

# レゾナンスの影響を考慮した無衝突磁化プラズマ中における 電磁波伝搬の解析

高野 博史<sup>†a)</sup>      長野 勇<sup>†</sup>      八木谷 聡<sup>†</sup>

Analysis of Electromagnetic Wave Propagation with Resonance Effect in Collision-Free Magnetized Plasma

Hironobu TAKANO<sup>†a)</sup>, Isamu NAGANO<sup>†</sup>, and Satoshi YAGITANI<sup>†</sup>

あらまし 不均質な無衝突（無損失）磁化プラズマ中では、屈折率が無限大となるレゾナンスが生じる。従来、異方性不均質媒質中の電磁波伝搬解析にはマトリックス乗算による均質多層分割法が用いられてきたが、無衝突プラズマの場合、レゾナンス点において波動方程式が特異性を示すため解が不安定となる問題点があった。この問題を解決するために、レゾナンスを含む不均質媒質を薄い層状媒質に分割し、各層での電磁界の解析解を積分形式で求め、その解を境界条件を用いて接続する積分近似法を適用した。本論文では、異方性不均質媒質における積分近似法の有効性について検討を行った。また、この計算手法をレゾナンスにおける電磁波エネルギー吸収のメカニズム解明や宇宙空間で発生する電磁波について、ZモードからL-Oモードへのモード変換に関する問題に適用し、新たな知見を得た。

キーワード 無衝突プラズマ, レゾナンス, 積分近似法, エネルギー吸収, 線形モード変換

## 1. ま え が き

不均質磁化プラズマ中における電磁波伝搬は、分散関係より導かれる屈折率によって特徴づけられる。媒質の損失をゼロに近づけていくと、UHR (Upper Hybrid Resonance) 周波数  $f_{UHR}(= \sqrt{f_p + f_H})$  において屈折率が無限大となるレゾナンス（共鳴）が生じる。ここで、 $f_p$  と  $f_H$  はそれぞれ電子のプラズマ周波数とサイクロトロン周波数である。レゾナンス点では波動方程式は特異性を示し、解析解を求めることは特殊な場合を除いて困難である。Budden はレゾナンスを含む媒質中の電磁波の性質について議論しており、電磁波はレゾナンス点では反射せず、エネルギーが吸収されることを波動方程式の解として Airy 関数を用いて解析的に解いている [1]。Mjølhus は異方性で一方向にのみ不均質な水平層状媒質を考え、電子密度の変化が緩やかに磁場と密度勾配のなす角と電磁波の

入射角が小さい条件のもと Budden と同様に波動方程式を解き、レゾナンス点における電磁波エネルギーの吸収効率を解析的に求めている [2], [3]。

一方、異方性不均質媒質中の電磁波伝搬の計算には、不均質媒質を均質な薄い層状に区切り各層での電磁界を求め、それらの解を境界条件を用いて接続し全体の解を求める均質多層分割法が用いられてきた。従来の方法では、電磁波伝搬の特徴を表す遷移行列を Booker 根を利用したマトリックス乗算により計算を行っている [4]。しかし、無損失媒質においてレゾナンスを有する場合、レゾナンス点近傍では Booker 根が無限大に増加し不連続となるため、一層の刻み幅を薄くしても解は収束しない問題点があった。無衝突非磁化プラズマ中の特異点を含む媒質に対して、安定した解を求めるために Picard の逐次近似法を利用した積分近似法が提案されているが [5]、本研究ではこの手法を無衝突磁化プラズマで生じるレゾナンスを含む領域において正確な解を求めるために適用した。

本論文では、レゾナンスを含む異方性不均質媒質における積分近似法の計算手法を示し、この方法の有効性について検討する。レゾナンスを避ける方法として

<sup>†</sup> 金沢大学大学院自然科学研究科, 金沢市  
Graduate School of Natural Science and Technology,  
Kanazawa University, Kanazawa-shi, 920-8667 Japan  
a) E-mail: takano@reg.is.t.kanazawa-u.ac.jp

媒質に損失を入れる方法があるが、本論文では完全なレゾナンス（無損失媒質）の問題を取り扱う。また、積分近似法を応用した例としてレゾナンスにおける電磁波エネルギーの吸収、プラズマ周波数で見られる Z モードから L-O モードへのモード変換に関する問題を取り上げる。

## 2. 不均質水平層状媒質における波動方程式の解法

水平層状の異方性不均質プラズマ媒質中の電磁界を計算するにあたり、以下の仮定を設定する。

- (1) 直角座標を用いる。
- (2) 媒質は  $z$  方向のみ不均質な水平層状とする。
- (3) すべての変数は時間に関して変数分離が可能で  $e^{j\omega t}$  の因子をもつ。
- (4) 電磁波の入射面は  $x-z$  面であり、 $z$  軸となす角を  $\theta$  とする。
- (5) プラズマ媒質中における電磁波は、イオンの影響を無視したコールドプラズマの分散関係を満たす。この条件のもと、Snell の法則を考慮して Maxwell の方程式から以下の波動方程式が得られる [1]。

$$\frac{de}{dz} = -jk_0 \tilde{T}(z) \mathbf{e} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{e} = [E_x, -E_y, Z_0 H_x, Z_0 H_y]^T$  ( $T$  は転置を表す) であり、 $Z_0, k_0$  はそれぞれ自由空間における波動インピーダンスと波数である。また、 $E_x, E_y, H_x, H_y$  はそれぞれ電界、磁界の  $x, y$  成分であり、 $\tilde{T}(z)$  は媒質定数 ( $X = (f_p/f)^2, Y = f_H/f$ 。ここで、 $f, f_p, f_H$  はそれぞれ電磁波の周波数、電子のプラズマ周波数とサイクロトロン周波数である。) を含む  $4 \times 4$  の正方行列で  $z$  の関数である。以降、本論文ではマトリックスを記号  $\sim$  で表す。式 (1) の微分方程式を解く方法には、不均質媒質を均質な薄い層に分割しマトリックス乗算により求める均質多層分割法と積分解による積分近似法がある。次に、これらの解法について述べる。

### 2.1 マトリックス乗算による均質多層分割法

均質多層分割法は、不均質媒質を多くの薄い層に区切り、各々の層中では媒質が均質であるとして各層での波動方程式を解くことにより電磁界を求め、それらの解を接続することによって全体の電磁界を決定するものである。式 (1) において、不均質媒質を均質な薄い層で  $m$  分割すると、各層中で媒質が一定となるので行列  $\tilde{T}(z)$  も一定となる。第  $i$  層と第  $i+1$  層の区

