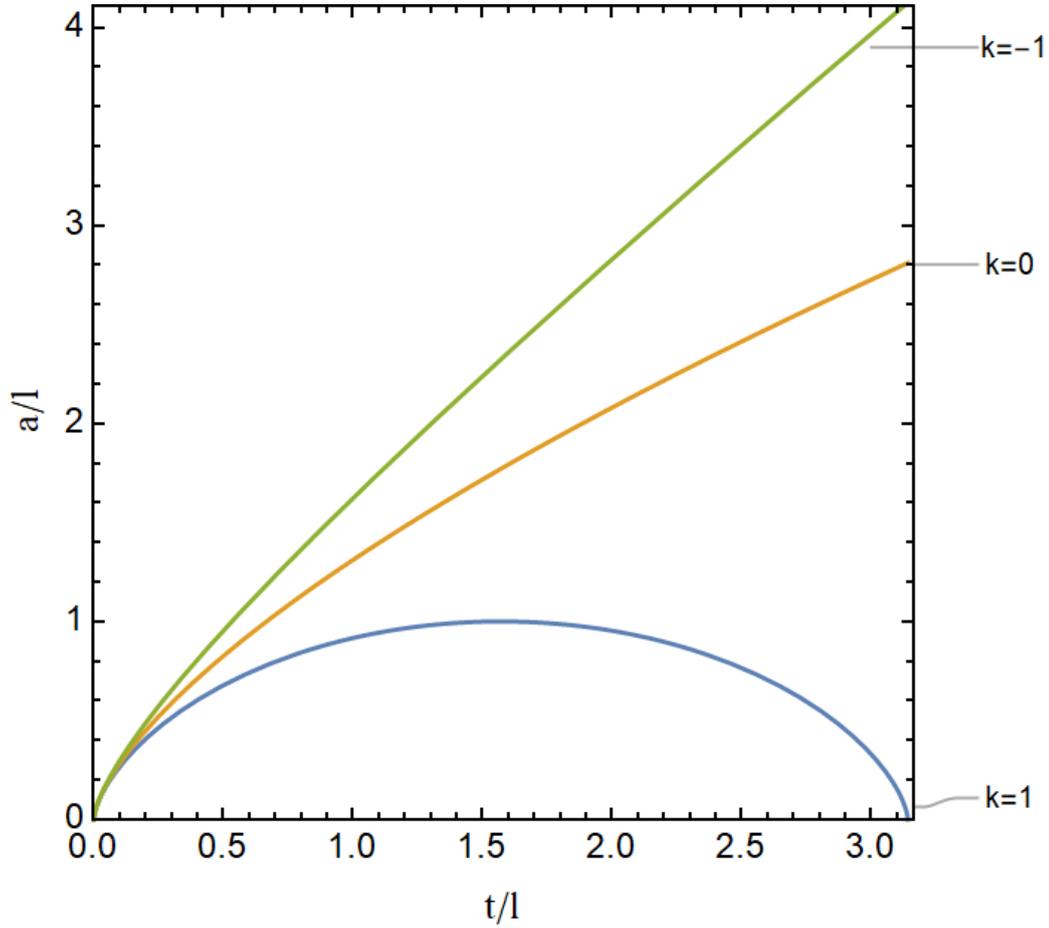


図2 物質優勢の解. 縦軸はスケール因子で、横軸は時間である. 両方も無次元化されている. 青線は  $k = 1$ 、黄色線は  $k = 0$ 、緑線は  $k = -1$  の解を示す

と得られる. 各  $k$  と対応する状況の式(1.13)の解は

$$k = 1 : a(t) = l\sqrt{1 - \left(1 - \frac{t}{l}\right)^2}, \quad (1.21)$$

$$k = 0 : a(t) = \sqrt{2lt}, \quad (1.22)$$

$$k = -1 : a(t) = l\sqrt{\frac{t}{l}\left(\frac{t}{l} + 2\right)}, \quad (1.23)$$

となる. ただし、 $l = \sqrt{\rho_0 a_0^4 / (3M_{\text{Pl}}^2)}$  である.  $k = 1$  の場合はダスト宇宙と類似し、膨張した宇宙が収束することがわかる. 図3で輻射優勢の解を示す.

アインシュタインは、宇宙定数を導入したことが自分の生涯における最大の過ちだったといった. しかし、タイプ Ia スーパーノヴァの観測を始め、現在の天文学の研究から、宇宙が加速膨張していることが確認され、宇宙定数の存在が示唆される [35–40].

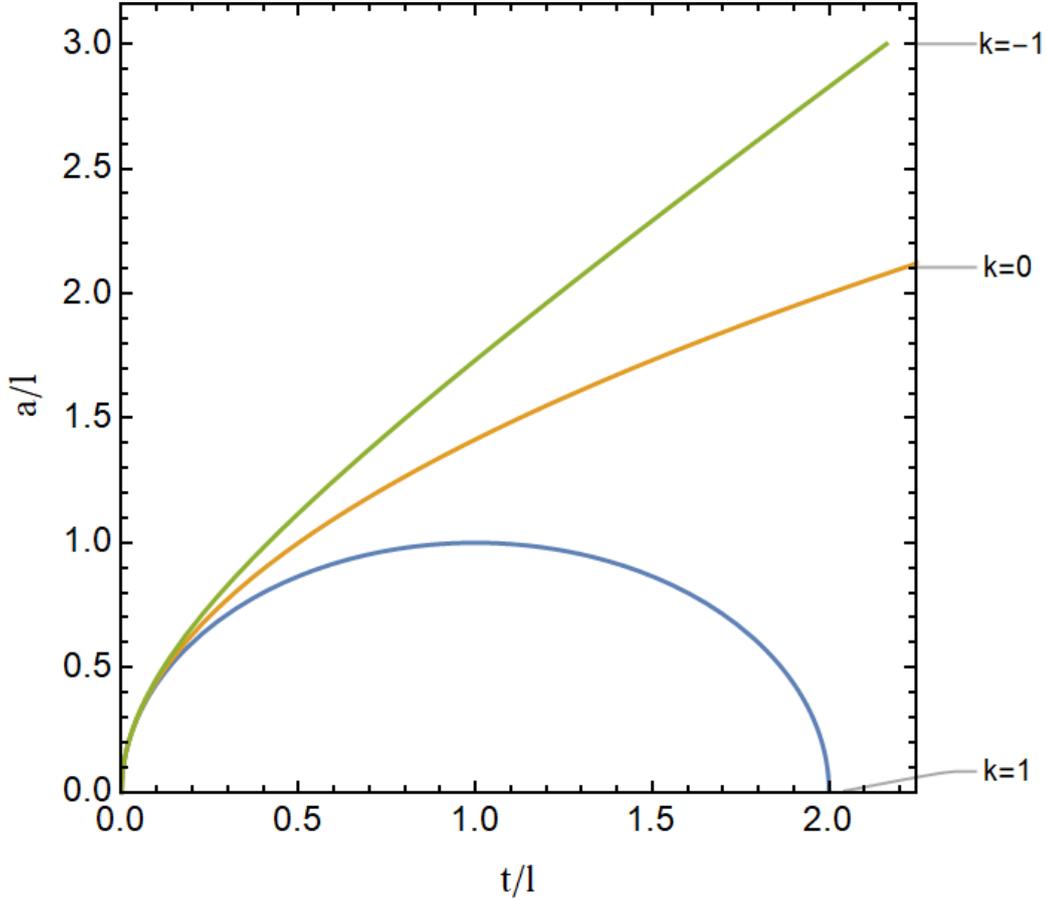


図3 輻射優勢の解.

宇宙は進化していることが観測によって示唆されているが、宇宙膨張が発見された後、宇宙は空間的に一様等方だけでなく、時間的にも一様であろうという考えは流行っていた。宇宙が定常的でないといけなないので、宇宙が膨張しながら、物質を創生し、一定的な密度  $\rho$  を保つという定常宇宙論が成立すると思われていた。定常宇宙論と逆の考え、宇宙は始まりがあり、過去に熱い高密度な輻射によって支配されていた説がビッグバン宇宙論と呼ばれる。20 世紀 60 年代末、軽い元素の合成、CMB の発見、古い銀河の進化などの観測証拠がビッグバン宇宙論を支持する [40, 52].

しかし、あの頃のビッグバン宇宙論には、均一性問題と平坦性問題、モノポール問題がある [40]. 均一性問題はホライズン問題とも言える。宇宙のホライズンについて、以下の例で容易に理解できる。 $k = 0$  の FRW 計量を考え、時間  $t$  ではなく、共形時間  $\eta$  を使い、FRW 計量を

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dt^2 - a^2(t)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \\
 &= a(t)^2 \left( \left( \frac{dt}{a(t)} \right)^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \right) \\
 &= a(\eta)^2 (d\eta^2 - (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2)),
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

と書き換える．共形時間  $\eta$  と宇宙時間  $t$  は  $d\eta = dt/a(t)$  で関連する．特異点  $a = 0$  と対応する  $\eta$  は

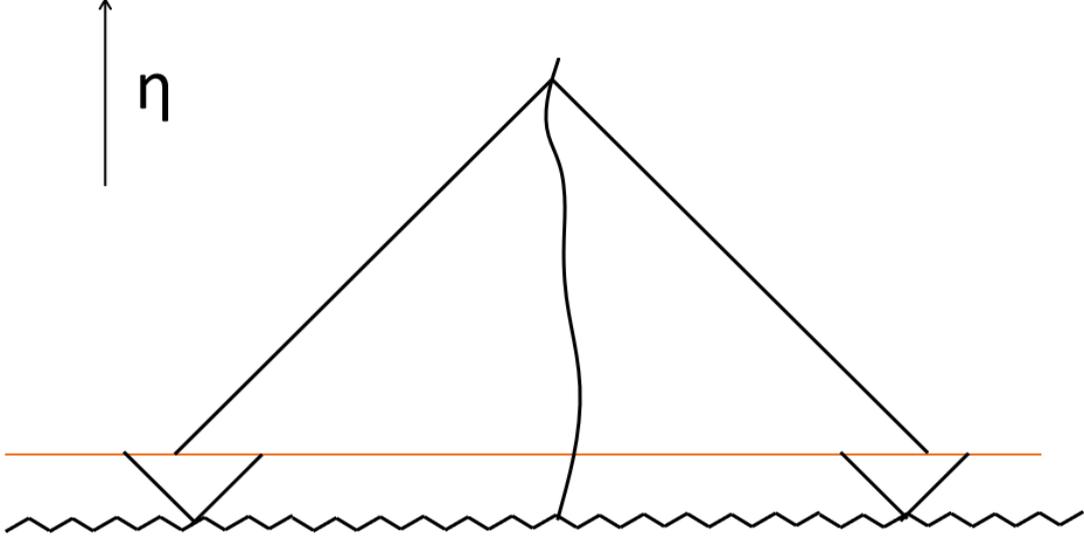


図4 共形時間での時空ダイアグラム．矢印は時間方向、折線は特異点、曲線は典型的な観測者、45度の直線は光の世界線、オレンジの水平線は最終散乱面を示す．

常に有限の過去となる．且つ、式(1.24)は、FRW 計量と Minkowski 計量が共形変換の元で等価となることを意味する [52]．因果関係などの長さによらない性質は、どちらの計量で分析しても同じとなる．宇宙の誕生から、最終散乱面まで、因果関係が可能な領域は図4に示す．ある観測者は 180 度、正反対の二つの方向を見ると、初期宇宙で因果関係を持つことが不可能な二つの領域が同じように見える．光の伝達距離の計算でも同じ結論にたどり着ける [40]．理由は光の伝達する共動距離が常に共形時間の間隔  $\Delta\eta$  と相等する． $k \neq 0$  の場合も、同じ議論をできる．

平坦性問題は、現在の宇宙空間の曲率が非常に小さいと知られており、初期宇宙に遡るとこの曲率の影響が小さくなりすぎ、厳しい微調整が必要であると思われる問題である．物質と輻射が共にある状況のエネルギー密度  $\rho = \rho_m + \rho_r$  を考えよう．フリードマン方程式(1.13)を

$$\frac{\rho_m}{3M_{\text{Pl}}^2 H^2} + \frac{\rho_r}{3M_{\text{Pl}}^2 H^2} - \frac{k}{3M_{\text{Pl}}^2 a^2 H^2} = 1, \quad (1.25)$$

と書き換える．さらに、 $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_k$  を

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{3M_{\text{Pl}}^2 H^2}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{3M_{\text{Pl}}^2 H^2}, \quad \Omega_k = -\frac{k}{3M_{\text{Pl}}^2 a^2 H^2}, \quad (1.26)$$

と定義できる。したがって、式(1.25)は

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k = 1, \quad (1.27)$$

と表示できる。 $\Omega_i$  は宇宙のエネルギー成分  $i$  の密度  $\rho_i$  が全体密度  $\sum \rho_i$  を何割占めるのを評価する量である。エネルギーの局所保存と則(1.14)から、式(1.15)と式(1.20)がわかる。つまり、 $\rho_m = \rho_{m0} a_0^3 / a^3$  と  $\rho_r = \rho_{r0} a_0^4 / a^4$  が成立する。物質と輻射だけの状況は宇宙が減速膨張するので、 $\dot{a} = aH$  が減少する。そのため、式(1.25)の第二項の大きさ  $|\Omega_k|$  が増大していく。現在にはこの項が非常に小さくなっており、現在の宇宙時刻から過去に遡るほどより小さくなる。つまり、現在の小ささを解釈するのはより小さい初期条件が必要になる。

ビッグバン宇宙論によると、宇宙年齢が小さくなるほど宇宙の温度が高くなる。もし大統一理論 (GUT) が成り立つとしたら、モノポールは宇宙初期に大量に生じられることが予想され、モノポールを見つけていない現状と矛盾する。モノポール問題は、ビッグバンだけではなく、GUT にもよる問題である。GUT は、標準模型の  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  ゲージ群を一つのゲージ群、一つのゲージ相互作用に統合するゲージ理論である。この群が、ゲージ対称性自発的な破れで  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  に、さらに標準模型のヒッグス機構で  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$  に破れる。これで、中心部が GUT のゲージ対称性を保ち、遠いところで  $U(1)_{em}$  に対称性を破るゲージ場の位相欠陥は許容される。これが GUT のモノポールである。もし初期宇宙の温度が GUT のスケールほど高くなれば、GUT のゲージ対称性は最初よく保たれ、温度が下がるたびに位相欠陥としてのモノポールがよく誕生できるはずであるが、実際はモノポールが見つからない。このように、GUT を考慮したビッグバン理論にはモノポール問題がある [40]。

## 1.5 インフレーション

Guth や佐藤は、GUT の対称相から量子トンネル効果で、対称性の破った相に相転移することを考慮した [40, 54–56]。温度を含む有効ポテンシャルは臨界温度以下となると、対称フェーズが最小点の真の真空ではなくなり、極小点の偽真空となる。宇宙定数のような振る舞いをし、短い時間に宇宙を指数的な膨張をさせる。もし宇宙が十分に膨張したら、同じ非常に小さい領域から発展してきたので、同じになってもおかしくない。空間曲率は最初にあってもこの急激な膨張で影響がなくなる。モノポールはインフレーションで数密度が大幅に減少する。指数的な膨張は相転移による生じた泡の衝突で終了する。それは old インフレーションと呼ばれる。泡内は真の真空なので、減速膨張する。しかし、泡の間は急激に膨張しており、泡が衝突しにくくなる。old インフレーションにはインフレーション終了の問題がある。

リンデは極小点を持たず、ごくフラットの領域があるポテンシャルで、スカラー場がゆっくり最小点へ転がり、急激な宇宙膨張を起こす new インフレーションのシナリオを提案した。このシナリオでは、相転移ではなく、最小点に近づく途中でインフレーションが終わる [40, 56–58]。その後、リン

デは温度の影響が不要なポテンシャルでのカオスのインフレーション模型を提唱した [40, 56, 59]. このシナリオの最も重要な予測は、インフラトンであるスカラー場と重力の真空状態の量子揺らぎから由来するスカラー揺らぎとテンソル揺らぎである. スカラー揺らぎは密度揺らぎとして、CMB 温度揺らぎや宇宙大規模構造の種となり、テンソル揺らぎは原始重力波となる. 現在、CMB 温度揺らぎの観測量である揺らぎの幅  $A_s$ 、密度揺らぎのスペクトルインデックス  $n_s$  とテンソル-スカラー比  $r$  を通じ、インフレーションのポテンシャルを制限することが可能となっている.

インフレーションのポテンシャル  $V(\phi)$  のフラットさを評価するのは slow-roll パラメーターである. これは

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \left( \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2, \quad (1.28)$$

$$\eta = M_{\text{Pl}}^2 \left( \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \right), \quad (1.29)$$

によって定義される. ただし、 $V'(\phi)$ 、 $V''(\phi)$  は  $dV/d\phi$ 、 $d^2V/d\phi^2$  を表記する. スローロールパラメーターから  $A_s$ 、 $n_s$ 、 $r$  は

$$A_s = \frac{V}{24\pi\varepsilon_* M_{\text{Pl}}^4}, \quad n_s = 1 + 2\eta - 6\varepsilon, \quad r = 16\varepsilon, \quad (1.30)$$

で計算できる.  $A_s$  と  $n_s$  は、PLANCK プロジェクト [37–39, 60] などの CMB の観測で測定できる量である.  $r$  はテンソル揺らぎと関連し、原始重力波が確認されれば決まる量である. しかし、現在のところ原始重力波は観測されていないため、 $r$  の上限しかわかっていない [37–39, 60, 61].

## 2 スケール不変と隠れた QCD

本章は、スケール不変に注目するインフレーション模型、ニュートリノオプションと隠れた QCD の先行研究を紹介する。

### 2.1 スケール不変性とインフレーション

階層性問題を解決するため、スケール不変性を物質粒子とゲージ相互作用の媒介粒子の自由度だけに導入すると十分であろう。しかし、理論を一般相対性理論を用いて重力自由度に単純に拡張すると、Hilbert-Einstein 項には質量次元を持つパラメーター、プランク質量  $M_{\text{Pl}}$  が最初から存在しておりスケール不変な理論にはならない。そこで、スカラー場  $S$  を導入し、パラメーターが無次元である非最小結合  $S^2 R$  で有効 Hilbert-Einstein 項を生成するインフレーション模型が研究された [15, 54, 56–58, 62–76]。本研究では、先行研究文献 [68, 69] で議論されているプランク質量の生成およびインフレーションの手法を用いることから、まずこれらの先行研究について紹介する。

座標変換の下で共変性を持ち且つパラメーターが無次元である一般的なラグランジアン密度

$$\left( -\frac{\beta}{2} S^2 R + a R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + b R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu} + c R^2 \right) \sqrt{-g}, \quad (2.1)$$

から考えよう [68]。  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$  と  $R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$  のオペレーターは、曲がった時空における場の量子論の効果を考慮すると、自然に現れる [77, 78]。プランク質量  $M_{\text{Pl}}$  はスカラー場  $S$  で代替される。このような非最小結合  $S^2 R$  の結合定数  $\beta$  は無次元のパラメーターとなる。  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $R_{\mu\nu}$  と  $R$  は計量テンソルの二階微分を含む項なので、  $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$  と  $R^2$  の結合定数  $a, b, c$  は無次元のパラメーターである。

$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ ,  $R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $R^2$  は運動方程式に計量テンソルの高次微分をもたらす。Weyl テンソルを使えば、これらの高次微分項を Weyl テンソルの二乗と Gauß-Bonnet 項で表すことができる。ここでは、一般性を求め、先に任意の次元  $D$  の状況について議論する。<sup>\*4</sup> 時空次元  $D$  が 3 以上であれば、Weyl テンソルは

$$W_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu} + \frac{R}{(D-1)(D-2)} (g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) - \frac{1}{D-2} (g_{\alpha\mu} R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu} R_{\alpha\nu} + g_{\beta\nu} R_{\alpha\mu}), \quad (2.2)$$

によって定義される。この構造は、以下のように、添え字の全部が下付きである曲率テンソル  $R_{\alpha\beta\mu\nu}$  から Ricci テンソル  $R_{\mu\nu}$  で決まる部分を取り除くことで導出できる。まず、曲率テンソルと同じ添字

<sup>\*4</sup> 四次元ではないと、パラメーター  $a, b, c$  が次元を持つ。

交換対称性を持ち、かつ計量テンソルと Ricci テンソルのみを使う構造は

$$g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}, \quad (2.3)$$

と

$$g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu}, \quad (2.4)$$

の二つだけである。Ricci テンソルと関わる成分がないことは Weyl テンソルの縮約

$$g^{\alpha\mu}W_{\alpha\beta\mu\nu} = 0, \quad (2.5)$$

で書ける。そのため、

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu} & (R_{\alpha\beta\mu\nu} - A_1(g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu}) \\ & - A_2(g_{\alpha\mu}R_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu}R_{\beta\mu} - g_{\beta\mu}R_{\alpha\nu} + g_{\beta\nu}R_{\alpha\mu})) = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

により、縮約の結果は

$$R_{\beta\nu} - A_1(D-1)g_{\beta\nu} - A_2((D-2)R_{\beta\nu} + g_{\beta\nu}R) = 0, \quad (2.7)$$

となる。因子  $A_1, A_2$  は方程式

$$1 - A_2(D-2) = 0, \quad A_1(D-1) + A_2R = 0, \quad (2.8)$$

により、

$$A_1 = -\frac{R}{(D-1)(D-2)}, \quad A_2 = \frac{1}{D-2}, \quad (2.9)$$

で決められ、式(2.2)が求められる。Weyl テンソルの二乗は単純だが長い計算により、

$$W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{4}{D-2}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + 2\frac{3D-4}{(D-1)(D-2)^2}R^2, \quad (2.10)$$

と導かれる。

一方、Gauß-Bonnet 項は

$$E = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2, \quad (2.11)$$

と与えられて、作用の  $a R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + b R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$  は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{D-3}\left(\frac{D-2}{4}a + b\right)E + \left(\frac{a}{4} + b\right)\frac{D-2}{D-3}W_{\mu\nu\alpha\beta}W^{\mu\nu\alpha\beta} \\ & - \frac{4b(10-9D+D^2) + a(4+2D-5D^2+D^3)}{4(D-1)(D-2)(D-3)}R^2, \end{aligned} \quad (2.12)$$

と書き換えることができる。本論文では四次元時空を考えるので、Gauß-Bonnet 項  $E$  がトポロジカ

ルな境界項となり、運動方程式へ寄与しない。したがって、一般的なラグランジアン(2.1)は Ricci スカラー二乗 + Weyl 二乗の修正重力理論になる。

先行研究 [68] は以下のようなスケール不変なラグランジアンを考慮した。

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}}{\sqrt{-g}} = & -\hat{\beta} S^\dagger S R + \hat{\gamma} R^2 - \frac{1}{2} \text{Tr} F^2 + g^{\mu\nu} (D_\mu S)^\dagger (D_\nu S) - \hat{\lambda} (S^\dagger S)^2 \\ & + a R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + b R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

隠れたゲージ群  $SU(N_c)$  の基本表現で変換する無質量のスカラー場  $S$  やゲージ群の生成子と対応するゲージ場  $F$  を含む隠れた QCD セクターが導入された。  $N_c = 3$  かつカイラル対称性が破れる隠れた QCD については、本章の第 3 節でまた他の先行研究で紹介する。前述の式(2.12)に  $D = 4$  を代入して得た結果とゲージ場を無視する Nambu-Jona-Lasinio(NJL) 近似をラグランジアン(2.13)に応用し、有効ラグランジアンは

$$\frac{\mathcal{L}^{\text{eff}}}{\sqrt{-g}} = -\beta S^\dagger S R + \gamma R^2 + \kappa W_{\alpha\beta\mu\nu} W^{\alpha\beta\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\partial_\mu S)^\dagger (\partial_\nu S) - \lambda (S^\dagger S)^2, \quad (2.14)$$

と与えられることがわかる。このモデルでは、プランクスケール  $M_{\text{Pl}}$  が真空期待値  $\langle S^\dagger S \rangle$  により生成さ

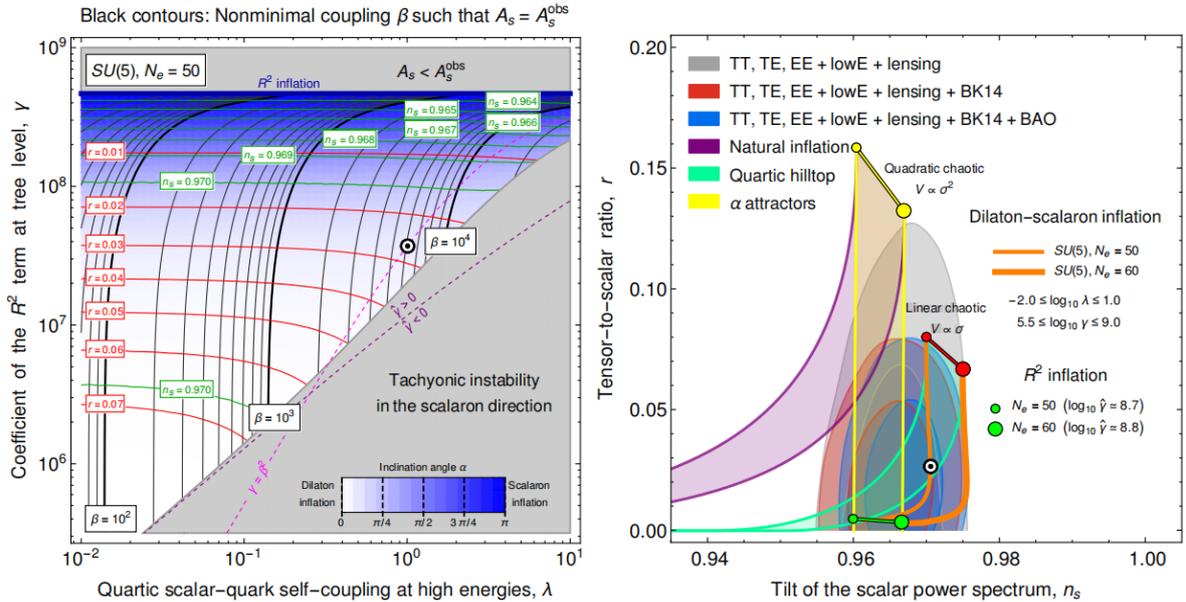


図5 文献 [68] のインフレーションモデルの予測した結果を示す。左図は CMB 観測の  $A_s$  制限を満たすパラメーター  $\lambda, \gamma$  の領域を示している。右図はモデルの予測した  $n_s, r$  と Planck の CMB 観測結果との比較である。  $\gamma$  の増大と共に、  $r$  が CMB 制限と一致する領域から、線形ポテンシャルのインフレーションの予測したような CMB 制限を離れたところである  $\sim 0.08$  まで及ぶ。

れる。適切な共形変換と場の再定義によって、有効ラグランジアン(2.14)は  $S$  がインフラトンとなるインフレーションモデルとなる。このモデルで予言される CMB 観測値である密度 (スカラー) 揺らぎの幅

$A_s$  の制限を満たす領域、CMB 観測値であるスペクトルインデックス  $n_s$  とテンソル-スカラー比  $r$  を図5に示す。左図はラグランジアン(2.14)のパラメーター  $\lambda$  と  $\gamma$  の CMB 観測値による関係を示す。揺らぎの幅  $A_s$  の制限を満たすコントアは黒線で、 $r$  のコントアは赤線で、 $n_s$  のコントアは緑線で示す。右図は CMB 観測値の  $n_s - r$  結果に、オレンジ色の線で  $N_c = 5$  で予言した結果を追加した図である。ラグランジアン(2.14)によるインフレーション模型が予言した  $n_s - r$  は CMB 観測値の  $2\sigma$  結果を離れ、赤線で示される線形ポテンシャルの予言した結果と同じの領域がある。共形変換とインフレーションの具体的な計算については本研究のインフレーション模型を紹介する第3章で議論する。

先行研究 [69] では、

$$\mathcal{L}_T = \mathcal{L}_{CW} + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{SM'} + \mathcal{L}_{N\chi}, \quad (2.15)$$

