

## 縦続形SCフィルタにおける出力雑音の最少化方法

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2297/5638">http://hdl.handle.net/2297/5638</a>

## 縦続形 SC フィルタにおける出力雑音の最小化方法

正 員 馬 志強<sup>†</sup>      正 員 中 山 謙二<sup>†</sup>      正 員 山 本 外史<sup>†</sup>

### A Method to Minimize Output Noise in Cascade SC Filters

Zhiqiang MA<sup>†</sup>, Kenji NAKAYAMA<sup>†</sup> and Gaishi YAMAMOTO<sup>†</sup>, Members

あらまし 縦続形スイッチトキャパシタ(SC)フィルタの出力雑音は零点と極の組合せと2次回路の並べ順により大きく変化する。本論文では、この出力雑音を最小にする組合せ/並べ順の満たすべき一般的な条件を求めている。まず、2次回路において、各雑音源から出力に伝達される雑音を数学的に解析し、出力雑音において標本化・保持成分が連続時間成分に比べて十分大きいこと、および零点と極の組合せの影響は小さいことを明らかにした。次に、各2次回路からSCフィルタの出力に伝達される雑音を最小にするための条件について検討した。その結果、「フィルタ入力から各2次回路までの伝達関数の振幅特性を平坦化する」という条件が得られた。この条件を零点と極の組合せ/並べ順の条件に置換すると、次のようになる。組合せ: Qの高い極から順に最も近い零点を組み合わせる。並べ順: フィルタ入力から各2次回路までの振幅特性が極大となる周波数が分散するように並べる。最後に、11次の低域通過、高域通過フィルタを用いてシミュレーションを行った結果、上記の条件を課した36通りの組合せ/並べ順の約40%以上については、その出力雑音が最小値から20%以内に集中しており、本条件の有効性が確認できた。

#### 1. まえがき

SCフィルタはアナログフィルタを集積化する有望な技術であり、アナログ/デジタルインタフェース、高周波信号処理および低消費電力が必要とされる分野で、積極的にLSI化されたSCフィルタの導入が図られている<sup>(1)</sup>。

SCフィルタの回路構成として、2次回路を縦続に接続した構成はその構造が規則的であり、実現できる伝達関数に対する自由度も高く、比較的低素子感度であることから標準的な回路形式としてよく用いられている。この回路形式では零点と極の組合せおよび2次回路の並べ順に対して自由度がある。SCフィルタのLSI化にとって重要なファクタである総容量と出力雑音はこれらの選択に大きく依存することが知られている<sup>(2),(3)</sup>。総容量を最小化する組合せ/並べ順に対する条件は提案されているが<sup>(3)</sup>、出力雑音を最小化する方法についてはまだ十分に検討されていない<sup>(2)</sup>。

SC回路における雑音源はFETのオン抵抗における熱雑音とオペアンプにおける広帯域雑音と $1/f$ 雑音である。これはいずれも連続時間成分(以下、連続成

分と略す)である。これらの雑音はSC内部で標本化・保持される(以下、SH成分と略す)。従って、SC回路内部の雑音としては連続成分とSH成分が混在したものととなる。

一方、離散時間システムであるデジタルフィルタの縦続構成では出力雑音を最小にするための組合せ/並べ順に対する条件が検討されている<sup>(4),(5)</sup>。しかし、前述したごとく、SC回路は完全な離散時間回路ではなく、雑音も連続成分とSH成分の両方を含んでいる。また、雑音源から出力までの伝達関数も $z$ の関数のみでは記述できない。従って、デジタルフィルタに対する結果をそのままSCフィルタに適用することは理論的な飛躍を生じる。

本論文では、雑音として連続成分とSH成分が混在する形で縦続形SCフィルタの出力雑音を数学的に解析する。これに基づいて、出力雑音を最小にするための零点と極の組合せ/並べ順が満たすべき一般的な条件を検討する。まず、2次回路の出力雑音を解析し、SH成分が支配的であることを示す。次に、縦続接続されている2次回路の出力からSCフィルタの出力に伝達される雑音のSH成分に対する伝達利得を解析する。更に、2次回路の出力雑音に対する零点と極の組合せの影響について検討する。これらの結果に基づき、SCフィルタの出力雑音を最小にするための組合せ/