間  $z_i \leq z \leq z_{i+1}$  において式 (1) は、

$$\frac{de}{dz} = -jk_0 \tilde{T}_i \mathbf{e} \quad (2)$$

と表され、定係数連立一次微分方程式となる。この解は容易に得られ、 $z = z_i$  における解を  $\mathbf{e}(z_i)$  とすると

$$\mathbf{e}(z) = e^{-jk_0 \tilde{T}_i (z-z_i)} \mathbf{e}(z_i) \quad (z_i \leq z \leq z_{i+1}) \quad (3)$$

と表される。 $z = z_{i+1}$  で式 (3) は

$$\mathbf{e}(z_{i+1}) = \tilde{K}_i \mathbf{e}(z_i) \quad (4)$$

である。ここで、

$$\tilde{K}_i = e^{-jk_0 \tilde{T}_i h}, \quad h = z_{i+1} - z_i \quad (5)$$

である。 $h$  は層の厚さを表し、 $\tilde{K}_i$  は  $i$  層の上端と下端の電磁界を結びつける遷移行列である。式 (4) を第 1 層から第  $m$  層まで繰り返し計算すると、以下に示す層の最上端と最下端の電磁界を結びつける関係式が得られる。

$$\mathbf{e}(z_m) = \prod_{i=m-1}^1 \tilde{K}_i \mathbf{e}(z_1) \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{e}(z_1), \mathbf{e}(z_m)$  はそれぞれ最下端及び最上端の電磁界ベクトルである。

式 (6) を数値計算可能な形に変形するために、式 (5) の指数関数行列をべき級数に展開する。

$$\begin{aligned} \tilde{K}_i &= e^{-jk_0 \tilde{T}_i h} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jk_0 \tilde{T}_i h)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jk_0 h)^k \tilde{T}_i^k}{k!} \end{aligned} \quad (7)$$

行列  $\tilde{T}$  の固有値は高度方向 ( $z$  方向) の屈折率を表しており、Booker 根と呼ばれている。相異なる Booker 根が存在する場合、その固有値に属する固有ベクトルが存在し、これらの固有ベクトルを列成分とする固有ベクトル行列  $\tilde{S}$  を作成することができる。この固有ベクトル行列を用いることにより、 $\tilde{T}$  は対角化することができる。

$$\tilde{S}^{-1} \tilde{T} \tilde{S} = \tilde{Q} \quad (8)$$

ここで、 $\tilde{Q}$  は Booker 根  $q_i (i = 1 \sim 4)$  を用いて

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix} \quad (9)$$

と表される．上式より行列  $\tilde{T}$  は  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{Q}$  を用いて  $\tilde{T} = \tilde{S}\tilde{Q}\tilde{S}^{-1}$  と表される．また,  $\tilde{T}^k$  は

$$\tilde{T}^k = \tilde{S}\tilde{Q}\tilde{S}^{-1}\tilde{S}\tilde{Q}\tilde{S}^{-1}\dots\tilde{S}\tilde{Q}\tilde{S}^{-1} = \tilde{S}\tilde{Q}^k\tilde{S}^{-1} \quad (10)$$

であるから, これを式 (7) に代入すると,

$$\tilde{K} = \tilde{S} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-jk_0h)^k \tilde{Q}^k}{k!} \tilde{S}^{-1} = \tilde{S}\tilde{\Delta}\tilde{S}^{-1} \quad (11)$$

と表され数値計算が可能となる．ここで,  $\tilde{\Delta}$  は  $e^{-jk_0q_ih}$  を要素とする  $4 \times 4$  の対角行列である．式 (11) を用いた解法をマトリックス乗算による均質多層分割法とよぶ [4]．この計算は  $\det \tilde{S} \neq 0$  のとき可能となるが, 逆行列をもたないときは  $\tilde{S}^{-1}$  が存在せず各層での遷移行列  $\tilde{K}$  が計算できない．行列  $\tilde{S}$  が逆行列をもたないときは Booker 根が多重根をもつ場合であり, これをモードカップリングとよび, カップリングを起こす点をカップリングポイントとよぶ．モードカップリングが起きる条件については, Pitteway や Smith によって議論された [6], [7]．また, モードカップリングにはカップリングポイントが単独で存在するものと, 二つのカップリングポイントが接近し結合して一つのカップリングポイントになるものがある．後者のものはコアレッセンスと呼ばれ, 性質の異なる二種類のコアレッセンスが存在する．コアレッセンスに関する物理現象は, Budden によって研究されている [8]．カップリングポイント近傍における電磁界の解法は Budden や Sabzevari によって提案されており, それは, 重根に対して新しく独立な固有ベクトルを導入することによって可能としている [1], [9], [10]．

一方, 無衝突プラズマ中において Booker 根が無限大となる現象がみられるが, これはレゾナンス (共鳴) と呼ばれている．マトリックス乗算による均質多層分割法による解法では, レゾナンス点近傍において Booker 根が急激に増加し不連続点が発生するため数値不安定を引き起こし, 刻み幅 ( $h$ ) を小さくしても電磁界は収束しない．また, Booker 根の無限大の効果も考慮されていない．次にこの問題を解決するために, レゾナンス点を含む不均質磁化プラズマ中における電磁界解析手法について述べる．

## 2.2 積分近似法

マトリックス乗算による均質多層分割法では, レゾナンス近傍において Booker 根の実部が急激に増加し発散することや, 不連続により数値不安定を引き起こし, 正確な電磁界が計算できない問題点があった．この問題点を解決するために, Booker 根を用いない積分近似法により遷移行列  $\tilde{K}$  を求める．

各層の電磁界を結びつける式 (6) において, レゾナンスを含む層のみを抜き出し更に  $n$  分割して表すと

$$e(z_{R+\delta}) = e^{-jk_0\tilde{T}_{n-1}h} e^{-jk_0\tilde{T}_{n-2}h} \dots \cdot e^{-jk_0\tilde{T}_1h} e(z_{R-\delta}) \quad (12)$$

