等角写像による座標変換を用いた構造物の最適位相に関する研究

メタデータ	言語: Japanese 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: 北山, 哲士, 山川, 宏, Kitayama, Satoshi, Yamakawa, Hiroshi メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24517/00007373

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.

等角写像による座標変換を用いた構造物の最適位相に関する研究

北山哲士[*1]，山川宏[*2]

A Study on Optimum Topology Using a Coordinate Transformation by Conformal Mapping

Satoshi KITAYAMA and Hiroshi YAMAKAWA

Waseda University,Dept.of Mech.Eng.,59-314,3-4-1,Ohkubo,Shinjuku-ku Tokyo,169-8555 Japan

This paper presents a method to determine the optimum topology of 2-D elastic plane structures by making use of coordinate transformation.We use conformal mapping which is well known to be effective in two dimensional fluid mechanical,electromagnetical and elastic problems as a coordinate tranformation function.First,we examine two quantities of stresses in conformal mapped elastic problem.We show that those two quantities of stresses can satisfy the Laplace equation,and then we clarify that a correspnding same relationship between fluid mechanics and electromagnetics can be also valid in the theory of elasticity.Then we proposed a simple design method for optimum topology by making use of coordinate transformation by conformal mapping.We also proposed a method to determine of the similarity qualitatively between the obtained optimum topologies.Finally,we treated several numerical examples by the proposed method.In numerical examples,we can examine the effectiveness of the proposed method.

Key Words:Optimum topology,Coordinate transformation,Conformal mapping,Reasoning,
Invariants of stress,Preliminary design,Finite Element Method,Computer Aided Analysis

1．緒　言

設計の流れは設計要求の把握から始まり，概念設計，基本設計，詳細設計，生産設計と大きく５つの設計段階に一般に分けることができる．そして概念設計と基本設計の一部を設計上流部，基本設計の一部と詳細設計，生産設計を設計下流部と言うことができる．最適設計は従来，主に設計の下流部で行われており，細部の寸法などを決定するために行われていた．しかし，近年のコンピュータのハードウェア・ソフトウェアの急速な発達に伴う解析技術，遺伝的アルゴリズムなどに代表される組合せや優劣順位の最適化のアルゴリズムの発達により，設計上流部に対して数値計算的なアプローチが可能になり，最適設計は設計上流部でも可能になりつつある[(1)]．

最適位相問題は構造物の合理的な位相形態を求める問題，つまり構造物の離散的及び連続的な基本的レイアウトを決定する問題として近年広く研究されている[(2)]．従来，複雑な形状をした最適位相を求める際は，この複雑な形状について直接解析し，最適化を行うことで最適位相を決定していた．しかしながら，設計者の労力の増大，解析時間の増大や見通しの悪さといった問題点が生じることが指摘できる．そこで最適位相問題が設計上流部の問題であり，後続の設計で修正等が加えられることを考慮すれば，簡単な形状における最適位相と複雑な形状における最適位相の類似性があれば，これらの問題点は簡単な形状における最適位相設計を行うことで解消できるものと考えることができる．そこでこれまで筆者等の研究においては形態学の考え方を参考にして研究を展開した[(3)]．

形態学は生物学の一分野である．個々の形の正確な定義よりもむりろ関連した形との比較や検討することを形態学では対象として扱う．ある形を基本の形あるいは比較の形として採用し，例えば他の形をその変形で説明することが行われるが，これには数学的手法，具体的には座標変換が用いられる．形態学者のD・トムソンは生物の形の類似性に着目し，座標変換により，ある基本形状から類似形状を表現できることを示した．例えば人の骨格を座標変換することによりチンパンジーの骨格を表現できることを示している[(4)]．

ところで，流体力学や電磁気学においては等角写像を用いて座標変換することにより，問題を簡略化することがしばしば行われている．流体力学においては流れ

＊ 原稿受付　平成??年?月　日.
*[1]准員，早稲田大学大学院（〒169-8555　東京都新宿区大久保3-4-1,59-314）.
*[2]正員，早稲田大学理工学部.
E-mail: gon@yamakawa.mech.waseda.ac.jp

の解析，電磁気学においては電場の解析が行われている．例えば，流体力学において複雑な境界条件の下で流れを解析するときは，ある簡単な境界条件を設定し，その簡単な境界条件の下での流れを解析し，等角写像関数により座標変換することにより問題とした複雑な境界条件の流れを解析することが行われる．また，弾性学においても楕円孔の解析などは等角写像を用いて楕円を円に変換して，その円において解析を行い，それを写像関数により楕円に変換するといった手法が用いられている．その他に多角形，扇状の曲線外形を有する図形，また一般の四角形などの外形を有する二次元弾性問題に対しては等角写像により座標変換するのが有効であるとされている．これらの形状を有する二次元弾性問題において最適位相を求める場合，簡単な形状において求めた最適位相を等角写像により座標変換することによって近似的な最適位相が求められるのであれば，計算精度の低下や所要時間や手間の増大，また見通しの悪さといった問題もある程度解消できるものと考える．等角写像を用いる利点は境界条件，幾何学的形状を変換して問題を簡略化できるところにある．また，流体力学では速度ポテンシャル，流れ関数という概念の二つの保存量，電磁気学においては等電位線，電気力線という概念の二つの保存量があり，それらは同じ形式の偏微分方程式を満足することから流体力学と電磁気学においては類似性があることも知られている[(5)]．弾性学においても同様の類似性が成立するのであれば，等角写像は座標変換としての有効性がより鮮明になり，その類似性に基づいて等角写像を利用できることになり，従来の変換方法とは別の利点が利用できることになるが，この点は従来の研究で必ずしも明確にされていない．