<sup>†</sup> 金沢大学工学部電気・情報工学科, 金沢市  
Faculty of Technology, Kanazawa University, Kanazawa-shi, 920  
Japan

並べ順の満たすべき条件を導く。最後に、本論文で提案する条件の有効性を確認するために、11次の低域通過フィルタと高域通過フィルタを用いて出力雑音のシミュレーションを行った結果を示す。

## 2. 縦続形 SC フィルタの出力雑音の解析

### 2.1 2次SC回路の出力雑音の解析

2次回路として図1に示す Martin-Sedra<sup>(6)</sup>の回路を対象とする。出力雑音が零点と極の組合せ/並べ順により大きく変化するのには周波数選択性を有する急峻なフィルタの場合である。このようなフィルタを対象とした場合、他の回路形式、例えば、Fleisher-Laker<sup>(7)</sup>の2次回路も図1の回路に帰着されるため、一般性を失わない。

次に、SC回路における雑音の解析方法について述べる<sup>(2),(8),(9)</sup>。雑音源としては次の二つがある。

- (1) FETスイッチのオン抵抗における熱雑音：

$$S_R(\omega) = 2kT_p R_{on} \quad (\text{V}^2/\text{Hz}) \quad (1)$$

$k$ ：ボルツマン定数 ( $1.38 \times 10^{-23}$  joule/°K)

$T_p$ ：絶対温度

$R_{on}$ ：FETスイッチのオン抵抗

- (2) オペアンプの入力換算雑音：

$$S_A(\omega) = S_A^W(\omega) + S_A^{1/f}(\omega) \quad (\text{V}^2/\text{Hz}) \quad (2)$$

$S_A^W(\omega)$ ：広帯域白色雑音

$S_A^{1/f}(\omega)$ ： $1/f$  雑音

これらの雑音は2次回路内部でスイッチングにより標準化され、標準化周波数以下の帯域に折り返されることにより増幅される。すべての雑音源は互いに無相関と見なせるから、各雑音源から2次回路の出力に伝達される雑音電力を計算し、これらを加算することにより出力雑音電力が求められる。

$S_f^c(\omega)$ ,  $S_f^{sh}(\omega)$ ,  $S^c(\omega)$ ,  $S^{sh}(\omega)$  を1段目のオペアンプおよび2次回路の出力における雑音の連続成分とSH成分の電力密度スペクトルとすると、これらは次

式で与えられる。

$$S_f^c(\omega) = A_f^c(\omega) S^c(\omega) + A_f^R(\omega) S_R(\omega) + A_f^A(\omega) S_A(\omega) \quad (3)$$

$$S^{SH}(\omega) = |H_{SH}(j\omega)|^2 \cdot \left\{ A_f^{SH}(\omega) \frac{B}{f_s} S^c(\omega) + A_f^{SH}(\omega) S_R(\omega) + A_f^{SH}(\omega) \left[ \frac{B_A}{f_s} S_A^W(\omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_A^{1/f}(\omega - n\omega_s) \right] \right\} \quad (4)$$

$$S^c(\omega) = A_R^c(\omega) S_R(\omega) + A_f^c(\omega) S_A(\omega) \quad (5)$$

$$S^{SH}(\omega) = \frac{|H_{SH}(j\omega)|^2}{|1 - H_{oo}(e^{j\omega T})|^2} \cdot \left\{ A^{SH}(\omega) \left[ \frac{B_1}{f_s} S_f^c(\omega) + S_f^{SH}(\omega) \right] + A_R^{SH}(\omega) S_R(\omega) + A_f^{SH}(\omega) \left[ \frac{B_A}{f_s} S_A^W(\omega) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_A^{1/f}(\omega - n\omega_s) \right] \right\} \quad (6)$$

