Modeling of granular damper using cellular automata

セルオートマトンによる粒状体ダンパのモデル化*

小松崎俊彦*1，佐藤 秀紀*1，
岩田 佳雄*1，森下 信*2

Modeling of Granular Damper using Cellular Automata

Toshihiko KOMATSUZAKI, Hidenori SATO,
Yoshio IWATA, and Shin MORISHITA

The present paper deals with flow simulations of granular materials moving inside container using Cellular Automata (CA). CA is a class of computer modeling techniques, which consists of discrete unit elements arranged uniformly on spaces, each of which can vary within a finite set of values to express the physical state of the components of the system. The time of evolution of the element state is performed synchronously according to local neighbor rules, instead of governing equations, taking into account the state of the element itself and its nearby elements. Compared with the conventional method such as DEM, it is addressed that the modeling techniques with CA provide advantages on the point of computation efficiency and numerical stability due to the discrete treatment of time and space. In this study, the damping characteristics of a granular damper is investigated numerically by Cellular Automata model and also by DEM, where a container which incorporates granular materials is attached to the mass of one-DOF vibrating system. The container is treated two-dimensionally with thickness identical to a diameter of particle. The simulated particle motions and the damping effects obtained by CA model is compared with DEM solution as well as experimental results, and the present CA model is evaluated in qualitative aspects.

Key Words : Impact Damper, Granular Materials, Cellular Automata, Discrete Element Method

1．緒　　論

粒状体の流れについては, 粒子全体の動きを連続体として扱い, 流れの支配方程式を導いて解析することが一般的に行われてきた．しかし，この手法では粒子同士の衝突や摩擦の影響を受ける粒状体の複雑な挙動を表現することは困難であった．その一方で, 個々の粒子の挙動をモデル化し, その重ね合わせにより粒子全体の運動を解析する手法として個別要素法が様々な分野で適用されるようになり(1)-(2), 粒状体の挙動のみならずこれらを含む周辺の機器・構造物への作用力などをある程度定量的に把握することが可能となった(3)-(5)．ただし, 基本的には個々の粒子に運動方程式を与えて解く手法であるため, 粒子数が多くなると現状の計算機性能でも処理が追いつかず, 多大な計算コストおよび時間を要することが知られている．

近年, 系全体に関する方程式の構成を前提とする従来のモデル化手法では解析困難な工学的現象に対し, その構成要素間の相互作用を重視したモデル化を行う新たな方法論の導入が試みられている．このような方法論に基づいて捉えた系を複雑系（Complex Systems）と称している．セルオートマトン（Cellular Automata, CA）は複雑系に対する方法論を具象化するための道具として発展してきたもので, これら創発的現象のモデル化に有効であり, 様々な分野への適用が試みられている(6)-(10).

本報告では, CAを粒状体解析に適用し, 従来手法と比較して短時間に, かつ単純な規則により粒状体の挙動を再現することを試みる．CAを粒状体のモデル化に適用した例は過去にもあり(11)-(15)，物理法則をある程度考慮したモデルにより実験と定性的に良く一致する結果を得ている(14)．しかし，力学的取り扱いの不可欠な粒状体に関わる問題として，例えば粒状体ダンパ(4)，(16)，(17)のように, 粒状体の挙動および容器壁の運動が相互に影響を及ぼし合う問題を定量的にCAにより取り扱った例は少ない.

そこで, 本研究ではCAを粒状体ダンパに適用して, 変位励振を受け振動する容器内の粒子挙動をモデル化することを試みるとともに，制振器としての力学的評価を行うことを目的としている．まず，粒状体ダンパによる模型構造物の制振実験を行い，主振動系の制振効果について応答曲線を求めて，CA および個別要素

*原稿受付　2002年12月11日.
*1正員，金沢大学工学部（〒920-8667　金沢市小立野2-40-20）.
*2正員，横浜国立大学大学院環境情報研究院（〒240-8501　横浜市保土ヶ谷区常盤台79-7)

法によるシミュレーション結果との比較検討を行った．また実験で観察した粒子挙動のパターンを CA による結果と比較した．さらに CA と個別要素法によるシミュレーションとの計算時間に関する検討を行ったので報告する．