そこで本研究においては，二次元弾性体の最適位相問題に等角写像を用いた手法を提示する．はじめに二つの応力に関する保存量がLaplaceの方程式を満足することを示す．これにより流体力学，電磁気学における類似性と同様な類似性が弾性学にも成立することを示す．そしてその類似性を活用した等角写像を用いた最適位相決定法を示し，その数値計算例を通じて他の変換よりも最適位相の保存が期待でき，本研究の有効性を示す．

２．　等角写像による座標変換

２・１　応力不変量　二次元弾性体に荷重が負荷している二次元応力状態で，この弾性体の微小要素を考える．この微小要素には s_x, s_y, t_{xy} の応力がかかり，この結果，主応力が次式によって求まる．

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{s_x + s_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(s_y - s_x)^2 + 4t_{xy}{}^2} \\ s_2 &= \frac{s_x + s_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(s_y - s_x)^2 + 4t_{xy}{}^2} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

ところで二つの直交座標系，すなわち座標系（ξ，η）と座標系（ｘ，ｙ）があるとき，この座標系の間の応力には次の関係式があることが知られている．

$$s_x + s_y = s_x + s_h \tag{2}$$

$$s_h - s_x + 2it_{xh} = e^{2ia}(s_y - s_x + 2it_{xy}) \tag{3}$$

ここで，ｉは複素数である．座標系（ξ，η）と座標系（ｘ，ｙ）の間の応力の不変量から次式で示す主応力の和と主応力の差で示すことができるφ，ψも不変量として考えられる．

$$f = s_1 + s_2, y = s_1 - s_2 \tag{4}$$

以上のように等角写像による座標変換においては，主応力の和と差が保存する．したがって弾性ひずみエネルギやミーゼスの相当応力を目的関数や制約条件に考える場合には有利なものと思われる．一方，骨の研究やミッシェルトラスになどに見られるように，最適な位相形態は応力が直交する状態において得られることが推定されるので，簡単な形状の最適位相を等角写像によって座標変換する場合，他の変換よりが最適位相の保存も期待できるものと思われる．

２・２　等角写像による座標変換　ある正則関数が存在する場合，この正則関数による写像は等角であることが知られている．これから，正則関数を用いて座標変換すると等角写像の性質が利用できる．つまり，基本的な形状を座標系（ξ，η）にとり，これを正則関数

$$z = f(z) \tag{5}$$

により座標変換することにより座標系（ｘ，ｙ）の形状に変換する．ここで

$$\left.\begin{aligned} z &= x + ih \\ z &= x + iy \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

なる関係がある．

３．流体力学、電磁気学と弾性学の対応

流体力学及び電磁気学の分野では等角写像を用いることにより，流体力学では流速の解析，電磁気学では電場の解析が行われることがある．ここではそれぞれの分野における対応関係を簡単に示す．

流体力学においては速度ポテンシャルと流れ関数という二つの概念が存在し，これらから流速が求まる．速度ポテンシャルをφ，流れ関数をψとするとφとψの間には次式のコーシー・リーマンの関係が存在する．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{\partial y}{\partial x} \tag{7}$$

この関係式からφとψの間には共役な調和関数の関係,つまりLaplaceの方程式を満足することが知られている.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0 \tag{8}$$

一方,電磁気学においては等電位線,電気力線という二つの概念が存在し,これらから電場が求まる.等電位線をφ,電気力線をψとすると,φとψは共に共役調和関数の関係式,つまりLaplaceの方程式を満足することから,流体力学における速度ポテンシャルφ,流れ関数ψに対応していることが知られている.

そこで弾性学においてこれらに対応する量を考えてみる.弾性学においては,流体力学や電磁気学ほど明確かつ具体的な共役な調和関数に関する記述はない[6].二次元弾性問題の典型的で美しい解法はAiryの応力関数を導入することによって解かれてる.Airyの応力関数をF(x,y)とおくと,この応力関数が満足すべき力の平衡条件に対応する偏微分方程式は

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^2 F}{\partial^2 x\partial^2 y}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}=0 \tag{9}$$

である.また応力関数は複素関数φ,ψによって具体的に次式で表すことができる.

$$\begin{aligned} &F(x,y)=\mathrm{Re}[\bar{z}f(z)+j(z)]\\ &z=x+iy\\ &\bar{z}=x-iy\ (\text{zの共役}) \end{aligned} \tag{10}$$

式(10)の中のφ(z)は,ある解析関数f(z)から成り,

$$f(z)=\frac{1}{4}\int f(z)dz \tag{11}$$

と表される.一般にこの解析関数f(z)はPとそれと共役な調和関数Q から成り,

$$f(z)=P+iQ \tag{12}$$

と表される.