上式で新たに導入されたパラメータと関数を以下に説明する。

$$|H_{SH}(j\omega)|^2 = \left[ \frac{\sin(\omega T/2)}{(\omega T/2)} \right]^2 \quad (7a)$$

：  $T$  秒間の保持回路の伝達関数

$$T = 1/f_s, f_s : \text{標準化周波数} \quad (7b)$$

$B, B_1, B_A$ ：  $S^c(\omega)$ ,  $S_f^c(\omega)$ ,  $S_A^W(\omega)$  の帯域幅

$A_{1c}(\omega)$ ,  $A_f^{SH}(\omega)$ ：  $S^c(\omega)$  に対する2次回路出力から第1オペアンプ出力までの伝達係数。

$A_f^c(\omega)$ ,  $A_f^{SH}(\omega)$ ： 第1オペアンプの仮想接地点につながる容量グループのスイッチのオン抵抗における熱雑音に対する同オペアンプ出力までの伝達係数。

$A_f^A(\omega)$ ,  $A_f^W(\omega)$ ： 第1オペアンプ出力に伝達された入力換算雑音に対する同オペアンプ出力までの伝達係数。

$A^{SH}(\omega)$ ：  $S_f^c(\omega)$ ,  $S_f^{SH}(\omega)$  に対する2次回路出力までの伝達係数。

$A_R^c(\omega)$ ,  $A_R^{SH}(\omega)$ ： 第2オペアンプの仮想接地点につながる容量グループのスイッチのオン抵抗における熱雑音に対する同オペアンプ出力までの伝達係数。

$A_f^A(\omega)$ ,  $A_f^W(\omega)$ ： 第2オペアンプの入力換算雑音に対する同オペアンプ出力までの伝達係数。

$H_{oo}(e^{j\omega T})$ ： 2次回路のフィードバックループの伝達関数。

以上の関数は図1に示す2次回路の容量を用いて次のように表せる。

$$A_f^c(\omega) = \frac{\tau}{T} \frac{|C_{11}^* + C_{12}|^2}{C_{10}} + \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \frac{|C_{12}|^2}{C_{10}} \quad (8a)$$

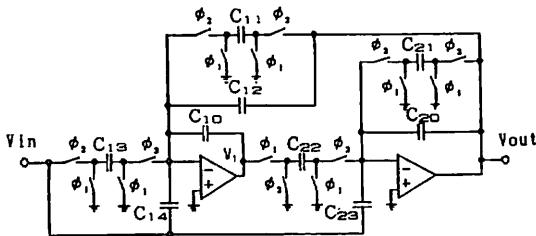


図1 Martin-sedra の2次SC回路  
Fig. 1 Biquad SC circuit by Martin and Sedra.

$$A_{fR}^c(\omega) = \frac{2\tau}{T} \left| \frac{C_{13}^*}{C_{10}} \right|^2 + \left| \frac{C_{11}^*}{C_{10}} \right|^2 \quad (8b)$$

$$A_{fA}^c(\omega) = \frac{\tau}{T} \left| 1 + \frac{C_{11}^* + C_{12} + C_{13}^* + C_{14}}{C_{10}} \right|^2 + \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) \left| 1 + \frac{C_{12} + C_{14}}{C_{10}} \right|^2 \quad (8c)$$

$$A_{i1}^{SH}(\omega) = \left| \frac{C_{11} e^{j\omega(\tau-r)}}{C_{10}(1-e^{-j\omega\tau})} + \frac{C_{12}}{C_{10}} \right|^2 \quad (9a)$$

$$A_{iR}^{SH}(\omega) = \left| \frac{C_{11} + C_{13}}{C_{10}(1-e^{-j\omega\tau})^2} f_s R_{on} \right|^2 \quad (9b)$$