2．CA の概要

CAは解析対象をセルと称する区分領域に分割し，各セル上に定義された主として離散数値で表現される状態量を，近傍のセル間に設けた局所近傍則および時間発展を定める状態遷移則に基づき離散時間を追って推移させる現象のモデル化手法である[10]．局所近傍則は任意に設定することができ，解析対象が物理現象を表すものであれば物理法則を近傍則として扱うことも可能であるが，数式で表現できるものや，解析者の直感に基づく関係則を与えることもできる．後者についてはその一般的導出方法を定めることは困難であるが，支配方程式に代わるものであるゆえ，十分に吟味する必要がある．また，2 次元CAの場合解析空間は通常矩形あるいは三角形状のセルに分割するため，状態量には方向性が与えられる．そこで，流体のシミュレーション等の場合は空間全体についてある種の平均化操作が必要になることもある．

CA の特徴として，支配方程式を必ずしも用いる必要のないこと，基本的に整数値演算であるため数値計算的に安定であること，状態量を一斉に更新するアルゴリズムであるため並列計算向きであることなどが挙げられる．

3．実験モデル

３・１　実験装置　粒状体ダンパの制振特性を把握すること，および粒子の運動に関してシミュレーションとの比較を行う目的で，図 1 に示す実験装置を作成し，強制加振実験を行った．主振動系の運動方向を重力方向とし，リン青銅板で作成した板ばねの先端に質量としてアクリルケースを取り付けた．可視化のために透明アクリルを用いている．シミュレーションモデルと同様に，2 次元的に取り扱うために，ケースの内寸法は，奥行き方向に粒子一層分の隙間 6mm を設け，高さ 96mm×幅 60mm で作成した．このとき高さおよび幅方向にはそれぞれ 16 および 10 個の粒子を詰めることができる．ケースの質量は 88.6g である．アクリルケース内には可動粒子としてアクリル球（φ6mm, 0.2g）を使用し，粒子と上下容器壁との衝突によって制振効果を得る．主系の固有振動数は約 6Hz である．

３・２　実験方法　主振動系の基礎を変位励振し，粒子個数を変化させた場合の主振動系の周波数応答を計測した．また，粒子の運動パターンについて，振動振幅一定の条件において粒子個数の違いによる粒子挙動の観察を行った．

３・３　粒状体ダンパの制振特性　図 2 に粒状体ダンパの制振特性を示す．加振周波数を徐々に変化させ，各周波数においてダンパ容器部の変位振幅実効値を平均したものを縦軸として採用し，横軸は粒子無しの場合の共振周波数を用いて無次元化してある．粒子数は 10, 30 および 50 個の場合について示してある．粒子数の増加とともに，制振効果が高くなっていることがわかる．また，曲線のピークが低周波側へ移動しているのは，純粋に減衰が大きくなったことに原因しているのではなく，粒子が主振動系の見かけの質量増加に寄与しているためと考えている．

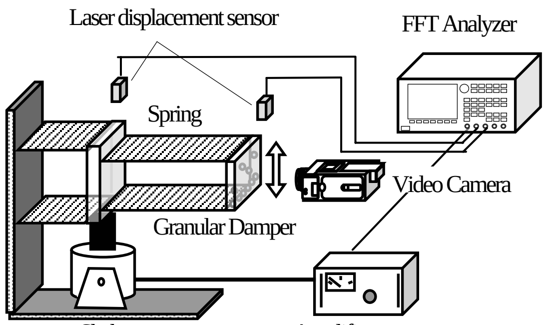


Fig. 1 Experimental setup of vertical type granular damper

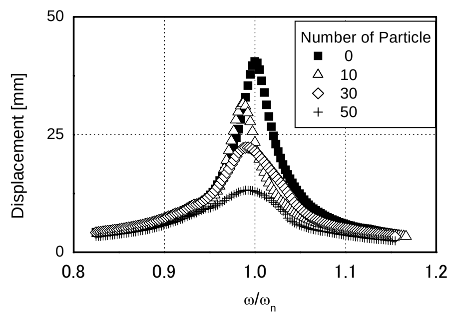


Fig. 2 Comparison of damping effect by particle number (Experimental result)

