Global Optimization by generalized random tunneling algorithm (4st Report : Application to the nonlinear optimum design problem of the mixed design variables)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24517/00007481

一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化
（第4報　混合変数非線形最適設計問題への適用）

北山哲士　　山崎光悦

Global Optimization by Generalized Random Tunneling Algorithm

(4th Report: Application to the Nonlinear Optimum Design Problem of the Mixed Design Variables)

Satoshi KITAYAMA and Koetsu YAMAZAKI
Department of Human & Mechanical Systems Engineering, Kanazawa University
Kakuma-machi, Kanazawa, Ishikawa, 920-1192, Japan

This paper presents a method for global or quasi-optimum for the discrete and continuous design vairables, based on Branching Generalized Random Tunneling Algorithm (BGRTA). By treating the discrete design variables as penalty function, the augmented objective function is constructed. As a result, all design variables can be treated as the continuous design variables. The augmented objective function becomes non-convex, and has many local minima. That is, finding optimum of discrete design variables is transformed into finding global optimum of this augmented objective function. Then BGRTA is applied to this augmented objective function, subject to the behavior and side constraints. We also propose the new update scheme of penalty parameter for the penalty function of discrete design variables in this paper. The proposed update scheme of penalty parameter utilizes the information of the penalty function of discrete design variables. By utilizing the characteristics of BGRTA, some optima are obtained. The validity of the proposed method is examined through typical benchmark problems.

Key Words **: Optimum Design, Global Optimization, Discrete and Continuous Variables, Generalized Random Tunneling Algorithm, System Engineering**

1　緒言

筆者らは側面制約条件に加え，挙動制約条件を含む連続変数の有制約最適化問題の大域的最適解，もしくはそれに相当する準最適解を求めための一つの手法として，一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズム（GRTA）を提案し[(1)]，さらに局所的最適解においてランダムに分岐させることにより，複数の局所的最適解を求めることができるようにGRTAのアルゴリズムをベースにした分岐型一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズム（BGRTA）を提案した[(2)]．そして数学問題および構造最適化問題へ適用し，その有効性を示した．GRTAもBGRTAも，連続変数を対象とした方法であるが，実際の設計では，規格上の問題などから，離散変数と連続変数，または離散変数のみから構成される最適設計問題もあり，GRTAやBGRTAを直接的に用いることはできなかった．

離散変数から構成される最適化問題の解を求める場合，例えば分枝限定法を用いたり[(3),(4)]，双対問題に変換する方法[(5)]などが挙げられる．また一般に広く行われる方法としては離散変数を直接的に連続変数として取り扱い，数理計画法により最適解を求め，得られた解の近傍の離散変数を最適解とする方法[(4),(6)]や，数理計画法で得られた解に対して，改めて整数計画問題を適用することによって解を得る方法[(7)]などがある．ここでは，離散変数を直接的に連続変数として扱う場合を考えてみよう．例えば図1(a)に示すような関数の場合，離散値である点Aと点Bの間で目的関数が最適解 x_L に収束したとする．最適解 x_L 近傍の離散値である点Bを離散変数の最適解とすれば，目的関数値は点A よりも改悪されてしまい，必ずしも連続変数の解近傍の離散変数が目的関数を最小とするものではない．

また図1(b)に示すような場合，すなわち連続変数の近傍の離散値が制約条件をすべて満足しない場合は，離散変数を直接的に連続変数として解くこと自体に問

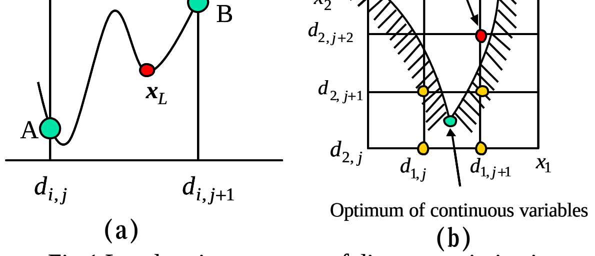

Fig.1 Local optimum nature of discrete optimization

＊ 原稿受付　平成？？年？月　日
＊[1]正員，金沢大学工学部（〒920-1192　金沢市角間町）．

題があり，総当り的な方法や遺伝的アルゴリズム[8]などの方法のほうがむしろ有効である．

一方，離散変数と挙動制約条件を共にペナルティ関数として扱い，拡大目的関数を構成して，最適解を求める方法もある[10]〜[12]．報告されているすべての方法では，離散変数と挙動制約条件をすべてペナルティ関数として扱い，事実上の無制約最適化問題へ変換し，最適解を求める方法である．この方法の特徴をまとめると次のようになる．

（１）離散変数をペナルティ関数として扱うことにより，連続変数の最適化手法が適用できる．

（２）目的関数に離散変数をペナルティ関数として組み込んだ拡大目的関数は多峰性関数となる．離散値の近傍に拡大目的関数の極小値が生成される．

ただし，これらの方法の課題として，以下の項目が挙げられよう．

（P1）探索初期段階で離散変数に対するペナルティ関数を導入した場合は，拡大目的関数が多峰性となるり，勾配に基づく方法による解は初期点に大きく依存する．

（P2）挙動制約条件をもペナルティ関数として扱っているため，挙動制約条件が活性となるような離散変数の最適解を求めることは，一般に困難である[11]．また挙動制約条件に対するペナルティ係数は試行錯誤的に決められる．