$$A_{iA}^{SH}(\omega) = \left| 1 + \frac{C_{12} + C_{14}}{C_{10}} + \frac{C_{11} + C_{13} e^{j\omega(\tau-r)}}{C_{10}(1-e^{-j\omega\tau})} \right|^2 \quad (9c)$$

$$A_{iK}^c(\omega) = \frac{2\tau}{T} \left\{ \left| \frac{C_{22}^*}{C_{20} + C_{21}^*} \right|^2 + \left| \frac{C_{21}^*}{C_{20} + C_{21}^*} \right|^2 \right\} \quad (10a)$$

$$A_{iA}^c(\omega) = \frac{\tau}{T} \left| 1 + \frac{C_{22}^* + C_{23}}{C_{20} + C_{21}^*} \right|^2 + \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right) \left| 1 + \frac{C_{23}}{C_{20}} \right|^2 \quad (10b)$$

$$A^{SH}(\omega) = \left| \frac{C_{22}}{C_{21} + C_{20}(1-e^{-j\omega\tau})} \right|^2 \quad (11a)$$

$$A_{iR}^{SH}(\omega) = \frac{2C_{22} + C_{21}^2/C_{20} + 2C_{21}}{2|C_{21} + C_{20}(1-e^{-j\omega\tau})|^2 f_s R_{on}} \quad (11b)$$

$$A_{iA}^{SH}(\omega) = \left| 1 + \frac{C_{22} e^{j\omega(\tau-r)}}{C_{20}(1-e^{-j\omega\tau})} + \frac{C_{23}(1-e^{-j\omega\tau})}{C_{21} e^{j\omega(\tau-r)}} \right|^2 \quad (11c)$$

$$\frac{1}{|1 - H_{oo}(e^{j\omega\tau})|^2} = \left| \frac{C_{10}(C_{20} + C_{21})}{C_{10}(C_{20} + C_{21})} \right|^* \cdot \frac{-C_{10}(2C_{20} + C_{21})e^{-j\omega\tau}}{+C_{22}(C_{11} + C_{12}) - C_{10}(2C_{20} + C_{21})} e^{-j\omega\tau} \cdot \left| \frac{+C_{10}C_{20}e^{-2j\omega\tau}}{+(C_{10}C_{20} - C_{12}C_{22})e^{-2j\omega\tau}} \right|^2 \quad (12)$$

$$C_{1i}^* = C_{1i}/(1+2j\omega C_{1i}R_{on}) \quad i=1, 3 \quad (13)$$

$$C_{2i}^* = C_{2i}/(1+2j\omega C_{2i}R_{on}) \quad i=1, 2 \quad (14)$$

$\tau/T$  はクロックのデューティ比である。

## 2.2 縦続形 SC フィルタの出力雑音

ここでは、各 2 次回路の出力雑音がどのように SC フィルタの出力に伝達されるかについて検討する。まず、SH 成分と連続成分の大きさについて検討する。式(3)~(6)において、雑音の連続成分の帯域幅  $B$ 、 $B_1$ 、オペアンプの白色雑音の帯域幅  $B_A$  およびスイッチのオン抵抗における熱雑音に対する帯域幅  $1/2CR_{on}$  は標準化周波数  $f_s$  より十分に大きい。すなわち、

$$\frac{B}{f_s}, \frac{B_1}{f_s}, \frac{B_A}{f_s}, \frac{1}{2CR_{on}f_s} \gg 1 \quad (15)$$

が成り立つ。そのため、

$$S_i^{SH}(\omega) \gg S_i^c(\omega), S^{SH}(\omega) \gg S^c(\omega) \quad (16)$$

となる。これは、SH 成分は広帯域雑音が標準化され、標準化周波数以下の帯域に折り返されることにより増幅されるためである。式(16)から、2 次回路の出力雑音においては SH 成分が支配的であり、SC フィルタ

の出力に伝達される雑音成分として SH 成分のみを考慮しても一般性を失わない。

SC フィルタの入力から  $i$  段目の 2 次回路の内部で生じた出力雑音の SH 成分と SC フィルタの出力雑音の電力密度スペクトルを  $S_i(\omega)$  と  $S(\omega)$  で表すと、これらは次のように関係づけられる。

$$S(\omega) = \sum_{i=1}^K S_i(\omega) \left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right|^2 \quad (17)$$