４．個別要素法による粒子運動の計算

まず，従来より粒状体のシミュレーションにしばしば用いられている個別要素法による解析を行った．個別要素法（Discrete Element Method，DEM）とは，全ての粒子に対し個別の運動方程式をたて，それらの重ね合わせにより粒子の集合体の挙動を表現する手法である．以下に概要を示す．

４・１　主系の運動　重力方向を x 方向とした場合，主振動系に関する運動方程式は式(1)で表される．

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f + f_p \quad \cdots\cdots (1)$$

M は容器の質量，C および K はそれぞれ主系の減衰係数とばね定数を表す．また，f は系に作用する外力を表し，f_p は容器壁が全ての接触粒子から受ける衝突力の総和である．

４・２　粒子の運動　粒子の運動としては，空間を 2 次元とした場合，重力方向，水平方向および回転運動が考えられるが，簡略化のため回転運動については考慮しないものとする．全て均一の球形粒子とすると，i 番目の粒子に関する運動方程式は次式で表される．

$$m\ddot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i - m\vec{g} \quad \cdots\cdots (2)$$

m は粒子の質量，$\vec{p}_i$ は位置ベクトル，$\vec{F}_i$ は粒子への作用力ベクトルであり，g は重力加速度を表す．平板と粒子，および粒子同士の接触時に働く作用力は法線方向 f_n と接線方向 f_t とに分けて考えられ，法線方向の接触変形量を δ_n，接線方向を δ_t として，それぞれ式(3)および式(4)より求まる[1]．

$$f_n = k_p \delta_n^{\frac{3}{2}} + c_p \delta_n^{\frac{1}{4}} \dot{\delta}_n \quad \cdots\cdots (3)$$

$$f_t = \mu f_n \dot{\delta}_t / \left|\dot{\delta}_t\right| \quad \cdots\cdots (4)$$

式(3)の c_p は粒子の反発係数一定として求まる減衰係数，k_p は Hertz の理論より得られるばね定数を表し，式(4)の μ は摩擦係数である．k_p は衝突が粒子と壁の間で生じる場合を k_{p1}，粒子同士の場合を k_{p2} とし，それぞれ式(5)，(6)によって求められる．

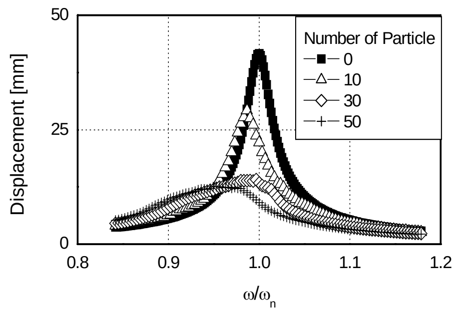
$$k_{p1} = \frac{4\sqrt{r}}{3} \frac{E \cdot E_0}{(1-\sigma^2)E_0 + (1-\sigma_0^2)E} \quad \cdots\cdots (5)$$

$$k_{p2} = \frac{\sqrt{2r}}{3} \cdot \frac{E}{(1-\sigma^2)} \quad \cdots\cdots (6)$$

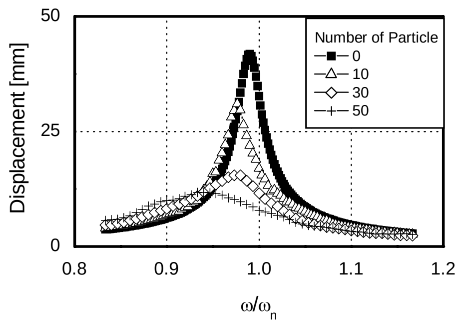
式(5)，(6)において，E，E_0 はそれぞれ粒子および容器壁のヤング率，σ，σ_0 はポアソン比，r は粒子半径である．主振動系への衝突力 f_p は，壁面と接触する粒子の衝突力 f_n および f_t の x 方向成分を総和して得られる．