（P3）離散変数に対するペナルティ関数は探索初期段階で考慮せず，一旦変数を連続変数として扱い，連続変数の最適解が求まった後でペナルティ関数を導入しているため，基本的には図1(b)に示したようなケースを克服していない．この場合は再度初期点を変更して，実行可能領域内に存在するような離散変数の最適解を探索せざるを得ない．

（P4）離散変数のペナルティ関数に対するペナルティ係数の更新式は定数を掛けて，更新している．これは問題に適した定数を試行錯誤的に決定しており，一概にはいえないものの，汎用性に欠けている．

拡大目的関数が多峰性となった場合，GRTAやBGRTAを適用すれば，ある程度局所的最適解からの脱出は可能であり，上記(P1)，(P3)の課題は克服できる．またGRTAもBGRTAも挙動制約条件に対するペナルティ係数は必要ないため，上記(P2)の課題に対しても有効であると考える．さらに上記(P4)の課題に関しては，探索状況を考慮したペナルティ係数の更新式を用いれば，アルゴリズムに必要となる初期入力パラメータの削減ができ，さらに問題に適したパラメータの調整という問題が解決できると思われる．

そこで本論文では，離散変数と連続変数の混合変数から構成される最適設計問題に対して，BGRTAを適用することを試みる．提案する手法は，離散変数をペナルティ関数として扱い，拡大目的関数を作成し，すべての変数を連続変数として統一的に扱い，大域的最適解を求めるものである．

はじめに本論文で扱う問題設定を記述し，離散変数をペナルティ関数として扱う場合のペナルティ係数の影響と，その決定方法を示す．第3章において，アルゴリズムを示し，いくつかの数値計算例を通じて，本研究で提案する手法の有効性を検討する．

2　離散変数に対するペナルティ関数

2.1　問題設定　連続変数と離散変数の混合変数から構成される最適化問題は次のように定式化される．

$$f(x) \to \min \tag{1}$$

$$Subject \quad to$$

$$x_i^L \le x_i \le x_i^U \qquad i=1,2,\cdots,m \tag{2}$$

$$x_{m+i} \in D_i \;\; D_i = \{d_{i,1}, d_{i,2}, \cdots, d_{i,q}\} \;\; i=1,2,\cdots,n \tag{3}$$

$$g_k(x) \le 0 \quad k=1,2,\cdots,ncon \tag{4}$$

ここでxは連続変数と離散変数から成る混合変数の設計変数ベクトルであり，$f(x)$は最小化する目的関数である．x_iは設計変数を表し，mとnはそれぞれ連続変数の数および離散変数の数を表す．x_i^Lとx_i^Uはそれぞれ，i番目の連続変数に直接的に課せられる側面制約条件の下限値と上限値である．D_iはi番目の離散値の集合を表し，qは離散値の数を表す．$d_{i,j}$はi番目の離散変数のj番目の成分を表し，離散変数の側面制約条件は，$d_{i,1}$と$d_{i,q}$がそれぞれ下限値と上限値になる．$g_k(x)$は挙動制約条件であり，$ncon$はその数である．

2.2　ペナルティ関数　離散変数に対するペナルティ関数は文献（11）で用いられている以下の式を用いることにした．

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left[\sin \frac{2p\{x_{m+i}^c - 0.25(d_{i,j+1} + 3d_{i,j})\}}{d_{i,j+1} - d_{i,j}} + 1\right] \tag{5}$$

ここで$d_{i,j}$と$d_{i,j+1}$は離散変数の取り得る値であり，x_{m+i}^cは$d_{i,j}$と$d_{i,j+1}$の間の連続変数である．式（5）のペナルティ関数を目的関数に組み込んだ拡大目的関数は次のようになる．

$$F(x) = f(x) + s f(x) \tag{6}$$

式（6）においてsは式（5）に対するペナルティ係数である．これから，混合変数最適化問題は，すべての変数を連続変数として統一的に扱うことが可能となり，式（6）の拡大目的関数を最小化する問題へ変換される．

$$F(x) \to \min \quad (7)$$

$$Subject\ \ to$$

$$x_i^L \le x_i \le x_i^U \qquad i=1,2,\cdots,m \quad (8)$$

$$d_{i,1} \le x_{m+i}^c \le d_{i,q} \qquad i=1,2,\cdots,n \quad (9)$$

$$g_k(x) \le 0 \quad k=1,2,\cdots,ncon \quad (10)$$

以下の議論では，簡単のため，変数はすべて離散変数とする．また混合変数の場合は，2.9節で述べる．

2.3　拡大目的関数の様子と大域的最適化　例えば，次に示す簡単な１変数の離散変数問題を考える．

[例題]

$$Find \quad x \in \{-1,0,1,2\} \quad (11)$$

$$f(x) = x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x \to \min \quad (12)$$

この場合，ペナルティ係数s を$s=10$ とした場合の目的関数と式（6）の拡大目的関数の様子を図2に示す．

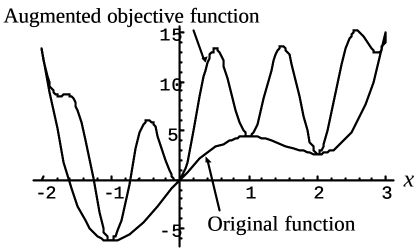

Fig.2 Augmented and original objective functions

図2 より拡大目的関数は多峰性を有し，その極小値の近傍に離散値が存在することがわかる．このことから，離散変数をペナルティ関数として扱い，すべての変数を連続変数として取り扱う場合，離散変数の最適解を求めることは，拡大目的関数の大域的最適解を求めることに変換される．この拡大目的関数に対して，任意の点を初期点として適当な勾配法を用いれば，離散変数の最適解が得られるが，得られる離散変数の最適解は初期点に大きく依存することになる．