の四つのスケール不変なセクターで構成されるラグランジアンが議論されている。各セクターは

$$\frac{\mathcal{L}_{CW}}{\sqrt{-g}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\sigma\partial_\nu\sigma - \frac{1}{4}\lambda_S S^4 - \frac{1}{4}\lambda_\sigma\sigma^4 - \frac{1}{4}\lambda_{S\sigma}S^2\sigma^2, \quad (2.16)$$

$$\frac{\mathcal{L}_G}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}(\beta_S S^2 + \beta_\sigma\sigma^2 + \beta_H H^\dagger H)R + \gamma R^2 + \kappa W_{\alpha\beta\mu\nu}W^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\mathcal{L}_{SM'}}{\sqrt{-g}} = \frac{\mathcal{L}_{SM}}{\sqrt{-g}} \Big|_{\mu_H=0} - \frac{1}{4}(\lambda_{HS}S^2 + \lambda_{H\sigma}\sigma^2)H^\dagger H, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{N\chi}}{\sqrt{-g}} = & \frac{i}{2}\bar{N}\not{\partial}N - \frac{1}{2}y_M S N^T C N + \frac{i}{2}\bar{\chi}\not{\partial}\chi - \frac{1}{2}y_\chi S\chi^T C\chi \\ & - (y_N\sigma N^T C\chi + y_\nu\sigma\bar{L}\tilde{H}(1+\gamma_5)N + \text{h.c.}), \end{aligned} \quad (2.19)$$

によって記述される。CW セクター(2.16)には、二つのスカラー場  $S$  と  $\sigma$  が導入される。重力セクター(2.17)には、ヒッグス  $H$ 、 $S$ 、 $\sigma$ 、三つのスカラー場の非最小結合が含まれる。標準模型セクタ

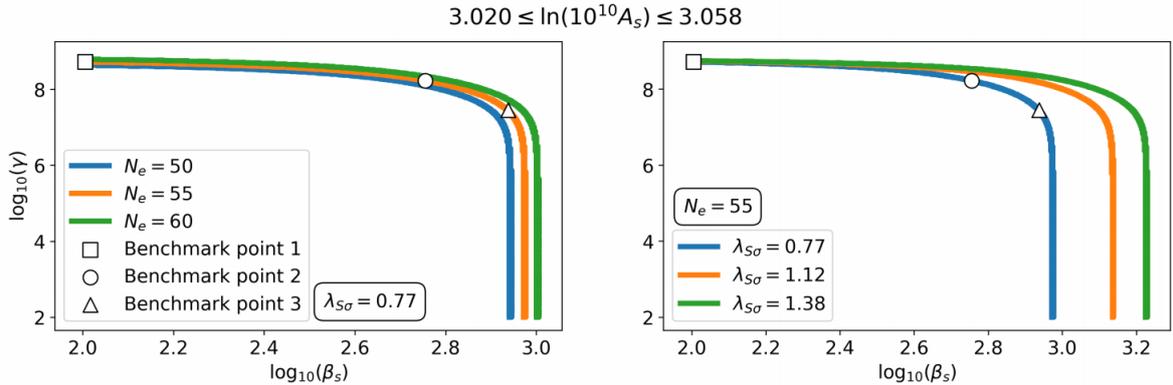


図6 CW 機構でスケールを生成するインフレーション模型 [69] の  $A_s$  制限満たすパラメーター  $\beta_s$  と  $\gamma$  の領域 ([69] より引用). 左図は  $\lambda_{S\sigma} = 0.77$  と固定し、 $N_e = 50, 55, 60$  の結果である。右図は  $N_e = 55$  で、 $\lambda_{S\sigma} = 0.77, 1.12, 1.38$  の結果である。

ー(2.18)では、ヒッグス質量パラメーター  $\mu_H$  を 0 とし、ヒッグスポータルの役目を果たす項  $S^2 H^\dagger H$  と  $\sigma^2 H^\dagger H$  が追加されている。ニュートリノセクター(2.19)は、二つのセットの右巻きニュートリノ  $N$  と  $\chi$  を記述する。この理論では、CWセクターがCW機構で、スケールを生成する。具体的にはスカラー場  $S$  が、1-ループの量子補正によって真空期待値  $v_S$  を獲得し、さらに非最小結合  $S^2 R$  を通じ、プランク質量を生成する。インフレーションモデルとして予言した CMB 観測値の結果は図6と図7にまとめている。図6は  $A_s$  制限による  $\beta$  と  $\gamma$  との関係を示す。図7の上図は  $n_s-r$  と Planck 衛星の観測結果 (水色と青の領域) との比較であり、下図は  $N_e = 55$  とし、 $\lambda_{S\sigma}$  による違いを示す。

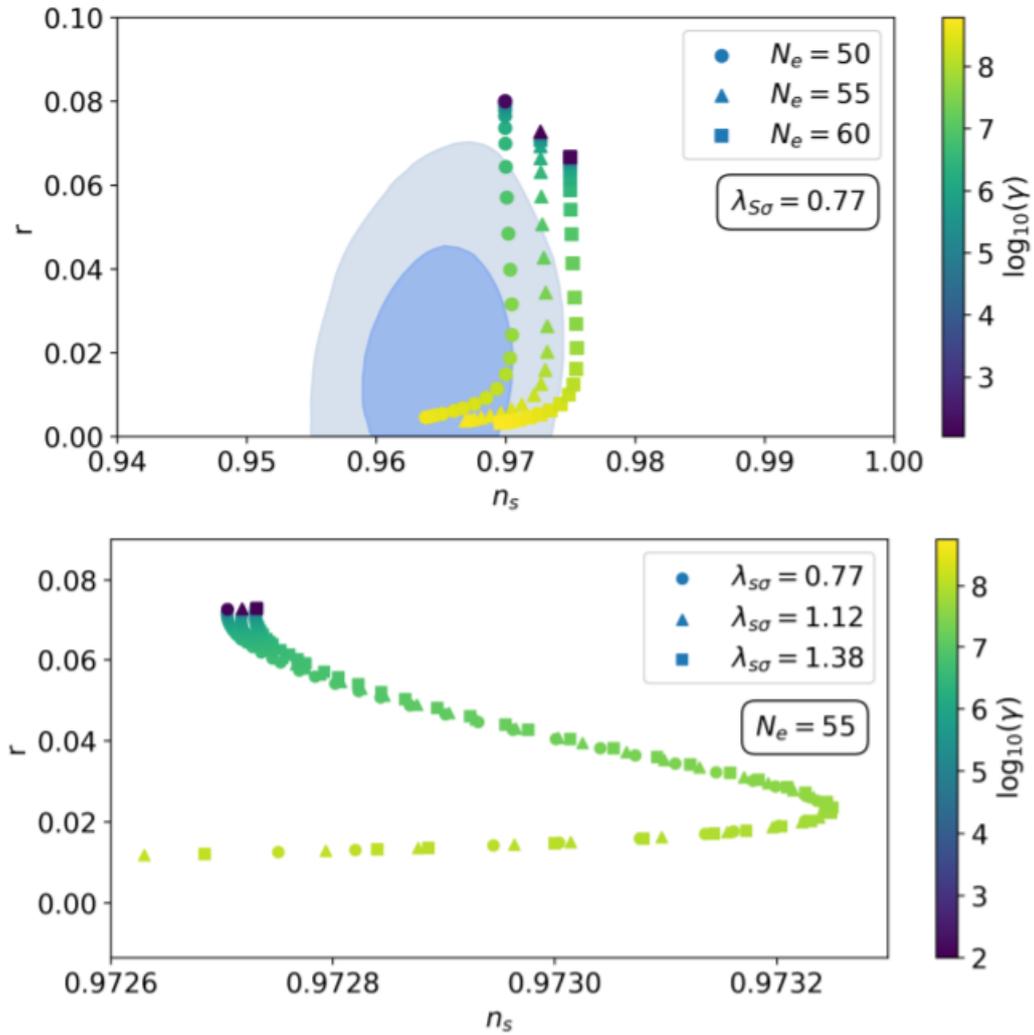


図7 文献 [69] のインフレーションモデルの予言した  $n_s-r$  ([69] より引用). 上の図は  $\lambda_{S\sigma} = 0.77$ ,  $N_e = 50, 55, 60$  の結果である。文献 [68] と類似し、 $r$  が CMB 制限と一致する領域から、線形ポテンシャルのインフレーションの予言したような CMB 制限を離れたところである  $\sim 0.08$  まで及ぶ。下の図は  $N_e = 55$  で、 $\lambda_{S\sigma} = 0.77, 1.12, 1.38$  の結果である。

## 2.2 ニュートリノオプション

先行研究 [69] では、ニュートリノオプション (Neutrino option) [18] が使われる。ニュートリノオプションは、ヒッグス質量項がタイプ I シーソー模型の右巻きニュートリノと左巻きニュートリノの量子補正によって生じられるというシナリオである。ニュートリノオプションを提案した文献 [18] では、対称性  $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  のシングレットである右巻きニュートリノ  $N_p$  を標準模型に導入する。  $N_p$  のラグランジアンは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{N_p} = & \frac{1}{2} (\bar{N}_p (i - m_p) N_p - \bar{l}_L^\beta \tilde{H} \omega_\beta^{p,\dagger} N_p - \bar{l}_L^{c\beta} \tilde{H} \omega_\beta^{p,T} N_p \\ & - \bar{N}_p \omega_\beta^{p,*} \tilde{H}^T l_L^{c\beta} - \bar{N}_p \omega_\beta^p \tilde{H}^\dagger l_L^\beta), \end{aligned} \quad (2.20)$$

によって与えられる。ただし、  $p, q = \{1, 2, 3\}$ 、  $\omega_\beta^p = \{x_\beta, y_\beta, z_\beta\}$  はフレーバー空間の複素ベクターである。図8のファインマン-ダイアグラムに示されているように、タイプ I シーソー模型の右巻きニュートリノと左巻きニュートリノがヒッグスの二点関数や四点関数のループとして現れる。ヒッグスポテンシャルは

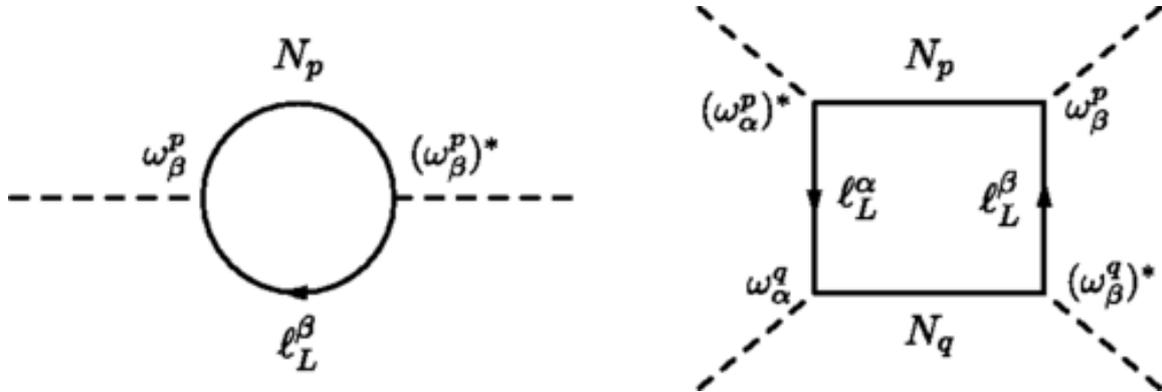


図8 タイプ I シーソー模型の右巻きと左巻きニュートリノの 1-ループ量子補正 ([18] より引用). 点線はヒッグスを表す. 左はヒッグス場の二乗項、つまり質量項を生成し、右はヒッグス場の四点自己相互作用を生成する

$$V(H^\dagger H) = -\frac{m_p^2 |\omega_p|^2}{16\pi^2} F_1 H^\dagger H - \lambda_{pq} F_2 (H^\dagger H)^2, \quad (2.21)$$

によって与えられる.  $m_p$  は  $N_p$  の質量であり,  $\lambda_{pq} = 5(\omega_q \dot{\omega}^{p,*})(\omega_p \dot{\omega}^{q,*})/(64\pi^2)^2$  はである.  $F_1$  と  $F_2$  は

$$F_1 = 1 + \log \frac{\mu^2}{m_p^2}, \quad (2.22)$$

$$F_2 = 1 - \frac{1}{m_p^2 - m_q^2} \left( m_p m_q \log \frac{m_p^2}{m_q^2} + m_q^2 \log \frac{\mu^2}{m_q^2} - m_p^2 \log \frac{\mu^2}{m_p^2} \right), \quad (2.23)$$

で与えられる. 文献 [18] は理論の繰り込み群について調べた. 繰り込みスケール  $\mu$  をトップクォークの質量  $\hat{m}_t$  とし, ヒッグスの四点結合  $\lambda$  は, 右巻きニュートリノの質量  $m_p$  の関数と扱われ, 図9にプロットされる. トップクォークの質量の  $2\sigma$  範囲,  $171\text{GeV} < \hat{m}_t < 175\text{GeV}$  とヒッグスの四点結合定

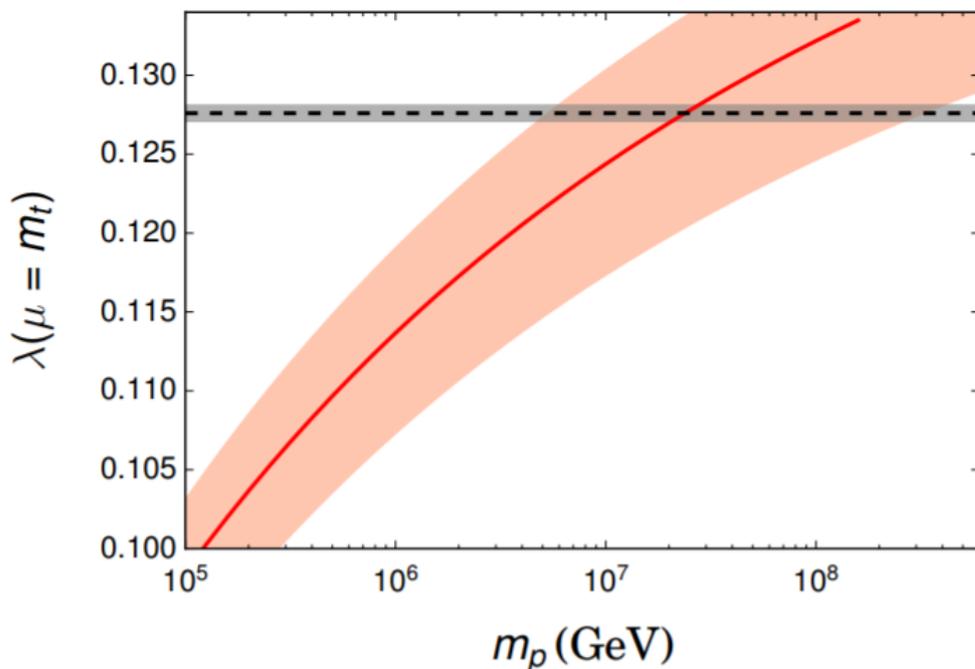


図9  $\mu = \hat{m}_t$  とする  $m_p$  の関数としての  $\lambda$  ([18] より引用). 赤線は  $\hat{m}_t = 173.2\text{GeV}$  の場合を示す. 付いているバンドは  $2\sigma$  範囲の  $171\text{GeV} < \hat{m}_t < 175\text{GeV}$  を示す. ヒッグスの四点結合定数  $\lambda \gtrsim 0.12$  で右巻きニュートリノの質量  $m_p$  を  $\sim 10^7\text{GeV}$  と特定する.

数  $\lambda \gtrsim 0.12$  で右巻きニュートリノの質量  $m_p$  を  $\sim 10^7\text{GeV}$  と特定する [45, 46, 79, 80]. これで電弱理論のスケールと右巻きニュートリノの質量のスケールを結び付ける. 電弱相互作用のスケールは基本的なスケールではなく, 生成されたものとなっており, パラメータの調整が不要となる.

最初に考えられたニュートリノオプション [18] では階層性問題を引き起こすヒッグス場の質量項がないが, 右巻きニュートリノの質量があるので, スケール不変な理論ではない. その後, ニュートリノオプションを共形不変な理論に拡張するのが研究された [19]. ニュートリノオプションには, タ

イプIシーソー機構が組み込まれているので、右巻きニュートリノの崩壊によるレプトジェネシスでバリオン非対称を説明する可能性も研究される [47]. 先行研究 [69] では、スカラー場  $S$  が CW 機構により真空期待値を獲得し、プランク質量を生成すると同時に、ニュートリノセクター(2.19)の湯川結合を通じて、右巻きニュートリノに質量を与え、ニュートリノオプションによってヒッグス質量と左巻きニュートリノの質量も説明できる.

## 2.3 隠れた QCD

標準模型の QCD のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \sum_q \bar{\psi}_{q,a} (i\gamma^\mu \partial_\mu \delta_{ab} - g_s \gamma^\mu t_{ab}^C \mathcal{A}_\mu - m_q \delta_{ab}) \psi_{q,b} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu}, \quad (2.24)$$

によって与えられる [9, 20].  $\psi_{q,a}$  はクォーク、 $m_q$  はクォークの質量、 $\mathcal{A}_\mu$  は  $SU(3)_c$  のゲージ場である. 標準模型のクォークの質量を無視すると、QCD の残された部分は、古典的なレベルで、カイラル対称性とスケール不変性を同時に満足できる. スケール不変性は繰り込みによって、量子レベルで破れる.

この QCD の特徴をヒントとして、先行研究 [81–83] では、隠れた QCD を導入し、物質粒子とゲージ相互作用の部分のスケール不変性が実現された. 隠れた QCD のラグランジアンは

$$\frac{\mathcal{L}_H}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} F^2 + \text{Tr} \bar{\psi} (i\not{D} - \mathbf{y}S) \psi, \quad (2.25)$$

で与えられる.  $D$  は隠れたカラー群  $SU(n_c)_H$  のゲージ場  $A$  を含む共変微分であり、 $F$  は隠れたゲージ場の強さである. 隠れたフェルミオン  $\psi$  は  $SU(n_c)_H$  の基本表現である. 新しく導入されたスカラー場  $S$  は隠れた QCD セクターのフェルミオン  $\psi$  と湯川結合  $yS\bar{\psi}\psi$  をする. 因子  $yS$  は真の QCD のクォークのカレント質量と相当し、カイラル対称性を破る. 湯川結合  $yS\bar{\psi}\psi$  を無視すると隠れた QCD は古典的カイラル対称性を持つ. そのカイラル対称性自発的な破れによりスケールを生成すると共に、 $S$  が真空期待値を獲得する.

カイラル対称性の破れについて適切な有効理論は Nambu-Jona-Lasinio (NJL) モデルである. 本研究では、真の QCD のメソンの性質が参考になれるように、隠れた QCD のゲージ対称性を  $SU(3)$  にする. いわば  $n_c = 3$  とし、隠れたクォークもハドロンを構成する真の QCD のクォークと同様に三色とする. NJL モデルのラグランジアンは

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \text{Tr} \bar{\psi} (i\not{\partial} - \mathbf{y}S) \psi + 2G \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi + G_D (\det \Phi + h.c.), \quad (2.26)$$

で与えられる. ただし、

$$\Phi_{ij} = \bar{\psi}_i (1 - \gamma_5) \psi_j = \frac{1}{2} \sum_{a=0}^8 \lambda_{ji}^a [\bar{\psi} \lambda^a (1 - \gamma_5) \psi], \quad (2.27)$$

であり、 $\lambda^a (a = 1, \dots, 8)$  は Gell-Mann 行列で、 $\lambda^0$  は  $\sqrt{2/3} \mathbf{1}$  である。繰り込み不可能な四フェルミオン結合  $2G \text{Tr} \Phi^\dagger \Phi$  と六フェルミオン結合  $G_D (\det \Phi + h.c.)$  が考えられている。四フェルミオン結合項の結合定数  $G$  は質量次元  $-2$  であり、六フェルミオン結合項の結合定数  $G_D$  は質量次元  $-5$  である。この二つの結合定数の値については、ハドロンを記述する QCD の無次元 NJL パラメーターの関係も適用すると仮定し、隠れた QCD の NJL のカットオフ  $\Lambda$  の値で決まる。要は

$$G^{1/2} \Lambda \Big|_{\text{Hidden}} = 1.82, \quad (-G_D)^{1/5} \Lambda \Big|_{\text{Hidden}} = 2.29, \quad (2.28)$$

によって決まる。

自己無矛盾な平均場近似を用い、真空  $|0\rangle$  を “Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS)” 真空状態とし、NJL ラグランジアン  $\mathcal{L}_{\text{NJL}}$  を二つの部分  $\mathcal{L}_{\text{MFA}}$  と  $\mathcal{L}_I$  に分ける。 $\mathcal{L}_I$  は  $\langle 0 | \mathcal{L}_I | 0 \rangle = 0$  が成り立つように正規順を取る。平均場の定義は

$$\sigma_i = -4G \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle, \quad \phi_a = -2iG \langle \bar{\psi}_i \gamma_5 \lambda^a \psi_i \rangle, \quad (2.29)$$

である。平均場部分のラグランジアン  $\mathcal{L}_{\text{MFA}}$  は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MFA}} = & \text{Tr} \bar{\psi} (i\not{\partial} - M) \psi - i \text{Tr} \bar{\psi} \gamma_5 \phi \psi - \frac{1}{8G} \left( 3\sigma^2 + 2 \sum_{a=1}^8 \phi_a \phi_a \right) + \frac{G_D}{8G^2} \times \\ & \left( -\text{Tr} \bar{\psi} \phi^2 \psi + \sum_{a=1}^8 \phi_a \phi_a \text{Tr} \bar{\psi} \psi + i\sigma \text{Tr} \bar{\psi} \gamma_5 \phi \psi + \frac{\sigma^3}{2G} + \frac{\sigma}{2G} \sum_{a=1}^8 (\phi_a)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.30)$$

と与えられる。 $\sigma_i$  の三つの成分を同じ  $\sigma$  とし、 $\sum_{a=1}^8 \phi_a \lambda^a$  を  $\phi$  とする。 $\lambda^0$  と対応する  $\phi^0$  は suppress されている。Constituent なフェルミオン質量は

$$M(S, \sigma) = \sigma + yS - \frac{G_D}{8G^2} \sigma^2, \quad (2.31)$$

となる。ここで、

$$y = y_1 = y_2 = y_3, \quad (2.32)$$

と仮定する。この仮定はフレーバー対称性  $SU(3)_V$  があることを意味する。文献 [83] は、フレーバー対称性  $SU(3)_V$  が、

$$y_1 \neq y_2 \neq y_3, \quad (2.33)$$

の  $U(1) \times U(1)$ 、あるいは

$$y_1 = y_2 \neq y_3, \quad (2.34)$$

の  $SU(2)_V \times U(1)$  に破る状況を考慮した。

隠れたフェルミオンのフレーバー対称性により、カイラル対称性破れの偽南部-ゴールドストーン (NG) 粒子が安定となり、暗黒物質候補となる。先行研究 [81–83] では、ヒッグス質量は新しく導入さ

れたスカラー場  $S$  の真空期待値とポータル項  $S^2 H^\dagger H$  を通して生成される。先行研究 [84] は、ニュートリノオプションでヒッグス質量を生成する隠れた QCD を議論した。文献 [85–87] は隠れた QCD の相転移による重力波の発生や重力波のスペクトルを研究した。

隠れた QCD を導入した先行研究 [81–83] では、重力理論についての内容を議論しなかった。先行研究 [68] は隠れた QCD と重力自由度を同時に考え、スケール不変な理論を考慮したが、考慮された隠れたゲージ群の基本表現に従うのは複素スカラー場であり、フェルミオンのようなカイラル対称性を持つものではない。その先行研究ではニュートリノオプションに関係せず、ヒッグス場の質量項やニュートリノについても議論しなかった。その理論は最初のシンプルな例として、重力自由度を含むスケール不変な理論から、スケールを生成するインフレーション模型について議論をした。その後の文献 [69] の予言した CMB 観測値は、図7に示されているように、図5とほぼ同じの振る舞いをする。

本研究は、カイラル対称性の自発的な破れを発生させる隠れた QCD を導入し、重力自由度も記述される古典的スケール不変な理論を目指す。ヒッグス質量と左巻きニュートリノ質量についてはニュートリノオプションを考える。

### 3 隠れた QCD を使うインフレーション模型

本章は隠れた QCD を含む古典的スケール不変な理論の構造と、この理論に基づいてのインフレーション模型を紹介する。同じ隠れた QCD を使う先行研究 [81–83] と違い、本研究の隠れた QCD を含む理論はスケール不変な重力セクターも含む。

#### 3.1 理論の各セクター

まず、理論の四つの目標を紹介する：

- 1, QCD と類似する機構、カイラル対称性の破れでロバストなスケールを獲得する；
- 2, 重力の自由度を含み、重力自由度の結合定数、いわばプランク質量を生成する；
- 3, 標準模型を含む；
- 4, 重い右巻きニュートリノを含み、ニュートリノオプションを実現する。

この四つの目標に応じて、理論のラグランジアンは 4 つのセクターに分けられ、

$$\frac{\mathcal{L}_H}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}\text{Tr} F^2 + \text{Tr} \bar{\psi}(i\not{D} - \mathbf{y}S)\psi, \quad (3.1)$$

$$\frac{\mathcal{L}_G}{\sqrt{-g}} = -\frac{\beta}{2} S^2 R + \gamma R^2 + \kappa W_{\mu\nu\alpha\beta} W^{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\mathcal{L}_{\text{SM}+S}}{\sqrt{-g}} = \frac{\mathcal{L}_{\text{SM}}}{\sqrt{-g}} \Big|_{\mu_H=0} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S + \frac{1}{4} \lambda_{HS} S^2 H^\dagger H - \frac{1}{4} \lambda_S S^4, \quad (3.3)$$

$$\frac{\mathcal{L}_N}{\sqrt{-g}} = \frac{i}{2} \bar{N}_R \not{\partial} N_R - \frac{1}{2} y_M S N_R^T C N_R - \left( y_\nu \bar{L} \tilde{H} \frac{1+\gamma_5}{2} N_R + \text{h.c.} \right), \quad (3.4)$$

によって与えられる。隠れた QCD セクター(3.1)は前節で紹介された。重力セクター(3.2)は重力自由度を記述し、スケール不変な構造(2.1)となる。  $W_{\mu\nu\alpha\beta} W^{\mu\nu\alpha\beta}$  項はその出現が好ましくないゴーストをもたらすため [88–90]、その結合定数  $\kappa$  を小さいと仮定する。したがって、我々の重力セクターは特定な非最小結合を持つ  $R + R^2$  修正重力理論となる。標準模型セクター(3.3)は SM を含むが、古典的スケール不変性により、ヒッグス質量項は除外されている。  $S^2 H^\dagger H$  は、結合定数  $\lambda_{HS}$  が無次元で、かつ繰り込み可能という理由で導入され、この項もヒッグス質量の起源となりうるが、本研究では、ニュートリノオプションでヒッグス質量項パラメーターを生成するシナリオを考えるので、結合定数  $\lambda_{HS}$  が小さいと仮定する。ニュートリノセクター(3.4)には、ニュートリノオプションに必要な重い右巻きニュートリノと左巻きニュートリノが含まれる。

### 3.2 カイラル対称性破れによるスケールの生成

本節はスケールの生成について議論する。ロバストなスケール生成を主に担当するのは隠れた QCD セクターである。具体的には、本研究も前節2.3で議論された NJL 理論を用いて隠れた QCD のカイラル対称性自発的な破れという非摂動的な機構でスケールを生成する。1-ループまでの有効 NJL ポテンシャルは

$$V_{\text{NJL}}(S, \sigma) = \frac{3}{8G}\sigma^2 - \frac{G_D}{16G^3}\sigma^3 - \frac{9}{16\pi^2} \left( \Lambda^4 \log\left(1 + \frac{M^2}{\Lambda^2}\right) - M^4 \ln\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) + \Lambda^2 M^2 \right), \quad (3.5)$$

となる。<sup>\*5</sup> この有効ポテンシャルには湯川結合定数  $y$  が常にスカラー場  $S$  と一緒に出る。  $yS$  が  $\Lambda$  と比べて、小さくなるほど、有効理論として NJL の正確性がよくなる。よって、 $\Lambda$  と比較すべきは  $S$  ではなく、  $yS$  であることを強調しておく。  $S$  の真空期待値  $v_S$ 、あるいはインフラトンとしての初期値  $S_*$  が  $\Lambda$  より高くなっても、  $y$  が小さく、  $yv_S$  や  $yS_*$  が  $\Lambda$  より小さいなら NJL 理論は破綻しない。  $y$  が小さくなるほど NJL 近似の信頼性がよくなる。本研究では、インフラトン  $S$  の CW ポテンシャル

$$V_{\text{CW}}(S, R) = \frac{\lambda_S}{4} S^4 + \frac{1}{64\pi^2} (3\lambda_S S^2 + \beta_S R)^2 \log\left(\frac{3\lambda_S S^2 + \beta_S R}{\mu^2}\right), \quad (3.6)$$