ある荷重条件の下で応力が生じるということは対応するAiryの応力関数が存在することであり,そのためには解析関数f(z)が存在することである.これはPとそれと共役な調和関数Q が存在しなければならないことになるが,現在のところPとQ に関して明確な具体的な記述はほとんどない[6].そこで、ここではP とQ を明確にする.

PとQは調和関数であることから次式で示すLaplaceの方程式を満足する.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0 \tag{13}$$

ここでP とQ は前述の流体力学,電磁気学におけるφ,ψに対応する実関数である.ここでP を主応力の和,つまり

$$P=s_1+s_2 \tag{14}$$

と置いてみる.式(14)を式(13)に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial x^2}(s_1+s_2)+\frac{\partial}{\partial y^2}(s_1+s_2)=0 \tag{15}$$

となるが,ここで式(2)を考慮すると式(15)は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}\right)(s_x+s_y)=0 \tag{16}$$

となり,これは変位の適合条件式となることから,主応力の和はLaplaceの方程式を満足することがわかる.

次に他の一つの調和関数Qを考える.Qを考えるにあたり,はじめに実関数$u(x,y)$,$v(x,y)$で表される正則関数qを考える.

$$q=u(x,y)+iv(x,y) \tag{17}$$

q は正則関数であるからコーシー・リーマンの関係式を満足すると仮定すると,式(17)をxとyでそれぞれ２回偏微分して,その和を求めると

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \tag{18}$$

となる.ここで式(17)の実数部$u(x,y)$と虚数部$v(x,y)$を次のように置いてみる.

$$\left.\begin{aligned} u(x,y)&=s_y-s_x\\ v(x,y)&=2t_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

qがコーシー・リーマンの関係式(7)を満足すること,応力関数の満足する条件式(9)などを考慮すれば,最終的に式(18)は次式のようになる.

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=0 \tag{20}$$

式(12)と式(13)からQを実関数と考え,式(4)を考慮して式(20)を考える.ここで

$$Q=\sqrt{u^2+v^2} \tag{21}$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0 \tag{22}$$

となる.従って,式(12),式(13)に示すPとQは具体的に次に示すような主応力の和と主応力の差となる.

$$P=s_1+s_2,Q=s_1-s_2 \tag{23}$$

以上のことから,流体力学,電磁気学におけるφ,ψと対応する量は弾性学においては主応力の和と主応力の差が対応し,類似関係があることがわかる.この流体力学,電磁気学と弾性学の類似関係を表１に示す.

Table 1 Corresponding relationship of Fluid mechanics,Electromagnetics and Elasiticity

Fluid mechanics	Electromagnetics	Elasiticity
φ velocity potential	φ equipotential line	$s_1 + s_2$ sum of principal stresses
ψ stream function	ψ electric line of force	$s_1 - s_2$ difference of principal stresses

4．提示する最適位相設計法

本研究では，静荷重を受ける二次元弾性体の最適位相問題を考える．まず，解析や最適化が簡単な幾何学的形状を有する設計領域を基本的設計領域とし，これを直交座標ξ-η座標で定義されるζ平面にとる．この基本的設計領域において有限要素法で応力解析を行い要素の板厚を設計変数に取り，設定した目的関数，制約条件の下で最適位相を求める．この基本的設計領域で求めた最適位相を基本位相と呼ぶことにする．基本的設計領域で求めた基本位相の最適な板厚を保持しながら式(5)で示す等角写像関数により直交座標x-yで定義されるz平面に座標変換をし，類似形状の最適位相（以後，座標変換最適位相と称す）とする．また比較，検討のため座標変換後と同一の形状における最適位相を求める．等角写像関数を用いて座標変換をすることにより，直線や曲線境界を持つ各種の要素が表現できる．具体的な変換の様子を図１に例示する．また，提示する最適位相設計法の流れと直接的に求めた最適位相との比較，検討を図２に示す．