Table 1　Parameters used in DEM calculation

Primary system	
Mass, M	0.086 [kg]
Spring const., K	123.4 [N/m]
Damping Coeff., C	0.08 [Ns/m]
Particle	
Mass, m	0.2×10^3 [kg]
Radius, r	3×10^3 [m]
Elastic const., E	0.5 [GPa]
Poisson's Ratio, σ	0.3
Friction Coeff., μ_p, μ_w	0.5, 0.5
Container	
Dimension	0.096 x 0.06 x 0.006 [m]
Elastic const., E_0	0.5 [GPa]
Poisson's Ratio, σ_0	0.3



(a) $\mu_p = 0.5$, $\mu_w = 0.5$



(b) $\mu_p = 0.5$, $\mu_w = 0.6$

Fig. 3　Comparison of damping effect by particle number (DEM Calculation)

４・３　ＤＥＭによる解析結果　DEM を用いて粒子挙動に関する数値計算を行い，制振特性の評価を行った．計算に用いたパラメータを表 1 に示す．また，実験と同様に粒子個数 10, 30 および 50 個の場合について制振効果を比較したものを図 3 に示す．

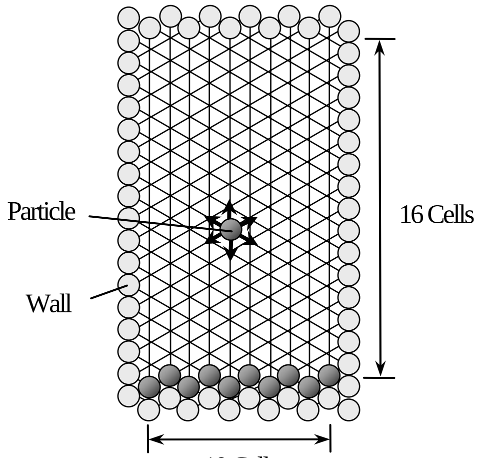


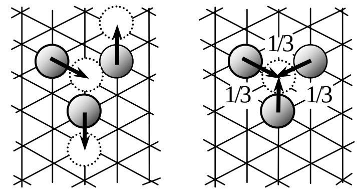
Fig. 4 Space discretization and cell states

図 3(a)は，粒子同士および粒子と容器壁との摩擦係数 μ_p , μ_w を共に 0.5 とした場合の結果である．粒子数の増加に伴い制振効果が大きく現れる点において，実験結果と一致する．しかし曲線のピークは実験で得られた曲線と比較して，特に粒子数 30 個の場合については計算値で制振効果が大きく現れている．本解析では粒子の回転運動を考慮していないことや，粒子同士および粒子と容器壁との摩擦係数の与え方が影響しているものと考えられる．一方の図 3(b)は，粒子−容器壁間の摩擦係数を 0.6 とした場合の結果を示している．このように，パラメータの設定によってはより実験値に近い結果が得られるものと考えられる．

５．ＣＡによる粒子運動のモデル化

本研究においては2次元の問題として扱い，領域は三角形に分割した．1 粒子に対して複数のセルを割り当てることにより，方向性に関して拘束を緩和することが可能であるが[14, 15]，ここでは1セルに1 粒子を対応させるものとする．局所近傍則は，粒子の移動に関するもの，粒子同士の衝突に関するもの, および粒子と容器壁面との衝突に関する規則の３種類を定義した．

５・１　解析領域の設定と状態量　解析空間を図4に示す．セルの状態量として，壁，粒子および空間の３状態を与えた．状態が粒子のセルについては，さらに方向と大きさを持つ速度相当量を定義し，粒子セルは近傍６方向に移動できるものとする．粒子形状は球形であることを前提とし，1セルと1粒子が対応しているために，堆積状態では粒子は隙間なく詰まることになる．また，容器は上下左右４方向を壁セルで囲むことによって表現している．重力を考慮するための格子設定の都合上，容器側面は壁セルを一直線上に並べることができる一方で，底面および上面は隣り合うセルが互い違いに並ぶことになる．