但し、 $i=K$  に対しては

$$\left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right|^2 = 1 \quad (18)$$

とする。 $K$  は 2 次回路の総数である。また、 $H_j(e^{j\omega\tau})$  は  $j$  段目の 2 次回路の伝達関数である。

SC フィルタの出力雑音の平均電力を  $P$  とすると、次式で求められる。

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^K S_i(\omega) \left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{i=1}^K \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ S_i^{1/2}(\omega) \left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right| \right\}^2 d\omega \\ &= \sum_{i=1}^K \left\| S_i^{1/2}(\omega) \left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right| \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\|\cdot\|_p$  は  $L_p$  ノルムである。

## 3. 出力雑音を最小にする組合せ/並べ順の条件

この章では、各 2 次回路から SC フィルタの出力への雑音伝達利得を最小化する条件について検討する。

まず、信号レベルに対するスケージングの条件<sup>(1)</sup>から、

$$\left\| \prod_{k=1}^i H_k(e^{j\omega\tau}) \right\|_{\infty} = 1, \quad (i=1, 2, \dots, K) \quad (20)$$

が成り立つ。この条件を考慮すると、式(19)は次のように変形される。

$$P = \sum_{i=1}^K \left\| \prod_{k=1}^i H_k(e^{j\omega\tau}) \right\|_{\infty}^2 \cdot \left\| S_i^{1/2}(\omega) \left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right| \right\|_2^2 \quad (21)$$

ここで、 $i$  段目の 2 次回路からの雑音による出力雑音を  $P_i$  とする。すなわち、

$$P = \sum_{i=1}^K P_i \quad (22)$$

と表される。式(21)において、

$$\left| \prod_{j=i+1}^K H_j(e^{j\omega\tau}) \right| = \frac{|H(e^{j\omega\tau})|}{\left| \prod_{k=1}^i H_k(e^{j\omega\tau}) \right|} \quad (23)$$

とし、更に

$$\tilde{H}_i(e^{j\omega T}) = \prod_{k=1}^i H_k(e^{j\omega T}) \quad (24)$$

とおく。ここで  $H(e^{j\omega T})$  は SC フィルタ全体の伝達関数である。式(24)の  $L_p$  ノルムは次の離散的な表現で近似できる。

$$\max_{0 \leq n \leq M-1} \left| \tilde{H}_i(e^{jn\omega_0}) \right| \approx \left\| \prod_{k=1}^i H_k(e^{j\omega T}) \right\|_{\infty} \quad (25)$$

$$\omega_0 = 2\pi/M \quad (26)$$

$$\left\| S_i^{1/2}(\omega) \prod_{j=i+1}^k H_j(e^{j\omega T}) \right\|_2 \\ \approx \left\{ \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left| \frac{S_i^{1/2}(n\omega_0)H(e^{jn\omega_0})}{\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})} \right|^2 \right\}^{1/2} \quad (27)$$

但し、分割数  $M$  は十分大きくとるものとする。式(25)~(27)を用いて、式(21)、(22)で与えられる  $P_i$  は次式で表される。

$$P_i \approx \max_n \left| \tilde{H}_i(e^{jn\omega_0}) \right|^2 \left\{ \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{|S_i^{1/2}(n\omega_0)H(e^{jn\omega_0})|^2}{|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2} \right\} \quad (28)$$

式(28)に基づいて  $P_i$  を最小化する条件を求める。

まず、次の補題を与えておく<sup>(5)</sup>。

[補題]  $x_n$  を変数、 $a_n$  を定数とするととき、

$$0 < x_n \quad \text{かつ} \quad 0 < a_n \quad (29)$$

に対して次の不等式が成り立つ、

$$\max_n (x_n) \sum_{n=0}^{M-1} a_n x_n^{-1} \geq \sum_{n=0}^{M-1} a_n \quad (30)$$