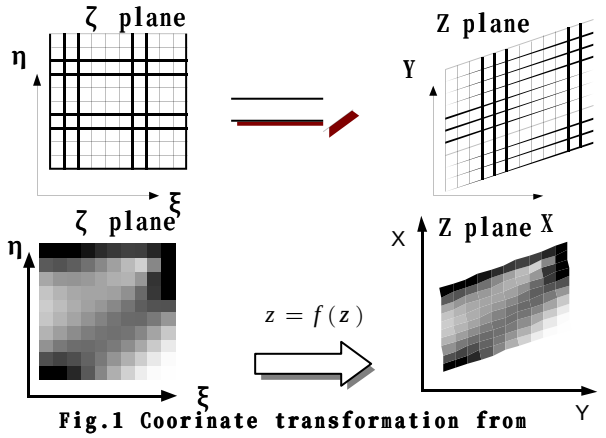


Fig.1 Coorinate transformation from ζ-plnae to z-plane

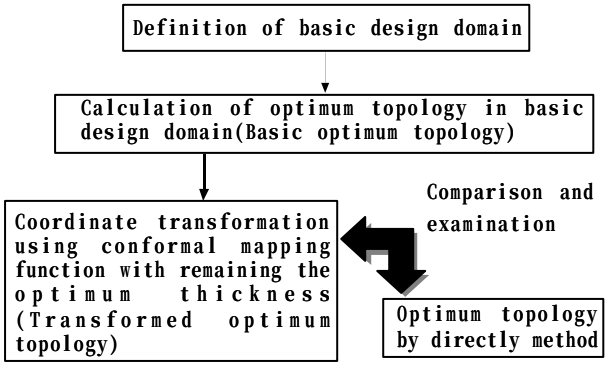


Fig.2 Flow of proposed method

5．最適位相の類似性の検討

基本的設計領域によって得られた最適位相を等角写像を用いて座標変換した座標変換最適位相と，座標変換後と同一の形状において直接求めた最適位相の類似性を検討する．比較，検討方法には位相の把握が定量的のみでは困難のために以下のような比較，検討が必要となる．

a)定量的な比較，検討方法

b)定性的な比較，検討方法

定量的な比較，検討方法としては，弾性ひずみエネルギ，質量などの物理量に関する比較，検討方法が考えられる．一方，位相の定性的な比較，検討方法の一つとしては，ファジィ推論を活用し，最適位相を表す要素に関するメンバーシップ関数を作成し，定性的に両者の類似性を検討する方法が考えられる．筆者等は別報において，最適位相の類似性を検討する際に，粗い要素分割によって得られえた最適位相と細かい要素分割によって得られた最適位相に関してメンバーシップ関数を作成し，それを基準のメンバーシップ関数として類似性を論じた[(3)]．これに対して本研究では，さらに簡単な方法を求めて直接位相の類似性を定性的に比較，検討する別の手法の適用を試みる．すなわち類似性の基準となるメンバーシップ関数を同じ要素分割数の座標変換最適位相と直接的に求めた最適位相の両方に関して作成し，類似性を定性的に検討する方法を提案する．以下にはこの定性的な類似性の比較，検討方法の説明に重点を置き，基準となるメンバーシップ関数の作成方法を述べ，基本的設計領域によって得られた最適位相を等角写像を用いて座標変換した座標変換最適位相と座標変換後と同一の形状において直接求めた最適位相の間の類似性を検討する具体的な方法を提案する．

5・1　メンバーシップ関数の作成方法

最適位相の類似性という定性的な判断を簡単に行うために，最適位相を表す要素に関してメンバーシップ関数を作成する．本研究において，最適位相は有限要素法で細分割した各要素の板厚の分布で表すので，板厚に関するメンバーシップ関数を作成する．その目的のために基本的設計領域において，例えば図３に示すような複数の有限要素を内包する太線で囲まれた小領域を考える．

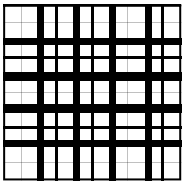


Fig.3 Division of design domain

まず各要素の板厚をある閾値で分類してメンバーシップ関数の値を与える.

$$\left.\begin{array}{l} t_i^L \le t_i \le t_i^a (i = 1,2,\cdots n) \to 0.0 \\ t_i^a \le t_i \le t_i^b (i = 1,2,\cdots n) \to 0.5 \\ t_i^b \le t_i \le t_i^U (i = 1,2,\cdots n) \to 1.0 \end{array}\right\} \qquad (24)$$

式(24)における t_i^a, t_i^b は,主観的に決めた板厚の閾値であり, t_i^L, t_i^U は与えられた各板厚の下限値,上限値である.また,添字のiは要素数を表す.式(24)は,例えばある要素の板厚が $t_i^a \le t_i \le t_i^b$ の範囲にある時の板厚のメンバーシップ関数の値が0.5となることを意味する.なおこの例では３つの閾値を用いた簡単な分類を考えているが,必要に応じて閾値の数は増加できる.図３に示す太線で囲まれた小領域ごとに,それぞれ基本設計領域において最適位相を求め座標変換した座標変換最適位相と,座標変換後と同一形状において直接求めた最適位相の板厚に関するメンバーシップ関数を作成することができ,これらのメンバーシップ関数の関係は例えば図4のよう表現される.ここで図4の太線は座標変換後と同一の形状において直接求めた最適位相のメンバーシップ関数であり,細線は基本設計領域において最適位相を求めそれを座標変換することにより得られた座標変換最適位相のメンバーシップ関数である.図4に示す横軸は各小領域における要素番号,縦軸は板厚のメンバーシップ関数の値である.また,図4の斜線部は両者のメンバーシップ関数が一致しない割合,すなわち'ずれ'を表す.