(a) No conflict　(b) Conflicting case

Fig. 5 Particle movements

５・２　粒子の移動に関する規則　粒子セルは静止状態を含めて必ず移動ベクトルを持ち，移動先の近傍セルが空きセルであれば移動可能とした．このとき，図 5 に示すように目的の空きセルへ向かう粒子が同時に複数ある場合，複数個のうち一つを等確率で選択し，選ばれた一つのみが移動可能とした．

速度の大きさについては力学法則を満たすように与える．ただし，アルゴリズムの都合上，粒子は 1 計算ステップ間に最大 1 セル分の距離しか移動できないため，速度の表現を「1 セルの移動に要する時間」とし，粒子が同じセルに留まる時間によって粒子の速度を表現した．具体的には，1 計算ステップ相当時間を Δt とし，1 セルに割り当てる単位長さを Δx ，速度を v とすると，まず重力加速度 g に従う速度増加量 Δv は,

$$\Delta v = g\Delta t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

ここで $g = 10^4$ mm/s^2 より， $\Delta t = 1.0\times10^{-3}$ secと定義することによって単位の速度増加量を離散数値 $\Delta v = 1$ mm/sで扱うことができる．粒子が鉛直下方向の移動ベクトルを有する場合には各ステップに+1，上方向には-1 ずつ変化するものとし，次の条件を満たす場合に粒子は移動可能とした．

$$\sum v \geq \Delta x / \Delta t \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

移動方向の変化については，他粒子および壁面との衝突が無い場合には現在の向きを保つ．ただし，重力の影響を考慮するために，上向きに運動している粒子の速度がゼロになった時点で下方向へ変化させた．速度状態量に負の値は用いないが，次に示す衝突後の速度計算の際には符号を考慮する．

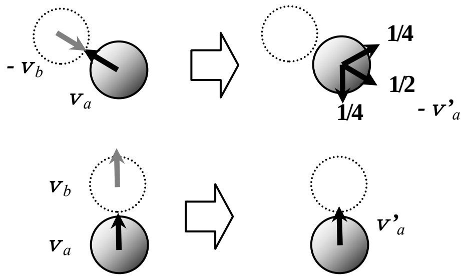


Fig. 6 Examples of rule on collision against particle

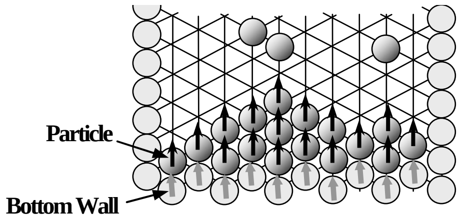


Fig. 7 Ejection of cumulated particles by wall

５・３　粒子同士の衝突に関する規則　粒子同士の衝突は 2 体衝突の場合のみを取り扱い，注目粒子とその近傍の隣り合う粒子に関して判定を行う．注目粒子が持つ移動ベクトル方向の近傍セル内に他の粒子が存在するか判定し，以下に示す更新式に従い速度の大きさを変化させる．

$$\mathbf{v}'_\mathbf{a} = \frac{1}{2}\{(\mathbf{v_a} + \mathbf{v_b}) - e(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_b})\} \cdots\cdots \quad (9)$$

式(9)において，$\mathbf{v_a}$，$\mathbf{v}'_\mathbf{a}$ は注目粒子の衝突前後の速度を表し，$\mathbf{v_b}$ は近傍粒子の速度，e は跳ね返り係数である．

さらに衝突後の移動方向については，式(9)の計算によって注目粒子の速度が負になる場合には，図 6 の例に示すように反対の直線方向に 1/2，斜め方向に 1/4 の確率で跳ね返るものとし，符号が変わらないか，もしくは同じ向きを持つ近傍粒子に追突する場合には，注目粒子の方向は変化しないとした．

５・４　粒子と容器壁の衝突に関する規則　粒子と容器壁面との衝突については，粒子と容器との質量の違いを考慮して速度の更新式を与える必要がある．ここでは，粒子 1 個の質量は容器と比較して無視できるほど小さいとして，衝突の際の粒子速度を次式に従い更新する．

$$\mathbf{v}'_\mathbf{a} = \mathbf{v_w} - e(\mathbf{v_a} - \mathbf{v_w}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