となる．ここで,  $z = z_{R+\delta}$ ,  $z_{R-\delta}$  はレゾナンス層の上端と下端の高度である．次に, この式の指数関数行列を Taylor 展開すると

$$\begin{aligned} e(z_{R+\delta}) &= \left( \tilde{I} - jk_0\tilde{T}_{n-1}h + \frac{(-jk_0\tilde{T}_{n-1}h)^2}{2!} + \dots \right) \\ &\cdot \left( \tilde{I} - jk_0\tilde{T}_{n-2}h + \frac{(-jk_0\tilde{T}_{n-2}h)^2}{2!} + \dots \right) \\ &\quad \vdots \\ &\cdot \left( \tilde{I} - jk_0\tilde{T}_1h + \frac{(-jk_0\tilde{T}_1h)^2}{2!} + \dots \right) e(z_{R-\delta}) \\ &= \left( \tilde{I} - jk_0h \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{T}_i + (-jk_0h)^2 \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{T}_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{T}_j \right. \\ &\quad \left. + (-jk_0h)^3 \sum_{i=3}^{n-1} \tilde{T}_i \sum_{j=2}^{i-1} \tilde{T}_j \sum_{k=3}^{j-1} \tilde{T}_k + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-jk_0h)^2}{2!} \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{T}_i^2 + \frac{(-jk_0h)^3}{2!} \sum_{i=2}^{n-1} \tilde{T}_i \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{T}_j^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-jk_0h)^3}{2!} \sum_{i=1}^{n-2} \tilde{T}_i \sum_{j=i+1}^{n-1} \tilde{T}_j^2 + \dots \right) \\ &\cdot e(z_{R-\delta}) \quad (13) \end{aligned}$$

と表される．ここで,  $\tilde{I}$  は  $4 \times 4$  の単位行列である．この式で  $h \rightarrow 0$  の極限をとると,  $h$  のべき数と  $\sum$  の数が一致する項のみ積分に置き換えることができ, その他の項は零に収束する．よって式 (13) は

$$e(z_{R+\delta}) = \left( \tilde{I} - jk_0 \int_{z_{R-\delta}}^{z_{R+\delta}} \tilde{T}(z) dz \right)$$

$$\begin{aligned}
 &+(jk_0)^2 \int_{z_{R-\delta}}^{z_{R+\delta}} \tilde{T}(z) \int_0^z \tilde{T}(u) du dz \\
 &-(jk_0)^3 \int_{z_{R-\delta}}^{z_{R+\delta}} \tilde{T}(z) \int_0^z \tilde{T}(u) \int_0^u \tilde{T}(v) dv du dz \\
 &+\dots) e^{(z_{R-\delta})} \quad (14)
 \end{aligned}$$

となる。この式は、式 (2) に微分方程式の数値解法の一つである Picard の逐次近似法を直接適用して得られる式と一致する。

式 (14) において、 $|\int \tilde{T} dz|$  が積分区間で有限であれば収束するから、積分区間を十分に小さくとると第 3 項以降は無視できる。したがって、レゾナンス層の遷移行列  $\tilde{K}_R$  は

$$\tilde{K}_R \simeq \tilde{I} - jk_0 \int_{z_{R-\delta}}^{z_{R+\delta}} \tilde{T}_i(z) dz \quad (15)$$

と表され、遷移行列の各要素は行列  $\tilde{T}$  の各要素を積分することにより得ることができる。この式は、電子密度が任意に分布していても解析的に積分できる利点がある。一般にレゾナンスでは特異点をもつため発散するが、損失媒質を考えると  $\tilde{T}$  は複素数となりこの積分は有限となる。よって、無損失媒質中の  $\tilde{T}$  を損失媒質中の極限 ( $Z \rightarrow 0$ ) として考え遷移行列を求める。ここで、 $Z(= \nu_{eff}/\omega)$  は衝突周波数  $\nu_{eff}$  と電磁波の角周波数の比で与えられる。

今、電子密度分布を高度方向  $z$  に直線的に変化するものとする。

$$X = az + b \quad (16)$$

ここで、 $a, b$  は任意定数である。式 (16) で表される媒質において、式 (15) の積分により求められた遷移行列の各要素を付録に示す。この解析手法を積分近似法と呼ぶ。レゾナンスによる効果は式 (A.22) の虚数部にみられる。実際の計算では、安定した解を求めるためにレゾナンス層を多層に分割して遷移行列  $K_R$  を求める必要がある。各層の解を接続する方法は、式 (6) と同様である。多層に分割したレゾナンス層に適用した積分近似法では、マトリックス乗算による均質多層分割法に比べて一層の刻み幅を十分に小さくする必要がある。次に、積分近似法を用いる場合の最適な刻み幅について検討を行う。

### 2.3 積分近似法とマトリックス乗算による均質多層分割法の比較

レゾナンスを含む磁化プラズマで衝突がある場合、

レゾナンス点近傍では Booker 根が有限の値をとるため、均質多層分割法によって得られる電磁界は収束し、正しい計算結果を得ることができる [4]。また、衝突項  $Z$  の値を徐々に減らし、均質多層分割法で得られた計算値を用いて外挿することにより、衝突がゼロの場合の反射係数、透過係数を推定することができる [11]。レゾナンス点を含んだ無衝突磁化プラズマにおける積分近似法の有効性を評価するために、均質多層分割法と積分近似法により求められる反射、透過係数を上記の外挿法を利用して推定した値と比較する。また、積分近似法による効率的な計算を行うために最適な刻み幅を求める。

これらの計算に使用する電子密度分布は式 (17) で示される単調増加のモデルである。

$$N(z) = N_0 \left( 1 + \frac{z - z_0}{L} \right) \quad (17)$$

ここで、 $N_0, L$  はそれぞれ高度  $z = z_0$  での電子密度と密度勾配を表す特性長である。計算に用いるパラメータを表 1 に示す。入射角  $\theta$  は  $z$  軸とのなす角であり、磁場の伏角  $Dip$  は  $y-z$  面内にとり  $y$  軸とのなす角である。また、入射波は L-O モードであり、媒質は不均質な無衝突磁化プラズマである。

図 1 に  $X$  に対する Booker 根の分布を示す。この図において、横軸はプラズマ周波数と電磁波の周波数の比の 2 乗  $X$  であり、縦軸は Booker 根の値であ

表 1 計算パラメータ  
Table 1 Calculation parameters.

入射波の周波数 $f$	8 kHz
電子サイクロトロン周波数 $f_H$	1.5 kHz
入射角 $\theta$	$0^\circ$
磁場の伏角 $Dip$	$80^\circ$
電子密度勾配を表す特性長 $L$	1000 km

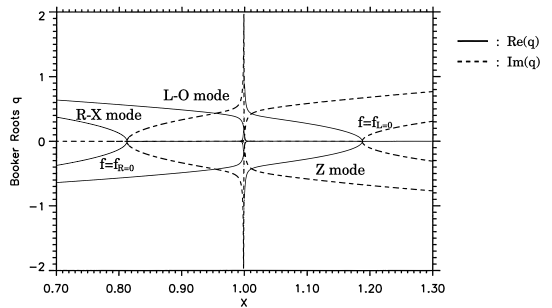


図 1 Booker 根の分布  
Fig. 1 Distribution of Booker roots.