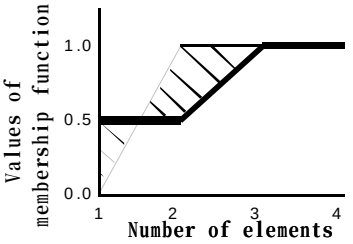


Fig.4 Membership function

各小領域ごとに図４に示すように基本設計領域における最適位相を座標変換した座標変換最適位相と座標変換後と同一形状において直接求めた最適位相の板厚に関するメンバーシップ関数を作成する.そして個々の領域のメンバーシップ関数の'ずれ'を表す面積の値の中で,その最小値と最大値をそれぞれ $A_{\min}, A_{\max}$ と置く.各小領域との相対的類似ということから'ずれ'を表す面積の最大値 $A_{\max}$ ではメンバーシップ関数値は０とし,面積の最小値 $A_{\min}$ においてはメンバーシップ関数値が１とする.これらから横軸にずれを表す面積,縦軸にメンバーシップ関数値を取ると,これがすべての領域を定量的に把握する基準となるメンバーシップ関数となる.この例を図5に示す.

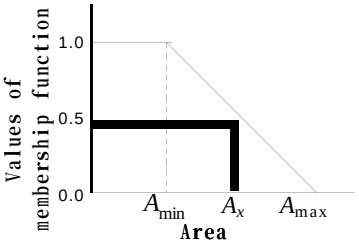


Fig.5 Similarity of a domain

図５に示す細線が基準となるメンバーシップ関数である.このメンバーシップ関数を基準に考えることにより,各小領域ごとに類似度を求める.例えば,ある小領域において,メンバーシップ関数を作成し,'ずれ'を表す面積が A_x であるとする.この場合,この領域のメンバーシップ関数値は図5の太線から,0.5と決定される.このようにして各小領域の類似度を定量的に求めることができる.

５・２　全体の類似に関する検討方法　全体の類似度を求めるには,各領域におけるメンバーシップ関数値から,横軸に小領域を順番に並べ縦軸に各領域のメンバーシップ関数値を取ることにより例えば図6のような類似性に関する図が作成される.

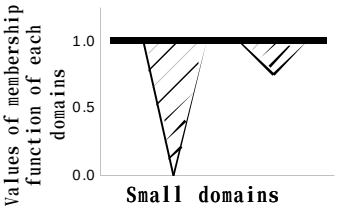


Fig.6 Total similarity

図6の太線は小領域において完全に類似しているのであれば１になることを意味し,細線は各小領域の類似度を線で結んだものである.太線と細線に囲まれた面積,つまり図6の斜線部全体が全体としてのとしての'ずれ'を表す.全体としての類似度を求めるには,図6の斜線部のずれを表す部分の面積を全体の面積から除いた部分,すなわち白い部分となり,この面積を全体の面積で除した商を類似度と定義し,それによって全体の類似性を定性的に判断する.さらに,本研究においては座標変換最適位相と直接的に求めた最適位相の両者を直接的に位相の類似性を検討しているため,類似性を定性的に言及する類似度を閾値によってわける主観的な類似基準を設け,それによって類似性を定性的に判断する.

6. 数 値 計 算 例

数値計算例を通じて等角写像による座標変換を用いた最適位相設計を行い，本研究で提示する手法の有効性を検討する．

まず，解析及び最適化が簡単な基本設計領域を図7に示すような簡単な正方形領域とする．解析モデルとしては図8に示すような固定部分，あるいは支持部分があるような3つの境界条件及び荷重条件を考えた．図8(a)は片側と下半分の各変位を完全に固定，図8(b)は下の端点の変位を固定，図8(c)は四隅の変位を固定したモデルである．この基本的設計領域を100の有限要素に分割し，各要素の板厚を設計変数とし，構造物の総質量一定という制約条件のもとで，目的関数である弾性ひずみエネルギを最小にするような最適位相を求める表2に示すような最適位相問題を設定する．図9に基本設計領域において求められた最適位相の結果を左側の色のグラデーションで示す．また構造パラメータを表3に示す．

Table 2 Optimum topology design problem

Design variables	$\mathbf{t} = \{t_1, t_2, \cdots, t_n\}^T$ (Thicknesses)
Constraints	$M(\mathbf{t}) \le C$ (Mass) $t_i^L \le t_i \le t_i^U \ (i = 1,2,\cdots n)$ (Lower and upper bounds of thicknesses)
Objective function	$U = \frac{1}{2}\{u\}^T[K(\mathbf{t})]\{u\}$ (Strain energy)

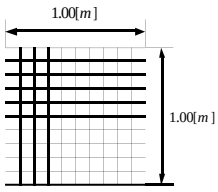


Table 3 Design parameter

Number of elements		100
Young's modulus	GPa	2.11×10^2
Density	Kg/m^3	7.63×10^2
Poisson's ratio		0.30