2.4　ペナルティ係数の影響　式（6）のペナルティ係数s の値により，拡大目的関数の様相は当然変化する．ペナルティ係数を変化させたときの拡大目的関数の様子を図3に示す．図3からわかるように，問題に適したペナルティ係数を用いれば，離散変数の最適解を求めやすいことがわかるが，一方でペナルティ係数を大きく取りすぎると連続変数の最適解は離散変数の極めて近傍で得られるものの，各（局所的）最適解における拡大目的関数値の差が相対的に微小となる．

2.5　BGRTAの適用　GRTAの場合，一点探索法であり，（局所的）最適解における目的関数値の差が小さい場合は，探索領域が非常に限定されてしまうという問題点があるが[2]，BGRTAでは，ランダムに選んだ点に対し，一旦勾配法で局所的最適解を探索し，目的関数値を比較する．そのため，図3(d)に示すような拡大目的関数の局所的最適解における目的関数値の差が微小であっても，異なる局所的最適解の探索は可能であり，離散変数と連続変数から成る混合変数最適化問題に対しては，BGRTAが有効であると考えた．

2.6　初期ペナルティ係数の決定法　挙動制約条件などをペナルティ関数として扱い，最適解を求めるような場合，多くの研究事例では一見するといとも簡単にペナルティ係数を決定しているが，ペナルティ係数の設定は解の精度や求解性において非常に重要であり，設計者の大きな負担となっている[13]．式（5）で表されるペナルティ関数の性質として，拡大目的関数の最適解において，ペナルティ関数値は十分小さな値となる．そこで離散変数に対するペナルティ関数値を利用してペナルティ係数を適宜更新することを考えた．

ペナルティ係数の初期値としては，実行可能領域に任意の点x_0 を設定し，その点におけるペナルティ関数値$f(x_0)$ を求め，

$$s = s_{initial} = 1 + f(x_0) \quad (13)$$

とした．この初期ペナルティ係数を用いて，式（6）の拡大目的関数を構成し，局所的最適解x_L を求める．

2.7　収束判定とペナルティ係数の更新　拡大目的関数を最小化したときに得られる局所的最適解x_L において，ペナルティ関数値$f(x_L)$ が

$$f(x_L) \le e \quad (14)$$

を満足した場合は，得られた最適解の極めて近傍に離散値が存在するので，近傍の離散値へ移動すればよい．ここで式（14）のe は十分小さな正数である．一

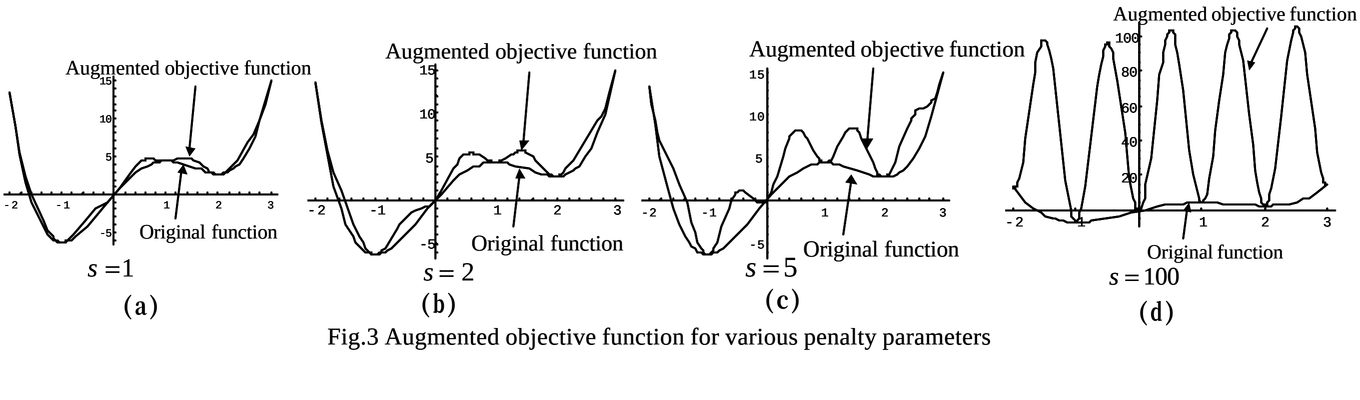

Fig.3 Augmented objective function for various penalty parameters

方，式（14）を満足しなければ，得られた局所的最適解は離散変数の間にあることを意味する．そのため，どちらの離散値へ移動させればよいのかを容易に決定することはできない．そこで式（14）を満足しない場合，得られた最適解でのペナルティ関数値 $f(x_L)$ を用いて，以下の式により，ペナルティ係数を更新して，得られた点 x_L を初期点として再度，局所的最適解を求める．

$$s = s \times \exp(1 + f(\boldsymbol{x}_L)) \tag{15}$$

式（15）を用いてペナルティ係数を更新して，逐次最適化計算を行うことにより，拡大目的関数の最適解を離散値近傍へ来るようにする．ペナルティ係数の更新による拡大目的関数の様子を図4 に示す．