$\mathbf{v_a}$ は粒子の速度，$\mathbf{v_w}$ は容器壁面の移動速度である．跳ね返り係数 e については粒子同士の場合と同様の値を用いることとする．

さらに壁面が移動する場合の問題として，アルゴリズムの都合上，粒子は近傍に空きセルが無いと移動できず，容器壁底面および上面に接して滞留している粒子が壁面粒子に置き換えられてしまうため，強制的に粒子を排除する必要がある．そこで，まず壁セルに接している粒子セルをチェックし，さらにその粒子群に接する周辺の粒子についてもチェックを行う．続いて，壁が移動する方向が例えば図 7 に示すように上方向であれば，チェックした全ての粒子に同様の移動ベクトルを与え，かつ壁と同じ大きさの速度をこれらの粒子群のみに対して与えた．容器上面に粒子が接している場合についても同様の操作を行った．

以上の近傍則を用い，容器が静止している状態において，容器最上部より粒子を静かに落下させたときの跳ね返り軌跡を理論計算と比較したものを図 6 に示す．CA モデルの時間については，1 計算ステップを $dt = 1.0 \times 10^{-4}$ sec，1 セルの単位長さを 6mm として扱っている．4 回目の跳ね返りまで比較的良く一致していることがわかる．このとき跳ね返り係数として 0.75 を与えた．

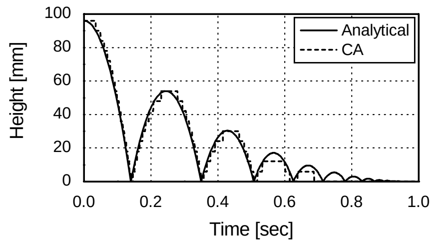
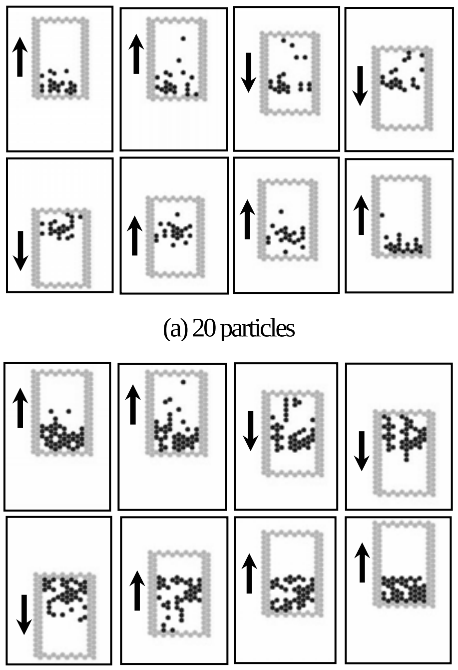


Fig. 8 Comparison of rebound

６．シミュレーションおよび考察

CA モデルにおいて，1 セル間隔を粒子の大きさ 6 mm と見なして，実験装置との対応を考えて容器の内寸法を縦 18×横 12 セルと与え，その内部には最大 16×10 個の粒子が詰まる空間を与えた．

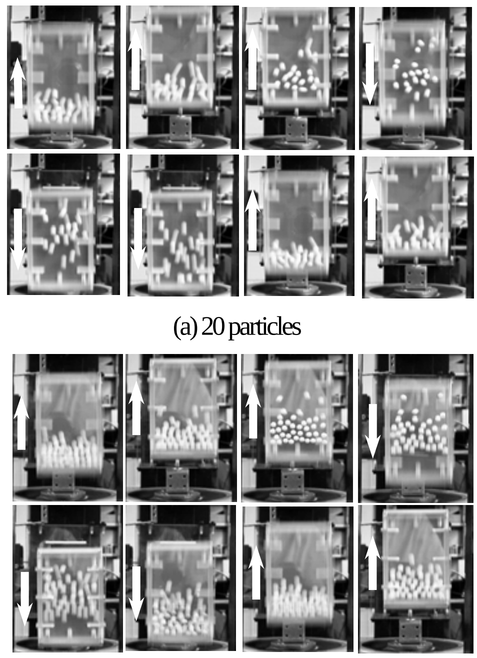
まずは定性的な粒子挙動の確認を行うため，CA モデルによって再現した 1 周期における粒子群の運動の様子を，実験画像と比較する．このとき，容器は上下に振幅±4 セルにて正弦波状に振動させるが，空間位置を離散数値で表現する都合上，実数計算によって求めた容器の変位を階段状の波形で近似している．物理的には±24 mm の振幅で振動する場合を想定している．また，容器の振動周期は T=1667 ステップとした．これは $dt = 1.0 \times 10^{-4}$ sec