Fig.7 Basic design domain

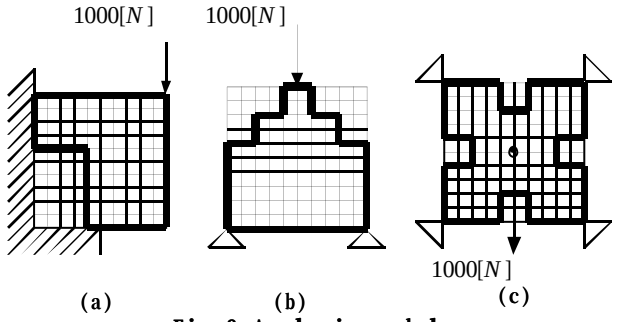


Fig.8 Analysis model

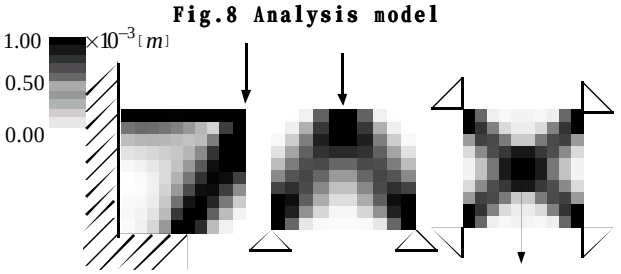


Fig.9 Optimum topologies in basic design domain

6・1 等角写像による座標変換を用いた座標変換最適位相と定量的検討

図9に示した基本設計領域で得られた各最適位相を基本位相と呼ぶことにする．この基本位相をζ平面にとり，基本位相の最適な板厚を保持しながら，次の等角写像関数を用いて座標変換をする．

$$z = f(z) = e^z \tag{25}$$

この座標変換によって得られた位相を類似形状における座標変換最適位相とする．また，比較のためアイソパラメトリック要素を用いて座標変換後と同一の形状において直接最適位相を求める．表5，表6，表7に最適位相の比較図，主応力の差である$Q = s_1 - s_2$の分布比較図，並びに定量的な比較，検討量として弾性ひずみエネルギ，質量値を示す．ここで第3章に示した等角写像の際の保存量の一つの主応力の差であるQは光弾性試験の等色線に相当するものである．もちろん，主応力の和である$P = s_1 + s_2$も保存することが確認されている．これらの結果から，本研究で提示した手法により求めた近似的最適位相はこれらの定量的な比較から，直接的にそれぞれの形状に対して求めた最適位相と極めて類似していることがわかり，また主応力の差の分布も極めて類似していると言える．弾性ひずみエネルギ及び質量値もほぼ同じ値となった．

6・2 類似性に関する定性的な検討

第5章で述べた類似性に関する検討方法により類似性を定性的に判断する．局所的類似度に関するメンバーシップ関数から，大局的類似度に関するメンバーシップ関数を作成し，類似性を検討する．例えば表5の(2)の類似を検討する．ある領域における板厚のメンバーシップ関数は図10のようになる．ただし式(24)に示すの値t_i^a, t_i^bを$t_i^a = 0.30, t_i^b = 0.65$とした．図10中の太線は座標変換位相の板厚に関するメンバーシップ関数，細線は座標変換後の同一形状において直接求めた最適位相の板厚のメンバーシップ関数である．斜線部は対象とした領域の'ずれ'を表す．

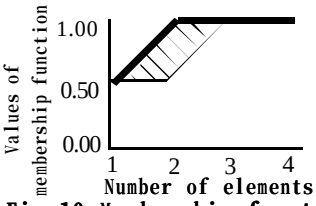


Fig.10 Membership function

このようなメンバーシップ関数を各領域で作成し図5に相当する基準となるメンバーシップ関数を作成すると図11のようになる．対象とした領域のメンバーシップ関数値は図11から0.75となる．これを基に各領域のメンバーシップ関数値を求め，全体の類似度を求めると表5(2)に

おける類似度は0.841となる.この類似性に関しては第5章で述べたように比較基準がないので,大局的類似度として求めた数値を表４に示すのように主観的な分類を行い,類似性を判断した.この判断基準は必要に応じて,より細かくすることができ,より細かな類似を言及できる.また,別の面から類似性を判断するために図8(a)～図8(c)に示す太線で囲まれた範囲の類似を検討する.太線で囲まれた範囲を周囲と呼ぶことにする.この周囲の領域の類似を判断するため同様な方法を用いてこの領域において基準となるメンバーシップ関数を作成し類似性を判断する.類似性の判断基準としては表4の判断基準を用いる.類似性の判断もあわせて表5,表6,表7に示す.表におけるBoundaryは周囲,Totalは全