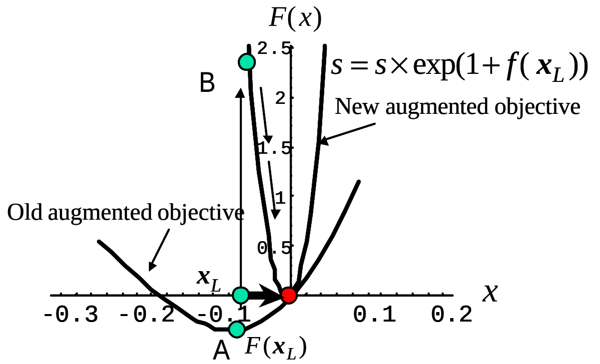

Fig.4 Update of penalty parameter

図4 において，式（14）を満足しなければ，ペナルティ係数を式（15）により更新する．その結果，x_L に対応する拡大目的関数の図4 の点A は，ペナルティ係数が更新された新しい拡大目的関数上の点B に対応することになる．BGRTA では拡大目的関数の感度を利用して（局所的）最適解を求めるため，探索点は図4 中の矢印のように動くことになる．その結果，式（14）を満足する点を見つけることが可能となる．

2.8　初期ペナルティ係数の利用　局所的最適解から分岐したある探索点が式（14）を満足した場合，離散変数のペナルティ関数に対するペナルティ係数 s は十分大きな値となっていることが想像され，拡大目的関数は例えば図3(d)のようになっている．そこで，式（14）を満足した場合，局所的最適解から分岐した別の探索点に対しては，式（13）の初期ペナルティ係数を用いて，別の離散値を見つける．

2.9　混合変数の場合　混合変数の場合，設計変数ベクトルは一般に次のように表すことができる．

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^C, \boldsymbol{x}^D)^T \tag{16}$$

ここで $\boldsymbol{x}^C$ と $\boldsymbol{x}^D$ はそれぞれ式（8），(9) の連続変数と離散変数の成分を表し，$\boldsymbol{x}^C = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$，$\boldsymbol{x}^D = (x^c_{m+1}, x^c_{m+2}, \cdots, x^c_{m+n})^T$ である．式（14）の収束判定を行う際は，設計変数ベクトルの中で連続変数の成分 $\boldsymbol{x}^C$ を無視し，離散変数に相当する成分 $\boldsymbol{x}^D$ に対してのみ，ペナルティ関数値を計算し，収束判定を行う．

2.10　従来の方法との相違　離散変数の取扱いに関しては，Shinらの方法[11]と変わりはない．しかし，本論文で提案する方法とShinらの方法は大きく異なる．Shinらの方法では，探索開始時において，すべての変数を連続変数として一旦最適解を求める．この際，離散変数に対するペナルティ関数は考慮せず，式（6）の離散変数に対するペナルティ係数 s をゼロと置いている．そしてペナルティ係数をゼロとして求めた最適解に対し，離散値へ近づくようにペナルティ係数 s を更新している．これは探索開始時にペナルティ係数 s を含めた場合，拡大目的関数が多峰性関数となり，結果として局所的最適解に陥ることがあるためである．また，ペナルティ係数 s の更新は定数を掛けることにより，更新しているが，この方法では用いる定数が問題に大きく依存する．また実行可能領域内に最適解がない場合は，別の初期点を設定し，再度実行可能領域内の最適解の探索を行っている．

一方で提案する手法は，探索開始時から離散変数に対するペナルティ係数 s を積極的に導入することにより，はじめから拡大目的関数を多峰性関数にする．そして，多峰性関数の大域的最適解を求めることができるBGRTAを適用することにより，大域的最適解の探索を行う．さらに離散変数に対するペナルティ係数 s の更新をする際に，ペナルティ関数値を考慮した式（15）を用いている．これは収束状況に合わせたペナルティ係数の更新方法であり，様々な問題への柔軟な対応が期待できる．さらにBGRTAの場合，基本的には1点探索と多点探索の繰り返しであるため，局所的最適解から分岐したある探索点が式（14）を満足した場合，別の探索点に対しては，初期ペナルティ係数を利用して，別の離散値を見つける点にある．

3　アルゴリズム

本章では，混合変数最適化問題のためのBGRTAのアルゴリズムを示す．探索初期に必要となる入力データとしては収束判定のための十分小さな正数 e が加わっている点が異なる．