も考慮する。スカラー場  $S$  と Ricci スカラーとの非最小結合は  $S$  の二乗なので、CW ポテンシャルへの寄与が  $S$  のツリーレベル質量項と同じだと考え、  $3\lambda_S S^2 + \beta_S R$  が出る。スケールパラメーター  $\mu$  を  $\mu^2 = v_S^2/2$  と選ぶと、

$$V_{\text{CW}}(S, R) = \frac{\lambda_S}{4} S^4 + \frac{1}{64\pi^2} (3\lambda_S S^2 + \beta_S R)^2 \left( \log\left(\frac{3\lambda_S S^2 + \beta_S R}{v_S^2}\right) - \frac{1}{2} \right), \quad (3.7)$$

が得られる。平坦時空を計量の自由度の真空だと見ても良いので、真空期待値を求める時は  $R = 0$  と見なす。NJL ポテンシャルに加えて、関係する真空期待値はポテンシャル  $V_{\text{NJL}}(S, \sigma) + V_{\text{CW}}(S, 0)$  の最小点となる。ポテンシャル  $V_{\text{NJL}}(S, \sigma) + V_{\text{CW}}(S, 0)$  の一次微分がゼロとなる、

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial(V_{\text{NJL}}(S, \sigma) + V_{\text{CW}}(S, 0))}{\partial S} \right|_{S=v_S, \sigma=v_\sigma} \\ &= v_S^3 \left( \lambda_S + \frac{9\lambda_S^2}{16\pi^2} \log(3\lambda_S) \right) - \frac{3n_c y}{4\pi^2} \left( \Lambda^2 M - M^3 \log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

<sup>\*5</sup> 曲がった時空場の量子論の効果が  $R$  の一乗項への寄与があることについては、文献 [91] によって指摘されているが、この効果は小さいので、プランクスケールの生成とインフレーションへの影響は無視できる。このことについては本論文の付録 D で議論する。

$$\left. \frac{\partial(V_{\text{NJL}}(S, \sigma))}{\partial \sigma} \right|_{S=v_S, \sigma=v_\sigma} = \frac{3}{16} \left( \frac{4v_\sigma}{G} - \frac{G_D v_\sigma^2}{G^3} - \frac{4n_c}{\pi^2} \left( 1 - \frac{G_D v_\sigma}{4G^2} \right) (\Lambda^2 M - M^3 \log \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right)) \right) = 0, \quad (3.9)$$

という条件から、 $S$  と  $\sigma$  の真空期待値  $v_S$  と  $v_\sigma$  を求めることができる。ただし、パラメーター  $M$  は

$$M = M(v_S, v_\sigma) = v_\sigma + yv_S - \frac{G_D}{8G^2} v_\sigma^2, \quad (3.10)$$

で与えられる。真空期待値  $v_S$  と  $v_\sigma$  と関連するパラメーターは  $S$  の四点結合定数  $\lambda_S$ 、 $S$  と隠れたクォークとの湯川結合定数  $y$  と NJL のカットオフ  $\Lambda$  である。カットオフ  $\Lambda$  だけが質量次元を持っている。ここで、真の QCD の NJL カットオフ  $\sim 930\text{MeV}$  を

$$\Lambda = 0.93 f_s, \quad (3.11)$$

とスケールアップさせる。  $f_s$  はスケール因子である。表2に  $\lambda_S = 1.20, 1.20 \times 10^{-2}, 1.20 \times 10^{-9}$ ,  $y = 4 \times 10^{-3}, 4 \times 10^{-4}$  としたときに、式(3.8)と式(3.9)の解として得られた  $v_S/f_s, v_\sigma/f_s$  の値を示す。結果はすべて  $v_\sigma, yv_S < \Lambda$  を満たす。

$\lambda_S$	$y$	$v_S/f_s$	$v_\sigma/f_s$	$yv_S/f_s$
1.20	$4.00 \times 10^{-3}$	$4.48 \times 10^{-2}$	$1.50 \times 10^{-1}$	$1.79 \times 10^{-4}$
1.20	$4.00 \times 10^{-4}$	$2.07 \times 10^{-2}$	$1.49 \times 10^{-1}$	$8.29 \times 10^{-6}$
$1.20 \times 10^{-2}$	$4.00 \times 10^{-3}$	$2.16 \times 10^{-1}$	$1.55 \times 10^{-1}$	$8.65 \times 10^{-4}$
$1.20 \times 10^{-2}$	$4.00 \times 10^{-4}$	$9.90 \times 10^{-2}$	$1.49 \times 10^{-1}$	$3.96 \times 10^{-5}$
$1.20 \times 10^{-7}$	$4.00 \times 10^{-3}$	$1.17 \times 10^1$	$2.43 \times 10^{-1}$	$4.66 \times 10^{-2}$
$1.20 \times 10^{-7}$	$4.00 \times 10^{-4}$	4.71	$1.61 \times 10^{-1}$	$1.89 \times 10^{-3}$

表2 真空期待値の計算結果

真空期待値  $v_\sigma$  が非ゼロ、つまり  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$  となることで、隠れた QCD セクターのカイラル対称性が破れ、スケールが生成される。さらに、重力セクターを通じてプランクスケール  $M_{\text{Pl}}$ 、湯川結合で右巻きニュートリノの質量、ニュートリノオプシオンでヒッグス質量項  $\mu_H$  と左巻きニュートリノの質量を生成する。しかし、ツリーレベルの重力セクターは普通の  $R + R^2$  の  $f(R)$  理論だと見ても良いが、式(3.7)のとおり、CW ポテンシャルで  $R$  が  $\log$  項に現れ、重力セクターの有効ラグランジアンが複雑となる。そこで、インフレーション中で

$$\beta R < 3\lambda_S S^2, \quad (3.12)$$

を仮定し、CW ポテンシャルを

$$V_{\text{NJL}}(S, \sigma) + V_{\text{CW}}(S, R) = U_{\text{CW}}(S, \sigma) + U_{(1)}(S)R + U_{(2)}(S)R^2 + O(R^3), \quad (3.13)$$

と展開する。ここで、

$$U_{\text{CW}}(S, \sigma) = V_{\text{NJL}}(S, \sigma) + V_{\text{CW}}(S, 0), \quad (3.14)$$

$$U_1(S) = \frac{3\lambda_S \beta S^2}{32\pi^2} \log\left(\frac{3\lambda_S S^2}{v_S^2}\right), \quad (3.15)$$

$$U_2(S) = \frac{\beta^2}{64\pi^2} \left(1 + \log\left(\frac{3\lambda_S S^2}{v_S^2}\right)\right), \quad (3.16)$$

である。このように得た修正重力理論は、 $R$  と  $R^2$  の因子が  $S$  の非線形的な関数となる  $R + R^2$  理論である。インフレーションと関係するラグランジアンは

$$\frac{\mathcal{L}_{\text{eff}}}{\sqrt{-g}} = -\frac{1}{2}M_{\text{Pl}}^2 B(S)R + G(S)R^2 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu S \partial_\nu S + Z^{-1}(S, \sigma)\partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) - U(S, \sigma), \quad (3.17)$$

で与えられる。ここで、

$$U(S, \sigma) = U_{\text{CW}}(S, \sigma) - U_0, \quad (3.18)$$

$$B(S) = \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2}(\beta S^2 + 2U_1) = \frac{\beta S^2}{M_{\text{Pl}}^2} \left(1 + \frac{3\lambda_S}{16\pi^2} \log\left(\frac{3\lambda_S S^2}{v_S^2}\right)\right), \quad (3.19)$$

$$G(S) = \gamma - U_2 = \gamma - \frac{\beta^2}{64\pi^2} \left(1 + \log\left(\frac{3\lambda_S S^2}{v_S^2}\right)\right), \quad (3.20)$$

$$Z^{-1}(S, \sigma) = -\frac{3}{128\pi^2} \frac{(v_\sigma G_D - 4G^2)^2}{G^4(\Lambda^2 + M^2)} \times \left(5\Lambda^4 + 3\Lambda^2 M^2 + 3(\Lambda^2 + M^2)^2 \log\left(\frac{M^2}{\Lambda^2 + M^2}\right)\right), \quad (3.21)$$

となる。 $U_0$  はポテンシャルが真空期待値でゼロとなるように導入された定数であり、 $Z^{-1}(S, \sigma)$  は NJL 作用の 1-ループ効果による生じたスカラー場  $\sigma$  の運動項である。プランク質量  $M_{\text{Pl}}$  は

$$B(v_S) = 1, \quad (3.22)$$

となるように、

$$M_{\text{Pl}} = \sqrt{\beta} v_S \sqrt{1 + \frac{3\lambda_S \log(3\lambda_S)}{16\pi^2}}, \quad (3.23)$$

によって決められる。四点結合定数  $\lambda_S$  の影響は図10に示されているように僅かなので、

$$M_{\text{Pl}} \simeq \sqrt{\beta} v_S, \quad (3.24)$$

と見なせる.  $S^2R$  のパラメーター  $\beta$  は真空期待値  $v_S$  とプランク質量  $M_{\text{Pl}}$  との相対的な大きさを決める.  $\beta$  の値を与えれば,  $M_{\text{Pl}}$  の実際の大きさにより,  $v_S$  の未定因子  $f_s$  が決められる.

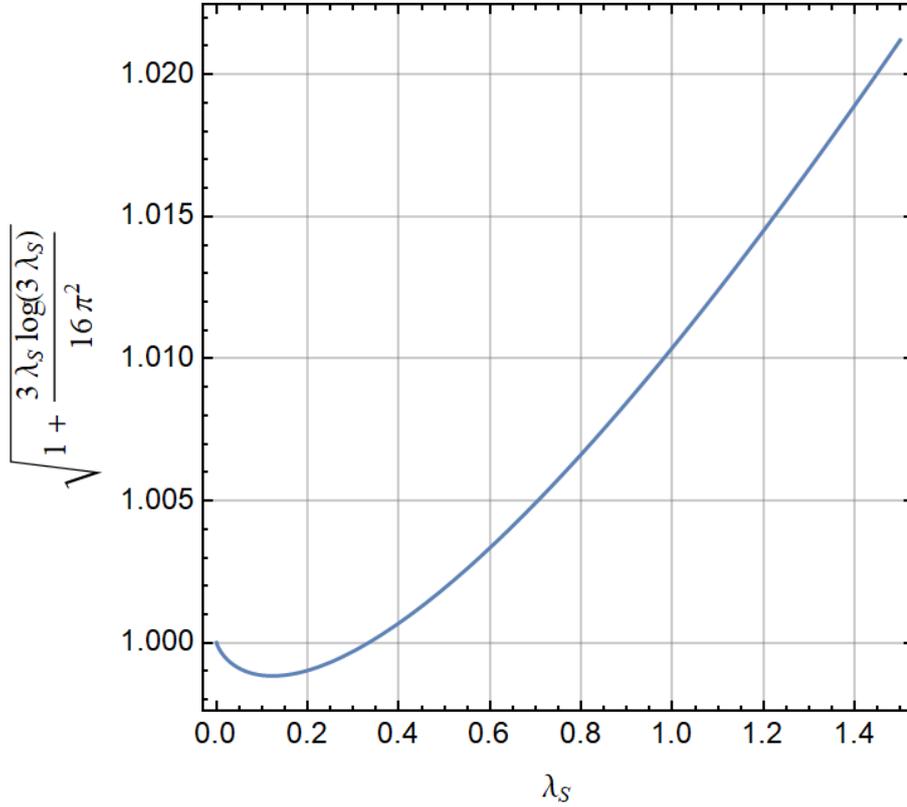


図10  $\lambda_S$  の範囲は 0 から 1.5 までである.  $\sqrt{1 + (3\lambda_S \log(3\lambda_S))/(16\pi^2)}$  は最大でも 1.021 ぐらいとなる.

ヒッグス質量と左巻きニュートリノの軽い質量はニュートリノオプションで与えられる. そのため, 右巻きニュートリノの質量は, 2.2節で述べたように,

$$m_N = y_M v_S \sim 10^7 \text{GeV}, \quad (3.25)$$

となる. ここで,  $y_M$  はニュートリノセクター(3.4)のマヨラナ-湯川結合定数である. プランク質量(3.24)と合わせ,

$$y_M \sim 10^{-11} \sqrt{\beta}, \quad (3.26)$$

であることがわかる. 後ほどの4.2節で示す通り, このモデルにおける典型的な  $\beta$  の値は  $\sim 10^3$  であるため,  $y_M$  が非常に小さな値となる.  $y_M = 0$  の時, レプトン数が保存する. 't Hooft によれば, このように対称性を回復させるパラメータの値は小さい方が自然である. よって, 式(3.26)で得られるような小さい  $y_M$  は不自然ではない.

### 3.3 共形変換

インフレーションの議論は、重力セクターが Hilbert-Einstein 項  $-M_{\text{Pl}}^2 R/2$  しか持たないような Einstein フレームと呼ばれる共形フレームで行ったほうが便利である。本節は Einstein フレームへの共形変換について紹介する。共形変換の定義は、計量テンソルに共形因子  $\Omega^2$  をかけて、

$$g_{\mu\nu}^{(J)} \rightarrow g_{\mu\nu}^{(E)} = \Omega^2 g_{\mu\nu}^{(J)}, \quad (3.27)$$

で与えられる変換である.. Hilbert-Einstein 項以外のオペレーターや非最小結合を含むような変換前のフレームは Jordan フレームと呼ばれる。上添字  $J$  は Jordan フレーム、 $E$  は Einstein フレームを表記する。

付録 D の結果を使うと、時空次元  $D = 4$  の時、Ricci スカラーと関する変換は

$$\begin{aligned} R^{(E)} \sqrt{-g^{(E)}} &= \Omega^2 R^{(J)} \sqrt{-g^{(J)}} - 6\Omega^2 (\nabla_\lambda \nabla^\lambda \log \Omega) \sqrt{-g^{(J)}} \\ &\quad - 6\Omega^2 (\nabla_\lambda \log \Omega) (\nabla^\lambda \log \Omega) \sqrt{-g^{(J)}}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる。二次微分の項  $\nabla_\lambda \nabla^\lambda \log \Omega$  があるが、部分積分で、

$$\begin{aligned} R^{(E)} \sqrt{-g^{(E)}} &= \Omega^2 R^{(J)} \sqrt{-g^{(J)}} + 6(\nabla_\lambda \Omega^2 (\nabla^\lambda \log \Omega) - \nabla_\lambda (\Omega^2 \nabla^\lambda \log \Omega)) \sqrt{-g^{(J)}} \\ &\quad - 6\Omega^2 (\nabla_\lambda \log \Omega) (\nabla^\lambda \log \Omega) \sqrt{-g^{(J)}} \\ &= (\Omega^2 R^{(J)} + \frac{3g^{(J)\mu\nu}}{2\Omega^2} \nabla_\mu \Omega^2 \nabla_\nu \Omega^2 - \nabla_\lambda (6\Omega^2 \nabla^\lambda \log \Omega)) \sqrt{-g^{(J)}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

のように書き換える。Jordan フレームでの  $R^2$  項については、 $f(R)$  理論の研究でよく使われている手法を用い、補助場  $\chi$  を導入し、ラグランジアンを

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(J)}}{\sqrt{-g^{(J)}}} &= -\frac{1}{2} M_{\text{Pl}}^2 B(S) R^{(J)} + 2G(S) R^{(J)} \chi - G(S) \chi^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{(J)\mu\nu} (\partial_\mu S \partial_\nu S + Z^{-1} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) - U(S, \sigma), \end{aligned} \quad (3.30)$$

と書き換える。元のラグランジアン(3.17)は補助場  $\chi$  に対する変分で得られる。 $R^{(E)} \sqrt{-g^{(E)}}$  の係数を  $-M_{\text{Pl}}^2/2$  にするため、式(3.29)と式(3.30)を比較して、共形変換因子を

$$\Omega^2 = B(S) - \frac{4G(S)\chi}{M_{\text{Pl}}^2}, \quad (3.31)$$

の形にする。 $R^{(J)}$  の項は

$$-\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \Omega^2 R^{(J)} \sqrt{-g^{(J)}} = \left( -\frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} R^{(E)} + \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \frac{3g^{(E)\mu\nu}}{2\Omega^4} \partial_\mu \Omega^2 \partial_\nu \Omega^2 \right) \sqrt{-g^{(E)}}, \quad (3.32)$$

と書き換える．したがって、Einstein フレームでの作用は

$$S^{(E)} = \int d^4x \sqrt{-g^{(E)}} \left( -\frac{M_P^2}{2} R^{(E)} + \frac{g^{(E)\mu\nu}}{2\Omega^2} (\partial_\mu S \partial_\nu S + Z^{-1} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) \right. \\ \left. + \frac{3 M_P^2}{4 \Omega^4} g^{(E)\mu\nu} \partial_\mu \Omega^2 \partial_\nu \Omega^2 - \frac{U + G \chi^2}{\Omega^4} \right), \quad (3.33)$$

となる．作用に現れる共形因子  $\Omega^2$  の微分の二乗項  $3M_P^2 g^{(E)\mu\nu} \partial_\mu \Omega^2 \partial_\nu \Omega^2 / (4\Omega^4)$  は正準化されていないが、新しいスカラー場 scalaron  $\varphi$

$$\varphi = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \log(\Omega^2), \quad (3.34)$$

を導入することで正準化でき、Einstein フレームでの有効ラグランジアンは

$$\frac{\mathcal{L}_{\text{eff}}^{(E)}}{\sqrt{-g^{(E)}}} = -\frac{M_P^2}{2} \tilde{R} + \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\varphi}{M_{\text{Pl}}}} g^{(E)\mu\nu} (\partial_\mu S \partial_\nu S + Z^{-1} \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma) \\ + \frac{1}{2} g^{(E)\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V, \quad (3.35)$$

となる．ポテンシャル  $V$  は\*6

$$V = e^{-\frac{4}{3} \varphi / M_{\text{Pl}}} \left( U(S, \sigma) + \frac{M_{\text{Pl}}^4}{16G(S)} (B(S) - e^{\frac{2}{3} \varphi / M_{\text{Pl}}})^2 \right), \quad (3.36)$$

と書かれ、三つのフィールド、 $S$ 、 $\sigma$  と  $\varphi$  に依存する．Einstein フレームへの共形変換で三スカラー場システムが得られる．

### 3.4 谷近似

本節以後は Einstein フレームで議論し、すべての式の添字 ( $E$ ) を省略する．谷近似 (Valley approximation) を使えば、multi-field システムを single-field に近似できる [71]．前節で Einstein フレームへの共形変換で得たポテンシャル(3.36)に対して、一次微分の条件

$$\frac{\partial V(S, \sigma, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{e^{-\frac{4}{3} \varphi / M_{\text{Pl}}}}{12G(S) M_{\text{Pl}}} \left( B(S) M_{\text{Pl}}^4 (e^{\frac{2}{3} \varphi / M_{\text{Pl}}} - B(S)) - 16G(S) U(S, \sigma) \right) \\ = 0, \quad (3.37)$$

---

\*6 Higgs inflation の場合、 $G = 0$  なので、scalaron のスカラー自由度がない．ポテンシャルは単純な  $U/B^2$  となる．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V(S, \sigma, \varphi)}{\partial \sigma} &= e^{-\frac{4}{3}\varphi/M_{\text{Pl}}} \frac{\partial V_{\text{NJL}}}{\partial \sigma} \\
&= e^{-\frac{4}{3}\varphi/M_{\text{Pl}}} \left( \frac{3\sigma}{4G} - \frac{3G_D \sigma^2}{16G^3} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3n_c}{4\pi^2} (M\Lambda^2 - M^3 \log\left(1 + \frac{\Lambda^2}{M^2}\right)) \left(1 - \frac{G_D \sigma}{4G^2}\right) \right) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

から、 $\sigma$  と  $\varphi$  方向の極小値を求めることができる。残された自由度はスカラー場  $S$  一つだけとなる。式(3.37)と式(3.38)からインフレーション中の  $S$  の谷の経路を決める。式(3.37)は解析的に解くことができ、解は

$$\varphi_v = \sqrt{\frac{3}{2}} M_{\text{Pl}} \log((1 + 4A(S, \sigma))B(S)), \tag{3.39}$$

で与えられる。ここで、

$$A(S, \sigma) = \frac{4G(S)U(S, \sigma)}{B^2(S)M_{\text{Pl}}^4}, \tag{3.40}$$

である。経路(3.39)をポテンシャル(3.36)に代入し、

$$\tilde{V}(S, \sigma) = V(S, \sigma, \varphi_v) = \frac{U(S, \sigma) M_{\text{Pl}}^4}{16G(S)U(S, \sigma) + B^2(S)M_{\text{Pl}}^4}, \tag{3.41}$$

が得られる。式(3.38)は解析的に解くことが困難であるため、ここでは  $\tilde{V}$  の  $\sigma$  に対する一次微分がゼロとなる数値解を求める。例として、以下の値を取り、計算を進める。

$$y = 4.00 \times 10^{-3}, \quad \lambda_S = 1.14 \times 10^{-2}, \quad \beta = 6.31 \times 10^3, \quad \gamma = 1.26 \times 10^8. \tag{3.42}$$

真空期待値  $v_S$  と  $v_\sigma$  は

$$\frac{v_S}{M_{\text{Pl}}} = 1.26 \times 10^{-2}, \quad \frac{v_\sigma}{M_{\text{Pl}}} = 8.86 \times 10^{-3}, \tag{3.43}$$

で与えられる。ここで、前述の  $f_s$  の値を計算することより、プランク質量との比  $v_S/M_{\text{Pl}}$ ,  $v_\sigma/M_{\text{Pl}}$  を計算するほうが便利である。NJL カットオフ  $\Lambda$  とプランク質量の比は

$$\frac{\Lambda}{M_{\text{Pl}}} = 5.33 \times 10^{-2}, \tag{3.44}$$

である。 $U_0$  をプランク質量で表すと、

$$\frac{U_0}{M_{\text{Pl}}^4} = -7.02 \times 10^{-10}, \tag{3.45}$$

となる。この時のポテンシャル(3.36)のコントアーは図11の左図の黒線で示す。左図の赤線は  $\partial\tilde{V}/\partial\sigma = 0$  の解、つまり、式(3.37)と式(3.38)両方を満たすインフラトンの経路  $\sigma_v(S)$  である。経路上のポテンシャルの値は図11の右図で示される。本インフレーションモデルは、インフレーションが  $S/v_S > 1$ 、図11の右図のポテンシャルのごく平坦なところで行うと仮定する。よって、インフラトン

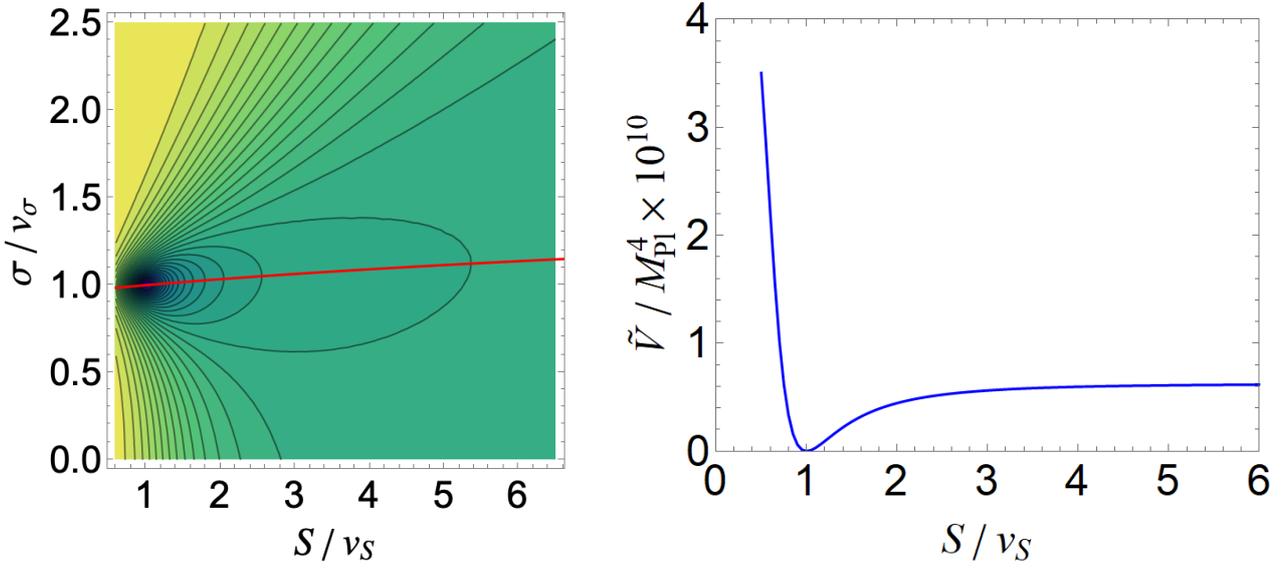


図11 左: ポテンシャル  $\tilde{V}(S, \sigma) = V(S, \sigma, \varphi_v(S))$  のコントアー. 赤線はポテンシャルの谷の底  $\partial\tilde{V}/\partial\sigma = 0$  を示す; 右: 赤線に沿ってポテンシャルの値の変化するである.

は single-field インフレーションと同じくポテンシャルの底へゆっくり転がり、ポテンシャルがほぼ定数として扱われ、宇宙が急激に加速膨張する. 経路  $\sigma_v(S)$  をポテンシャルの式(3.41)に代入し、有効 single-field インフレーションのポテンシャル

$$V_{\text{inf}}(S) = \tilde{V}(S, \sigma_v(S)) = V(S, \sigma_v(S), \varphi_v(S)) = \frac{U(S, \sigma_v(S)) M_{\text{Pl}}^4}{16 G(S) U(S, \sigma_v(S)) + B^2(S) M_{\text{Pl}}^4}, \quad (3.46)$$

が得られる.

谷近似は、谷の底でポテンシャルの水平方向 ( $S$  方向) と垂直方向 ( $\sigma$  方向) の二次微分の大ききで評価できる. まず、ポテンシャルの谷の底での二次微分を有効質量

$$m_S^2 = \left. \frac{\partial^2 \tilde{V}(S, \sigma)}{\partial S^2} \right|_{\text{Valley}}, \quad m_\sigma^2 = \left. \frac{\partial^2 \tilde{V}(S, \sigma)}{\partial \sigma^2} \right|_{\text{Valley}}, \quad (3.47)$$

と定義する. 質量の比  $m_S^2/m_\sigma^2$  と  $S/v_S$  との関係を図12に示す. 図12より、常に  $m_S^2 < m_\sigma^2$  が成り立ち、ポテンシャルの谷は水平方向より垂直方向の方が深く、谷近似がよいことがわかる.

一方、先に式(3.38)を解いて解  $\sigma_v$  を得た場合には、式(3.42)の値を使って得られるポテンシャル  $V(S, \sigma_v, \varphi)$  は図13の左図で与えられる. 緑線はインフラトンの経路を表す. 経路上のポテンシャルは図13の右図である.

有効ポテンシャル  $V_{\text{inf}}(S)$  がわかれば、single-field インフレーションの slow-roll パラメーターは

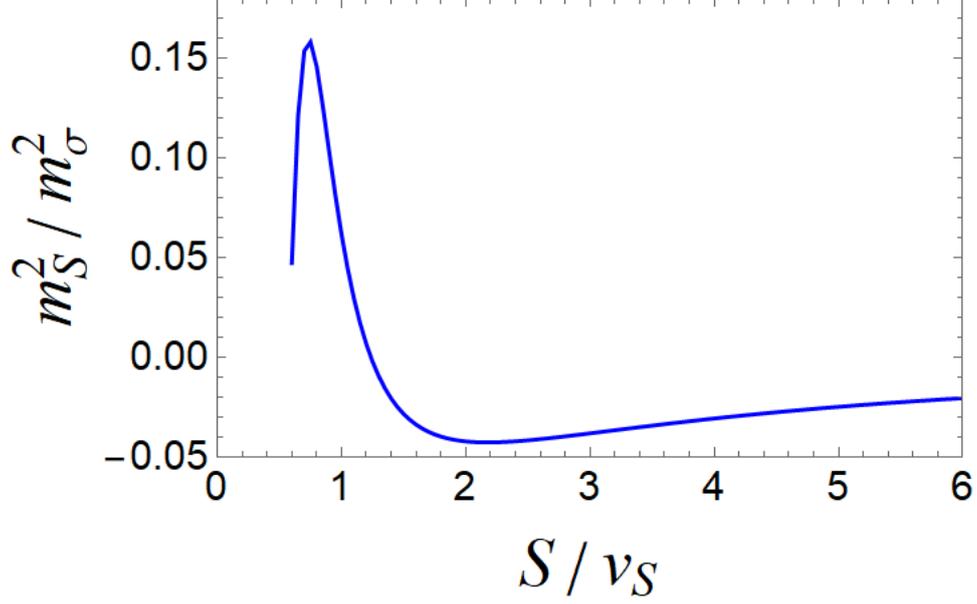


図12 ポテンシャルの谷の底における  $m_S^2/m_\sigma^2$  の値を示す.  $m_S^2/m_\sigma^2 < 1$  は、谷の底でポテンシャルが  $\sigma$  方向に沿って深く、谷近似が良いことを意味する.