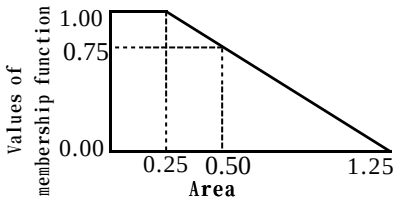


Fig.11 Basic membership function

Table 5 Comparisons of optimum tolopogies

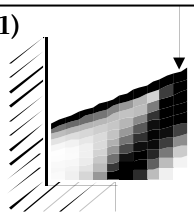
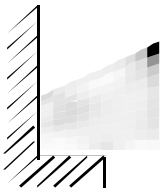
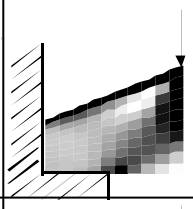
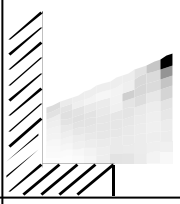
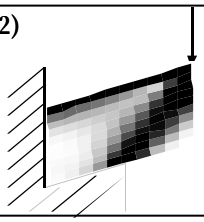
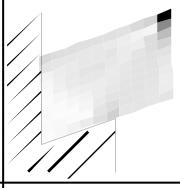
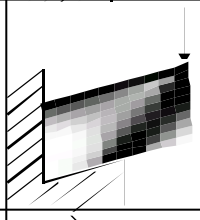
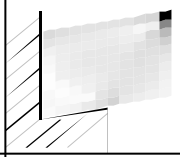
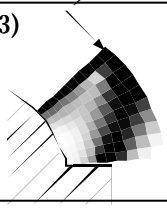
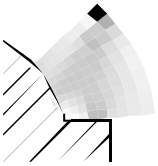
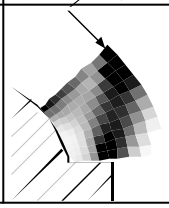
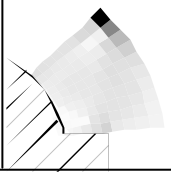
(a)Coordinate transformed topology	Distribution of difference of principal stress	strain energy $\times 10^{-1}$ J	mass kg	(b)Optimum topology obtained directly	Distribution of difference of principal stress	strain energy $\times 10^{-1}$ J	mass kg	Similarity Boundary	Similarity Total
(1) 		7.61	6.33			7.80	6.35	0.86 ○	0.81 ○
(2) 		3.93	3.14			3.92	3.14	0.82 ○	0.84 ○
(3) 		2.29	4.00			2.26	4.00	0.74 ○	0.76 ○

Table 6 Comparisons of optimum tolopogies

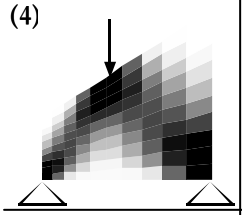
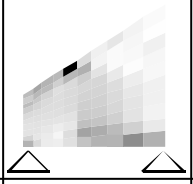
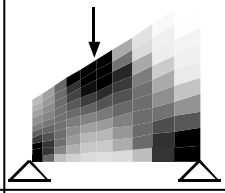
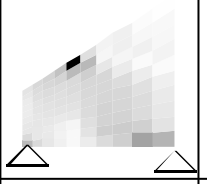
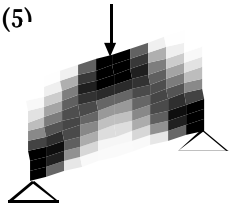
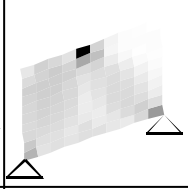
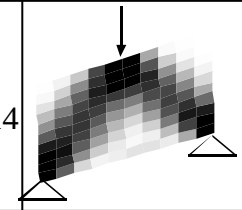
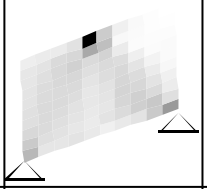
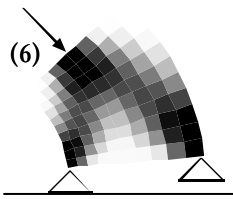
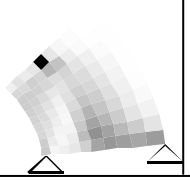
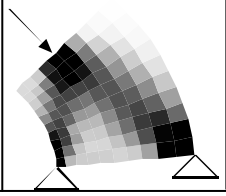
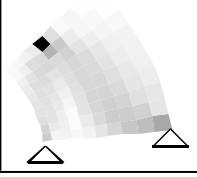
(a)Coordinate transformed topology	Distribution of difference of principal stress	strain energy $\times 10^{-1}$ J	mass kg	(b)Optimum topology obtained directly	Distribution of difference of principal stress	strain energy $\times 10^{-1}$ J	mass kg	Similarity Boundary	Similarity Total
(4) 		1.60	5.89			1.57	5.89	0.84 ○	0.83 ○
(5) 		1.42	5.14			1.41	5.14	0.85 ○	0.86 ○
(6) 		1.33	4.83			1.29	4.83	0.82 ○	0.84 ○