最小化ステップ

(STEP1) 適当な初期点 x_0 を取り，式（13）による初期ペナルティ係数の計算．

(STEP2) 式（6）の拡大目的関数の局所的最適解 x_L の求解．

(STEP3) 式（14）による収束判定．式（14）を満足し

なければ，式（15）によりペナルティ係数を更新してSTEP2へ戻る．

分岐とトンネル・ステップ

(STEP4)局所的最適解 x_L における分岐数 $branch$ の初期化．（$branch=0$）

(STEP5)初期温度 T の設定．トンネル・ステップおよび制約ステップにおける探索回数 it, out をそれぞれ初期化する．$k=0$ とする．

(STEP6)各設計変数ごとに[0,1]の乱数を発生させ，それを $(-p/2, p/2)$ に変換し，p_i とする．

(STEP7)次式を用いて局所的最適解 x_L からの増分 $\boldsymbol{dx}$ を求める．

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}_L + \boldsymbol{dx} \qquad (17)$$

$$d\,x_i = T \tan p_i \qquad (18)$$

(STEP8)式（17）の点がすべての制約条件を満足していなければSTEP20へ．

(STEP9) 式（13）のペナルティ係数を用いて，拡大目的関数を構成．局所的最適解 x_L^* の求解．

(STEP10)式（14）による x_L^* の収束判定． x_L^* が式（14）を満足していなければ，

$$s = s\times\exp(1+f(\boldsymbol{x}_L^*)) \qquad (19)$$

により，ペナルティ係数を更新し，STEP9へ戻る．

(STEP11)拡大目的関数値の改善を検討．

$$F(\boldsymbol{x}_L^*) \le F(\boldsymbol{x}_L) \qquad (20)$$

であれば，拡大目的関数値は改善されたことになるので，STEP12へいく．そうでなければ，STEP15へ．

(STEP12)同じ最適解かどうかをチェック[2]．もし同じ最適解であれば，STEP15へ．

(STEP13)局所的最適解 x_L からの分岐数 $branch$ を増加．

$$branch = branch+1 \qquad (21)$$

(STEP14)局所的最適解における分岐数 $branch$ と最大分岐数 $branch_{\max}$ を検討．

$$branch = branch_{\max} \qquad (22)$$

であれば，得られた解の中から，目的関数値を最善とする点を次の分岐開始点としてSTEP4へ戻る．一方，式（22）を満足しなければSTEP5へ戻る．

(STEP15)繰り返し回数 it を増加．（$it=it+1$）

(STEP16)一つの温度当りの最大探索回数 $it_{\max}$ と比較．

$$it \le it_{\max} \qquad (23)$$

であれば，STEP6へ戻る．

(STEP17) $k=k+1$ として，次式にて温度を下げる．

$$T = T/(k+1) \qquad (24)$$

(STEP18)温度が，あらかじめ決めた最小温度 $T_{\min}$ よりも大きい場合は $it=0, k=0, out=0$ としてSTEP6へ戻る．

(STEP19)局所的最適解からの分岐数 $branch$ がゼロであれば，STEP14（もしくはSTEP3）で得られた解 x_L^* を最適解として探索を終了する．そうでなければ，得られた解の中から，目的関数値を最善とする点を次の分岐