等号はすべての  $n$  に対して  $x_n$  が次式を満たすときである。

$$x_n = \max_n (x_n) \quad (31)$$

式(28)と式(30)を比較すると、 $|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})|^2$  が正の変数  $x_n$  に相当し、 $(1/M) |S_i^{1/2}(n\omega_0)H(e^{jn\omega_0})|^2$  が正の定数  $a_n$  に相当するから、

$$P_i \geq \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} |S_i^{1/2}(n\omega_0)H(e^{jn\omega_0})|^2 \quad (32)$$

が成り立つ。等号はすべての  $n$  に対して、

$$|\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})| = \max_n |\tilde{H}_i(e^{jn\omega_0})| \quad (33)$$

が成り立つときである。この条件は  $|\tilde{H}_i(e^{j\omega T})|$  を平坦化することに相当している。すなわち、 $P_i$  を最小化するためには、 $|\tilde{H}_i(e^{j\omega T})|$  を平坦化する必要がある。式(22)で与えられる  $P$  の最小化に対しては、すべての  $i$  に対して、 $|\tilde{H}_i(e^{j\omega T})|$  を平坦化することが条件となる。

次に、この条件を組合せ/並べ順に対する条件に置換する。式(24)の関係から  $|\tilde{H}_i(e^{j\omega T})|$  を平坦化するためには、まず、各2次回路の振幅特性  $|H_k(e^{j\omega T})|$  を平坦

化する必要がある。これは  $Q$  の高い極から順に最も近い零点を組み合わせることにより実現できる。

組合せによりある程度平坦化された  $H_k(e^{j\omega T})$  を用いて、更に、 $|\tilde{H}_i(e^{j\omega T})|$  を平坦化するために、これに含まれる  $H_k(e^{j\omega T})$  の振幅最大値を与える周波数を分散させる。これはフィルタ入力から各2次回路までの振幅特性が極大となる周波数が分散するように2次回路を並べることにする。

この組合せ/並べ順の方法を本論文では“Peak Dispersion”法と呼び、PD法と略す。

この条件は、デジタルフィルタの縦続構成において、出力雑音を最小にするために求められた条件<sup>(5)</sup>と同じである。これは、SCフィルタの2次回路の出力雑音において、SH成分が連続成分よりも十分に大きいこと、およびSH成分に対する伝達関数が  $z$  の関数として表されることによるものである。しかし、SCフィルタとしては、この条件が2次回路の出力雑音にどのように影響するかを更に検討する必要がある。

#### 4. 2次回路の出力雑音に対する組合せの影響

ここでは、3.で求めた組合せ条件により2次回路の出力雑音がどのように変化するかについて調べる。

以下の議論では、出力雑音の大きい  $Q$  の高い極の2次回路に着目する。また、図1の2次回路でだ円フィルタを実現する場合は、若干の自由度がある。本論文では、 $C_{12}=C_{14}=0$  の場合を回路形式A、 $C_{21}=C_{14}=0$  の場合を回路形式Bと区別する<sup>(3)</sup>。

信号レベルをスケールした後の回路形式Aの容量は零点と極の位置を表すパラメータ  $\theta_z$ ,  $r_p$ ,  $\theta_p$  ならびに第1、第2オペアンプ出力に対するスケール係数  $k_1$ ,  $k_2$  によって次式で表される<sup>(3)</sup>。

$$C_{10} = \frac{1}{k_1} \quad (34a)$$

$$C_{11} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1 - 2r_p \cos \theta_p + r_p^2}{r_p^2} \quad (34b)$$