る．実線はそれぞれのモードの Booker 根の実数部を，破線は虚数部を表している．L-O モードのカットオフは  $X = 1$  の点である．計算区間はレゾナンス点が  $X = (1 - Y^2)/(1 - Y^2 \sin^2 Dip) = 0.9989$  であり，また  $f = f_{L=0}(X = 1.2)$ ， $f_{R=0}(X = 0.8)$  の反射を避けるために  $0.9 \leq X \leq 1.1$  とする．したがって，レゾナンスによる影響のみを調べることができる．最下端  $X = 0.9$  からポインティングフラックスの  $z$  成分  $P_z^i$  が 1 となる L-O モードを入射し，反射した L-O モードのポインティングフラックスの  $z$  成分  $P_z^r$  との比を反射係数  $R$  とする．一方，最上端  $X = 1.1$  で透過した Z モードのポインティングフラックスの  $z$  成分  $P_z^t$  と  $P_z^i$  の比を透過係数  $T$  とする．それぞれの計算手法により求められる反射，透過係数の収束状態を刻み幅を変化させることにより調べる．収束した反射，透過係数が正確な値であるかを知る必要がある．そこでまず，損失媒質（衝突あり）中において均質多層分割法により反射，透過係数を計算し，衝突項  $Z$  を徐々に減少させ外挿法を用いて  $Z \rightarrow 0$  のときの値を推定する．図 2 は，均質多層分割法により得られた反射，透過係数の衝突項  $Z$  による変化を示す．この図の横軸は衝突項  $Z$ ，縦軸は反射，透過係数である．この計算では  $Z$  を  $10^{-2}$  から  $10^{-4}$  まで変化させている（表示は  $Z = 10^{-3} \sim 10^{-4}$  である）．外挿法により得られた  $Z = 0$  での反射係数と透過係数はそれぞれ 0.16353 と 0.60726 である．

次に，無衝突磁化プラズマにおける反射，透過係数を刻み幅を変化させ，均質多層分割法と積分近似法により求め，先ほど得られた漸近解と比較し解の収束状

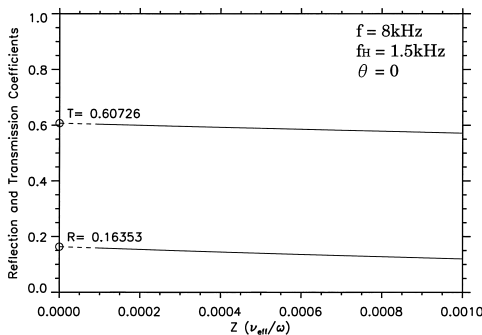


図 2 均質多層分割法により得られた衝突項  $Z$  に対する反射，透過係数

Fig. 2 Reflection and transmission coefficients calculated by the multi-layered method as a function of the collision term  $Z$ .

態を調べる．図 3 (a), (b) にそれぞれ均質多層分割法，積分近似法により得られた反射，透過係数の刻み幅による変化を示す．これらの図の横軸は自由空間における入射波の波長で規格化した刻み幅  $dz/\lambda$ ，縦軸は反射，透過係数である．また，反射，透過係数の漸近解を点線で示す．図 3 (a) より，均質多層分割法では刻み幅を小さくしても反射，透過係数が振動し漸近解と一致せず，正確な解を得ることができない．これは，レゾナンス近傍で急激に Booker 根が増大しているため数値不安定を引き起こすためであると考えられる．

一方，図 3 (b) より，積分近似法により求められた反射係数は刻み幅によらずほぼ一定で漸近解に一致する．透過係数については，刻み幅を小さくするに従って減少し，漸近解に収束することが確認できる．積分近似法では Booker 根を使用しておらず，レゾナンスの無限大の大きさを考慮しているため解が収束すると考えられる．透過係数の誤差は， $dz/\lambda = 10^{-3}$  で 3.25% ，

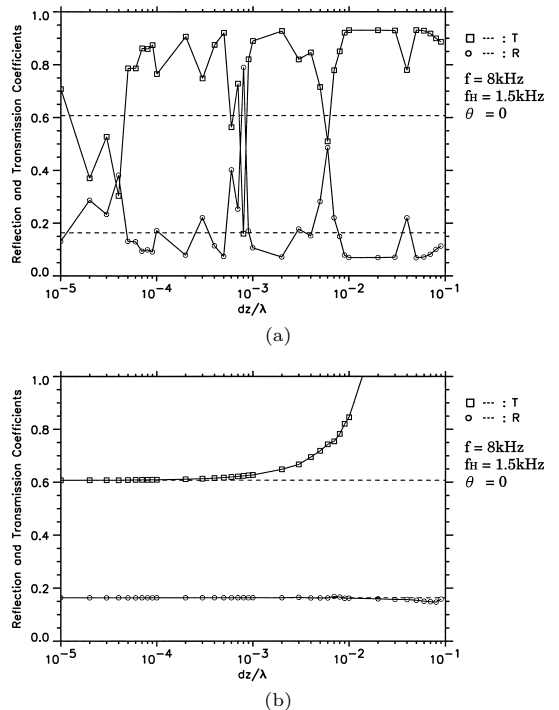


図 3 刻み幅 ( $dz/\lambda$ ) を変化させたときの (a) 均質多層分割法と (b) 積分近似法により求められた反射，透過係数

Fig. 3 Reflection and transmission coefficients calculated by (a) the multi-layered method and (b) the integral approximation method as a function of  $dz/\lambda$ .

$dz/\lambda = 10^{-4}$  で 0.31% である．周波数や入射角等のパラメータを変化させて調べた結果，実用的な計算時間になることも考慮して最適な刻み幅は  $dz/\lambda = 10^{-4}$  となった．

### 3. 積分近似法の応用

レゾナンス点を含む無衝突磁化プラズマ中の電磁波伝搬解析法として積分近似法が有効であることが確かめられた．積分近似法を用いた応用としてレゾナンスにおける電磁波のエネルギー吸収や Z モードから L-O モードへのモード変換が挙げられる．次に，これらの問題について議論する．