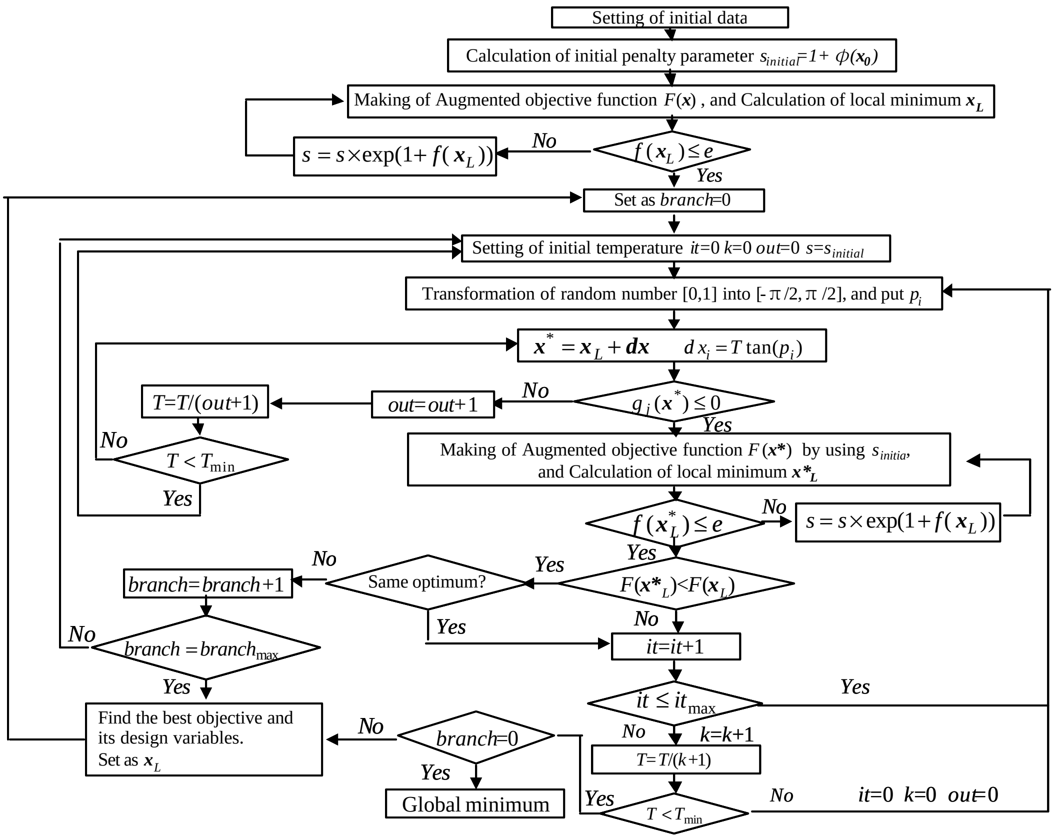

Fig.5 The algorithm of BGRTA for mixed design variables

開始点とし，STEP4へ戻る．

制約ステップ

(STEP20)探索点は制約条件の外にあるため，

$$out = out + 1 \tag{25}$$

として，次式により温度を下げる．

$$T = T/(out+1) \tag{26}$$

(STEP21)式（26）の温度T が，あらかじめ決めた最小温度$T_{\min}$ 以下であれば，STEP5へ戻る．そうでなければ，STEP7へ戻る．

アルゴリズムの流れ図を図5 に示す．

4　数値計算例

数値計算例を通じて，提案する手法の有効性を検討する．扱う問題は数学問題および構造最適設計問題とした．入力データとして，以下の数値を用いた．

1）初期温度　$T = 1.0$

2）探索終了のための最小温度　$T_{\min} = 1.0\times10^{-5}$

3）一つの温度当りの探索回数　$it_{\max} = 20$

4）ペナルティ関数値の判定　$e = 1.0\times10^{-5}$

5）最大分岐数　$branch_{\max} = 4$

4.1　2変数1制約条件問題　次に示す簡単な2変数の数学問題を扱う[14]．

$$f(\boldsymbol{x}) = -x_1 - 1.8x_2 \to \min \tag{27}$$

$$g_1(x) = x_1^2 + (x_2+6)^2 - 85 \le 0 \tag{28}$$

$$x_1 \ge 1,\quad x_2 \ge 0 \tag{29}$$

x_1, x_2： integer

この問題の実行可能領域と，連続変数及び離散変数の大域的最適解を図6 に示す．この問題において，変数を直接的に連続変数として扱った場合の最適解は一つであり，$x_G = (4.477, 2.059)^T$ である．この点を四捨五入もしくは切り捨てる方法では，$x = (4,2)^T$ となり，離散値の大域的最適解を求めることが出来ない一例である．初期点を$x_0 = (1.5, 0.5)^T$ とした場合，提案する手法を用いて各探索過程で求まった局所的最適解と大域的最適解を表1 に示す．表1 から，総当り的な探索を行い，最終的に大域的最適解を求めていることがわかるが，これはBGRTAの特徴の一つである局所的最適解を可能な限り見つけるというために起きたことである．

4.2　2変数2制約条件問題　次の問題を考える[15]．

$$f(\boldsymbol{x}) = -1.1x_1 + x_2 \to \min \tag{30}$$

$$g_1(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 + 1 \le 0 \tag{31}$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = -4x_1^2 + 28x_1 - x_2 - 40 \le 0 \tag{32}$$

$$0 \le x_1 \le 5,\quad 1 \le x_2 \le 8 \tag{33}$$

各設計変数の離散値は，ともに0.5間隔ごとに存在するものとする．制約条件から構成される実行可能領域と大域的最適解を図7 に示す．図7 からわかるように，

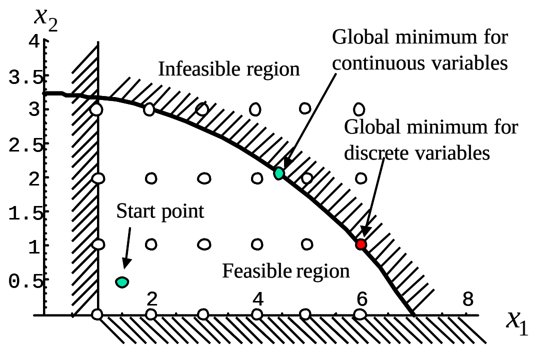

Fig.6 Feasible domain and global minimum

Table 1 Local and global minimum

x_1	2	2	3	5	4	5	6
x_2	1	3	2	1	2	1	1
$g_1(\boldsymbol{x})$	-32	0	-12	-11	-5	-11	0
Obj	-1.2	0.8	-1.3	-4.5	-2.4	-4.5	-5.6

この問題は例題5.1とは異なり，実行可能領域が分離しており，また図7 の各格子点近傍に拡大目的関数の極小値が生成されることから，非常に多くの局所的最適解をもつ問題である．探索初期点を格子上の点$x_0 = (1.0, 6.5)^T$ にした時に得られた最適解を図7 の■印で示す．

実行可能領域が分離している場合も，BGRTAでは大域的最適解が探索できることがわかり，また例題5.1とは異なり，一部の離散値をたどりながら，大域的最適解を見つけていることがわかる．また，BGRTAは制約条件を陽に扱う方法であるため，制約条件上の最適解制約条件上のいくつかの（局所的）最適解を容易に見つけることができている．