Table 7 Comparisons of optimum tolopogies

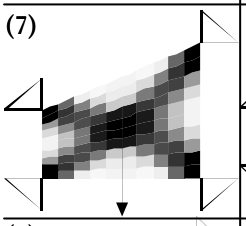
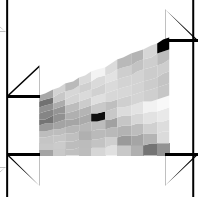
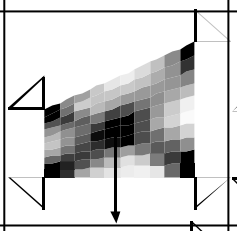
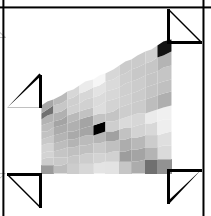
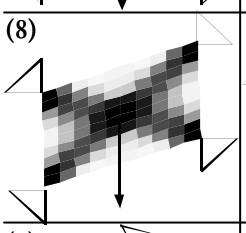
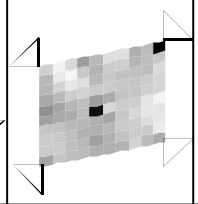
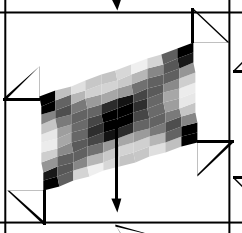
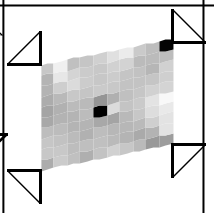
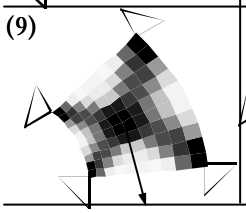
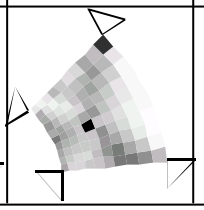
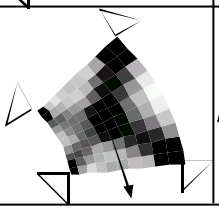
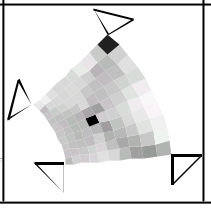
(a)Coordinate transformed topology	Distribution of difference of principal stress	strain energy $\times 10^{-1}$ J	mass kg	(b)Optimum topology obtained directly	Distribution of difference of principal stress	strain energy $\times 10^{-1}$ J	mass kg	Similarity	
								Boundary	Total
(7) 		7.03	5.72			6.95	5.72	0.81 ○	0.79 ○
(8) 		8.33	5.14			8.20	5.14	0.84 ○	0.86 ○
(9) 		6.91	5.64			6.82	5.64	0.71 ○	0.73 ○

Table 4 Reference of similarity

Value of similarity	similarity	sign
$0.7 < similarity \leq 1.0$	simliar	○
$0.5 < similarity \leq 0.7$	rather similar	△
$0.0 \leq similarity \leq 0.5$	not similar	×

体の類似性であり，その中の数値は類似度を示す．

この結果，対象とした全ての位相に関して，両者の位相は周囲及び全体において定性的に'似ている'と判断され，等角写像による座標変換が有効であることが確認できた．

7. 結 言

（1）等角写像による座標変換を用いた構造物の最適位相決定法を提示した．

（2）等角写像を弾性問題に適用する際の座標変換に関する保存量は主応力の和と主応力の差であり，それらは共にラプラスの方程式を満足することを示した．

（3）座標変換に等角写像を用いた場合，流体力学と電磁気学の分野における類似関係が弾性学においても成立することを示した．

（4）等角写像における座標変換において直交する物理量は主応力の和と差である．これから基本位相を等角写像によって座標変換する場合，位相が主応力の和や差と特に密接に関連する問題に対しては最適位相の保存が期待できる．

（5）直接的に定量的な類似性を比較する方法に加えて，提案した定性的な類似性に関する検討方法は，類似性の基準を表すメンバーシップ関数を直接作成するものであり，各領域ごとに類似性を検討することでき，また全体としての類似性も検討できる方法であることを示した．

（6）いくつかの数値計算例で基本的設計領域において最適位相を求め，座標変換した座標変換最適位相と座標変換後と同一の形状において直接最適位相を求めたものの間には，定量的及び定性的な比較，検討結果からほぼ類似であることが判明した．

（7）また等角写像の際の保存量の一つである光弾性試験の等色線に相当する主応力の差の分布もある同様の分布を示していることがわかった．

以上により，等角写像を用いた座標変換による最適位相決定方法は実用的に有効な方法であると考えられる．

8. 参 考 文 献

(1)山川宏,最適化デザイン,(1993),培風館.

(2)Suzuki,K.and Kikuchi,N.,*A homogenization method for shape and topology optimization*,Computer Method in Applied Mechanics and Engineering,Vol.93,No.3,1991,291-318.

(3)北山哲士,山川宏,補間関数による座標変換を用いた構造物の最適位相に関する研究,機論C1編掲載決定.

(4)D'Arcy Wentworth Thompson,柳田訳,生物とかたち,(1973),東京大学出版.

(5)渡辺昇,複素関数論の応用と計算,(1981)朝倉書店.

(6)岡本哲史,複素関数,(1975),ダイヤモンド社.