#### 3.1 レゾナンスにおけるエネルギー吸収

レゾナンスにおける電磁波エネルギーの吸収については，Mjølhus によって検討されている [2], [3]．媒質が異方性で一方向のみにゆるやかに変化する場合，磁場と電子密度勾配のなす角と入射角  $\theta$  が小さい場合に限って，WKB 近似を用いて解析的に吸収係数を求めている．また，吸収係数の定義はエネルギー保存性から

$$\text{吸収係数 } A = 1 - \text{反射係数 } R - \text{透過係数 } T \quad (18)$$

である [1]．ここで，反射，透過係数の定義は 2.3 と同様である．本節では，レゾナンスにおける電磁波エネルギー吸収に関して，Mjølhus の解析解と積分近似法の比較を行う．この計算を行うための電子密度モデルは単調増加のものを使用し，計算パラメータは表 1 に示される 2.3 で使用したものと同一である．計算領域は，レゾナンス点によるエネルギー吸収を Mjølhus の解析解と比較するため  $0.97 \leq X \leq 1.03$  とする．また，吸収係数は電子密度勾配を表す特性長  $L$  を変化させて求め，新しいパラメータ  $p = (\omega/cL)^{1/3} Y^{1/2}$  を導入する [2]．積分近似法と比較する吸収係数の解析解は

$$\begin{aligned} R_{1,0} &= e^{-\delta_{-1}} (1 - e^{-\delta_1}) \quad (19) \\ \delta_1 &= \frac{\pi \omega}{2c} L \left( \frac{Y}{Y+1} \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left[ \left( N_y - \left( \frac{Y}{Y+1} \right)^{1/2} \sin \alpha \right)^2 + N_x^2 \right] \\ \delta_{-1} &= \frac{\pi \omega}{2c} L \left( \frac{Y}{Y+1} \right)^{1/2} \\ &\quad \cdot \left[ \left( N_y + \left( \frac{Y}{Y+1} \right)^{1/2} \sin \alpha \right)^2 + N_x^2 \right] \end{aligned}$$

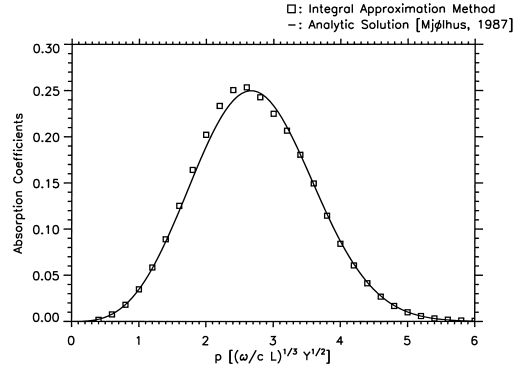


図 4 Mjølhus の解析解と積分近似法により求められたレゾナンスでの吸収係数の比較

Fig.4 Comparison between the absorption coefficient calculated by the integral approximation method and the analytic solution given by Mjølhus.

$$N_x = \sin \theta \sin \phi, \quad N_y = \sin \theta \cos \phi$$

である [2], [3]．ここで， $\theta, \phi, \alpha$  はそれぞれ入射波の z 軸とのなす角，x-y 平面における方位角，磁場の z 軸とのなす角 ( $\alpha = 90^\circ - Dip$ ) である．

図 4 に計算結果を示す．この図の横軸は電子密度勾配を表す変数  $p$ ，縦軸は吸収係数である．また，□印は積分近似法で計算した結果であり，実線は式 (19) の解析解を示している．この結果より，吸収係数はある特性長  $L$  でピークを持ち， $L$  を大きく若しくは小さくすると吸収係数はゼロとなりレゾナンス点によるエネルギー吸収がなくなることがわかる．また，積分近似法により計算された吸収係数が Mjølhus の解析解とよく一致しており，レゾナンス点を含む場合の積分近似法により得られた計算値が妥当であることが再確認できた．一方，解析解である式 (19) は入射角や磁場方向に制限があるが，積分近似法では任意の入射角，磁場方向に対応している．このことから，レゾナンス点における電磁波エネルギー吸収に関する解析を行う際に，任意の入射角に対応した積分近似法が非常に有効な手段であると考えられる．

#### 3.2 Z モードから L-O モードへの線形モード変換

2.1 で述べたモードカップリングのうち， $X = 1$  で Z モードと L-O モードのカップリングが存在する．このカップリングはコアレスセンスであり radio window とよばれている [8]．最初，Ellis によってイオノゾンデでみられる Z トレースを説明するために利用された [12]．また，このモード変換は地球磁気圏や木星な

どの惑星磁気圏で観測される Continuum Radiation (CR) [13], [14] や Lobe Trapped Continuum Radiation (LTCR) [15], [16] の生成に関係していると考えられている。これらの波動の発生メカニズムは、急峻な電子密度勾配をもつ領域において UHR (Upper Hybrid Resonance) 周波数近傍で強められた静電波である ECH (Electron Cyclotron Harmonic) 波動が Z モードの電磁波に変換され、更に  $X = 1(f = f_p)$  において radio window を介した線形モード変換により L-O モードとして生成される [17]。この Z モードから L-O モードへの変換効率を積分近似法を用いて計算を行う。これらの波動の発生領域である地球磁気圏内は無衝突磁化プラズマであるため、レゾナンスの影響を考慮した積分近似法による解析が有効である。また、この計算ではレゾナンスの影響を考慮しているため、L-O モードに変換されなかった Z モードのレゾナンスにおける吸収率 (係数) も求めることができる。

最初に Mjølhus の解析解が満足する条件において、積分近似法により得られた変換、吸収係数と解析解を比較する。Mjølhus により導出された変換、吸収係数の解析解は

$$R_{-1,-1} = e^{-\delta_{-1}} \quad (\text{変換係数}) \quad (20)$$

$$R_{-1,0} = 1 - e^{-\delta_{-1}} \quad (\text{吸収係数}) \quad (21)$$

である。ここで、 $\delta_{-1}$  は式 (19) に示されている。

次に、積分近似法で用いる計算モデルを図 5 に示す。電子密度分布は式 (22) に示す単調減少とし、最下層から Z モードを入射し最上層で L-O モードの上昇波を計算する。

$$N(z) = N_0 \left( 1 - \frac{z - z_0}{L} \right) \quad (22)$$

最上層で透過する L-O モードの方位角を  $\phi$ 、 $z$  軸となす角を  $\theta$  とする。Z モードから L-O モードへの変換係数  $C$  は、最下層での Z モードのポインティングフラックスの  $z$  成分を  $P_z^Z$ 、最上層での L-O モードのポインティングフラックスの  $z$  成分を  $P_z^L$  としてその比 ( $C = P_z^L / P_z^Z$ ) で定義する。また、レゾナンスを含む計算領域での電磁波エネルギーの吸収率は 3.1 の定義 ( $A = 1 - R - C$ ) を用いる。計算パラメータを表 2 に示す。

これらのパラメータを用いて変換係数と吸収係数を求める。図 6 に計算結果を示す。縦軸は変換、吸収係数であり、横軸は最上端における L-O モードの  $z$  軸