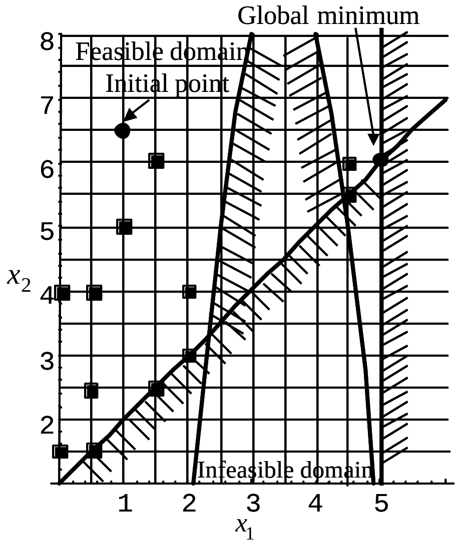

Fig.7 Local and global minimum

4.3　圧力器の最適設計問題　図8に示す圧力器の最適設計問題を考える[4]．

この問題は混合変数の最適設計問題の中でも特に有名であり，多くの研究報告がなされている[(4),(10),(16-19)]．さら

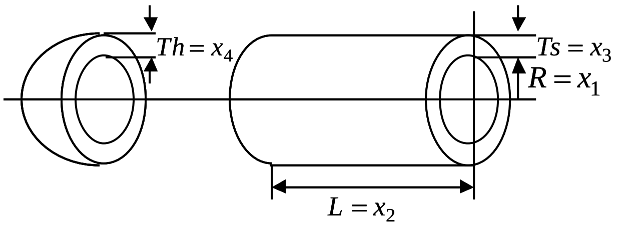

Fig.8 Pressure vessel

に，変数をすべて連続変数として扱った場合は図1(a)と(b)の両ケースを満足する問題であり，最適解の探索が極めて困難な問題である．設計変数は，圧力器の半径R（連続変数），長さL（連続変数），圧力器の厚さTsとTh（ともに離散変数）である．目的関数は総製作コストの最小化であり，各設計変数をそれぞれ図8のように置き換えると，

$$f(\boldsymbol{x}) = 0.6224x_1x_2x_3 + 1.7781x_1^2x_4 + 3.1661x_2x_3^2 + 19.84x_1x_3^2 \to \min \quad (34)$$

となる．一方，側面制約条件と挙動制約条件はそれぞれ次のように与えられる．

$$25 \le x_1 \le 150 \quad (35)$$

$$25 \le x_2 \le 240 \quad (36)$$

$$0.0625 \le x_3, x_4 \le 1.25 \quad (37)$$

$$g_1(\boldsymbol{x}) = \frac{0.0193x_1}{x_3} - 1 \le 0 \quad (38)$$

$$g_2(\boldsymbol{x}) = \frac{0.00954x_1}{x_4} - 1 \le 0 \quad (39)$$

$$g_3(\boldsymbol{x}) = \frac{x_2}{240} - 1 \le 0 \quad (40)$$

$$g_4(\boldsymbol{x}) = \frac{1296000 - \frac{4}{3}p\,x_1^3}{p\,x_1^2x_2} - 1 \le 0 \quad (41)$$

ただし，離散変数であるx_3とx_4は，ASMEの規格上，0.0625[inch]間隔の値しか取れないものとする．

探索初期点は側面制約条件内に乱数を用いて発生させ，最適解を探索した．提案手法で得られた最もよかった結果と，従来の研究結果を併せて表2に示す．研究報告論文の数値と直接比較するため，表中の単位は[inch]を用いた．20回試行した結果，すべての試行において，$5850 \le f \le 5853$の範囲に目的関数値が到達し，平均して約5000回のファンクションコールを必要とした．計算回数という側面で考えても，本論文で提案した離散変数の取扱いと，混合変数最適化問題に対するBGRTAの適用の有効性が確認できた．また最大分岐数$branch_{\max}$をいくつか変化させたところ，最大分岐数が3から5の間で目的関数値が$5850 \le f \le 5853$の範囲に到達しており，ファンクションコールも最大で20000回程度であったため，最大分岐数としては，以下の範囲が有効であると思われる．

$$3 \le branch_{\max} \le 5 \quad (42)$$

さらに本節の問題に対して，目的関数値をさらに改善するための条件をいくつか挙げると次のようになると思われる．

(1) $g_1(x)$と$g_4(x)$は活性な制約条件であること．
(2)圧力器の長さLを，より低い値にすること．
(3)制約条件$g_2(x)$をより活性な状態へ近づけること．

5　結言

本論文では，筆者らが提案した複数の最適解を求めるBGRTAの特徴を生かし，離散変数と連続変数から成る混合変数の最適化問題への適用を試みた．提案した手法は，離散変数に対してペナルティ関数を作成することにより，拡大目的関数が多峰性関数となり，また離散値の近傍で極小値が生成される性質を利用して，逐次拡大目的関数のいくつかの局所的最適解を求めながら，大域的最適解もしくはそれに相当する準最適解を得る方法である．これにより拡大目的関数は，すべての設計変数を統一的に連続変数として扱うことが可

Table 2 Comparison of the results

	Sandgren [4]	Qian [17]	Kannan [10]	Hsu [18]	Lewis [19]	Arakawa [16]	This study
R [inch]	47.000	58.312	58.291	N/A	38.760	38.858	38.880
L [inch]	117.701	44.522	43.690	N/A	223.299	221.402	220.893
Ts [inch]	1.125	1.125	1.125	N/A	0.750	0.750	0.750
Th [inch]	0.625	0.625	0.625	N/A	0.375	0.375	0.375
$g_1(\boldsymbol{x})$	-0.194	0.000	0.000	N/A	-0.003	0.000	0.000
$g_2(\boldsymbol{x})$	-0.283	-0.110	-0.110	N/A	-0.014	-0.011	-0.010
$g_3(\boldsymbol{x})$	-0.510	-0.814	-0.818	N/A	-0.070	-0.078	-0.079
$g_4(\boldsymbol{x})$	0.054	-0.021	-1.109	N/A	-1.519	0.000	0.000
Objective[$]	8129.800	7238.830	7198.200	7021.670	5980.950	5850.770	5846.306