式(1.28)と式(1.29)で与えられるが、インフラトンの運動項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}F^2(S)g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S &= \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}\frac{\varphi_v(S)}{M_{\text{Pl}}}}g^{\mu\nu}(\partial_\mu S\partial_\nu S + Z^{-1}(S,\sigma_v(S))\partial_\mu\sigma_v(S)\partial_\nu\sigma_v(S)) \\
&\quad + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi_v(S)\partial_\nu\varphi_v(S) \\
&= \frac{1}{2}(e^{-\frac{2}{3}\frac{\varphi_v(S)}{M_{\text{Pl}}}}(1 + Z^{-1}(S,\sigma_v(S))\sigma_v'^2(S)) + \varphi_v'^2(S))g^{\mu\nu}\partial_\mu S\partial_\nu S,
\end{aligned} \tag{3.48}$$

となるので、正準な運動項にしないと式(1.28)と式(1.29)が使えない. 式(3.48)の  $\sigma_v'(S)$  と  $\varphi_v'(S)$  は  $\sigma_v(S)$  と  $\varphi_v(S)$  の  $S$  に対する微分を意味する. 非正準因子  $F^2(S)$  は

$$\begin{aligned}
F^2(S) &= \frac{1 + Z^{-1}(S,\sigma_v(S))\sigma_v'^2(S)}{(1 + 4A(S,\sigma_v(S)))B(S)} \\
&\quad + \frac{3}{2}M_{\text{Pl}}^2 \left( \frac{(1 + 4A(S,\sigma_v(S)))B'(S) + 4A'(S,\sigma_v(S))B(S)}{(1 + 4A(S,\sigma_v(S)))B(S)} \right)^2,
\end{aligned} \tag{3.49}$$

で与えられる.  $A'(S,\sigma)$  と  $B'(S)$  は  $A(S,\sigma)$  と  $B(S)$  の  $S$  に対する偏微分である. 積分

$$\int_{v_S}^S F(\tilde{S}) d\tilde{S}, \tag{3.50}$$

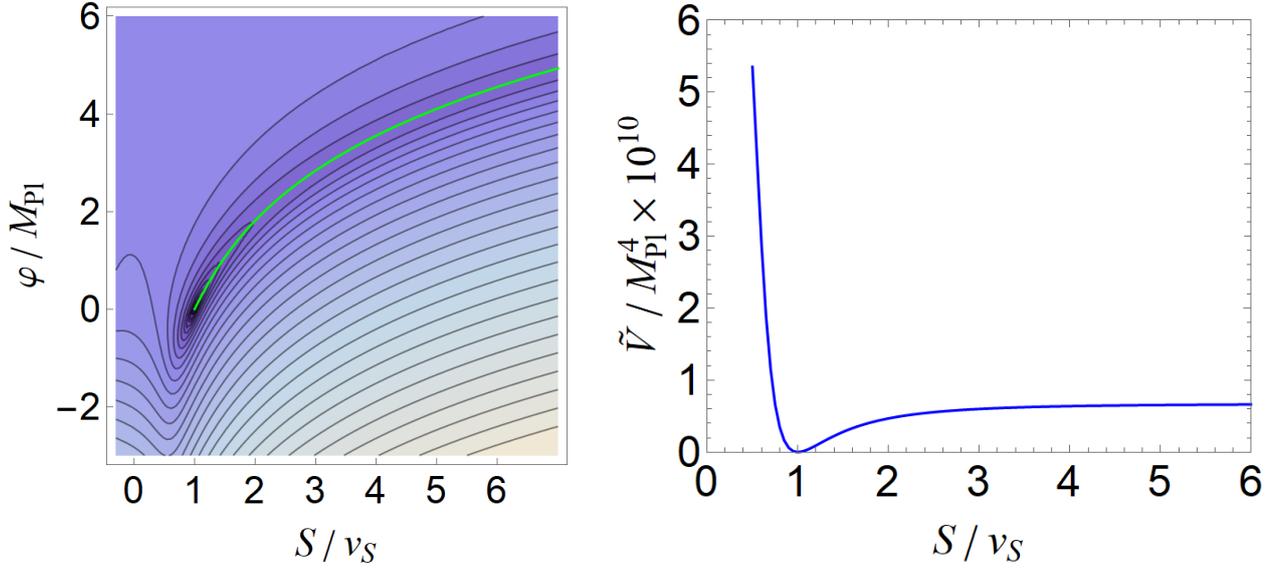


図13 左: ポテンシャル  $V(S, \sigma_v(S), \varphi)$  のコンター。緑線はインフラトン  $S$  のゆっくり転がる経路を示す; 右: 緑線に沿ってポテンシャルの値の変化である。

を評価することで運動項を正準化できるが、この評価はかなり困難であるため、ここでは、

$$\varepsilon(S) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2 F^2(S)} \left( \frac{V'_{\text{inf}}(S)}{V_{\text{inf}}(S)} \right)^2, \quad (3.51)$$

$$\eta(S) = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{F^2(S)} \left( \frac{V''_{\text{inf}}(S)}{V_{\text{inf}}(S)} - \frac{F'(S)}{F(S)} \frac{V'_{\text{inf}}(S)}{V_{\text{inf}}(S)} \right), \quad (3.52)$$

から slow-roll パラメーターを計算する。宇宙がインフレーション中どのぐらい膨張したかを評価するパラメーター、e-fold  $N_e$  は

$$N_e = \int_{S_{\text{end}}}^{S_*} dS \frac{F^2(S)}{M_{\text{Pl}}^2} \frac{V_{\text{inf}}(S)}{V'_{\text{inf}}(S)}, \quad (3.53)$$

で与えられる。  $S_*$  は CMB のスケールで観測された揺らぎのホライズンを離れた時のインフラトンの値である。  $S_{\text{end}}$  はインフレーションの終了時刻のインフラトンの値であり、

$$\varepsilon(S_{\text{end}}) = 1, \quad (3.54)$$

で決まる。関数  $\sigma_v(S)$  は数値計算で得られるが、slow-roll パラメーターの計算で、  $V_{\text{inf}}$  や  $F^2$  のインフラトン  $S$  に対する微分は繰り返して行うので、数値計算の結果  $\sigma_v(S)$  を直接使うのは不便である。そこで、関数  $\sigma_v(S)$  を  $S$  の多項式としてフィットする。式(3.42)の値を取れば、フィットで得られた  $\sigma_v(S)$  は

$$\begin{aligned} \sigma_v(S) = & 0.149 + 2.94 \times 10^{-2} S - 6.71 \times 10^{-3} S^2 \\ & + 1.10 \times 10^{-3} S^3 - 9.74 \times 10^{-5} S^4 + 3.40 \times 10^{-6} S^5, \end{aligned} \quad (3.55)$$

となる。この結果を使い、式(3.54)の解は

$$\frac{S_{\text{end}}}{v_S} = 1.40, \quad (3.56)$$

で与えられることがわかる。e-fold  $N_e$  を与え、 $S_*$  を数値計算で求めることで  $S = S_*$  の時の  $\varepsilon$  と  $\eta$  の値  $\varepsilon_*$  と  $\eta_*$  がわかる。式(3.42)の値を取り、かつ  $N_e = 55.5$  の場合は、

$$\frac{S_*}{v_S} = 6.25, \quad (3.57)$$

となる。この結果を用いると、CMB 観測量の密度揺らぎの幅  $A_s$ 、スペクトルインデックス  $n_s$  とテンソル-スカラー比  $r$

$$A_s = \frac{V_{\text{inf}}(S_*)}{24\pi\varepsilon_* M_{\text{Pl}}^4}, \quad n_s = 1 + 2\eta_* - 6\varepsilon_*, \quad r = 16\varepsilon_*, \quad (3.58)$$

は

$$\log(10^{10} A_s) = 3.04, \quad n_s = 0.964, \quad r = 2.00 \times 10^{-3}, \quad (3.59)$$

となる。

ここで  $S$  をインフラトンとするのは、計算をシンプルにするためである。経路  $\{\varphi_v(S), \sigma_v(S)\}$  の変数  $S$  を他の変数に変えても、 $\varepsilon$  や  $\eta$  などの結果は変わらない。具体的には、任意の変数  $\zeta$  で、 $\frac{\partial V(S, \sigma, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial V(S, \sigma, \varphi)}{\partial \sigma} = 0$  を満たす経路を  $\{S_v(\zeta), \varphi_v(\zeta), \sigma_v(\zeta)\}$  と表すと、運動項は式(3.48)の代わりに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P^2(\zeta) g^{\mu\nu} \partial_\mu \zeta \partial_\nu \zeta &= \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{3} \frac{\varphi_v}{M_{\text{Pl}}}} g^{\mu\nu} (\partial_\mu S_v \partial_\nu S_v + Z^{-1} \partial_\mu \sigma_v \partial_\nu \sigma_v) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi_v \partial_\nu \varphi_v \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{-\frac{2}{3} \frac{\varphi_v}{M_{\text{Pl}}}} \left( \left( \frac{dS_v}{d\zeta} \right)^2 + Z^{-1} \left( \frac{d\sigma_v}{d\zeta} \right)^2 \right) + \left( \frac{d\varphi_v}{d\zeta} \right)^2 \right) g^{\mu\nu} \partial_\mu \zeta \partial_\nu \zeta, \end{aligned} \quad (3.60)$$

で与えられる。新しい非正準因子  $P(\zeta)$  と元の因子  $F(S)$  との関係は

$$P(\zeta) = F(S_v(\zeta)) \frac{dS}{d\zeta}, \quad (3.61)$$

で表す。有効 single-field ポテンシャルについては、

$$V_{\text{inf}}(\zeta) = V_{\text{inf}}(S_v(\zeta)), \quad (3.62)$$

となることが自明である。変数を省略して、 $\varepsilon$  と  $\eta$  が以下のように書ける。

$$\varepsilon = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2F^2} \left( \frac{1}{V_{\text{inf}}} \frac{dV_{\text{inf}}}{dS} \right)^2 = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2P^2} \left( \frac{1}{V_{\text{inf}}} \frac{dV_{\text{inf}}}{d\zeta} \right)^2. \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{F^2} \left( \frac{1}{V_{\text{inf}}} \frac{d^2 V_{\text{inf}}}{dS^2} - \frac{1}{V_{\text{inf}} F} \frac{dF}{dS} \frac{dV_{\text{inf}}}{dS} \right) \\
&= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{F^2} \left( \frac{1}{V_{\text{inf}}} \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{1}{\frac{dS}{d\zeta}} \frac{dV_{\text{inf}}}{d\zeta} \right) - \frac{1}{V_{\text{inf}} \left(\frac{dS}{d\zeta}\right)^2} \frac{d \log(F)}{d\zeta} \frac{dV_{\text{inf}}}{d\zeta} \right) \\
&= \frac{M_{\text{Pl}}^2}{P^2} \left( \frac{1}{V_{\text{inf}}} \frac{d^2 V_{\text{inf}}}{d\zeta^2} - \frac{1}{V_{\text{inf}} P} \frac{dP}{d\zeta} \frac{dV_{\text{inf}}}{d\zeta} \right),
\end{aligned} \tag{3.64}$$

よって、 $\zeta$  を scalaron  $\varphi$  にしても計算結果が変わらない。上の計算では、 $\zeta = S$  とし、スカラー場  $S$  をインフラトンとした。本質的な違いが出る可能性は異なる経路を取ることである。条件  $\frac{\partial V(S, \sigma, \varphi)}{\partial \sigma} = \frac{\partial V(S, \sigma, \varphi)}{\partial S} = 0$  を満たす経路  $v'$  を取る場合、 $\varphi$  を変数 (インフラトン) とし、 $\{S_{v'}(\varphi), \sigma_{v'}(\varphi)\}$  で経路  $v'$  が決まる。ここで、関数  $S_{v'}(\varphi)$  の逆関数  $\varphi_{v'}(S)$  を計算し、 $\varphi_v(S)$  と比較する。図14に経路  $v$  と経

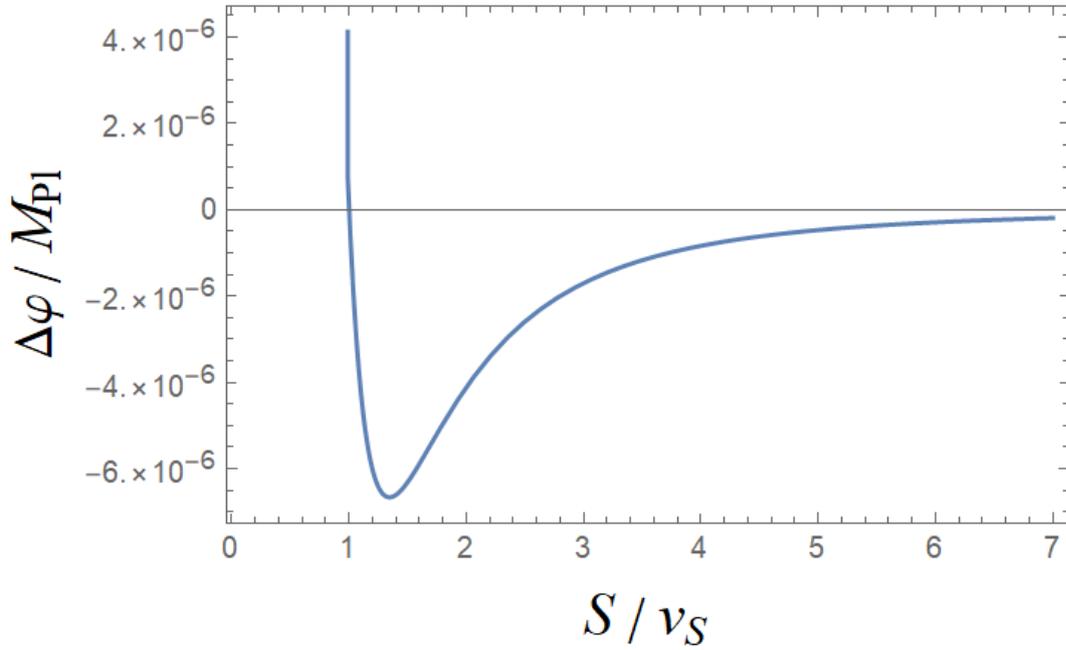


図14 経路  $v$  と経路  $v'$  上の  $\varphi$  の値の差。  $\varphi_v(S)$  と  $\varphi_{v'}(S)$  の差が非常に小さいことがわかる。

路  $v'$  上の  $\varphi$  の値の差  $\Delta\varphi = \varphi_v(S) - \varphi_{v'}(S)$  を示す。縦軸は  $\Delta\varphi/M_{\text{Pl}}$  であり、横軸は  $S/v_S$  である。 $\Delta\varphi/M_{\text{Pl}}$  が  $\sim 10^{-6}$  ほど小さいことから、二つの経路がほぼ等しく、CMB 観測量の計算への影響が小さいことがわかる。

経路  $v$  を使うメリットは式(3.39)のように解析的に  $\varphi_v(S)$  を表すことができる点である。次の章では経路  $v$  用いて  $S$  をインフラトンとする数値計算について議論する。

## 4 インフレーションについての数値計算

本章ではパラメータスキャンの数値計算方法を紹介し、CMB 観測結果と一致するパラメータ領域を示す。

### 4.1 数値計算方法

まず、CMB 観測量の密度揺らぎの幅  $A_s$ 、スペクトルインデックス  $n_s$  とテンソル-スカラー比  $r$  に寄与する独立なパラメータを特定する。本研究のインフレーションモデルは、谷近似で最終的に single-field システムとされるので、CMB 観測量と直接関係するのはインフラトンの運動項因子(3.49)とポテンシャル(3.46)である。谷近似で得たインフラトンの経路の情報も必要であるが、根源的なのは  $U(S, \sigma)$  と  $B(S)$ 、 $G(S)$  三つの関数である。関数  $U(S, \sigma)$  をコントロールするパラメータは  $S$  の四点結合定数  $\lambda_S$  と隠れた QCD のフェルミオンと  $S$  との湯川結合定数  $y$  である。重力セクターの非最小結合  $S^2 R$  の結合定数  $\beta$  は  $B(S)$  へ、Ricci スカラーの非線形項  $R^2$  のパラメータ  $\gamma$  は  $G(S)$  へ寄与する。

ポテンシャル(3.46)は常に  $V'_{\text{inf}}(S)/V_{\text{inf}}(S)$ 、 $V''_{\text{inf}}(S)/V_{\text{inf}}(S)$  の形で現れるので、任意な定数をかけてもインフレーションの slow-roll パラメータ  $\varepsilon$  と  $\eta$  に同じ影響を与える。式(3.46)により、因子  $M_{\text{Pl}}^4$  が消せる。  $\sigma_v(S)$  は単純に NJL ポテンシャルで決まるので、関係するパラメータは  $y$  だけである。  $G(S)$  と  $B^2(S)M_{\text{Pl}}^4$  が式(3.46)の分母だけに現れるのは  $\beta$  と  $\gamma$  が分母だけに寄与するのを意味する。これに基づいて、

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta^2}, \quad (4.1)$$

を導入し、

$$\bar{B}(S) = \frac{B(S)M_{\text{Pl}}^2}{\beta} = S^2 \left( 1 + \frac{3\lambda_S}{16\pi^2} \log(3\lambda_S S^2/v_S^2) \right), \quad (4.2)$$

$$\bar{G}(S) = \frac{G(S)}{\beta^2} = \bar{\gamma} - \frac{1 + \log(3\lambda_S S^2/v_S^2)}{64\pi^2}, \quad (4.3)$$

$$\bar{V}(S, \sigma) = \frac{\beta^2}{M_{\text{Pl}}^4} \tilde{V}(S, \sigma) = \frac{\beta^2 U(S, \sigma)}{16G(S)U(S, \sigma) + B(S)^2 M_{\text{Pl}}^4} = \frac{U(S, \sigma)}{16\bar{G}(S)U(S, \sigma) + \bar{B}(S)^2}, \quad (4.4)$$

との関数を定義する。これらの関数には  $\beta$  が現れない。関与するパラメータは  $\lambda_S$ 、 $y$  と  $\bar{\gamma}$ 、三つだけである。

ポテンシャル  $V_{\text{inf}}(S)$  の他、運動項因子  $F^2(S)$  は  $F^2(S)/M_{\text{Pl}}^2$  と  $F'(S)/F(S)$  の形で slow-roll パラメータへ寄与する。式(4.2)、式(4.3)と式(4.4)を使い、 $F^2(S)/M_{\text{Pl}}^2$  を

$$\frac{F(S)^2}{M_{\text{Pl}}^2} = \frac{1}{\beta} \frac{1 + Z_\sigma^{-1} \sigma_v'^2}{(1 + 4A)\bar{B}} + \frac{3}{2} \frac{((1 + 4A)\bar{B}' + 4A'\bar{B})^2}{(1 + 4A)^2 \bar{B}^2}, \quad (4.5)$$

$F'(S)/F(S)$  を

$$\frac{F'(S)}{F(S)} = \frac{1}{2F^2(S)} \frac{d(F^2(S))}{dS} = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2F^2(S)} \frac{d}{dS} \left( \frac{F^2(S)}{M_{\text{Pl}}^2} \right), \quad (4.6)$$

と書ける. 関数  $A(S, \sigma)$  は

$$A(S, \sigma) = \frac{4\bar{G}(S)U(S, \sigma)}{\bar{B}^2(S)}, \quad (4.7)$$

と書き換えることができるので, 式(4.5)の第一項は  $\beta^{-1}$  に依存するが, 第二項は依存しない.  $\beta$  が大きい場合, 第一項を無視できる. これでもう一つのメリットは因子  $Z_\sigma^{-1}$  の影響が無くなる. スケールの生成について議論した結果の式(3.24)の通り, プランク質量は  $S$  の真空期待値  $v_S$  の  $\sqrt{\beta}$  倍となるので,  $\beta > 1$  の範囲を考えるのが適切であることがわかる. 本研究のパラメータスキャンについては,  $\beta > 1$  と仮定し, 数値計算を行う. これ, slow-roll パラメーター  $\varepsilon$  と  $\eta$  を通して計算された揺らぎパラメーター  $n_s$  と  $r$  は  $\beta$  と関係なく,  $\lambda_S$ ,  $y$  と  $\bar{\gamma}$  と関係する.

ポテンシャル  $\bar{V}(S, \sigma)$  と  $\tilde{V}(S, \sigma)$  は, 式(4.4)の通り,  $\beta^2$  の over all な因子が現れる. 経路  $\sigma_v$  は  $\beta$  と関係ないので, 有効 single-field ポテンシャルについても,

$$\bar{V}_{\text{inf}}(S) = \bar{V}(S, \sigma_v(S)) = \frac{\beta^2}{M_{\text{Pl}}^4} \tilde{V}(S, \sigma_v(S)) = \frac{\beta^2}{M_{\text{Pl}}^4} V_{\text{inf}}(S), \quad (4.8)$$

と書くことができる. したがって, 揺らぎパラメーターの  $A_s$  については, 因子  $\beta^2$  をかけ,  $\beta$  と依存しない構造

$$\bar{A}_s = \beta^2 A_s = \frac{\beta^2 V_{\text{inf}}(S_*)}{24\pi\varepsilon_* M_{\text{Pl}}^4} = \frac{\bar{V}_{\text{inf}}(S_*)}{24\pi\varepsilon_*}, \quad (4.9)$$

を得る.  $S_*$  を求める方法は変わらない. インフレーションの e-fold  $N_e$  の積分, 式(3.53)の  $F^2(S)/M_{\text{Pl}}^2$  は(4.5)の第一項が無視され,  $V_{\text{inf}}(S)/V'_{\text{inf}}(S)$  は等価の  $\bar{V}_{\text{inf}}(S)/\bar{V}'_{\text{inf}}(S)$  として扱われるので,  $N_e$  も  $\beta$  と依存しない.  $N_e$  を 50 から 60 まで, 2 ごとに値を取り, 対応する  $S_*$  を求める. 直接 2 ごとに数値計算をしてもいいが,  $S_*$  は積分の上限として現れるので,  $S_*$  を求める数値計算は時間がかかる. 本研究では,  $N_e = 50$ ,  $N_e = 60$  について対応する  $S_*$  を数値計算で求める. 得られた  $S_*|_{N_e=50}$  と  $S_*|_{N_e=60}$  を使い,  $S_*|_{N_e=50} < S < S_*|_{N_e=60}$  の範囲において, もう二つの  $S$  の値

$$S_1 = S_*|_{N_e=50} + \frac{1}{3}(S_*|_{N_e=60} - S_*|_{N_e=50}), \quad (4.10)$$

$$S_2 = S_*|_{N_e=50} + \frac{2}{3}(S_*|_{N_e=60} - S_*|_{N_e=50}), \quad (4.11)$$

を取る.  $\{S_*|_{N_e=50}, 50\}$ ,  $\{S_1, N_e(S_1)\}$ ,  $\{S_2, N_e(S_2)\}$ ,  $\{S_*|_{N_e=60}, 60\}$ , 四つのところの値によって,  $S$  の三次多項式としての  $N_e(S)$  をフィットする. フィット関数  $N_e(S)|_{\text{fit}}$  を用いて  $N_e = 50, 60$  以外の  $S_*$  を求め,  $\bar{A}_s$  を計算する. 実際 CMB の観測 [39, 60] でわかるのは  $\bar{A}_s$  ではなく,

$$\log(10^{10} A_s) = 3.044 \pm 0.014, \quad (4.12)$$

である。誤差の 0.014 を無視し、 $\log(10^{10} A_s)$  を 3.044 とすれば、 $\beta$  の値は

$$\beta = 10^5 (\bar{A}_s / e^{3.044})^{1/2}, \quad (4.13)$$

で計算できる。さらに、式(4.1)から、 $\gamma$  は  $\bar{\gamma} \beta^2$  で決められる。

## 4.2 数値計算結果

本研究のインフレーションモデルでは、フリーパラメーターは  $\lambda_S$ 、 $y$  と  $\bar{\gamma}$  である。ここで、 $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-2}, 1.20 \times 10^{-6}, 1.20$ 、 $y = 4.00 \times 10^{-3}, 4.00 \times 10^{-4}$ 、つまり、表.2で用いられる六つのセットの値を使い、 $\sigma_v(S)$  をフィットし、 $S$  の多項式としての関数  $\sigma_v(S)$  を計算できる。結果は表3に示す。この結果に基づいて、 $\bar{\gamma}$  をスキャンし、式(4.12)の制限を満たす  $\beta - \gamma$  関係、 $n_s$  と  $r$  を計

$\lambda_S$	$y$	$\sigma_v(S)$
1.20	$4.00 \times 10^{-3}$	$0.148 + 3.11 \times 10^{-2} S - 1.47 \times 10^{-2} S^2 + 1.05 \times 10^{-2} S^3 - 7.08 \times 10^{-3} S^4 + 2.72 \times 10^{-3} S^5$
1.20	$4.00 \times 10^{-4}$	$0.148 + 3.11 \times 10^{-3} S - 1.48 \times 10^{-4} S^2 + 1.14 \times 10^{-5} S^3 - 1.07 \times 10^{-6} S^4 + 1.04 \times 10^{-7} S^5$
$1.20 \times 10^{-2}$	$4.00 \times 10^{-3}$	$0.149 + 3.03 \times 10^{-2} S - 1.15 \times 10^{-2} S^2 + 4.59 \times 10^{-3} S^3 - 1.19 \times 10^{-3} S^4 + 1.36 \times 10^{-4} S^5$
$1.20 \times 10^{-2}$	$4.00 \times 10^{-4}$	$0.149 + 3.11 \times 10^{-3} S - 1.48 \times 10^{-4} S^2 + 1.14 \times 10^{-5} S^3 - 1.03 \times 10^{-6} S^4 + 7.79 \times 10^{-8} S^5$
$1.20 \times 10^{-7}$	$4.00 \times 10^{-3}$	$0.196 + 5.17 \times 10^{-3} S - 1.14 \times 10^{-4} S^2 + 1.35 \times 10^{-6} S^3 - 8.26 \times 10^{-9} S^4 + 2.02 \times 10^{-11} S^5$
$1.20 \times 10^{-7}$	$4.00 \times 10^{-4}$	$0.149 + 2.76 \times 10^{-3} S - 7.40 \times 10^{-5} S^2 + 1.70 \times 10^{-6} S^3 - 2.28 \times 10^{-8} S^4 + 1.28 \times 10^{-10} S^5$

表3 フィットで得られた関数  $\sigma_v(S)$

算する。数値計算の結果は図15、図16、図17にまとめる。

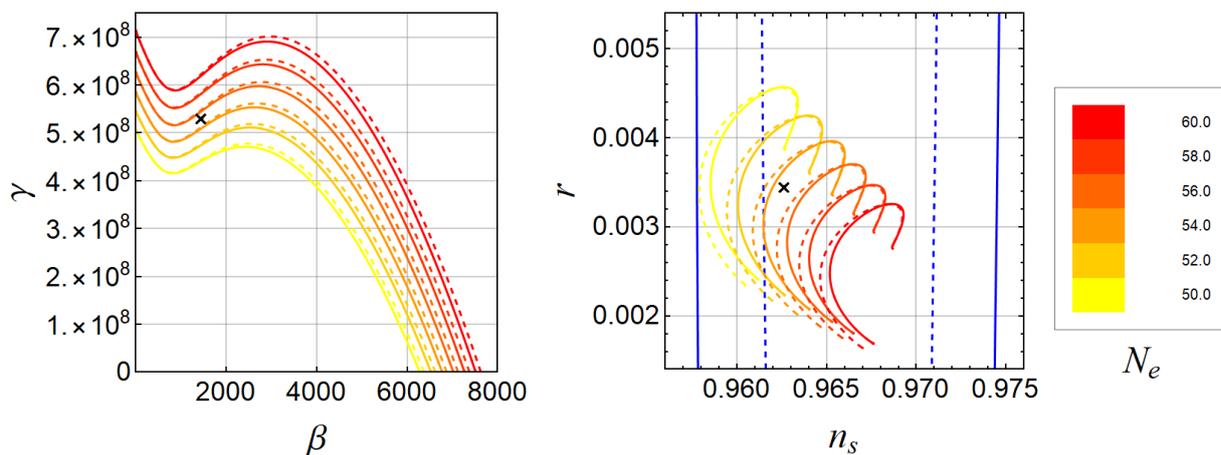


図15  $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-3}$  のパラメータスキャンの結果。実線は  $y = 4.00 \times 10^{-3}$ 、点線は  $y = 4.00 \times 10^{-4}$  の計算結果を示す。× はベンチマークのデータと対応する。左の図では、横軸は  $\beta$ 、縦軸は  $\gamma$  であり、 $\log(10^{10} A_s) = 3.044$  を満たす  $\beta - \gamma$  関係を表す；右の図では、横軸は  $n_s$ 、縦軸は  $r$  である。青実線は Planck 2018 の  $n_s - r$  制限の  $2\sigma$  範囲、青点線は  $1\sigma$  範囲を示す。

図15は  $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-2}$  の場合の結果である。実線は  $y = 4.00 \times 10^{-3}$ 、点線は  $y = 4.00 \times 10^{-4}$

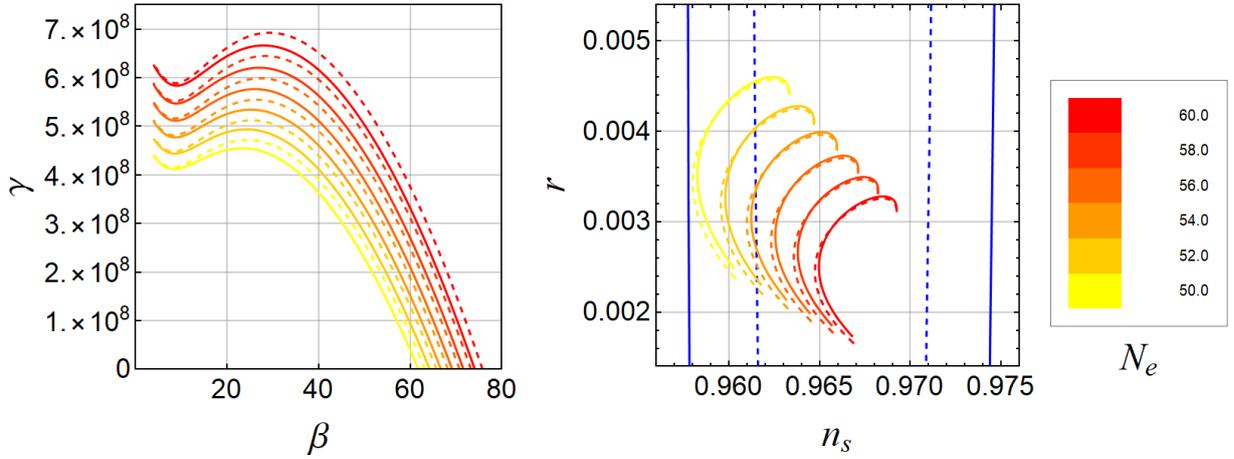


図16  $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-6}$  のスキャン結果.  $\log(10^{10} A_s) = 3.044$  の制限を満たす  $\beta$  の範囲は狭くなった.