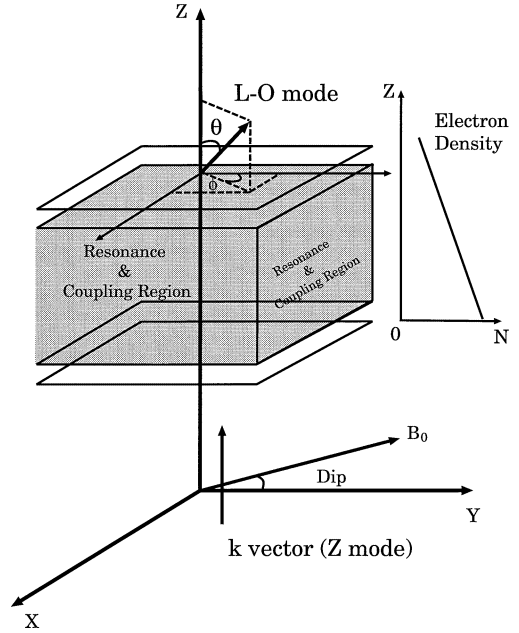


図 5 レゾナンスを含むモード変換の計算モデル  
Fig. 5 Calculation model of mode conversion including the resonance point.

表 2 積分近似法と解析解により得られる変換係数の比較に用いる計算パラメータ

Table 2 Calculation parameters for the comparison between the mode conversion coefficient calculated by the integral approximation method and that by the analytic solution.

入射波の周波数 $f$	6 kHz
電子サイクロトロン周波数 $f_H$	4 kHz
L-O モードの方位角 $\phi$	0°
磁場の伏角 $Dip$	80°
電子密度勾配を表す特性長 $L$	1000 km

となす角  $\theta$  である。また、実線と破線はそれぞれ変換係数と吸収係数の解析解であり、 $\circ$  と  $*$  はそれぞれ積分近似法で計算した変換係数と吸収係数である。この結果より、積分近似法で計算した変換、吸収係数が Mjølhus の解析解とよく一致しており、積分近似法により正確に変換、吸収係数が求められることを確認することができた。したがって、積分近似法を用いることにより任意の媒質や放射角  $\theta$  において変換、吸収係数を求めることが可能である。以後、変換、吸収係数は積分近似法を用いて計算する。

次に、電子密度勾配を表す特性長  $L$  を変化させて変換係数がどのように変化するかを調べる。この計算では地球磁気圏尾部における LTCR の発生を想定してい

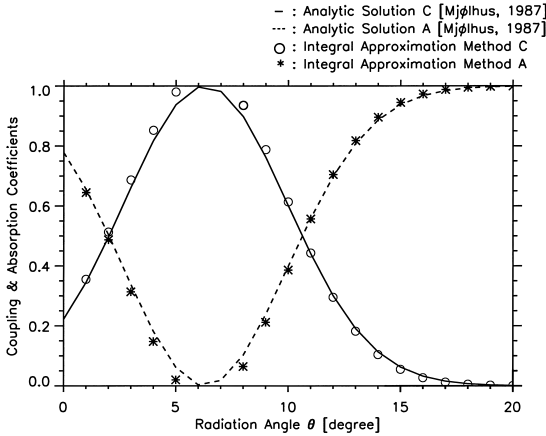


図 6 積分近似法と解析解により計算された変換, 吸収係数の  $\theta$  特性

Fig. 6 Conversion and absorption coefficients calculated by the integral approximation method and the analytic solution.

表 3 モード変換の計算パラメータ  
Table 3 Calculation parameters for mode conversion.

入射波の周波数 $f$	1 kHz
電子サイクロトロン周波数 $f_H$	200 Hz
L-O モードの方位角 $\phi$	$0^\circ$
磁場の伏角 $Dip$	$20^\circ$
電子密度勾配を表す特性長 $L$	200, 500, 1000 km

るため, 表 3 に示す計算パラメータを用いる [18]. 図 7 に計算結果を示す. 横軸は L-O モードの  $z$  軸とのなす角  $\theta$ , 縦軸は変換, 吸収係数である. また, 実線は変換係数  $C$ , 点線は吸収係数  $A$  を表している. radio window の半値幅を変換係数の最大値の半分  $C_{max}/2$  となる角度幅と定義する. この結果から, radio window の中心軸は  $22^\circ$  であり半値幅は電子密度勾配を表す特性長  $L$  によって変化し,  $L = 1000$  km,  $500$  km,  $200$  km に対してそれぞれ  $13.2^\circ$ ,  $16.4^\circ$ ,  $24.4^\circ$  であることが確認された. また, 吸収係数は変換係数と逆の特性を示している. Z モードから radio window を介して変換された L-O モードの電磁波は, 電子密度勾配が緩やかになるに従って変換係数が高くなり, 鋭いビーム状で放射されることが明らかになった.

次に, L-O モードの方位角  $\phi$  と  $z$  軸とのなす角  $\theta$  を変化させて変換係数の二次元分布を計算した. 計算パラメータは表 3 と同じで  $L = 1000$  km の結果を図 8 に示す. 横軸は L-O モードの方位角  $\phi$ , 縦軸は  $z$  軸とのなす角  $\theta$ , 変換係数を白黒の濃淡で示してい

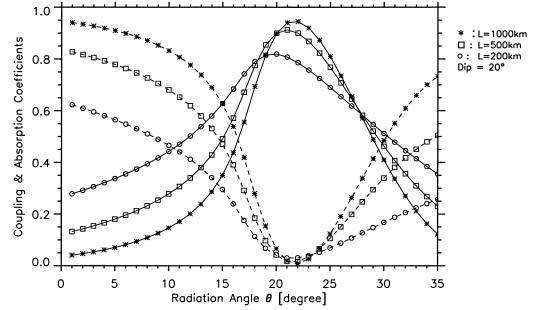


図 7  $\theta$  に対する Z モードから L-O モードへの変換係数とレゾナンスにおける吸収係数

Fig. 7 Conversion coefficients from Z mode to L-O mode and absorption coefficients in the resonance point as a function of  $\theta$ .

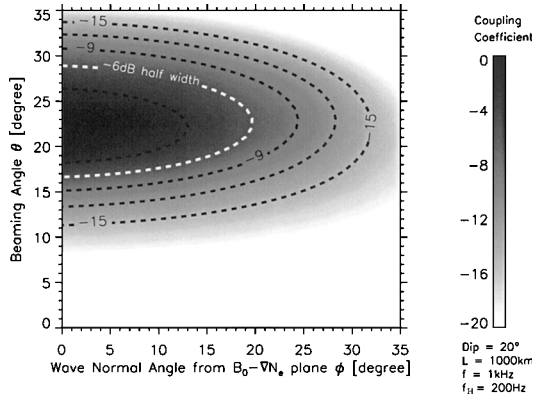


図 8 Z モードから L-O モードへの変換係数の 2 次元分布 ( $\theta - \phi$  特性)

Fig. 8 2D distribution of conversion coefficients from Z mode to L-O mode.