(a) 20 particles

(b) 40 particles

Fig. 9 Observation of particle movement by CA simulation
(40 particles, ±4 cells of amplitude)



(a) 20 particles

(b) 40 particles

Fig. 10 Experimental observation of particle movement
(40 particles, ±25mm amplitude, 6 Hz sinusoidal)

と考えると，実験装置での共振周波数付近 6 Hz に対応する．

さらに，粒状体ダンパとしての制振効果を再現するために，粒子および容器の質量として実際と同様の値を CA モデルに考慮し，容器の加振周波数を共振点付近で変えながら周波数応答関数を求めた．実験，DEM 計算と同様に，粒子数 10～50 個を 10 個刻みに変えて比較した．

６・１　粒状体の運動パターン　粒子数 20，40 個の場合について，CA によるシミュレーション結果を図 9 に示す．1 周期 1667 ステップを 208 ステップ毎に表示しており，図中の矢印は容器の移動方向を表す．同様に，容器の加振振幅±25 mm，加振周波数 6 Hz，および粒子数 20，40 個とし，1 周期における粒子の運動の様子を実験にて撮影したものを図 10 に示す．CA モデルにより，容器底面に堆積する粒子が押し上げられ，適当な間隔で空中において分離し再び底面に堆積する様子が再現されており，実験結果と定性的に一致した．

６・２　制振特性の評価　CA モデルの数値的な評価手段としては，実際の現象より観測可能な物理量との比較を行う必要があるが，粒子個々の速度や各衝突力を実際に計測することは現実的に困難であり，一般的には統計的な扱いをせざるを得ない．よってここでは CA モデルを数値的に評価するために，加振周波数を変えながら，主振動系の変位に関する周波数応答曲線を求めた．このとき，主振動系の運動は DEM モデルと同様に運動方程式をルンゲ・クッタ法により数値的に解き，一方でこれと並列に CA による粒子運動の計算を行い，CA モデルで得た粒子の衝突力を主振動系の計算に取り込んでいる．粒子の衝突力は，衝突前後の粒子の運動量変化より次式によって求めている．

$$f_a = m_p \times (\mathbf{v_a} - \mathbf{v'_a}) / dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

f_a は粒子 1 個の衝突力，dt は単位時間刻みである．ある時間に壁面に接触する粒子全てについて f_a を求め，これらを総和することにより総接触力を計算する．

粒子数 10，30 および 50 個の場合について，CA モデルにおける主系の応答を求めた結果を図 11 に示す．縦軸の値は 10 周期間の振動振幅を実効値平均して表現している．実験，DEM モデル同様に，粒子数の増加に伴って制振効果が大きくなっていることがわかる．粒子運動に関して比較的簡略なモデルを採用したにも関わらず，粒状体ダンパの特徴を再現することができている．しかし，制振効果が大きくなるにつれて曲線のピークが高周波側に移動している．これは，CA モデルにおいて粒子の静的接触力を考慮せず，粒子が移動している場合のみ力を主系に与えていることが要因であると考えている．

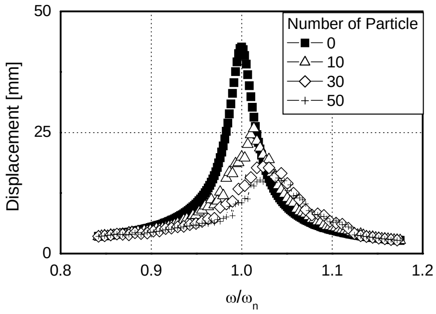


Fig. 11 Comparison of damping effect by particle number (CA model)