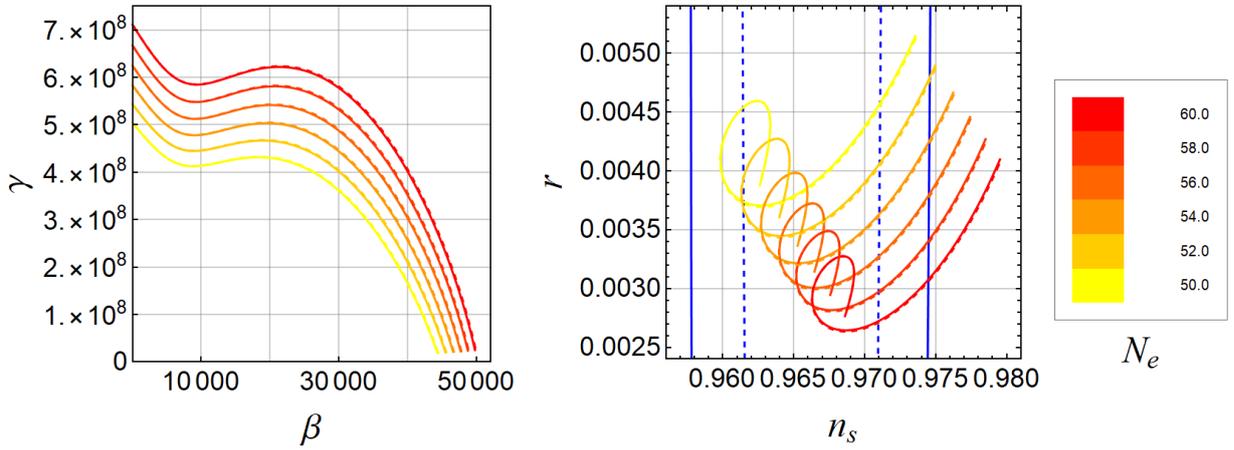


図17  $\lambda_S = 1.20$  のスキャン結果.  $y = 4.00 \times 10^{-3}$  を表す実線と  $y = 4.00 \times 10^{-4}$  を表す点線は区別しにくい.  $\beta$  の最大可能値は  $5 \times 10^4$  未満である.  $n_s$  と  $r$  については、Planck 2018 の  $2\sigma$  範囲外の領域がある. この領域は  $\gamma$  がほぼゼロ、 $\beta$  が大きいところと対応する.

を示す.  $N_e$  の区別は黄色、オレンジ色、赤色などで表示される. 具体的には最右の図で対照できる. 左図は  $\log(10^{10} A_s) = 3.044$  で得られた  $\beta$  と  $\gamma$  を示す. スキャンされた  $\bar{\gamma}$  が 0 となれば、 $\gamma = \bar{\gamma}\beta^2$  は無論 0 となるので、 $\beta$  は図の右から左へ行く. つまり、 $\bar{\gamma}$  が増えるほど、 $\beta$  が減っていく. しかし、 $\gamma$  の変化は単調ではない. 最初、 $\gamma$  は  $\bar{\gamma}$  が増えるほど大きくなるが、局所極大値となったら減少する. その後、局所極小値となり、また増大していく.  $\gamma$  の変動範囲は甚大で、最大は  $7 \times 10^8$  を超える.  $\beta$  の最大値は  $7 \sim 8 \times 10^3$  となる. 右図は  $n_s - r$  の結果である. 青実線は Planck 2018 による  $n_s - r$  制限の  $2\sigma$  範囲、青点線は  $1\sigma$  範囲である [39, 60].  $n_s$  と  $r$  の  $\bar{\gamma}$  による変化は単調ではない. ごく小さい  $\bar{\gamma}$  と対応する領域は右図の  $r$  が最も小さいところである.  $\bar{\gamma}$  が大きくなると  $r$  も大きくなり、最大に

なったら小さくなる.  $\times$  はベンチマーク

$$y = 4.00 \times 10^{-4}, \quad \lambda_S = 1.20 \times 10^{-2}, \quad \bar{\gamma} = 257, \quad (4.14)$$

の値で、かつ  $N_e = 55.0$  の計算結果

$$\beta = 1.435 \times 10^3, \quad \gamma = 5.293 \times 10^8, \quad n_s = 0.963, \quad r = 3.44 \times 10^{-3}, \quad (4.15)$$

である. 対応する結果は以下の通りとなる.

$$\begin{aligned} v_\sigma/M_{\text{Pl}} &= 3.97 \times 10^{-2}, & v_S/M_{\text{Pl}} &= 2.64 \times 10^{-2}, \\ U_0/M_{\text{Pl}}^4 &= -2.36 \times 10^{-7}, & \Lambda_H/M_{\text{Pl}} &= 2.48 \times 10^{-1}, \\ S_{\text{end}}/v_S &= 1.09, & S_*/v_S &= 2.30. \end{aligned} \quad (4.16)$$

ここの  $\beta = 1.435 \times 10^3$  と  $\gamma = 5.293 \times 10^8$  は前節で述べた  $F^2/M_{\text{Pl}}^2$ 、式(4.5)の第一項を無視して計算された結果であるが、入力パラメーターとして扱われ、式(4.5)の第一項を無視しない方法で直接計算した結果、 $n_s$  と  $r$  は有効数字 3 桁以上同じとなる. 図16は  $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-6}$ 、図17は  $\lambda_S = 1.20$  の結果を示す.  $1.20 \times 10^{-6}$  ほど小さい  $\lambda_S$  の場合、 $\beta$  の最大値はたった 80 である.  $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-2}$  と比べ、 $\beta$ - $\gamma$  関係の  $y = 4.00 \times 10^{-3}$  と  $y = 4.00 \times 10^{-4}$  の違いは区別しやすくなった. 図17の  $\lambda_S = 1.20$  の場合は逆となる. 左図右図とも、点線と実線はほぼ同じに見える.  $\beta$  が最大  $\sim 5 \times 10^4$  となる.  $\lambda_S = 1.20$  の違いは、右図の結果の最右端が CMB の  $2\sigma$  範囲外にあることである. この最右端は  $\bar{\gamma}$  のほぼゼロのところと対応する. CW 機構を使う模型 [68,69] には、このような領域もある. しかし、模型 [68,69] の予言したテンソル-スカラー比  $r$  は比較的に大きい値、 $\sim 0.08$  になる. しかし、本研究のインフレーション模型の予言する  $r$  はそれほど大きくならず、 $\sim 10^{-3}$  の程度となる.

## 5 暗黒物質

本章は、暗黒物質について議論する。まずは理論の質量スペクトルを調べ、暗黒物質候補を特定する。次に暗黒物質の生成シナリオを考え、残存量を計算し、最後に観測やインフレーションとの繋がりについて議論する。

### 5.1 質量スペクトル

質量スペクトルは NJL 作用の隠れたフェルミオンを積分し、二点関数の計算で求められる。先行研究 [81–83] によると、スカラー場  $S$  と  $\sigma$  の真空期待値と二点関数から、プロパゲーター

$$\Gamma_{SS}(p^2) = p^2 - 3\lambda_S v_S^2 - y^2 3n_c I_{\varphi^2}(p^2, M, \Lambda_H), \quad (5.1)$$

$$\Gamma_{S\sigma}(p^2) = -y \left( 1 - \frac{G_D v_\sigma}{4G^2} \right) 3n_c I_{\varphi^2}(p^2, M, \Lambda_H), \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\sigma}(p^2) = & -\frac{3}{4G} + \frac{3G_D v_\sigma}{8G^3} - 3n_c \left( 1 - \frac{G_D v_\sigma}{4G^2} \right)^2 I_{\varphi^2}(p^2, M, \Lambda_H) \\ & + 3n_c \frac{G_D}{G^2} I_V(M, \Lambda_H), \end{aligned} \quad (5.3)$$

がわかる。ただし、ヒッグスポータルの  $\lambda_{HS}$  が無視され、関与するループ関数は

$$I_{\varphi^2}(p^2, M, \Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(\not{k} + \not{p} + M)(\not{k} + M)}{((k+p)^2 - M^2)(k^2 - M^2)}, \quad (5.4)$$

$$I_V(M, \Lambda) = \int_{\Lambda} \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{M}{(k^2 - M^2)} = -\frac{1}{16\pi^2} M \left[ \Lambda^2 - M^2 \log \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) \right], \quad (5.5)$$

で与えられる。 $S$  と  $\sigma$  の混合項  $\Gamma_{S\sigma}$  があるので、 $S$  と  $\sigma$  は質量の固有状態ではない。質量の固有状態を  $S_1, S_2$  とし、転換行列は

$$\begin{pmatrix} S \\ \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_S^{(1)} & \xi_S^{(2)} \\ \xi_\sigma^{(1)} & \xi_\sigma^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

により定義される。真空期待値  $v_S, v_\sigma$  がわかれば、プロパゲーターのポールは、方程式

$$\begin{aligned} \Gamma_{SS}(m_i^2) \xi_S^{(i)} + \Gamma_{S\sigma}(m_i^2) \xi_\sigma^{(1)} &= 0, \\ \Gamma_{S\sigma}(m_i^2) \xi_S^{(i)} + \Gamma_{\sigma\sigma}(m_i^2) \xi_\sigma^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

で得られる. ただし、添字  $i, j$  は 1, 2 である. これらの方程式の解を通じ、質量  $m_i$  を決める. 例として、式(3.42)の値を使う数値計算の結果

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{\Lambda} &\simeq 0.044, & \frac{m_2}{\Lambda} &\simeq 0.41, \\ \xi_S^{(1)} &\simeq 1.00, & \xi_\sigma^{(1)} &\simeq 0.01, \\ \xi_S^{(2)} &\simeq -0.006, & \xi_\sigma^{(2)} &\simeq 1.00,\end{aligned}\tag{5.8}$$

を示す. 混合の影響が僅かであり、 $m_1 \simeq \tilde{m}_S = \sqrt{3\lambda_S v_S}$  であることがわかる. 転換行列は対角ではないので、対角化した後、 $S_1$  と  $S_2$  も正準化されていない. 正準化するために規格化因子を求める必要があると思われるが、混合が僅かなので、このステップをとばしてもよい.

NJL 作用にはフレーバー対称性があるので、偽 NG 粒子のダークメソン、つまり式(2.30)の CP-odd なスカラー  $\phi_a$  が暗黒物質候補となる [81–83].

$$\Gamma_\phi(p^2) = -\frac{1}{2G} + \frac{G_D v_\sigma}{8G^3} + \left(1 - \frac{G_D v_\sigma}{8G^2}\right)^2 2n_c I_{\phi^2}(p^2, M, \Lambda_H) + \frac{G_D}{G^2} n_c I_V(M, \Lambda_H),\tag{5.9}$$

と得られる. ただし、関与するループ関数は

$$I_{\phi^2}(p^2, M, \Lambda) = \int_\Lambda \frac{d^4 k}{i(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}(\not{k} - \not{p} + M)\gamma_5(\not{k} + M)\gamma_5}{((k-p)^2 - M^2)(k^2 - M^2)},\tag{5.10}$$

で与えられる. 式(2.32)の仮定で、フレーバー対称性は  $SU(3)_V$  であることを述べた. 暗黒物質の議論については、別のフレーバー対称性でも、ダークメソンが暗黒物質候補となる [81–83]. ダークメソンの質量  $m_\phi$  は式(5.9)のポール、

$$\Gamma_{m_\phi^2}(p^2) = 0,\tag{5.11}$$

を解くことで求められる. 式(3.42)の値の結果は  $m_\phi/\Lambda_H \simeq 0.06$  であり、インフラトンの  $\tilde{m}_S/\Lambda_H \simeq 0.044$  を上回る.

パラメーター  $\lambda_S$  と  $y$  の関数としての  $m_1/\Lambda$  と  $m_2/\Lambda$  を計算した. 結果は図18にまとめる. 色の違いは  $m_i/\Lambda$  の大きさを示す. 計算された範囲において、混合が非常に小さい. したがって、近似  $m_1 \simeq \tilde{m}_S = \sqrt{3\lambda_S v_S}$  はできる. 大部分の領域において、特に  $y \gtrsim 0.003$  の領域で、 $m_2 > m_1$  が成り立つ. ドットのデータは条件  $m_\phi > m_1$  満たす. つまり、ダークメソンがインフラトンより重い. これはインフラトンがダークメソンに崩壊できないことを意味する. 右巻きニュートリノ  $N$  の対消滅でダークメソン  $\phi$  を生成するチャンネルがあるが、次の節でこの過程の断面積が小さいことを示す. ダークメソンのインフラトン崩壊による生成には、式(2.32)のフレーバー対称性  $SU(3)_V$  は不可能が、式(2.34)のフレーバー対称性  $SU(2)_V \times U(1)$  は可能である [83]. ここで、 $SU(2)_V \times U(1)$  は対角の湯川結合  $\mathbf{y} = \text{diag.}(y_1, y_2, y_3)$  の

$$y_1 = y_2 < y_3,\tag{5.12}$$

により実現される. 真の QCD のメソンの名前を参考とし、ダークメソンを  $\tilde{\pi} = \{\tilde{\pi}^\pm, \tilde{\pi}^0\}$ ,

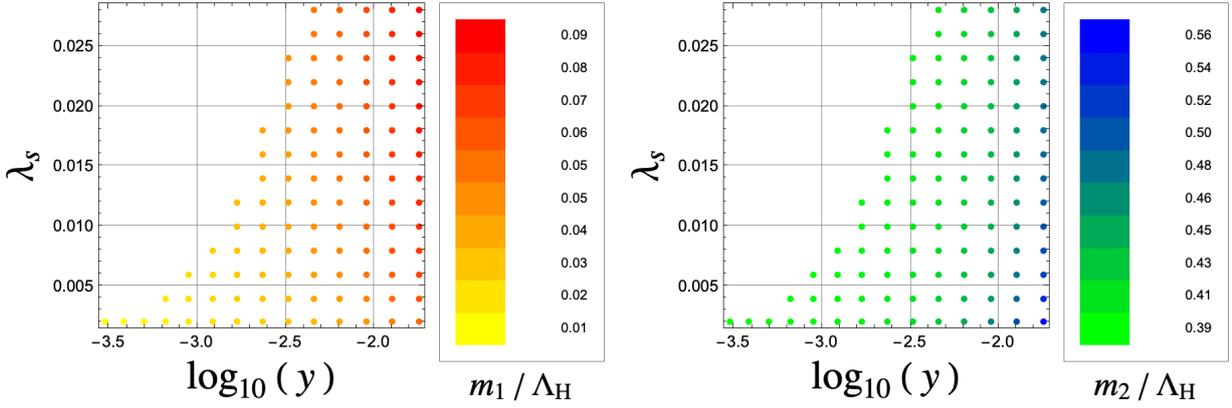


図18  $y - \lambda_S$  平面における  $m_1/\Lambda$  と  $m_2/\Lambda$  の値. プロットに示されたドットは条件  $m_\phi > m_1$  満たす.  $m_1/\Lambda$  と  $m_2/\Lambda$  の値は色で区別する. 大部分のパラメーター領域には,  $S$  と  $\sigma$  との混合は非常に小さく,  $m_1 \simeq \tilde{m}_S = \sqrt{3\lambda_S v_S}$  の近似はよい.

$\tilde{K} = \{ \tilde{K}^\pm, \tilde{K}^0, \tilde{\bar{K}}^0 \}$ ,  $\tilde{\eta}$ , 三つのカテゴリーに分類し,

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}^\pm &\equiv (\phi_1 \mp i\phi_2)/\sqrt{2}, \quad \tilde{\pi}^0 \equiv \phi_3, \\ \tilde{K}^\pm &\equiv (\phi_4 \mp i\phi_5)/\sqrt{2}, \quad \tilde{K}^0(\tilde{\bar{K}}^0) \equiv (\phi_6 + (-)i\phi_7)/\sqrt{2}, \\ \tilde{\eta}^8 &\equiv \phi_8, \end{aligned} \quad (5.13)$$

と名付ける.  $\tilde{\eta}^8$  は  $\tilde{\eta}^0 = \phi_0$  と混合する. 質量の固有状態を  $\tilde{\eta}$  と  $\tilde{\eta}'$  を表す. 異なるカテゴリーのメソンの質量は

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\pi}^0} &= m_{\tilde{\pi}^\pm} \equiv m_{\tilde{\pi}}, \\ m_{\tilde{K}^\pm} &= m_{\tilde{K}^0} = m_{\tilde{\bar{K}}^0} \equiv m_{\tilde{K}}, \\ m_{\tilde{\eta}} &> m_{\tilde{K}} > m_{\tilde{\pi}}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

となる. 湯川結合が減少すればメソンの質量が小さくなる. メソンとインフラトンの質量関係が  $m_{\tilde{\pi}} \ll \tilde{m}_S < m_{\tilde{K}} < m_{\tilde{\eta}}$  となるパラメーター領域が存在する. 後ほど暗黒物質残存量の節でまた議論する.

式(5.9)はフレーバー対称性が  $SU(3)_V$  の場合しか成立しない. 幸い,  $SU(2)_V \times U(1)_Y$  の場合には,

$$m_{\tilde{\pi}}^2/m_\phi^2 \simeq m_u/m_q \simeq y_1/y, \quad (5.15)$$

という近似ができる [92].  $m_u$  は  $SU(2)_V \times U(1)_Y$  の場合のクォークのカレント質量,  $m_q$  は  $SU(3)_V$  極限でのクォークのカレント質量である. 近似を使わないパイオン質量  $m_\pi^{\text{exact}}$  は先行研究 [83] で計算された. 式(5.15)で計算された  $m_{\tilde{\pi}}$  と  $m_\pi^{\text{exact}}$  との比の  $y_1$  による変化を図19で示し, 近似(5.15)が良いか否かを評価する. ただし, 条件  $\tilde{m}_S < m_{\tilde{K}}$  が満たされる.

$y_1$  の広い範囲において,  $m_{\tilde{\pi}}$  と  $m_\pi^{\text{exact}}$  の区別は20%未満である. したがって, 近似(5.15)を応用

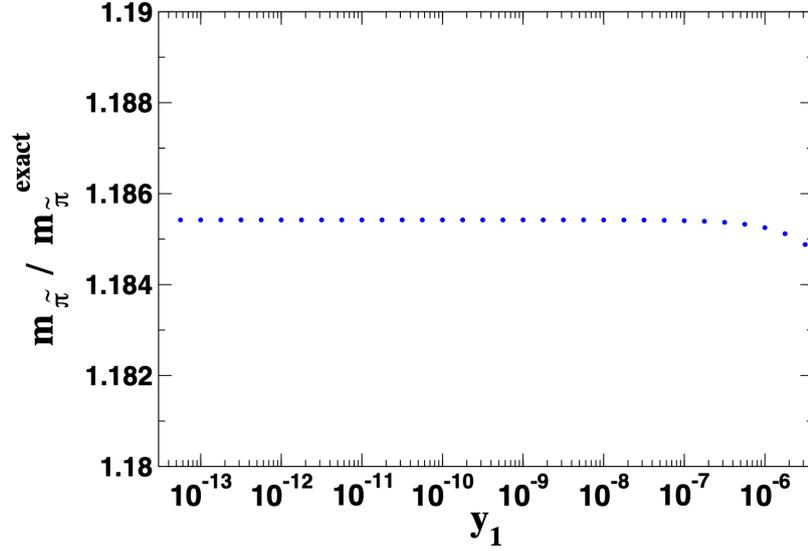


図19  $y_1$  による  $m_{\tilde{\pi}}/m_{\pi}^{\text{exact}}$  の変化.  $y_1$  の範囲は  $3 \times 10^{-14} < y_1 < 3 \times 10^{-6}$  である.

できる.

## 5.2 暗黒物質の生成と崩壊過程

暗黒物質は再加熱中あるいは以後生成される [93–95]. 本研究は、 $2m_{\tilde{\pi}} < \tilde{m}_S < m_{\tilde{K}} < m_{\tilde{\eta}}$  が成り立つように、湯川結合  $y_1$  と  $y_3$  を設定する. したがって、暗黒物質粒子の  $\tilde{\pi}$  は、インフラトン  $S$  の崩壊によって生成できる. 他のダークメソンがインフラトンより重いので、再加熱中あるいは以後生成されない [94]. インフラトン  $S$  のダークパイオン  $\tilde{\pi}$  への崩壊に寄与する 1-ループダイアグラムは図20に示される. これで  $\tilde{\pi} - \tilde{\pi} - S$  の有効結合  $G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S}$  を計算できる [83]. 崩壊幅は

$$\gamma_{\tilde{\pi}} = \frac{3G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S}^2}{16\pi\tilde{m}_S} \sqrt{1 - \frac{4m_{\tilde{\pi}}^2}{\tilde{m}_S^2}}, \quad (5.16)$$

で与えられる.  $y_1 \lesssim 5 \times 10^{-4}$  とすれば  $G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S}/\Lambda \simeq -0.012y_1$  となる.

ダークパイオン  $\tilde{\pi}$  を生成するもう一つのチャンネルは右巻きニュートリノの対消滅である. 対応するファインマンダイアグラムは図21で示す.  $N - N - S$  の湯川結合  $y_M = m_N/v_S$  と  $\tilde{\pi} - \tilde{\pi} - S$  の有効結合  $G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S}$  二つの頂点から構成されるので、対消滅の断面積は  $y_M^2 G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S}^2$  と比例する. 式(3.26)によると、 $y_M^2$  は  $10^{-22}\beta$  であり、 $\beta \sim 10^3$  ぐらいいでも  $10^{-18\sim-19}$  ほど小さくなる. そのため、右巻きニュートリノの対消滅は無視できる.

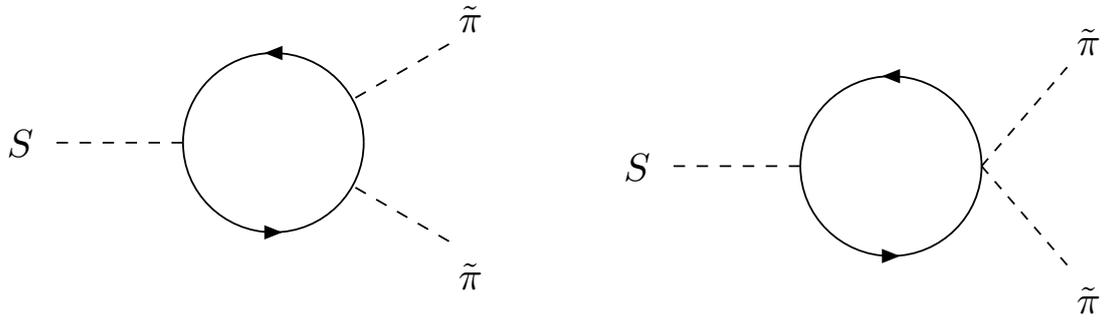


図20 有効結合  $G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S}$  へ寄与する 1-ループダイアグラム.

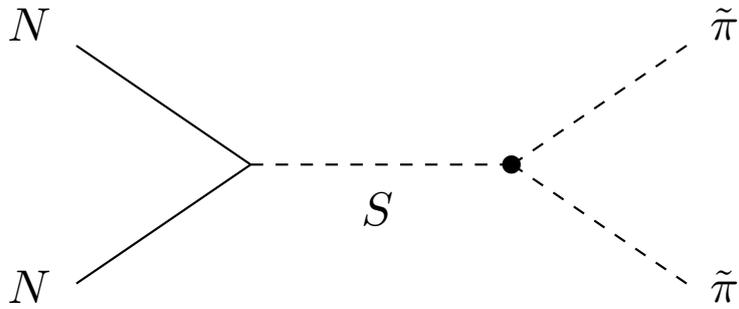


図21 右巻きニュートリノ  $N$  の対消滅によるダークパイオン  $\tilde{\pi}$  の生成  $NN \leftrightarrow \tilde{\pi}\tilde{\pi}$  は  $N-N-S$  と有効頂点  $\tilde{\pi}-\tilde{\pi}-S$  により構成される.  $N$  とインフラトン  $S$  との湯川結合  $y_M = m_N/v_S$  と有効結合  $G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}}$  が寄与する.