る. また, 半値幅を白の点線で示す. 電子密度勾配ベクトル ( $z$  軸) と磁場ベクトルが作る面 ( $y-z$  平面) からなす角 ( $\phi$ ) 方向の半値幅は  $19.8^\circ$  となる. この結果より, Z モードから変換した L-O モード波は  $\phi$  方向に長軸をもつ円状に放射していることが明らかになった.

#### 4. む す び

無損失な不均質磁化プラズマ中のレゾナンスを含む場合の電磁界計算法として, 不均質多層分割媒質を積分による解析解の接続で求める積分近似法を提案した. この計算手法では, 遷移行列を積分形で表すことにより特異性を取り除きレゾナンスの取扱いを可能とした. 積分近似法の有効性を確かめるために, マトリックス法による損失媒質における解を衝突項  $Z \rightarrow 0$  の極限



として得られる漸近解と比較した。その結果、無損失媒質でレゾナンスを含む場合でも、刻み幅を小さくすることによって積分近似法で得られる解が収束することを確認した。また、最適な刻み幅を決定することができた。

積分近似法を用いた応用として、レゾナンスにおける電磁波エネルギーの吸収と Z モードから L-O モードへの線形モード変換が挙げられる。レゾナンスにおけるエネルギー吸収については、制限された条件のもとで得られる Mjølhus の解析解と積分近似法の計算値を比較した結果、非常によい一致が確認された。積分近似法では入射角や磁場のなす角が任意に設定できるため、レゾナンス点における電磁波エネルギー吸収を利用したプラズマ加熱等の解析に有効な手段であるといえる。一方、線形モード変換の解析には、レゾナンスの影響を含めて地球磁気圏でみられる LTCR の生成メカニズムに適用した。今後、地球及び惑星磁気圏で観測される波動の発生メカニズムの解明に応用されると考えられる。

謝辞 積分近似法を用いた電磁波伝搬解析を行うにあたり、数値計算プログラムの開発に携わった高橋典光氏（現、沖電気工業（株））に深く感謝いたします。

## 文 献

- [1] K.G. Budden, "The Propagation of Radio Waves," Cambridge University Press, New York, 1985.
- [2] E. Mjølhus, "Generalized Budden resonance tunnelling, with application to linear conversion nearly parallel to magnetic field," J. Plasma Phys., vol.38, part 1, pp.1-26, 1987.
- [3] E. Mjølhus, "On linear conversion in a magnetized plasma," Radio Sci., vol.25, no.6, pp.1321-1339, 1990.
- [4] I. Nagano, M. Mambo, and G. Hutatsuishi, "Numerical calculation of electromagnetic waves in an anisotropic multilayered medium," Radio Sci., vol.10, no.6, pp.10,611-10,617, 1975.
- [5] 長野 勇, 満保正喜, "均質多層分割近似法の吟味," 電磁界理論研究会資料, EMT-81-51, pp.43-51, 1981.
- [6] M.V. Pitteway, "Reflexion levels and coupling regions in a horizontally stratified ionosphere," Phil. Trans. R. Lond. A, vol.252, pp.53-68, 1959.
- [7] M.S. Smith, "Coupling points of the Booker quartic equation for radio wave propagation in the ionosphere," Proc. R. Soc. Lond. A., vol.336, pp.229-250, 1974.
- [8] K.G. Budden and M.S. Smith, "The coalescence of coupling points in the theory of radio waves in the ionosphere," Proc. R. Soc. Lond. A., vol.341, pp.1-30, 1974.

- [9] B. Sabzevari, "The transformation of plasma equations to normal form in mode conversion theory," J. Plasma Phys., vol.47, part 1, pp.49-60, 1992.
- [10] B. Sabzevari, "Waves and fields in the mode-coupling region," J. Plasma Phys., vol.49, part 3, pp.413-424, 1993.
- [11] 細野敏夫, 山口詔二, "均質多層分割近似法の問題点とその対策," 信学論 (B), vol.J64-B, no.10, pp.1115-1122, 1981.
- [12] G.R. Ellis, "The Z propagation hole in the ionosphere," J. Atmos. Terr. Phys., vol.8, pp.43-54, 1956.
- [13] D.A. Gurnett, "The Earth as a radio source: The nonthermal continuum," J. Geophys. Res., vol.80, no.19, pp.2751-2763, 1975.
- [14] D.A. Gurnett, W.S. Kurth, and F.L. Scarf, "Narrowband electromagnetic emissions from Jupiter's magnetosphere," Nature, vol.302, no.31, pp.385-388, 1983.
- [15] I. Nagano, S. Yagitani, H. Kojima, Y. Kakehi, T. Shiozaki, H. Matsumoto, K. Hashimoto, T. Okada, S. Kokubun, and T. Yamamoto, "Wave form analysis of the continuum radiation observed by GEOTAIL," Geophys. Res. Lett., vol.21, no.25, pp.2911-2914, 1994.
- [16] 高野博史, 長野 勇, 八木谷聡, 福岡 将, 松本 紘, "地球磁気圏尾部における Lobe Trapped Continuum Radiation の伝搬特性," 信学論 (B), vol.J84-B, no.12, pp.2358-2366, 2001.
- [17] D. Jones, "Terrestrial myriametric radiation from the Earth's plasmopause," Planet. Space Sci., vol.30, no.4, pp.399-410, 1982.
- [18] 高野博史, "地球磁気圏尾部における Continuum Radiation の発生・伝搬に関する研究," 博士論文, 金沢大学, 2002.