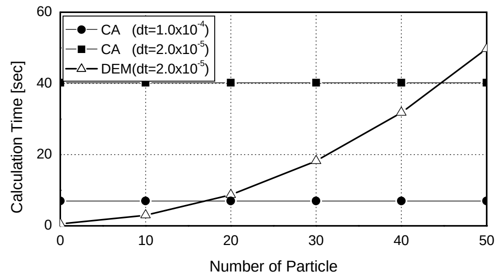


Fig. 12 Variation of calculation time against particle number

６・３　計算時間の比較　CA によるモデル化の有効性を示すものとして，計算時間が挙げられる．図 12 は，主系の振動一周期あたりに必要な計算時間を粒子数に対してプロットしたものである．

DEM モデルについては，サンプリング間隔 $dt = 2.0 \times 10^{-5}$ sec として計算を行っている．このオーダーより刻みを粗くした場合には，衝突力の計算が不安定になった．一方の CA モデルについては，これ以上精度を上げても計算結果にさほど影響しない時間刻みとして，計算 1 ステップあたり $dt = 1.0 \times 10^{-4}$ sec を割り当てた．また，DEM との直接比較のために，DEM モデルと同様の時間刻みについても計算を行っている．いずれにせよ CA モデルの場合には時間刻みを粗くしても数値的な不安定さは生じない．DEM では粒子数が増加するとともに計算時間は級数的に増加するのに対し，CA では図に示す粒子数の範囲については計算時間に変化が見られなかった．DEM の場合には，粒子数とともに同数の運動方程式を解く必要があること，および接触判定を行うために全ての粒子同士の距離を求める必要があることが大きく影響している．一方の CA は粒子状態を含めた物理領域内のセル全てに対して同一の規則を適用しているため，粒子数の増加とはほぼ無関係に計算時間は同一であり，かつ接触判定は近傍のみで行っていることから，比較的高速な計算処理が可能である．

７．終わりに

本研究では，可動容器中における粒状体の運動に対して，CA によるモデル化を行った．粒状体運動の様子を再現し，実験結果との定性的な比較によりある程度の妥当性を確認した．また，粒状体ダンパとしての制振効果を再現するために，物理法則を考慮した状態量および比較的単純な局所近傍則を定義し，粒子の速度容器壁面への衝突力相当量を表現することにより力学的評価が可能であることを示した．さらに，計算時間の観点において，従来の手法よりも安定かつ高速に計算可能であり，粒状体を取り扱うシミュレーション手法としての有効性を示した．

参考文献

(1) Cundall P. A. and Strack O. D. L., Geotechnique, 29-1 (1979), 47-65.
(2) 粉体工学会編, 粉体シミュレーション入門, 産業図書 (1998).
(3) 佐伯暢人, 他２名, 機論(C), **63**-615(1997), 3817.
(4) 佐伯暢人, 他２名, 機論(C), **66**-652(2000), 3828.
(5) 井上義之, 他３名, 機論(C), **65**-629(1999), 1.
(6) B. Chopard and M. Droz, Cellular Automata Modeling of Physical Systems, Cambridge University Press (1998).
(7) Ilachinski A., Cellular Automata: A Discrete Universe (2001), World Scientific.
(8) Gutowitz H., *Cellular Automata* (1991), MIT Press.
(9) Burks A. W., *Essays on Cellular Automata* (1970), Univ.. Illinois Press.
(10) 加藤恭義・光成友孝・築山洋, セルオートマトン法, 森北出版 (1998).
(11) Prado C. and Olami Z., Physical Review A, 45-2 (1992), 665-669.
(12) Baxter G. W. and Behringer R. P., Physica D, 51 (1991), 475-571.
(13) 中野孝昭, 他３名, 機論(C), **64**-617(1998), 134-140.
(14) Sakaguchi H., Murakami A., Hasegawa T. and Shirai A., Soils and Foundations, 36-1 (1996), 105-110.
(15) 庭野治, 森下信, 機構論, 98-8 (1998), 519.
(16) Masri S. F. and Caughey T. K., Trans. ASME, J. Appl. Mech., 33(1966), 586-592.
(17) 荒木嘉昭, 他２名, 機論(C), **49**-442（昭 58）, 945.