### 5.3 残存量

暗黒物質の生成については、インフラトン  $S$  のダークパイオン  $\tilde{\pi}$  への崩壊チャンネルだけを考えればよい. この二つの粒子の数密度  $n_S$  と  $n_{\tilde{\pi}}$  はボルツマン方程式

$$\frac{dn_S}{dt} + 3Hn_S = -\Gamma_S n_S, \quad (5.17)$$

$$\frac{dn_{\tilde{\pi}}}{dt} + 3Hn_{\tilde{\pi}} = \gamma_{\tilde{\pi}} n_S, \quad (5.18)$$

に従う [93].  $\Gamma_S$  はインフラトン  $S$  のトータル崩壊幅である. 方程式(5.17)は直接解くことができる [96].  $H = \dot{a}/a$  なので, 方程式(5.17)を整理すれば,

$$\frac{d(n_S a^3)}{dt} = -\Gamma_S n_S a^3, \quad (5.19)$$

となる. 式(5.19)は直接積分でき, 結果は

$$\frac{n_S(t) a^3(t)}{n_S(t_{\text{end}}) a_{\text{end}}^3} = e^{-\Gamma_S(t-t_{\text{end}})}, \quad (5.20)$$

となる.  $t_{\text{end}}$  はインフレーションの終了時刻であり,  $a_{\text{end}}$  は  $a(t_{\text{end}})$  である.  $t_{\text{end}}$  の時, インフラトンは静止している  $S$  粒子のコヒーレントな状態と見なせるので, エネルギー密度を  $\rho_{\text{end}}$  とすると, インフラトンの数密度は

$$n_S(t_{\text{end}}) = \frac{\rho_{\text{end}}}{\tilde{m}_S}, \quad (5.21)$$

で与えられ, インフレーション終了後は

$$n_S = \frac{\rho_{\text{end}}}{\tilde{m}_S} \left(\frac{a_{\text{end}}}{a}\right)^3 e^{-\Gamma_S(t-t_{\text{end}})}, \quad (5.22)$$

と書ける. 式(5.18)に式(5.22)を代入し,

$$\frac{d(n_{\tilde{\pi}} a^3)}{dt} = \gamma_{\tilde{\pi}} n_S a^3 = \gamma_{\tilde{\pi}} \frac{\rho_{\text{end}} a_{\text{end}}^3}{\tilde{m}_S} e^{-\Gamma_S(t-t_{\text{end}})}, \quad (5.23)$$

が得られる. インフレーションの終了時刻  $t_{\text{end}}$  を再加熱の開始時刻と考えても良いので, 最初に暗黒物質がない初期条件  $n_{\tilde{\pi}}(a_{\text{end}}) = 0$  から, 解

$$n_{\tilde{\pi}} = B_{\tilde{\pi}} \frac{\rho_{\text{end}}}{\tilde{m}_S} \left(\frac{a_{\text{end}}}{a}\right)^3 (1 - e^{-\Gamma_S(t-t_{\text{end}})}), \quad (5.24)$$

が得られる. ただし,

$$B_{\tilde{\pi}} = \frac{\gamma_{\tilde{\pi}}}{\Gamma_S}, \quad (5.25)$$

である. 式(5.24)を使い, 暗黒物質残存量  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2$  は

$$\begin{aligned} \Omega_{\tilde{\pi}} h^2 &= \frac{m_{\tilde{\pi}} n_{\tilde{\pi}} h^2}{\rho(a_0)} = m_{\tilde{\pi}} n_{\tilde{\pi}} \frac{h^2}{3M_{\text{Pl}}^2 H_0^2} \\ &= m_{\tilde{\pi}} B_{\tilde{\pi}} \frac{\rho_{\text{end}}}{\tilde{m}_S} \left(\frac{a_{\text{end}}}{a_0}\right)^3 \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2 (H_0/h)^2}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

で計算できる. 現在のスケールファクター  $a_0 = 1$ , ハッブル定数  $H_0 = 2.1332 h \times 10^{-42} \text{GeV}$  とする. インフレーション終了時のスケール因子  $a_{\text{end}}$  と現在の  $a_0$  との比の間に, 再加熱終了時のスケール因

子  $a_{\text{RH}}$  などを差し入れると

$$\begin{aligned}\frac{a_{\text{end}}}{a_0} &= \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{RH}}} \frac{\rho_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{RH}}^{1/4}} \frac{\rho_{\text{RH}}^{1/4}}{\rho_{\text{end}}^{1/4}} \frac{a_{\text{RH}}}{a_0} = \left( \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{RH}}} \frac{\rho_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{RH}}^{1/4}} \right) \frac{\rho_{\text{RH}}^{1/4} a_{\text{RH}}}{a_0} \frac{1}{\rho_{\text{end}}^{1/4}} \\ &= \left( \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{RH}}} \frac{\rho_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{RH}}^{1/4}} \right) \left( \frac{\rho_{\text{RH}}^{1/4} a_{\text{RH}}}{\sqrt{3} a_0 H_0} \right) \frac{\sqrt{3} H_0}{\rho_{\text{end}}^{1/4}},\end{aligned}\quad (5.27)$$

が得られる. 式(5.27)の第一個の因子  $\rho_{\text{end}}^{1/4} a_{\text{end}} / (\rho_{\text{RH}}^{1/4} a_{\text{RH}})$  を  $R_{\text{rad}}$  と表記する. 文献 [97] のように,  $\bar{w} = p/\rho$  を定義し,  $R_{\text{rad}}$  を

$$R_{\text{rad}} \equiv \frac{a_{\text{end}}}{a_{\text{RH}}} \frac{\rho_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{RH}}^{1/4}} = \left( \frac{\rho_{\text{end}}}{\rho_{\text{RH}}} \right)^{-\frac{1}{3(1+\bar{w})}} \frac{\rho_{\text{end}}^{1/4}}{\rho_{\text{RH}}^{1/4}} = \left( \frac{\rho_{\text{end}}}{\rho_{\text{RH}}} \right)^{-\frac{1-3\bar{w}}{12(1+\bar{w})}} = \left( \frac{\rho_{\text{RH}}}{\rho_{\text{end}}} \right)^{\frac{1-3\bar{w}}{12(1+\bar{w})}} \quad (5.28)$$

と書き換える. 第二個の  $\rho_{\text{RH}}^{1/4} a_{\text{RH}} / \sqrt{3} a_0 H_0$  は再加熱と関わる因子である. 再加熱終了後宇宙が輻射優勢時期に入り, 現在になるまで, エントロピーが保存することから,

$$s_{\text{RH}} a_{\text{RH}}^3 = s_0 a_0^3 \quad (5.29)$$

となることがわかる. エントロピーと温度の関係  $s_{\text{RH}} = g_{\text{RH}} T_{\text{RH}}^3$  と  $s_0 = g_0 T_0^3$  により,

$$\begin{aligned}\frac{\rho_{\text{RH}}^{1/4} a_{\text{RH}}}{\sqrt{3} a_0 H_0} &= \frac{1}{\sqrt{3} H_0} \left( \frac{\pi^2}{30} g_{\text{RH}} T_{\text{RH}}^4 \right)^{1/4} \left( \frac{s_0}{s_{\text{RH}}} \right)^{1/3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} H_0} \left( \frac{\pi^2}{30} \right)^{1/4} g_{\text{RH}}^{1/4} T_{\text{RH}} \left( \frac{g_0}{g_{\text{RH}}} \right)^{1/3} \frac{T_0}{T_{\text{RH}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi^2}{30} \right)^{1/4} (g_0)^{1/3} g_{\text{RH}}^{-1/12} \frac{T_0}{H_0} \\ &= \exp(66.89 - \log g_{\text{RH}}/12),\end{aligned}\quad (5.30)$$

がわかる. ただし,  $g_{\text{RH}}$  は再加熱終了時の相対論的自由度を表す [60, 98]. 式(5.27)の第二個の因子は

$$F_{\text{LA}} = \frac{\rho_{\text{RH}}^{1/4} a_{\text{RH}}}{\sqrt{3} a_0 H_0} = \exp(66.89 - \log g_{\text{RH}}/12), \quad (5.31)$$

と書ける [98]. 式(5.28)と式(5.31)を使い, 式(5.27)を

$$\frac{a_{\text{end}}}{a_0} = R_{\text{rad}} F_{\text{LA}} \left( \frac{\sqrt{3} H_0}{\rho_{\text{end}}^{1/4}} \right), \quad (5.32)$$

と書く. インフラトンのポテンシャルは底付近の範囲で正準化された場の値の二乗と比例すると見なす. インフラトンのエネルギー密度  $\rho_S$  とプレッシャー  $p_S$  が物質優勢  $p = 0$  のような振る舞いをする. したがって,  $\bar{w} \simeq 0$  であり,  $R_{\text{rad}} = (\rho_{\text{RH}}/\rho_{\text{end}})^{1/12}$  であることがわかる. 再加熱が完成する時のエネルギー密度

$$\rho_{\text{RH}} = \frac{\pi^2}{30} g_{\text{RH}} T_{\text{RH}}^4, \quad (5.33)$$

よって、再加熱温度  $T_{\text{RH}}$  が決まる. 式(5.27)を式(5.26)に代入すると、残存量は

$$\begin{aligned}
\Omega_{\tilde{\pi}} h^2 &= B_{\tilde{\pi}} \frac{m_{\tilde{\pi}}}{\tilde{m}_S} \rho_{\text{end}} R_{\text{rad}}^3 F_{\text{LA}}^3 \left( \frac{\sqrt{3} H_0}{\rho_{\text{end}}^{1/4}} \right)^3 \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2 (H_0/h)^2} \\
&= B_{\tilde{\pi}} \frac{m_{\tilde{\pi}}}{\tilde{m}_S} \rho_{\text{end}} \left( \frac{\rho_{\text{RH}}}{\rho_{\text{end}}} \right)^{3/12} \exp(3 \times 66.89 - \log g_{\text{RH}}/4) \\
&\quad \times 3\sqrt{3} H_0^3 \rho_{\text{end}}^{-3/4} \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2 (H_0/h)^2} \\
&= \sqrt{3} \exp(3 \times 66.89) \frac{B_{\tilde{\pi}} H_0 h^2}{M_{\text{Pl}}^2} \left( \frac{\pi^2}{30} \right)^{1/4} \frac{m_{\tilde{\pi}}}{\tilde{m}_S} T_{\text{RH}} \\
&\simeq 2.04 \times 10^8 B_{\tilde{\pi}} \frac{m_{\tilde{\pi}}}{\tilde{m}_S} \frac{T_{\text{RH}}}{1\text{GeV}},
\end{aligned} \tag{5.34}$$

となる [94]. ただし、 $h \simeq 0.674$  を使った [39].  $S$  のトータル崩壊幅  $\Gamma_S$  は、再加熱終了時に  $\Gamma_S \sim H(a_{\text{RH}})$  が成り立つので、

$$\Gamma_S \sim H(a_{\text{RH}}) = \sqrt{\frac{\rho_{\text{RH}}}{3M_{\text{Pl}}^2}} = \frac{\pi^2}{3\sqrt{10}} g_{\text{RH}}^{1/2} \frac{T_{\text{RH}}^2}{M_{\text{Pl}}}, \tag{5.35}$$

となり、再加熱温度  $T_{\text{RH}}$  と関係が付けられる. 且つ、ダークパイオンの質量  $m_{\tilde{\pi}}$  は式(5.15)の  $y_1$  で決まり、式(5.16)を通じて残存量  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2$  に寄与する.  $\lambda_S$ 、 $y_3(y)$ 、 $\beta$  の値を固定すれば、残存量  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2$  は  $T_{\text{RH}}$  と  $m_{\tilde{\pi}}$  によって与えられる.

## 5.4 再加熱温度 $T_{\text{RH}}$ と残存量の関係

前述の通り、再加熱温度  $T_{\text{RH}}$  は残存量  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2$  に影響する. 文献 [97, 99] では、再加熱の機構を特定せずに  $T_{\text{RH}}$  を制限できることが指摘されており、本節ではこの考えに従い、残存量の制限  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2 \sim 0.12$  を満たす再加熱温度  $T_{\text{RH}}$  を求める.

再加熱終了時のスケール因子  $a_{\text{RH}}$  やエネルギー密度  $\rho_{\text{RH}}$  は基本的な未確定要素である. この要素は式(5.28)の  $R_{\text{rad}}$  に含まれている. 式(5.32)を使い、宇宙がインフレーション中どのぐらい膨張したかを評価するパラメーター e-fold  $N_e$  は

$$N_e = \log \left( \frac{a_{\text{end}}}{a_0} \frac{a_0}{a_*} \right) = \log \left( R_{\text{rad}} F_{\text{LA}} \frac{\sqrt{3} H_*}{\rho_{\text{end}}^{1/4}} \frac{a_0 H_0}{k_*} \right). \tag{5.36}$$

によって与えられる. Planck 衛星 [39, 60] による観測される温度揺らぎの基準スケールを  $k_*$  とし、このスカラー揺らぎのホライズンを離れた時 ( $a = a_*$ ) を、考えられるインフレーション時期の始まりと見なす.  $H_*$  はインフレーション中のハッブルパラメーターであり、 $k_* = a_* H_*$  との関係がある. インフレーション中、大部分のエネルギー密度はインフラトンのポテンシャルによって与えられるので、ポテンシャルの値  $V_{\text{inf}*} = V_{\text{inf}}(S_*)$  はほぼ定数と扱われ、フリードマン方程式  $3M_{\text{Pl}}^2 H_*^2 = V_{\text{inf}*}$  とな

る.  $\rho_{\text{end}}$  はインフレーション終了時のエネルギー密度であり、

$$\rho_{\text{end}} = \frac{V_{\text{end}}(3 - \varepsilon_*)}{3 - \varepsilon_{\text{end}}}, \quad (5.37)$$

で求められる.  $V_{\text{end}} = V_{\text{inf}}(S_{\text{end}})$ ,  $\varepsilon_{\text{end}} = \varepsilon(S_{\text{end}})$ ,  $\varepsilon_* = \varepsilon(S_*)$  と表記し、e-fold  $N_e$  は

$$\begin{aligned} N_e &= \frac{1}{12} \log\left(\frac{\rho_{\text{RH}}}{\rho_{\text{end}}}\right) + 66.89 - \frac{1}{12} \log(g_{\text{RH}}) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{V_*^2}{M_{\text{Pl}}^4 \rho_{\text{end}}}\right) - \log\left(\frac{k_*}{a_0 H_0}\right) \\ &= \frac{1}{12} \log\left(\frac{\pi^2 T_{\text{RH}}^4}{30 M_{\text{Pl}}^4}\right) + \frac{1}{12} \log\left(\frac{M_{\text{Pl}}^4}{\rho_{\text{end}}}\right) + 66.89 + \frac{1}{4} \log\left(\frac{V_*^2}{M_{\text{Pl}}^4 \rho_{\text{end}}}\right) - \log\left(\frac{k_*}{a_0 H_0}\right) \\ &= 66.80 - \log\left(\frac{k_*}{a_0 H_0}\right) + \frac{1}{4} \log\left(\frac{V_*^2}{M_{\text{Pl}}^4 \rho_{\text{end}}}\right) - \frac{1}{12} \log\left(\frac{V_{\text{end}}(3 - \varepsilon_*)}{(3 - \varepsilon_{\text{end}}) M_{\text{Pl}}^4}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{T_{\text{RH}}}{M_{\text{Pl}}}\right). \end{aligned} \quad (5.38)$$

で書き換えられ、再加熱終了時の有効自由度  $g_{\text{RH}}$  によらず、再加熱温度との関係が明らかになっている. 式(3.42)の値を取り、 $N_e = 55.5$ 、湯川結合を  $y_3 = 4.00 \times 10^{-3}$  と  $y_1 = 4.47 \times 10^{-13}$  とした時の結果は

$$\begin{aligned} \Lambda_H &\simeq 1.30 \times 10^{17} \text{ GeV}, \quad m_{\tilde{\pi}} \simeq 8.31 \times 10^{10} \text{ GeV}, \quad \tilde{m}_S \simeq 5.67 \times 10^{15} \text{ GeV}, \\ G_{\tilde{\pi}\tilde{\pi}S} &\simeq -2.35 y_1 \times 10^{15} \text{ GeV} \simeq -1.05 \times 10^3 \text{ GeV}, \\ T_{\text{RH}} &\simeq 2.07 \times 10^{11} \text{ GeV}, \quad B_{\tilde{\pi}} \simeq 1.90 \times 10^{-16}, \end{aligned} \quad (5.39)$$

となっている. この時の暗黒物質の残存量は  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2 \simeq 0.119$  となっており、観測値を満たしている.

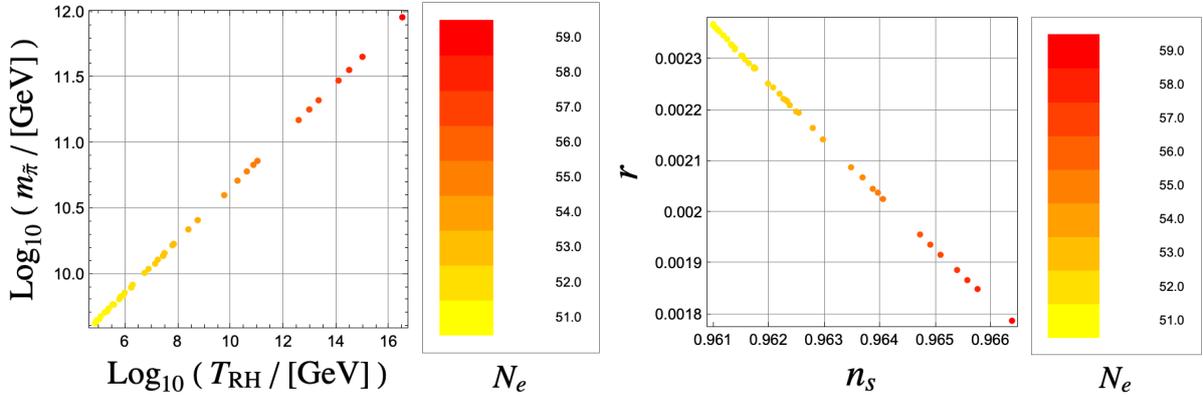


図22 左: ダークパイオン質量と再加熱温度の関連を示す.  $N_e$  の違いは色で区別する. プロットされたドットは  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2 = 0.1198 \pm 0.0024$  をみたす.  $y_3 = 4.00 \times 10^{-3}$ ,  $\beta = 6.31 \times 10^3$ ,  $\lambda_S = 1.20 \times 10^{-2}$  と固定し、 $y_1$  と  $\gamma$  をスキャンした; 右: 対応する  $n_s$ - $r$  のプロットである.

図22と図23は残存量の制限  $\Omega_{\tilde{\pi}} h^2 = 0.1198 \pm 0.0024 (2\sigma)$  と CMB の  $A_s$  の制限 (式(4.12)) を同時に満たすパラメータスキャンの結果を示す. 図22は  $y_3$ ,  $\beta$  と  $\lambda_S$  を固定し、 $y_1$  と  $\gamma$  をスキャンした結果で、図23は  $y_3$ ,  $\beta$  と  $\gamma$  を固定し、 $y_1$  と  $\lambda_S$  をスキャンした結果である. 左図は  $T_{\text{RH}}$  と  $m_{\tilde{\pi}}$

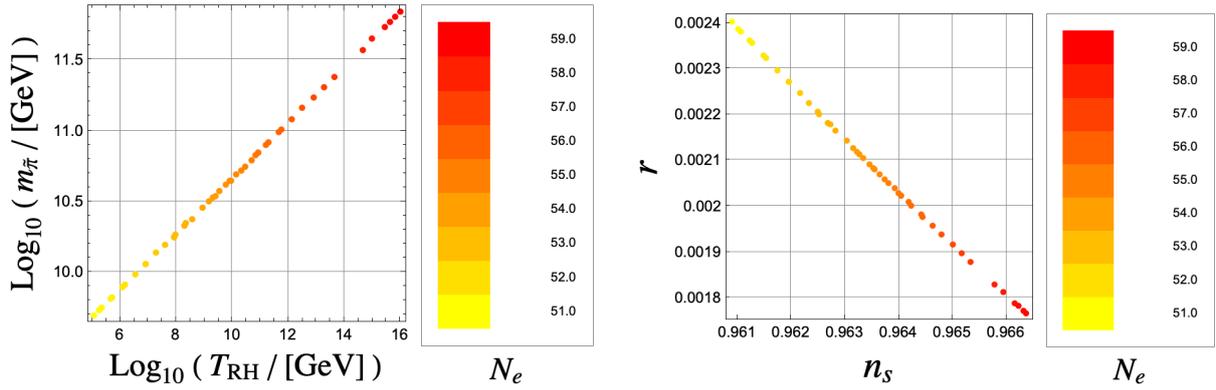


図23  $y_3 = 4.00 \times 10^{-3}$ 、 $\beta = 6.31 \times 10^3$ 、 $\gamma = 1.26 \times 10^8$  と固定し、 $y_1$  と  $\lambda_S$  をスキャンした結果を示す。

の関係である。  $T_{RH}$  の違いは  $N_e$  の違いを意味するので、対応する  $n_s$ - $r$  を右図にプロットする。本研究では、再加熱の機構を特定してはいないが、残存量制限と合う再加熱温度は  $10^6 \sim 10^{16} \text{ GeV}$  という広い範囲で予想される。また、暗黒物質であるダークパイオンの質量は  $10^9 \sim 10^{12} \text{ GeV}$  と非常に重くなり、さらにインフラトンの崩壊での生成シナリオによって  $y_1$  が小さいと要請されるので、本模型の暗黒物質を探索することはかなり困難である。しかし、本模型は暗黒物質の生成とインフレーションのスケールを関係づけており、もし  $r$  の値を特定できれば、e-fold  $N_e$  を通じ、再加熱温度とダークパイオンの質量の範囲をさらに制限することが可能となる。

本章では、暗黒物質であるダークパイオンがインフラトンの崩壊で生成されるシナリオを考えた。このシナリオはフレーバー対称性  $SU(3)_V$  を  $SU(2)_V \times U(1)$  に破ることを要請し、インフラトン  $S$  との湯川結合は  $y_1 = y_2 \neq y_3$  となる。隠れた QCD の NJL カットオフスケール  $\Lambda$  がプランク質量  $M_{Pl}$  を超過しないように、許される湯川結合定数の領域は強く制限されている。  $y_3 \sim 10^{-3}$ 、 $y_1 \sim 10^{-14 \sim -13}$  の場合、 $\Lambda/M_{Pl} \sim 10^{-1}$  となる。残存量の観測値を満たす暗黒物質の質量は  $m_{DM} \sim 10^9 \sim 10^{12} \text{ GeV}$  となり、標準模型の粒子との相互作用は  $y_1$  によって暗黒物質残存量抑えられている。

## 6 結論と展望

本研究は階層性問題を解決するアプローチの一つであるスケール不変性に注目する。隠れた QCD セクターを導入し、カイラル対称性の自発的な破れにより、スケールを生成する。NJL 理論を有効理論とすることによって現れるスカラー場  $\sigma$  と理論の各セクターをつなぐインフラトン  $S$  は真空期待値を獲得し、プランク質量、右巻きニュートリノ、左巻きニュートリノとヒッグス質量の起源となる。このように、Wheeler の “Mass without mass” を実現させた [100].

本模型は、インフラトン  $S$ 、NJL 有効理論によって現れるスカラー場  $\sigma$ 、非線形な  $R^2$  項から由来する scalaron  $\varphi$ 、三つのスカラー場があるインフレーション模型となる。Einstein フレームでの有効ポテンシャルの  $\sigma$  方向と  $\varphi$  方向の極小値となる場所、つまりポテンシャルの谷を探し、三つのスカラー場のインフレーション模型を single-field インフレーションと近似できる。本模型で得られた CMB 観測量であるスペクトルインデックス  $n_s$  とテンソル-スカラー比  $r$  の値は、ヒッグスインフレーション [15] や  $R^2$  インフレーション [101–103] が予言した値と大体同じとなった。先行研究のインフレーション模型 [68, 69] では、線形ポテンシャルの予言と近い結果も得られたが、本研究では得られなかった。ヒッグスインフレーションと  $R^2$  インフレーションは single-field インフレーションと見なせるが、本模型はマルチスカラー場インフレーションであり、前述のインフレーション模型とは異なっている。特に、CMB の微小な非等方性について、非ガウス性があるはずである [104]. 本研究のインフレーションと、ヒッグスインフレーションや  $R^2$  インフレーションとの区別については将来の課題としたい。

カイラル対称性の自発的な破れはスケールを生成するだけでなく、偽 NG ボソンとしてのダークメソンを予言する。本模型では、隠れたフェルミオンとインフラトン  $S$  との湯川結合がカイラル対称性を破るので、ダークメソンは質量を獲得する。また、ダークメソンはフレーバー対称性で安定となり、暗黒物質候補となる。本研究では、フレーバー対称性が  $SU(2)_V \times U(1)$  に破れることを要請することで、ダークパイオンが暗黒物質となり、それらがインフラトンの崩壊で生成されるシナリオを議論した。このシナリオでは暗黒物質の質量は  $10^9 \sim 10^{12} \text{ GeV}$  と非常に重いので、直接探測ができないが、観測されている残存量は説明できることが示された。

隠れた QCD に関連する研究として、先行研究 [85–87] では隠れた QCD の相転移による重力波が議論されている。また、真の QCD の相転移により PBH が形成しやすくなることは指摘されている [105–107]. さらに、PBH によるバリオジェネシスも提案される [49–51]. そこで、本研究で議論した隠れた QCD を含む古典的スケール不変な理論では、PBH の形成についてどのような予測があるか、PBH が暗黒物質の一部となるシナリオ [41, 42, 49] が働くかどうかなど、今後議論を進展させたい。さらに、本理論のエキゾチックなオブジェクトを記述する解についても探究していきたい。一般相対論のブラックホール解以外として、ブラックホールと類似するがホライズンがない black hole mimicker [108–111] や無特異点ブラックホールとワームホールの両方と成れるオブジェク

ト [112–116] などの可能性が提案されている。また、ブラックホールのイメージ [117] が捉えられた後、これらのオブジェクトの観測効果についてもよく研究されている [108, 118–120]。本研究の重力セクターは修正重力理論であり、したがって、ブラックホール以外のエキゾチックなオブジェクトを記述する解があるかもしれない。あるいは、ヘアを持つブラックホールの解も可能であろう。

## 付録 A: 一般相対性理論に関する表記

一般相対性理論に関する文献では、計量の符号について、素粒子物理学で使われる表記と異なる表記を取ることが少なくない。表記の違いがどのような影響を与えるか、また二つの表記の関係性について、本付録で紹介する。

時空計量については、時間の微分の二乗を負とし、3つの空間の微分の二乗を正とする表記  $\{-, +, +, +\}$  は一般相対性理論や量子重力などの領域においてよく使われる。素粒子物理学において、逆の  $\{+, -, -, -\}$  が用いられている。例えば、相対論の研究で、

$$ds_{(g)}^2 = -dt^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{A.1})$$

の平坦時空の計量が使われる。  $\delta_{ij}$  は

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

である。素粒子は逆の

$$ds_{(p)}^2 = dt^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{A.3})$$

を用いる。接続係数は式

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left( \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right), \quad (\text{A.4})$$

で与えられる。反変計量  $g^{\mu\nu}$  と共変計量  $g_{\mu\nu}$  が各一回現れるので、符号の違いが相殺でき、どちらの計量の符号でも、共変微分の接続係数は同じとなる。

次は上添字一つ、下添字三つの Riemann テンソル、つまり曲率テンソルについてを話す。計算式は

$$R_{\rho\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma}, \quad (\text{A.5})$$

となり、直接的に接続係数微分と接続係数二乗から構成されているので、違う計量符号を使っても計算結果が同じになる。曲率テンソルの次は縮約で定義される Ricci テンソルを議論する。曲率テンソルから Ricci テンソルへの縮約仕方には二通りある。よく使われるのは上添字と下二番目との縮約

$$R_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\rho\nu}, \quad (\text{A.6})$$

である。もう一方は、曲率テンソルの上添字と下三番目との縮約

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R^{\rho}_{\mu\nu\rho}, \quad (\text{A.7})$$

を使って Ricci テンソルを定義する. 曲率テンソルの添字交換反対称  $R^\lambda_{\rho\mu\nu} = -R^\lambda_{\nu\mu\rho}$  によって、

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\nu\rho} = -R^\rho_{\mu\rho\nu} = -R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.8})$$

となる. つまり、式(A.6)の Ricci テンソルと式(A.7)の Ricci テンソルとの符号が違うことがわかる.

本論文は計量符号  $\{+, -, -, -\}$  と、下二番目の添字と縮約する Ricci テンソル (式(A.6)) を使う. Ricci スカラーは

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

で計算される. Ricci テンソルにもう一つの反変計量をかけて縮約するので、 $\{+, -, -, -\}$  での Hilbert-Einstein 項は  $-M_{\text{Pl}}^2 R/2$  となり、 $\{-, +, +, +\}$  なら  $M_{\text{Pl}}^2 R/2$  となる. プランク質量  $M_{\text{Pl}}$  とニュートン引力定数  $G$  との関係は  $M_{\text{Pl}}^{-2} = 8\pi G$  で与えられる.