## 付 録

### 1. 積分近似法の導出

式 (15) で示される行列  $\tilde{T}_i$  の各要素の積分は、式 (16) で示される電子密度分布の場合、以下のように表される。この積分は衝突項  $Z$  を含めて積分し、その極限 ( $Z \rightarrow 0$ ) から求めている。

$$K_i^{11} = 1 - j \frac{k_0}{a} \frac{\alpha_0 S}{\delta_0} \left[ \Delta X + \frac{1 - Y^2}{\delta_0} \Delta \tau \right] \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$K_i^{12} = j \frac{k_0}{a} \frac{\beta_0^* S}{\delta_0} \left[ \Delta X + \frac{1 - Y^2}{\delta_0} \Delta \tau \right] \quad (\text{A} \cdot 2)$$

$$K_i^{13} = 0 \quad (\text{A} \cdot 3)$$

$$K_i^{14} = -j \frac{k_0}{a} \left[ \Delta X + \frac{S^2(1 - Y^2)}{\delta_0} \Delta \tau \right] \quad (\text{A} \cdot 4)$$

$$K_i^{21} = K_i^{24} = 0 \quad (\text{A} \cdot 5)$$

$$K_i^{22}=1 \quad (\text{A}\cdot6)$$

$$K_i^{23}=-j\frac{k_0}{a}\Delta X \quad (\text{A}\cdot7)$$

$$K_i^{31}=j\frac{k_0}{a}\left[\frac{1}{2(1-Y^2)}\left(\frac{\alpha_0\beta_0}{\delta_0}+\gamma_0^*\right)\Delta X^2+\frac{\alpha_0\beta_0}{\delta_0^2}\Delta X+\frac{\alpha_0\beta_0(1-Y^2)}{\delta_0^3}\Delta\tau\right] \quad (\text{A}\cdot8)$$

$$K_i^{32}=-j\frac{k_0}{a}\left[\frac{1}{2(1-Y^2)}\left\{\frac{\beta_0\beta_0^*}{\delta_0}-(1-m^2Y^2)\right\}\Delta X^2+\left(\frac{\beta_0\beta_0^*}{\delta_0^2}+1-S^2\right)\Delta X+\frac{\beta_0\beta_0^*(1-Y^2)}{\delta_0^3}\Delta\tau\right] \quad (\text{A}\cdot9)$$

$$K_i^{33}=1 \quad (\text{A}\cdot10)$$

$$K_i^{34}=j\frac{k_0}{a}\frac{S\beta_0}{\delta_0}\left[\Delta X+\frac{1-Y^2}{\delta_0}\Delta\tau\right] \quad (\text{A}\cdot11)$$

$$K_i^{41}=-j\frac{k_0}{a}\left[\frac{1}{2(1-Y^2)}\left\{\frac{\alpha_0\alpha_0^*}{\delta_0}-(1-l^2Y^2)\right\}\Delta X^2+\left(\frac{\alpha_0\alpha_0^*}{\delta_0^2}+1\right)\Delta X+\frac{\alpha_0\alpha_0^*(1-Y^2)}{\delta_0^3}\Delta\tau\right] \quad (\text{A}\cdot12)$$

$$K_i^{42}=j\frac{k_0}{a}\left[\frac{1}{2(1-Y^2)}\left(\frac{\alpha_0^*\beta_0^*}{\delta_0}+\gamma_0\right)\Delta X^2+\frac{\alpha_0^*\beta_0^*}{\delta_0^2}\Delta X+\frac{\alpha_0^*\beta_0^*(1-Y^2)}{\delta_0^3}\Delta\tau\right] \quad (\text{A}\cdot13)$$

$$K_i^{43}=0 \quad (\text{A}\cdot14)$$

$$K_i^{44}=1-j\frac{k_0}{a}\frac{S\alpha_0^*}{\delta_0}\left[\Delta X+\frac{1-Y^2}{\delta_0}\Delta\tau\right] \quad (\text{A}\cdot15)$$

ここで、 $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \delta_0$  は磁場ベクトルの方向余弦を  $B_0 = (l, m, n)$  とすると

$$\alpha_0=Y^2nl-jYm \quad (\text{A}\cdot16)$$

$$\beta_0=Y^2mn-jYl \quad (\text{A}\cdot17)$$

$$\gamma_0=Y^2lm-jYn \quad (\text{A}\cdot18)$$

$$\delta_0=1-n^2Y^2 \quad (\text{A}\cdot19)$$

であり、 $\alpha_0^*, \beta_0^*, \gamma_0^*$  は共役複素数である。また、 $\Delta X, \Delta X^2, \Delta\tau$  は

$$\Delta X = a(z_{i+1} - z_i) \quad (\text{A}\cdot20)$$

$$\Delta X^2 = a(z_{i+1}^2 - z_i^2) + 2ab(z_{i+1} - z_i) \quad (\text{A}\cdot21)$$

$$\Delta\tau = \log \left| \frac{az_{i+1} + b - \frac{1-Y^2}{1-n^2Y^2}}{az_i + b - \frac{1-Y^2}{1-n^2Y^2}} \right| - j\frac{\pi}{2} \text{sgn}\{n^2Y^4 - (3n^2 - 1)Y^2 + 1\} \left\{ \text{sgn}\left(az_{i+1} + b - \frac{1-Y^2}{1-n^2Y^2}\right) - \text{sgn}\left(az_i + b - \frac{1-Y^2}{1-n^2Y^2}\right) \right\} \quad (\text{A}\cdot22)$$

である。ここで、 $\text{sgn}(x)$  は  $x$  の符号をとる。

(平成 14 年 9 月 26 日受付, 15 年 2 月 10 日再受付)



高野 博史 (正員)

平 8 金沢大・工・電気情報卒。平 10 同大学院工学研究科修士課程了。平 14 同大学院自然科学研究科博士後期課程了。現在、同大学院自然科学研究科教務職員・科学衛星による磁気圏プラズマ波動解析、プラズマ中の電波伝搬に関する研究に従事。工博・地球電磁気・地球惑星圏学会、米国地球物理学会各会員。



長野 勇 (正員)

昭 43 金沢大・工・電気卒。昭 45 同大学院修士課程了。同年同工学部電気工学科助手。昭 58~59 米国ジェット推進研究所 NRC 研究員。昭 62 同工学部電気・情報工学科教授。平 12 同大総合情報処理センター長、情報システム工学科教授。現在、同大学院自然科学研究科教授。異方性不均質媒質中の電磁界計算法、VLF 波による D 層電子密度計算法の開発、衛星搭載用プラズマ波動観測装置 (GEOTAIL 等) の開発に従事。工博。昭 62 地球電磁気・地球惑星圏学会田中館賞受賞。平 12 北國文化賞受賞。電気学会、地球電磁気・地球惑星圏学会、米国地球物理学会各会員。



八木谷 聡 (正員)

昭 63 金沢大・工・電気情報卒。平 2 同大学院修士課程了。平 5 同博士課程了。同年同大電気・情報工学科助手。平 9~10 米国ミネソタ大客員研究員 (文部省在外研究員)。現在、同大学院自然科学研究科助教授。科学衛星及びコンピュータシミュレーションによる磁気圏プラズマ波動解析の研究、火星探査衛星 (のぞみ) 搭載用低周波波動観測装置の開発に従事。工博。平 13 産学連携推進いしかわ賞 (奨励賞) 受賞。地球電磁気・地球惑星圏学会、米国地球物理学会各会員。