能となる．また，離散変数のペナルティ関数値を用いた新しいペナルティ係数の更新式を提案した．

離散変数や混合変数の最適解の探索では，非常に多くの計算回数が必要とされており[20]，本論文もBGRTAを適用しているため，問題によっては解の総当り的な探索をしている感は否めながら，実行可能領域が分離している問題でもBGRTAの特徴の一つである局所的最適解からのジャンプにより，大域的最適解の探索が可能である．また，4.3節で取り上げた圧力器の最適設計問題に対しては，現在報告されている最良の値を得ており，さらに目的関数値を改善するための条件と方策を述べた．

本研究を遂行するにあたり，離散変数の取扱いに関する諸注意などをご教授して頂いた山川宏先生（早稲田大学理工学部）に感謝したい．

参考文献

(1)Kitayama,S., Yamazaki,K., Global Optimization by Generalized Random Tunneling Algorithm(1st report: Proposal of Algorithm and Numerical Examples), ***N**ihon **K**ikai **G**akkai **R**onbunshu A(**Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers**, **Series A)***, **69**-684,(2003),1250-1256. (in Japanese).

(2)Kitayama,S., Yamazaki,K., Global Optimization by Generalized Random Tunneling Algorithm(3rd report: Seach of some local minima by branching), ***N**ihon **K**ikai **G**akkai **R**onbunshu A(**Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers**, **Series A)***, **70**-695,(2004),970-977. (in Japanese).

(3)Sakawa, M., ***O**ptimization of **D**iscrete **S**ystems*, (2000), Morikita shuppan, Co., Ltd.(in Japanese)

(4)Sandgren,E., Nonlinear and Discrete Programming in Mechanical Design Optimization, ***T**ransaction of the **ASME**, **J**ournal of **M**echanical **D**esign*, **112**,(1990), 223-229.

(5)Schmit, L.A., Fleury, C., Discrete-Continuous Variable Structural Synthesis Using Dual Method, ***AIAA J**ournal*, **18**, (1980), 1515-1524.

(6)Rao, S.S., ***E**ngineering **O**ptimization: **T**heory and **A**pplication*,(1996), Wiley Interscience.

(7)Olsen, G.N., Vanderplaats, G.N., Method for No nlinear Optimization with Discrete Variables, ***AIAA J**ournal*, **27**-11,(1989), 1584-1589.

(8)Arakawa, M., Hagiwara, I., Nonlinear Mixed Variable Optimum Design Applying Adaptive Range Genetic Algorithms, ***N**ihon **K**ikai **G**akkai **R**onbunshu C(**Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers**, **Series C)***, **64**-621,(1998),1626-1635. (in Japanese).

(9)Fu,J.F., et al., A Mixed Integer-Discrete-Continuous Programming Method and its Application to Engineering Design Optimization, ***E**ngineering **O**ptimization*, **17**, (1991), 263-280.

(10)Kannan,B.K., Kramer,S.N., An Augmented Lagrange Multiplier Based Method for Mixed Intger Discrete Continuous Optimization and Its Applications to Mechanical Design, ***T**ransaction of the **ASME**, **J**ournal of **M**echanical **D**esign*, **116**, (1994), 405-411.

(11)Shin,D.K., et al., A Penalty Approach for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables, ***E**ngineering **O**ptimization*, **16**, (1990), 29-42.

(12)Rastogi,N., et al., Discrete Optimization Capabilities in Genesis Structural Analysis and Optimization Software, ***9TH AIAA/ISSMO S**ymposium on **M**ultidisciplinary **A**nalysis and **O**ptimization*, AIAA2002-5646.

(13)Arakawa, M., Hagiwara, I., Development of Adaptive Range Genetic Algorithms (Proposal of the new operators for efficient and high accurate solutions), ***N**ihon **K**ikai **G**akkai **R**onbunshu C(**Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers**, **Series C)***, **65**-638,(1999),4156-4163. (in Japanese).

(14)Loh,H.T., Papalambros,P.Y., A Sequential Linearization Approach for Solving Mixed-Discrete Nonlinear Design Optimization Problems, ***T**ransaction of the **ASME**, **J**ournal of **M**echanical **D**esign*, **113**, (1991), 325-334.

(15)Papalambros, P.Y., Wilde, D.J., ***P**rinciple of **O**ptimal **D**esign*, (2000), CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS.

(16)Arakawa, et al.,Genetic Range Genetic Algorithm to Obtain Quasi-Optimum Solutions, ***ASME/DETC/DAC***, (2003), Paper No. 48800, in CD-ROM.

(17)Qian,Z., et al., A Genetic Algorithm for Solving Mixed Discrete Optimization Problems, ***DE-65-1**, **A**dvances in **D**esign **A**utomation*, 1, (1993),499-503.

(18)Hsu, Y. H. , et al., A Two Stage Sequential Approximation Method for Non-linear Discrete Variable Optimization, ***ASME/DETC/DAC MA***, 197-202.

(19)Lewis, K. , Mistree, F., Foraging-Directed Adaptive Liner Programming: An Algorithm for Solving Nonlinear Mixed Discrete/Continuous Design Problems, ***ASME/DETC/DAC***, (1996), Paper No. 1601, in CD-ROM.

(20)Arora, J. S. Huang, M. W., Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review, ***S**tructural **O**ptimization*, **8**, (1994), 69-85.