もう一つ注意すべきのところは完全流体エネルギー-運動量テンソル

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p h_{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

に現れるプロジェクト計量  $h_{\mu\nu}$  である. 符号  $\{-, +, +, +\}$  の場合は、タイムライクなベクター  $u^\mu$  が  $u^\mu u_\mu = -1$  を満たすので、induced 計量は

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (\text{A.11})$$

与えられ、エネルギー-運動量テンソルは

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (\text{A.12})$$

で与えられる. 符号  $\{+, -, -, -\}$  の場合は、 $u^\mu$  が  $u^\mu u_\mu = 1$  を満たし、induced 計量とエネルギー-運動量テンソルは

$$h_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu, \quad (\text{A.13})$$

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu - p(g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu), \quad (\text{A.14})$$

となる.

## 付録 B: より効率的な接続係数と曲率テンソルの計算方法

付録 A の(A.4)と(A.5)を用いて、接続係数と曲率テンソルを計算するのは、成分が多いので、かなり非効率的である。特に、時空計量には多くの対称性が存在する場合、たくさんの成分はゼロとなるが、計算されるまえにゼロかどうかはわからない。本節では、時空計量の対称性を活用できる接続係数と曲率テンソルの計算方法を紹介する。まずは測地線方程式に注目しよう。測地線方程式を別の形

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + g^{\lambda\rho} \left( \frac{dg_{\rho\sigma}}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = 0, \quad (\text{B.1})$$

にして、ヒントが得られる。 $dg_{\rho\sigma}/d\tau$  は  $(\partial g_{\rho\sigma}/\partial x^\mu)(dx^\mu/d\tau)$  である。次は  $g_{\mu\nu}$  がテンソルであることを考えず、複数個の  $x^\mu$  の関数として、 $dg_{\mu\nu}$  を単純に各関数  $g_{\mu\nu}$  の微分だと見ても良い。測地線方程式(B.1)の第二項は、曲線  $x^\mu(\tau)$  の情報を取り除けば、座標微分の式

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu dx^\nu = g^{\lambda\rho} (dg_{\rho\sigma} dx^\sigma - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} dx^\mu dx^\nu), \quad (\text{B.2})$$

となる。これを使って、接続係数の計算がシンプルになる。対角成分は直接で、非対角成分は半分する方法で接続係数の結果を読み取れる。宇宙論の FRW 計量に応用する例を示す。FRW 計量は

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \hat{g}_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.3})$$

であるので、計量と反変計量の成分は

$$g_{tt} = 1, \quad g_{ij} = -a^2 \hat{g}_{ij}, \quad (\text{B.4})$$

$$g^{tt} = 1, \quad g^{ij} = -\frac{\hat{g}^{ij}}{a^2}, \quad (\text{B.5})$$

となる。ここではあえて空間幾何を特定せずに計算を進み、方法の便利さを示す。単位サイズの空間部分の計量成分  $\hat{g}_{ij}$  が時間  $t$  によらず、空間座標  $x^i$  しか依存しない。 $g_{ti}$  成分がないことから、容易に(B.2)を計算できる。具体的には、

$$\Gamma_{\mu\nu}^t dx^\mu dx^\nu = g^{tt} (dg_{tt} dt - \frac{1}{2} \frac{\partial(-a^2)}{\partial t} \hat{g}_{ij} dx^i dx^j) \quad (\text{B.6})$$

$$= a\dot{a} \hat{g}_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{B.7})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu = g^{ij} (dg_{jk} dx^k - (-a^2) \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}^{mn}}{\partial x^j} dx^m dx^n) \quad (\text{B.8})$$

$$= \hat{g}^{ij} (d\hat{g}_{jk} dx^k + 2\frac{\dot{a}}{a} dt \hat{g}_{jk} dx^k - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}^{mn}}{\partial x^j} dx^m dx^n) \quad (\text{B.9})$$

$$= 2\frac{\dot{a}}{a} dt dx^i + \hat{g}^{ij} (d\hat{g}_{jk} dx^k - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}^{mn}}{\partial x^j} dx^m dx^n), \quad (\text{B.10})$$

となる。ただし、 $\dot{a}$  は  $a$  の時間  $t$  に対する導関数である。 $\Gamma_{\mu\nu}^i dx^\mu dx^\nu$  の結果の第二項は単位サイズの空間部分  $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j$  のみの接続  $\hat{\Gamma}_{mn}^i dx^m dx^n$  だと見なすことができる。元の計量(B.3)と対応する接続係数の各非ゼロの成分は

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^t &= a\dot{a} \hat{g}_{ij}, \\ \Gamma_{tj}^i &= \Gamma_{jt}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, \\ \Gamma_{jk}^i &= \hat{\Gamma}_{jk}^i,\end{aligned}\tag{B.11}$$

と読み取れる。この計算結果によって、共動観測者  $t = \tau, dx^i/d\tau = 0$  が測地線方程式を満たすことができると確認できる。

接続係数の次は曲率テンソルの計算である。付録 A でも述べたことだが、曲率テンソルの下二番目と三番目の添字には反交換対称性がある。この性質から、外微分というツールを使えることを示唆している。外微分は、関数  $f$  に対する微分を、フォームと呼ばれるより一般的の反対称テンソルへ拡張する操作である。単純な関数  $f$  は 0 フォームと呼ぶ。共変ベクトル  $A_\mu$  は座標の微分をかけて 1 フォーム  $A_\mu dx^\mu$  と、二階反対称テンソル  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$  は 2 フォーム  $F_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  と言い換える。微分オペレーター  $d$  を 0 フォーム  $f$  にかけて、1 フォーム  $(\partial f/\partial x^\mu) dx^\mu$  が得られる。1 フォーム  $A_\mu dx^\mu$  にかける場合は、

$$d(A_\nu dx^\nu) = dA_\nu \wedge dx^\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu \wedge dx^\nu,\tag{B.12}$$

となる。 $\wedge$  は外積であり、テンソル積との転換関係が

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu,\tag{B.13}$$

となり、明らかに反対称性を満たす。接続を 1 フォーム  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu$  のように書けば、曲率テンソルは式(A.5)によって、2 フォーム

$$\frac{1}{2} R_{\rho\mu\nu}^\lambda dx^\mu \wedge dx^\nu = d\Gamma_{\mu\rho}^\lambda \wedge dx^\mu + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda dx^\mu \wedge \Gamma_{\nu\rho}^\sigma dx^\nu,\tag{B.14}$$

と見なす。ここでは、計算を効率的に進めるようにして、外微分と 2 フォームの外積を用いるルールを導入したが、厳密な定義は省略する。実際、これらはゲージ場や多様体のトポジカルな構造にも繋がるものでもある [121]。この方法で RW 計量の曲率テンソルを続いて計算する。非ゼロの接続 1 フォームは

$$\Gamma_{\mu i}^t dx^\mu = a\dot{a} \hat{g}_{ij} dx^j, \Gamma_{\mu t}^i dx^\mu = \frac{\dot{a}}{a} dx^i, \Gamma_{\mu j}^i dx^\mu = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i dt + \hat{\Gamma}_{jk}^i dx^k,\tag{B.15}$$

となる. 曲率 2 フォームは

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}R^t{}_{t\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu &= 0 + \Gamma^t{}_{\mu i}dx^\mu \wedge \Gamma^i{}_{\nu t}dx^\nu \\
&= \dot{a}^2 \hat{g}_{ij} dx^j \wedge dx^i \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}R^t{}_{i\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu &= d\Gamma^t{}_{\mu i} \wedge dx^\mu + \Gamma^t{}_{\mu j}dx^\mu \wedge \Gamma^j{}_{\nu i}dx^\nu \\
&= \frac{\partial(a\dot{a})}{\partial t} \hat{g}_{ij} dt \wedge dx^j + a\dot{a} \frac{\partial(\hat{g}_{ij})}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j \\
&\quad + a\dot{a} \hat{g}_{jk} dx^k \wedge \left( \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i dt + \hat{\Gamma}^j{}_{im} dx^m \right) \\
&= a\ddot{a} \hat{g}_{ij} dt \wedge dx^j + a\dot{a} \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k} + \hat{g}_{nk} \hat{\Gamma}^n{}_{ij} \right) dx^k \wedge dx^j \\
&= a\ddot{a} \hat{g}_{ij} dt \wedge dx^j \\
&\quad + a\dot{a} \left( \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{ik}}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial x^k} \right) dx^k \wedge dx^j \\
&= a\ddot{a} \hat{g}_{ij} dt \wedge dx^j,
\end{aligned} \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}R^i{}_{t\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu &= d\Gamma^i{}_{\mu t} \wedge dx^\mu + \Gamma^i{}_{\mu j}dx^\mu \wedge \Gamma^j{}_{\nu t}dx^\nu \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) dt \wedge dx^i + \left( \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i dt + \hat{\Gamma}^i{}_{jk} dx^k \right) \wedge \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) dx^j \\
&= \frac{\ddot{a}}{a} dt \wedge dx^i,
\end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}R^i{}_{j\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu &= d\Gamma^i{}_{\mu j} \wedge dx^\mu + \Gamma^i{}_{\mu t}dx^\mu \wedge \Gamma^t{}_{\nu j}dx^\nu + \Gamma^i{}_{\mu k}dx^\mu \wedge \Gamma^k{}_{\nu j}dx^\nu \\
&= 0 + d\hat{\Gamma}^i{}_{kj} \wedge dx^k + \dot{a}^2 \hat{g}_{jk} dx^i \wedge dx^k + \hat{\Gamma}^i{}_{mk} dx^m \wedge \hat{\Gamma}^k{}_{nj} dx^n \\
&= \frac{1}{2}(\hat{R}^i{}_{jmn} + \dot{a}^2(\delta_m^i \hat{g}_{jn} - \delta_n^i \hat{g}_{jm})) dx^m \wedge dx^n,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

との結果が得られる. ただし,  $\hat{g}_{ij} dx^i \wedge dx^j$  のような添え字対称の部分と反対称の部分と縮約すればゼロとなり,  $\hat{R}^i{}_{jmn}$  が計量  $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij} dx^i dx^j$  の曲率テンソルである. 曲率テンソルの非ゼロ成分を

$$\begin{aligned}
R^t{}_{itj} &= -R^t{}_{ijt} = a\ddot{a} \hat{g}_{ij}, \\
R^i{}_{ttj} &= -R^i{}_{tjt} = \frac{\ddot{a}}{a} \delta_j^i, \\
R^i{}_{jmn} &= \hat{R}^i{}_{jmn} + \dot{a}^2(\delta_m^i \hat{g}_{jn} - \delta_n^i \hat{g}_{jm}),
\end{aligned} \tag{B.20}$$

と読み取る. Ricci テンソルと Ricci スカラーは単純に縮約で,

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= R^i{}_{tit} = -(D-1) \frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{ij} &= R^t{}_{itj} + R^k{}_{ikj} = a\ddot{a} \hat{g}_{ij} + \hat{R}_{ij} + (D-2)\dot{a}^2 \hat{g}_{ij}, \\
R &= R_{tt} - \frac{\hat{g}^{ij}}{a^2} R_{ij} = -2(D-1) \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\hat{R}}{a^2} - (D-1)(D-2) \frac{\dot{a}^2}{a^2},
\end{aligned} \tag{B.21}$$

と計算される．本付録であえて一般的な時空次元  $D$  を議論する．したがって、縮約  $\delta_i^i$  は  $D - 1$  となる．アインシュタインテンソル  $G_{\mu\nu}$  は

$$G_{tt} = R_{tt} - \frac{R}{2}g_{tt} = \frac{(D-1)(D-2)}{2} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\hat{R}}{2a^2}, \quad (\text{B.22})$$

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} = \hat{R}_{ij} - ((D-2)a\ddot{a} + \frac{(D-2)(D-3)}{2}\dot{a}^2 + \frac{\hat{R}}{2})\hat{g}_{ij}, \quad (\text{B.23})$$

で与えられる． $G_{\mu\nu}$  は divergence フリー、つまり  $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$  であり、

$$\nabla^\mu G_{\mu t} = \dot{G}_{tt} + (D-1)\frac{\dot{a}}{a} \left( G_{tt} + \frac{\hat{g}^{ij}G_{ij}}{(D-1)a^2} \right) = 0, \quad (\text{B.24})$$

$$\nabla^\mu G_{\mu i} = \frac{1}{a^2} (\hat{\nabla}^k (\hat{R}_{ki} - \frac{\hat{R}}{2}\hat{g}_{ki}) - ((D-2)a\ddot{a} + \frac{(D-2)(D-3)}{2}\dot{a}^2)\hat{\nabla}^k \hat{g}_{ki}), \quad (\text{B.25})$$

と書ける． $\hat{R}_{ki} - \hat{R}\hat{g}_{ki}/2$  は空間部分  $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}dx^i dx^j$  のアインシュタインテンソル  $\hat{G}_{ki}$  なので、空間成分の式(B.25)がゼロとなることが自明である．時間成分の恒等式(B.24)から、 $\hat{g}^{ij}G_{ij}$  の情報がわかる．要は、式(B.23)の情報は  $\nabla^\mu G_{\mu t}$  でもわかる．実際、アインシュタイン方程式を通じて、完全流体のエネルギー-運動量テンソルの密度  $\rho$  とプレッシャー  $p$  は

$$\rho = M_{\text{Pl}}^2 G_{tt}, \quad p = M_{\text{Pl}}^2 \frac{\hat{g}^{ij}G_{ij}}{(D-1)a^2}, \quad (\text{B.26})$$

となる．ただし、ここの  $M_{\text{Pl}D}$  は  $D$  次元時空のプランク質量である．恒等式(B.24)は局所エネルギー保存

$$\dot{\rho} + (D-1)\frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0, \quad (\text{B.27})$$

と直接的に対応する．

計量  $d\hat{s}^2 = \hat{g}_{ij}dx^i dx^j$  が球面、あるいは双曲面を記述する時、この計量の曲率テンソルは

$$\hat{R}^i_{jmn} = k (\delta_m^i \hat{g}_{jn} - \delta_n^i \hat{g}_{jm}), \quad (\text{B.28})$$

となる．ただし、 $k = 1$  は球面、 $k = -1$  は双曲面である．平坦空間の場合は  $\hat{R}^i_{jmn} = 0$  なので、 $k = 0$  と対応する．したがって、式(B.28)は正、負、ゼロの定曲率空間の曲率テンソルを統一に記述できる．Ricci テンソル  $\hat{R}_{ij}$  と Ricci スカラー  $\hat{R}$  は

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} &= (D-2)k \hat{g}_{ij}, \\ \hat{R} &= (D-1)(D-2)k, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

となり、Einstein テンソル  $G_{\mu\nu}$  は

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{(D-1)(D-2)}{2} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \\ G_{ij} &= - \left( (D-2)a\ddot{a} + \frac{(D-2)(D-3)}{2} (\dot{a}^2 + k) \right) \hat{g}_{ij}, \end{aligned} \tag{B.30}$$

となる.

## 付録 C: NJL ポテンシャルへの曲がった時空修正

本付録では曲がった時空による NJL ポテンシャルへの修正を議論する. 文献 Ref. [91] の式 (14) によると, 複合スカラー場  $\sigma$  も曲がった時空での場の量子論の効果で,  $R$  の一乗項に寄与する. この効果を計算することより, シンプルな方法を考え, 当文献の計算結果から, 本研究のインフレーションモデルへの影響を調べる.

当文献は, 四フェルミオン結合の NJL 作用

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\bar{\psi} i \gamma^\mu \nabla_\mu \psi + \frac{\lambda}{2N} \{(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2\}], \quad (\text{C.1})$$

を対象として議論した. 補助場を導入することによって, 作用はガウス型

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\bar{\psi} i \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \frac{N}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) - \bar{\psi} (\sigma + i \gamma_5 \pi) \psi]. \quad (\text{C.2})$$

にされる. フェルミオン  $\psi$  を積分し, ラージ  $N$  展開を行い, 有効作用のリーディングオーダーは

$$S_{\text{eff}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ -\frac{1}{2\lambda} (\sigma^2 + \pi^2) \right\} - i \ln \text{Det} \{ i \gamma^\mu \nabla_\mu - (\sigma + i \gamma_5 \pi) \} \quad (\text{C.3})$$

となる.  $\ln \text{Det}$  の計算には, Schwinger proper time という計算手法がある [78]. 時空曲率が有効ポテンシャルに現れることが確認できる [91]. 有効ポテンシャルは\*7

$$\begin{aligned} V(\sigma, 0) = & V(0, 0) + \frac{\sigma^2}{2\lambda} \\ & - \frac{1}{16\pi^2} \left[ \sigma^2 \Lambda^2 + \Lambda^4 \ln \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\Lambda^2} \right) - \sigma^4 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma^2} \right) \right] \\ & - \frac{1}{16\pi^2} \frac{R}{6} \left[ -\sigma^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{\sigma^2} \right) + \frac{\Lambda^2 \sigma^2}{\Lambda^2 + \sigma^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

で与えられる.

本研究において, 式(C.2)と相当するものは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MFA}} = & \text{Tr} \bar{\psi} (i \not{\partial} - M) \psi - i \text{Tr} \bar{\psi} \gamma_5 \phi \psi \\ & - \frac{1}{8G} \left( 3\sigma^2 + 2 \sum_{a=1}^8 \phi_a \phi_a \right) + \frac{G_D}{8G^2} \left( -\text{Tr} \bar{\psi} \phi^2 \psi \right. \\ & \left. + \sum_{a=1}^8 \phi_a \phi_a \text{Tr} \bar{\psi} \psi + i \sigma \text{Tr} \bar{\psi} \gamma_5 \phi \psi + \frac{\sigma^3}{2G} + \frac{\sigma}{2G} \sum_{a=1}^8 (\phi_a)^2 \right), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

である. 上式に現れる質量関数  $M$  は  $M = \sigma + yS + \frac{G_D}{8G^2} \sigma^2$  である. 式(C.5)の  $-\text{Tr} \bar{\psi} M_{\text{eff}} \psi$  とい

\*7 原論文の 14 式の 2 行目の  $(4\pi^2)$  は typo である.

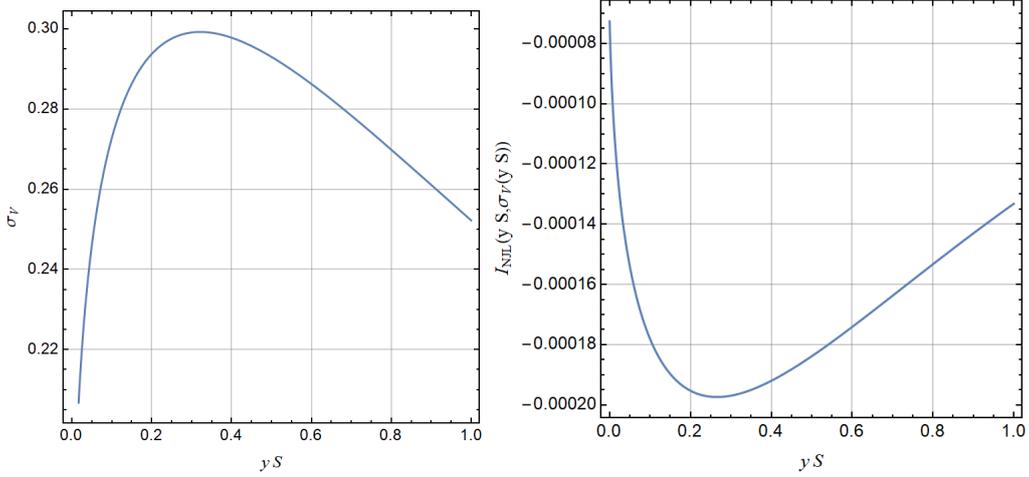


図24 左:  $\frac{\partial V_{\text{NJL}}}{\partial \sigma} = 0$  によってフィット関数  $\sigma_V(yS)$ ; 右: 関数  $\sigma_V(yS)$  を代入した  $R$  の一乗項に対する修正  $I_{\text{NJL}}(yS, \sigma_V(yS))$

う構造の中の部分  $M_{\text{eff}}$  は

$$M_{\text{eff}}(S, \sigma, \phi^a) = M(S, \sigma) + i\gamma_5 \phi + \frac{G_D}{8G^2} (\phi^2 - \sum_{a=1}^8 \phi_a \phi_a - i\sigma\gamma_5 \phi) \quad (\text{C.6})$$

となる. 式(C.2)式と比較して、本研究のインフレーション模型の  $R$  一乗項への修正項を計算できる. NJL のカットオフ  $\Lambda_H$  をスケールアップさせない状況で議論を進む.  $\phi = \phi^a = 0$  の状況だけ考えれば、とくに  $3n_c I_0(S, \sigma)$  と(C.4)式の2行目と比較して、

$$\sigma \rightarrow M = \sigma + yS + \frac{G_D}{8G^2} \sigma^2, \quad (\text{C.7})$$

というルールがわかる. 因子  $3n_c$  にも注意し、Ricci スカラーを含む修正ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V_{\text{NJL with R}} &= V_{\text{NJL}} - 3n_c I_{\text{NJL}} R \\ &= V_{\text{NJL}} - \frac{3n_c}{16\pi^2} \frac{R}{6} \left[ -M^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + \frac{\Lambda^2 M^2}{\Lambda^2 + M^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

と導出できる. ただし、

$$I_{\text{NJL}}(S, \sigma) = \frac{1}{96\pi^2} \left[ -M^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M^2} \right) + \frac{\Lambda^2 M^2}{\Lambda^2 + M^2} \right], \quad (\text{C.9})$$

は本研究の模型の曲がった時空において  $\ln \text{Det}$  を通じて生成した 1-ループ修正である. ポテンシャルは  $\sigma$  と  $S$  に依存するが、式(C.7)の質量関数  $M$  を通じ、常に  $yS$  の影響を受ける. つまり  $S$  はいつも  $yS$  の形で NJL と関係する項に現れる. そのため、 $yS$  を変数とし、範囲  $0 < yS < 1$  以内、 $\frac{\partial V_{\text{NJL}}}{\partial \sigma} = 0$  も満たす谷を先にフィットすることができる. したがって、フィット得られた関数  $\sigma_V(yS)$  を代入したら、ポテンシャルと曲がった時空の修正は  $yS$  だけに依存する関数になる. 図 (24) は関数

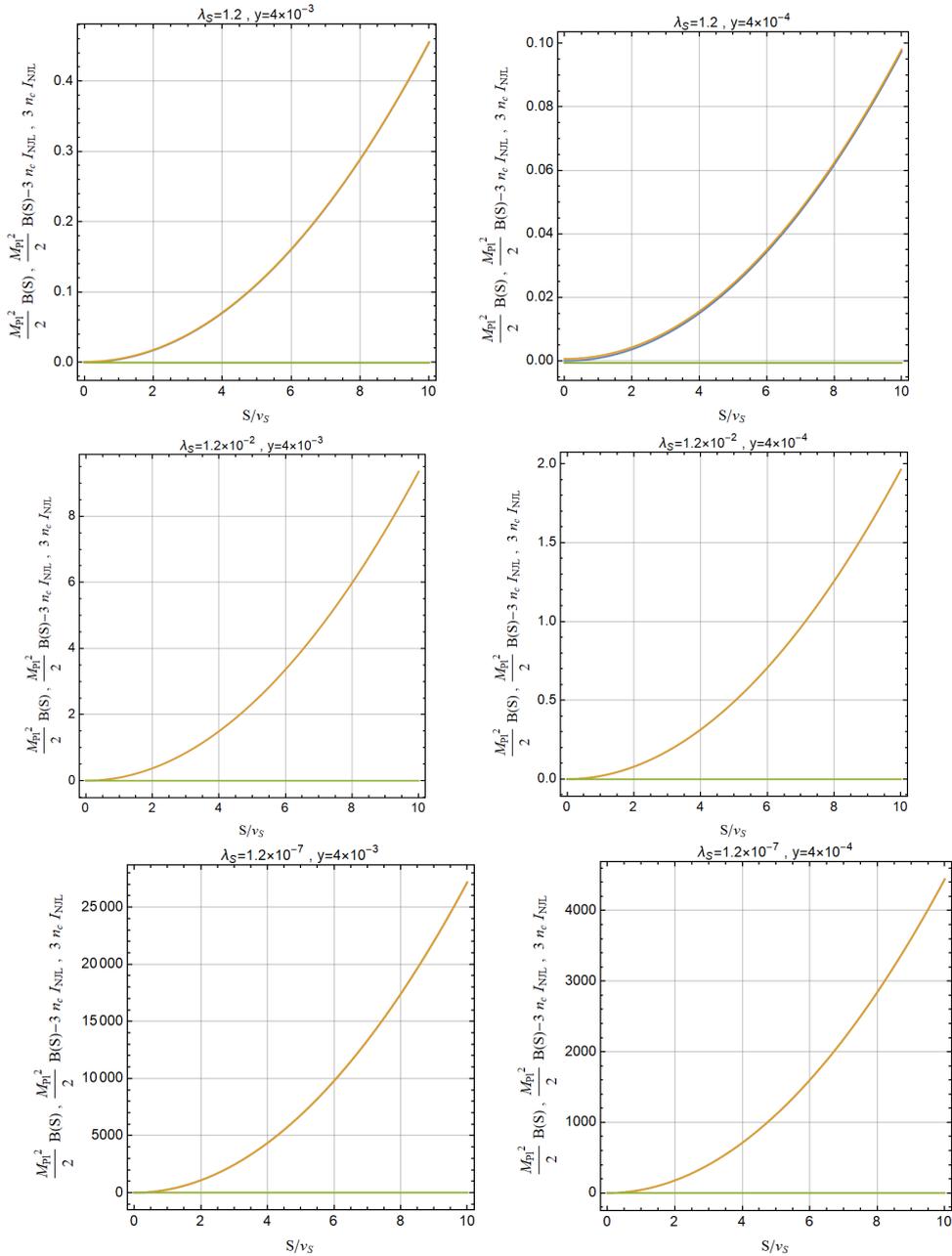


図25  $\beta = 4$  の場合,  $\frac{M_{P1}^2}{2} B$ (青),  $\frac{M_{P1}^2}{2} B - 3 n_c I_{NJL}$ (黄) と  $3 n_c I_{NJL}$ (緑) の比較,  $S$  の範囲は 0 から  $10 v_S$  までである.

$\sigma_V(yS)$  と、 $\sigma_V(yS)$  が代入された修正(C.9)を示す. 図 (25) は、第四章での数値計算で使われた六つのセットのパラメーターを用い、 $S$  の範囲を 0 から  $10 v_S$  まで、 $\beta = 4$  として、青線で  $\frac{M_{P1}^2}{2} B$ 、黄色線で  $\frac{M_{P1}^2}{2} B - 3 n_c I_{NJL}$  と、緑線で  $3 n_c I_{NJL}$  を描いて比較した.  $\lambda_S = 1.2, \lambda = 4 \times 10^{-4}$  以外では、青線と黄色線がほぼ区別できない. 本文の大きい  $\beta$  をスキャンした数値計算結果への影響がわずかであることがわかる.

## 付録 D: $D$ 次元時空の共形変換

本付録は、任意次元  $D$  の時空に対して、共形変換を行う場合、曲率テンソル、Ricci テンソルとスカラーの変換式を求める。計量  $g_{\mu\nu}$  を  $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$  に変換し、 $g^{\mu\rho}g_{\nu\rho} = \delta_\nu^\mu$  を保つように、反変計量は

$$g^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{g^{\mu\nu}}{\Omega^2}, \quad (\text{D.1})$$

と変わる。計量  $g_{\mu\nu}$  を行列と見なし、行列式  $g$  は

$$g \rightarrow \tilde{g} = \Omega^{2D} g, \quad (\text{D.2})$$

と変換する。したがって、後ほど使える変換

$$\sqrt{-g} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^D \sqrt{-g}, \quad (\text{D.3})$$

$$g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} \sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^{D-2} g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \quad (\text{D.4})$$

がわかる。曲率テンソル  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$  の変換を調べることには、単純に付録 A の(A.4)と(A.5)で直接計算しても良いが、ここで別のより効率よい方法を用いる [53]。計量  $g_{\mu\nu}$  と対応するレヴィ・チヴィタ接続の共変微分は  $\nabla_\mu$  で、共形変換した計量  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  と対応するのは  $\tilde{\nabla}_\mu$  で表す。反変ベクトル  $Y^\mu$  を例として、普通微分との関係は

$$\nabla_\mu Y^\nu = \partial_\mu Y^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\rho} Y^\rho, \quad (\text{D.5})$$

$$\tilde{\nabla}_\mu Y^\nu = \partial_\mu Y^\nu + \tilde{\Gamma}^\nu_{\mu\rho} Y^\rho, \quad (\text{D.6})$$

と書く。  $\nabla_\mu Y^\nu$  と  $\tilde{\nabla}_\mu Y^\nu$  はテンソルなので、座標変換の元でテンソルの変換則に従い変換する。したがって、接続係数の違い

$$C^\mu_{\nu\lambda} = \tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}, \quad (\text{D.7})$$

もテンソルの変換則に従うので、  $C^\mu_{\nu\lambda}$  はテンソルである。  $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$  は式(A.4)で与えられ、  $\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0$  を満たす。  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$  も同じである。実際、  $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} = 0$  で式(A.4)のような結果を導出することができる。普通微分と  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$  で  $\tilde{\nabla}_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} = 0$  を書き換えると、

$$\tilde{\nabla}_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} = \partial_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \tilde{g}_{\rho\lambda} - \tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\lambda} \tilde{g}_{\nu\rho} = 0, \quad (\text{D.8})$$

がわかる。下三つの添字を繰り返して交換し、  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda}$  が一つしかないように

$$\partial_\mu \tilde{g}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \tilde{g}_{\lambda\mu} - \partial_\lambda \tilde{g}_{\mu\nu} = 2\tilde{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} \tilde{g}_{\rho\lambda}, \quad (\text{D.9})$$

して、 $\tilde{g}^{\mu\nu}$  で整理すれば、式(A.4)のような結果、

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}\tilde{g}_{\nu\rho} + \partial_{\nu}\tilde{g}_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (\text{D.10})$$

が得られる. 同じ手法を使い、 $\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda}$  を  $\nabla_{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda}$  と  $C^{\mu}_{\nu\lambda}$  で書き、

$$\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda} = \nabla_{\mu}\tilde{g}_{\nu\lambda} - C^{\rho}_{\mu\nu}\tilde{g}_{\rho\lambda} - C^{\rho}_{\mu\lambda}\tilde{g}_{\nu\rho} = 0, \quad (\text{D.11})$$

から、式(A.4)と式(D.10)のような結果、

$$C^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\lambda\rho}(\nabla_{\mu}\tilde{g}_{\nu\rho} + \nabla_{\nu}\tilde{g}_{\rho\mu} - \nabla_{\rho}\tilde{g}_{\mu\nu}), \quad (\text{D.12})$$

が導出される. 関数  $\Omega$  はスカラーなので、共変微分の結果と普通微分と変わらない. したがって、

$$\begin{aligned} C^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{g^{\lambda\rho}}{2\Omega^2}(g_{\nu\rho}(\nabla_{\mu}\Omega^2) + g_{\mu\rho}(\nabla_{\nu}\Omega^2) - g_{\mu\nu}(\nabla_{\rho}\Omega^2)) \\ &= \delta^{\lambda}_{\nu}\nabla_{\mu}\log\Omega + \delta^{\lambda}_{\mu}\nabla_{\nu}\log\Omega - g_{\mu\nu}\nabla^{\lambda}\log\Omega, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

と書くことができる. 次は曲率テンソルである. 曲率テンソルは任意ベクター  $Y^{\mu}$  に対する二回共変微分の交換子

$$(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu})Y^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}Y^{\beta}, \quad (\text{D.14})$$

$$(\tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu}\tilde{\nabla}_{\mu})Y^{\alpha} = \tilde{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu}Y^{\beta}, \quad (\text{D.15})$$

によって定義できる [52, 53]. 式(D.15)の  $\tilde{\nabla}_{\mu}$  を  $\nabla_{\mu}$  で書き換え、式(D.14)を参照し、曲率テンソルの差は

$$\begin{aligned} \tilde{R}^{\alpha}_{\beta\mu\nu} - R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} &= \nabla_{\mu}C^{\alpha}_{\nu\beta} - \nabla_{\nu}C^{\alpha}_{\mu\beta} + C^{\alpha}_{\mu\rho}C^{\rho}_{\nu\beta} - C^{\alpha}_{\nu\rho}C^{\rho}_{\mu\beta} \\ &= \delta^{\alpha}_{\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\beta}\log\Omega - \delta^{\alpha}_{\mu}\nabla_{\nu}\nabla_{\beta}\log\Omega \\ &\quad - g_{\nu\beta}\nabla_{\mu}\nabla^{\alpha}\log\Omega + g_{\mu\beta}\nabla_{\nu}\nabla^{\alpha}\log\Omega \\ &\quad + \delta^{\alpha}_{\mu}(\nabla_{\beta}\log\Omega)(\nabla_{\nu}\log\Omega) - \delta^{\alpha}_{\nu}(\nabla_{\beta}\log\Omega)(\nabla_{\mu}\log\Omega) \\ &\quad - g_{\mu\beta}(\nabla^{\alpha}\log\Omega)(\nabla_{\nu}\log\Omega) + g_{\nu\beta}(\nabla^{\alpha}\log\Omega)(\nabla_{\mu}\log\Omega) \\ &\quad - (\nabla^{\lambda}\log\Omega)(\nabla_{\lambda}\log\Omega)(\delta^{\alpha}_{\mu}g_{\nu\beta} - \delta^{\alpha}_{\nu}g_{\mu\beta}), \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

となる. Ricci テンソルの差は

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\mu\nu} - R_{\mu\nu} &= \tilde{R}^{\rho}_{\mu\rho\nu} - R^{\rho}_{\mu\rho\nu} \\ &= \nabla_{\rho}C^{\rho}_{\nu\mu} - \nabla_{\nu}C^{\rho}_{\rho\mu} + C^{\rho}_{\rho\sigma}C^{\sigma}_{\nu\mu} - C^{\rho}_{\nu\sigma}C^{\sigma}_{\rho\mu} \\ &= -(D-2)\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\log\Omega - g_{\mu\nu}(\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}\log\Omega) \\ &\quad + (D-2)(\nabla_{\mu}\log\Omega)(\nabla_{\nu}\log\Omega) - (D-2)g_{\mu\nu}(\nabla_{\rho}\log\Omega)(\nabla^{\rho}\log\Omega), \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

であり、変換した Ricci スカラーは

$$\tilde{R} = \Omega^{-2} (R - 2 (D - 1) (\nabla_\rho \nabla^\rho \log \Omega) - (D - 1)(D - 2)(\nabla_\rho \log \Omega)(\nabla^\rho \log \Omega)), \quad (\text{D.18})$$

である.  $\sqrt{-\tilde{g}}$  をかけたら、

$$\begin{aligned} \tilde{R}\sqrt{-\tilde{g}} = & \Omega^{D-2} (R - 2 (D - 1) (\nabla_\rho \nabla^\rho \log \Omega) \\ & - (D - 1)(D - 2)(\nabla_\rho \log \Omega)(\nabla^\rho \log \Omega))\sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

となる.

## 謝辞

本博士論文の完成には、青木真由美さんに非常に感謝します。物理学についての指導から、言葉の扱い方までいろいろなところで指導を受けました。それ以外にも、論文の投稿や発表の準備など、いつもお世話になりました。また、この課題を最後まで完成させられたことについては、久保さんにありがとうございますと言いたと思います。齋川さんからの Mathematica に関するサポートも欠かせないものだと思います。

理論物理学研究室の自由な雰囲気にも感謝したいと思います。橋本さんと軍司さんたちと一緒に行ったゼミでは、Feyncalc を使ったファインマンダイアグラムの計算のやり方やワインバーグの宇宙論、いろいろなことを学びました。サーバーの使用について、軍司さんから助けてもらったことも多いと思います。村岡さんと澁谷さん、Lalu さんとのコミュニケーションはいつも楽しかったです。

最後に、家族と親友へ感謝の気持ちを伝えたいと思います。コロナで帰国することが難しくなり、二年以上家に帰れませんでした。それでも日本に来てからできた友達と話したり、遊んだりしてきました。困ったことがあっても、家族と親友から理解と支えをもらって、非常にありがたいと思います。

## 参考文献

- [1] **ATLAS Collaboration**, G. Aad *et al.*, *Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC*, *Phys. Lett. B* **716** (2012) 1–29, [[1207.7214](#)].
- [2] **CMS Collaboration**, S. Chatrchyan *et al.*, *Observation of a New Boson at a Mass of 125 GeV with the CMS Experiment at the LHC*, *Phys. Lett. B* **716** (2012) 30–61, [[1207.7235](#)].
- [3] V. C. Rubin, N. Thonnard, and W. K. Ford, Jr., *Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 /R = 4kpc/ to UGC 2885 /R = 122 kpc/*, *Astrophys. J.* **238** (1980) 471.
- [4] D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky, *A direct empirical proof of the existence of dark matter*, *Astrophys. J. Lett.* **648** (2006) L109–L113, [[astro-ph/0608407](#)].
- [5] V. Springel *et al.*, *Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution*, *Nature* **435** (2005) 629–636, [[astro-ph/0504097](#)].
- [6] M. Dine and A. Kusenko, *The Origin of the matter - antimatter asymmetry*, *Rev. Mod. Phys.* **76** (2003) 1, [[hep-ph/0303065](#)].
- [7] S. Weinberg, *Implications of Dynamical Symmetry Breaking*, *Phys. Rev. D* **13** (1976) 974–996. [Addendum: *Phys.Rev.D* 19, 1277–1280 (1979)].
- [8] S. P. Martin, *A Supersymmetry primer*, *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.* **18** (1998) 1–98, [[hep-ph/9709356](#)].
- [9] **Particle Data Group Collaboration**, M. Tanabashi *et al.*, *Review of Particle Physics*, *Phys. Rev. D* **98** (2018), no. 3 030001.
- [10] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 1888–1910.
- [11] Y. Nambu, *Axial vector current conservation in weak interactions*, *Phys. Rev. Lett.* **4** (1960) 380–382.
- [12] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity I*, *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.
- [13] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity II*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 246–254. [,141(1961)].

- [14] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [15] F. Bezrukov and M. Shaposhnikov, *The standard model higgs boson as the inflaton*, *Physics Letters B* **659** (Jan, 2008) 703–706, [[0710.3755](#)].
- [16] J. Rubio, *Higgs inflation*, *Front. Astron. Space Sci.* **5** (2019) 50, [[1807.02376](#)].
- [17] S. Choubey and A. Kumar, *Inflation and Dark Matter in the Inert Doublet Model*, *JHEP* **11** (2017) 080, [[1707.06587](#)].
- [18] I. Brivio and M. Trott, *Radiatively Generating the Higgs Potential and Electroweak Scale via the Seesaw Mechanism*, *Phys. Rev. Lett.* **119** (2017), no. 14 141801, [[1703.10924](#)].
- [19] V. Brdar, Y. Emonds, A. J. Helmboldt, and M. Lindner, *Conformal Realization of the Neutrino Option*, *Phys. Rev. D* **99** (2019), no. 5 055014, [[1807.11490](#)].
- [20] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [21] J. M. Leinaas and J. Myrheim, *On the theory of identical particles*, *Nuovo Cim. B* **37** (1977) 1–23.
- [22] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.
- [23] A. Salam, *Weak and Electromagnetic Interactions*, *Conf. Proc. C* **680519** (1968) 367–377.
- [24] T. Kajita, *Nobel Lecture: Discovery of atmospheric neutrino oscillations*, *Rev. Mod. Phys.* **88** (2016), no. 3 030501.
- [25] **Super-Kamiokande Collaboration**, Y. Fukuda *et al.*, *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562–1567, [[hep-ex/9807003](#)].
- [26] **SNO Collaboration**, Q. R. Ahmad *et al.*, *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 011301, [[nucl-ex/0204008](#)].
- [27] **Super-Kamiokande Collaboration**, S. Fukuda *et al.*, *Determination of solar neutrino oscillation parameters using 1496 days of Super-Kamiokande I data*, *Phys. Lett. B* **539** (2002) 179–187, [[hep-ex/0205075](#)].
- [28] **KamLAND Collaboration**, K. Eguchi *et al.*, *First results from KamLAND: Evidence for reactor anti-neutrino disappearance*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 021802, [[hep-ex/0212021](#)].
- [29] **Super-Kamiokande Collaboration**, Y. Ashie *et al.*, *Evidence for an oscillatory signature in atmospheric neutrino oscillation*, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 101801, [[hep-ex/0404034](#)].
- [30] **Double Chooz Collaboration**, Y. Abe *et al.*, *Indication of Reactor  $\bar{\nu}_e$  Disappearance in*

- the Double Chooz Experiment*, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 131801, [[1112.6353](#)].
- [31] **Daya Bay Collaboration**, F. P. An *et al.*, *Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay*, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 171803, [[1203.1669](#)].
- [32] **RENO Collaboration**, J. K. Ahn *et al.*, *Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment*, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 191802, [[1204.0626](#)].
- [33] **T2K Collaboration**, K. Abe *et al.*, *Indication of Electron Neutrino Appearance from an Accelerator-produced Off-axis Muon Neutrino Beam*, *Phys. Rev. Lett.* **107** (2011) 041801, [[1106.2822](#)].
- [34] Z.-z. Xing and Z.-h. Zhao, *The minimal seesaw and leptogenesis models*, *Rept. Prog. Phys.* **84** (2021), no. 6 066201, [[2008.12090](#)].
- [35] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *The Cosmological Constant and Dark Energy*, *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003) 559–606, [[astro-ph/0207347](#)].
- [36] M. Li, X.-D. Li, S. Wang, and Y. Wang, *Dark Energy*, *Commun. Theor. Phys.* **56** (2011) 525–604, [[1103.5870](#)].
- [37] **Planck Collaboration**, P. A. R. Ade *et al.*, *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **571** (2014) A16, [[1303.5076](#)].
- [38] **Planck Collaboration**, P. A. R. Ade *et al.*, *Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13, [[1502.01589](#)].
- [39] **Planck Collaboration**, Aghanim:2018eyx, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, *Astron. Astrophys.* **641** (2020) A6, [[1807.06209](#)].
- [40] S. Weinberg, *Cosmology*. 2008.
- [41] P. Ivanov, P. Naselsky, and I. Novikov, *Inflation and primordial black holes as dark matter*, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 7173–7178.
- [42] B. Carr and F. Kuhnel, *Primordial Black Holes as Dark Matter Candidates*, in *Les Houches summer school on Dark Matter*, 10, 2021. [2110.02821](#).
- [43] C. Skordis and T. Zlosnik, *New Relativistic Theory for Modified Newtonian Dynamics*, *Phys. Rev. Lett.* **127** (2021), no. 16 161302, [[2007.00082](#)].
- [44] G. Giudice, A. Notari, M. Raidal, A. Riotto, and A. Strumia, *Towards a complete theory of thermal leptogenesis in the SM and MSSM*, *Nucl. Phys. B* **685** (2004) 89–149, [[hep-ph/0310123](#)].
- [45] J. D. Clarke, R. Foot, and R. R. Volkas, *Electroweak naturalness in the three-flavor type I seesaw model and implications for leptogenesis*, *Phys. Rev. D* **91** (2015), no. 7 073009, [[1502.01352](#)].

- [46] G. Bambhaniya, P. Bhupal Dev, S. Goswami, S. Khan, and W. Rodejohann, *Naturalness, Vacuum Stability and Leptogenesis in the Minimal Seesaw Model*, *Phys. Rev. D* **95** (2017), no. 9 095016, [[1611.03827](#)].
- [47] I. Brivio, K. Moffat, S. Pascoli, S. Petcov, and J. Turner, *Leptogenesis in the Neutrino Option*, *JHEP* **10** (2019) 059, [[1905.12642](#)]. [Erratum: *JHEP* 02, 148 (2020)].
- [48] V. Brdar, A. J. Helmboldt, S. Iwamoto, and K. Schmitz, *Type-I Seesaw as the Common Origin of Neutrino Mass, Baryon Asymmetry, and the Electroweak Scale*, *Phys. Rev. D* **100** (2019) 075029, [[1905.12634](#)].
- [49] A. Boudon, B. Bose, H. Huang, and L. Lombriser, *Baryogenesis through asymmetric Hawking radiation from primordial black holes as dark matter*, *Phys. Rev. D* **103** (2021), no. 8 083504, [[2010.14426](#)].
- [50] A. D. Dolgov and N. A. Pozdnyakov, *Asymmetric baryon capture by primordial black holes and baryon asymmetry of the Universe*, *Phys. Rev. D* **104** (2021), no. 8 083524, [[2107.08231](#)].
- [51] N. Smyth, L. Santos-Olmsted, and S. Profumo, *Gravitational Baryogenesis and Dark Matter from Light Black Holes*, [2110.14660](#).
- [52] S. Hawking and G. Ellis, *The large scale structure of space-time*. 1973.
- [53] R. Wald, *General relativity*. 1984.
- [54] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 347–356.
- [55] K. Sato *Mon. Not. Roy. Astron. Soc* **195** (1981) 467.
- [56] A. D. Linde, *Inflationary Cosmology, Lect. Notes Phys.* **738** (2008) 1–54, [[0705.0164](#)].
- [57] A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, *Phys. Lett.* **108B** (1982) 389–393.
- [58] A. D. Linde, *Coleman-Weinberg Theory and a New Inflationary Universe Scenario*, *Phys. Lett.* **114B** (1982) 431–435.
- [59] A. D. Linde, *Chaotic Inflation*, *Phys. Lett. B* **129** (1983) 177–181.
- [60] **Planck Collaboration**, Y. Akrami *et al.*, *Planck 2018 results. X. Constraints on inflation*, [1807.06211](#).
- [61] M. Tristram *et al.*, *Improved limits on the tensor-to-scalar ratio using BICEP and Planck*, [2112.07961](#).
- [62] A. Albrecht and P. J. Steinhardt, *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1220–1223.

- [63] M. Rinaldi and L. Vanzo, *Inflation and reheating in theories with spontaneous scale invariance symmetry breaking*, *Physical Review D* **94** (Jul, 2016) [[1512.07186](#)].
- [64] G. Tambalo and M. Rinaldi, *Inflation and reheating in scale-invariant scalar-tensor gravity*, *General Relativity and Gravitation* **49** (Mar, 2017) [[1610.06478](#)].
- [65] P. G. Ferreira, C. T. Hill, and G. G. Ross, *Scale-independent inflation and hierarchy generation*, *Physics Letters B* **763** (Dec, 2016) 174–178, [[1603.05983](#)].
- [66] P. G. Ferreira, C. T. Hill, and G. G. Ross, *No fifth force in a scale invariant universe*, *Physical Review D* **95** (Mar, 2017) [[1612.03157](#)].
- [67] P. G. Ferreira, C. T. Hill, J. Noller, and G. G. Ross, *Scale-independent  $R^2$  inflation*, *Physical Review D* **100** (Dec, 2019) [[1906.03415](#)].
- [68] J. Kubo, M. Lindner, K. Schmitz, and M. Yamada, *Planck mass and inflation as consequences of dynamically broken scale invariance*, *Phys. Rev. D* **100** (2019), no. 1 015037, [[1811.05950](#)].
- [69] J. Kubo, J. Kuntz, M. Lindner, J. Rezaeck, P. Saake, and A. Trautner, *Unified emergence of energy scales and cosmic inflation*, *JHEP* **08** (2021) 016, [[2012.09706](#)].
- [70] A. Salvio and A. Strumia, *Agravity*, *JHEP* **06** (2014) 080, [[1403.4226](#)].
- [71] K. Kannike, G. Hütsi, L. Pizza, A. Racioppi, M. Raidal, A. Salvio, and A. Strumia, *Dynamically Induced Planck Scale and Inflation*, *JHEP* **05** (2015) 065, [[1502.01334](#)].
- [72] A. Karam, T. Pappas, and K. Tamvakis, *Nonminimal Coleman–Weinberg Inflation with an  $R^2$  term*, *JCAP* **02** (2019) 006, [[1810.12884](#)].
- [73] D. M. Ghilencea, *Weyl  $R^2$  inflation with an emergent Planck scale*, *JHEP* **10** (2019) 209, [[1906.11572](#)].
- [74] D. M. Ghilencea and H. M. Lee, *Weyl gauge symmetry and its spontaneous breaking in the standard model and inflation*, *Phys. Rev. D* **99** (2019), no. 11 115007, [[1809.09174](#)].
- [75] A. Farzinnia and S. Kouwn, *Classically scale invariant inflation, supermassive WIMPs, and adimensional gravity*, *Phys. Rev. D* **93** (2016), no. 6 063528, [[1512.05890](#)].
- [76] I. D. Gialamas, A. Karam, T. D. Pappas, and V. C. Spanos, *Scale-invariant quadratic gravity and inflation in the Palatini formalism*, *Phys. Rev. D* **104** (2021), no. 2 023521, [[2104.04550](#)].
- [77] R. M. Wald, *Trace Anomaly of a Conformally Invariant Quantum Field in Curved Space-Time*, *Phys. Rev. D* **17** (1978) 1477–1484.
- [78] L. Liu, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime*.
- [79] F. Vissani, *Do experiments suggest a hierarchy problem?*, *Phys. Rev. D* **57** (1998) 7027–7030, [[hep-ph/9709409](#)].

- [80] J. Casas, V. Di Clemente, A. Ibarra, and M. Quiros, *Massive neutrinos and the Higgs mass window*, *Phys. Rev. D* **62** (2000) 053005, [[hep-ph/9904295](#)].
- [81] M. Holthausen, J. Kubo, K. S. Lim, and M. Lindner, *Electroweak and Conformal Symmetry Breaking by a Strongly Coupled Hidden Sector*, *JHEP* **12** (2013) 076, [[1310.4423](#)].
- [82] J. Kubo, K. S. Lim, and M. Lindner, *Gamma-ray Line from Nambu-Goldstone Dark Matter in a Scale Invariant Extension of the Standard Model*, *JHEP* **09** (2014) 016, [[1405.1052](#)].
- [83] Y. Ametani, M. Aoki, H. Goto, and J. Kubo, *Nambu-Goldstone Dark Matter in a Scale Invariant Bright Hidden Sector*, *Phys. Rev.* **D91** (2015), no. 11 115007, [[1505.00128](#)].
- [84] M. Aoki, V. Brdar, and J. Kubo, *Heavy dark matter, neutrino masses, and Higgs naturalness from a strongly interacting hidden sector*, *Phys. Rev. D* **102** (2020), no. 3 035026, [[2007.04367](#)].
- [85] M. Aoki, H. Goto, and J. Kubo, *Gravitational Waves from Hidden QCD Phase Transition*, *Phys. Rev. D* **96** (2017), no. 7 075045, [[1709.07572](#)].
- [86] M. Aoki and J. Kubo, *Gravitational waves from chiral phase transition in a conformally extended standard model*, *JCAP* **04** (2020) 001, [[1910.05025](#)].
- [87] M. Aoki and J. Kubo, *Gravitational waves from phase transition in a QCD-like hidden sector*, *J. Phys. Conf. Ser.* **1468** (2020), no. 1 012004.
- [88] K. S. Stelle, *Classical Gravity with Higher Derivatives*, *Gen. Rel. Grav.* **9** (1978) 353–371.
- [89] L. Alvarez-Gaume, A. Kehagias, C. Kounnas, D. Lüst, and A. Riotto, *Aspects of Quadratic Gravity*, *Fortsch. Phys.* **64** (2016), no. 2-3 176–189, [[1505.07657](#)].
- [90] A. Salvio, *Quadratic Gravity*, *Front. in Phys.* **6** (2018) 77, [[1804.09944](#)].
- [91] T. Inagaki, T. Muta, and S. D. Odintsov, *Nambu-Jona-Lasinio model in curved space-time*, *Mod. Phys. Lett. A* **8** (1993) 2117–2124, [[hep-th/9306023](#)].
- [92] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Behavior of current divergences under  $su_3 \times su_3$* , *Phys. Rev.* **175** (Nov, 1968) 2195–2199.
- [93] D. J. Chung, E. W. Kolb, and A. Riotto, *Production of massive particles during reheating*, *Phys. Rev. D* **60** (1999) 063504, [[hep-ph/9809453](#)].
- [94] R. Allahverdi and M. Drees, *Production of massive stable particles in inflaton decay*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 091302, [[hep-ph/0203118](#)].
- [95] M. A. Garcia, K. Kaneta, Y. Mambrini, and K. A. Olive, *Reheating and Post-inflationary Production of Dark Matter*, *Phys. Rev. D* **101** (2020), no. 12 123507, [[2004.08404](#)].
- [96] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, vol. 69. 1990.

- [97] J. Martin and C. Ringeval, *First CMB Constraints on the Inflationary Reheating Temperature*, *Phys. Rev. D* **82** (2010) 023511, [[1004.5525](#)].
- [98] K. D. Lozanov and M. A. Amin, *Self-resonance after inflation: oscillons, transients and radiation domination*, *Phys. Rev. D* **97** (2018), no. 2 023533, [[1710.06851](#)].
- [99] A. R. Liddle and S. M. Leach, *How long before the end of inflation were observable perturbations produced?*, *Phys. Rev. D* **68** (2003) 103503, [[astro-ph/0305263](#)].
- [100] F. Wilczek, *Mass without mass. I: Most of matter*, *Phys. Today* **52N11** (1999) 11–13.
- [101] A. A. Starobinsky, *A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity*, *Phys. Lett.* **B91** (1980) 99–102.
- [102] V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, *Quantum Fluctuations and a Nonsingular Universe*, *JETP Lett.* **33** (1981) 532–535. [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **33**, 549 (1981)].
- [103] A. A. Starobinsky, *The Perturbation Spectrum Evolving from a Nonsingular Initially De-Sitter Cosmology and the Microwave Background Anisotropy*, *Sov. Astron. Lett.* **9** (1983) 302.
- [104] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto, *Non-Gaussianity from inflation: Theory and observations*, *Phys. Rept.* **402** (2004) 103–266, [[astro-ph/0406398](#)].
- [105] M. Crawford and D. N. Schramm, *Spontaneous Generation of Density Perturbations in the Early Universe*, *Nature* **298** (1982) 538–540.
- [106] L. J. Hall and S. Hsu, *Cosmological Production of Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 2848–2851.
- [107] K. Jedamzik, *Primordial black hole formation during the QCD epoch*, *Phys. Rev. D* **55** (1997) 5871–5875, [[astro-ph/9605152](#)].
- [108] H. Olivares, Z. Younsi, C. M. Fromm, M. De Laurentis, O. Porth, Y. Mizuno, H. Falcke, M. Kramer, and L. Rezzolla, *How to tell an accreting boson star from a black hole*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **497** (2020), no. 1 521–535, [[1809.08682](#)].
- [109] C. A. R. Herdeiro, E. Radu, and K. Uzawa, *Compact objects and the swampland*, *JHEP* **01** (2019) 215, [[1811.10844](#)].
- [110] R. A. Konoplya, C. Posada, Z. Stuchlík, and A. Zhidenko, *Stable Schwarzschild stars as black-hole mimickers*, *Phys. Rev. D* **100** (2019), no. 4 044027, [[1905.08097](#)].
- [111] J. Ren, *Anatomy of a thermal black hole mimicker*, *Phys. Rev. D* **100** (2019), no. 12 124012, [[1905.09973](#)].
- [112] A. Simpson and M. Visser, *Black-bounce to traversable wormhole*, *JCAP* **02** (2019) 042, [[1812.07114](#)].
- [113] A. Simpson, P. Martin-Moruno, and M. Visser, *Vaidya spacetimes, black-bounces, and*

- traversable wormholes*, *Class. Quant. Grav.* **36** (2019), no. 14 145007, [[1902.04232](#)].
- [114] H. Huang and J. Yang, *Charged Ellis Wormhole and Black Bounce*, *Phys. Rev. D* **100** (2019), no. 12 124063, [[1909.04603](#)].
- [115] H. Huang, H. Lü, and J. Yang, *Bronnikov-like Wormholes in Einstein-Scalar Gravity*, [2010.00197](#).
- [116] J. Yang and H. Huang, *Trapping horizons of the evolving charged wormhole and black bounce*, *Phys. Rev. D* **104** (2021), no. 8 084005, [[2104.11134](#)].
- [117] **Event Horizon Telescope Collaboration**, K. Akiyama *et al.*, *First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole*, *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019) L1, [[1906.11238](#)].
- [118] R. Shaikh, K. Pal, K. Pal, and T. Sarkar, *Constraining alternatives to the Kerr black hole*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **506** (2021), no. 1 1229–1236, [[2102.04299](#)].
- [119] S. U. Islam, J. Kumar, and S. G. Ghosh, *Strong gravitational lensing by rotating Simpson-Visser black holes*, *JCAP* **10** (2021) 013, [[2104.00696](#)].
- [120] N. Tsukamoto, *Gravitational lensing by two photon spheres in a black-bounce spacetime in strong deflection limits*, *Phys. Rev. D* **104** (2021), no. 6 064022, [[2105.14336](#)].
- [121] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, *Commun. Math. Phys.* **121** (1989) 351–399.