$$C_{12} = 0 \quad (34c)$$

$$C_{13} = \frac{2(1 - \cos \theta_z)}{r_p^2} \quad (34d)$$

$$C_{14} = 0 \quad (34e)$$

$$C_{20} = \frac{1}{k_2} \quad (35a)$$

$$C_{21} = \frac{1}{k_2} \cdot \frac{1 - r_p^2}{r_p^2} \quad (35b)$$

$$C_{22} = \frac{1}{k_1} \quad (35c)$$

$$C_{23} = \frac{1}{r_p^2} \quad (35d)$$

次に、スケール係数  $k_1, k_2$  と零点の位置  $\theta_z$  の関係について検討する。オペアンプの出力における過負荷を避けるため、第1, 第2オペアンプまでの振幅特性の最大値  $H_{1\max}, H_{2\max}$  が1となるように容量値を  $k_1, k_2$  でスケールする。文献(3)より  $k_1, k_2$  は次のように表せる。

$$k_1 = \left| \frac{(1-r_p)(1-r_p \exp(-j2\theta_p))}{2(\cos \theta_z - \cos \theta_p) 2 \sin(\theta_p/2)} \right| \quad (36)$$

$$k_2 = \left| \frac{(1-r_p)(1-r_p \exp(-j2\theta_p))}{2(\cos \theta_z - \cos \theta_p)} \right| \quad (37)$$

$k_1, k_2$  の値は零点と極の相対的な位置関係によって変化する。 $\theta_z$  が  $\theta_p$  に近づくほど  $k_1, k_2$  は大きくなる。但し、 $k_1, k_2$  の比は  $\theta_z$  にほとんど無関係である。本章では  $Q$  の高い極に着目しているから  $r_p \approx 1$  の条件を考慮すると、

$$k_1, k_2 < 1 \quad (38)$$

となる。

組合せによる出力雑音の変化を調べるために、まず  $S^{SH}(\omega)$  の  $\theta_z$  による変化について調べる。式(11)~(12)に示される伝達係数に式(34)~(35)の容量を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{1}{|1-H_{00}(e^{j\omega T})|^2} = \left| \frac{(1-e^{-j\omega T})(1-r_p^2 e^{-j\omega T})}{1-2r_p \cos \theta_p e^{-j\omega T} + r_p^2 e^{-j2\omega T}} \right|^2 \quad (39)$$

$$A^{SH}(\omega) = \left| \frac{k_2}{k_1 \left( \frac{1}{r_p^2} - e^{-j\omega T} \right)} \right|^2 \quad (40a)$$

$$A_R^{SH}(\omega) = \frac{2 \frac{k_2}{k_1} + k_2 \left( \frac{1}{r_p^2} - 1 \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{r_p^2} - 1 \right)}{2 \left( \frac{1}{r_p^2} - e^{-j\omega T} \right)^2 f_s R_{on}} \quad (40b)$$

$$A_A^{SH}(\omega) = \left| 1 + \frac{\frac{k_2}{k_1} e^{j\omega(T-\tau)} + \frac{k_2}{r_p} (1-e^{-j\omega T})}{(1-e^{-j\omega T}) + \left( \frac{1}{r_p^2} - 1 \right) e^{j\omega(T-\tau)}} \right|^2 \quad (40c)$$

$\theta_z$  が  $\theta_p$  に近づくとき、式(36), (37)より  $k_2/k_1$  は一定であるが、 $k_1$  と  $k_2$  は大きくなる。式(40b), (40c)より  $k_2$  の増加に伴い  $A_R^{SH}(\omega), A_A^{SH}(\omega)$  が大きくなる。しかし、 $r_p \approx 1$  の条件と式(38)を考慮すると、 $A_R^{SH}(\omega), A_A^{SH}(\omega)$  の増加率は小さい。

次に、 $\theta_z$  による  $S^{SH}(\omega)$  の変化について調べる。まず、式(9)に示される伝達係数に式(34), (35)の容量

の値を代入して、次式を得る。

$$A_I^{SH}(\omega) = \left| \frac{\frac{k_1}{k_2} \frac{1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2}{r_p^2} e^{j\omega(T-\tau)}}{(1-e^{-j\omega T})} \right|^2 \quad (41a)$$

$$A_{II}^{SH}(\omega) = \frac{1}{|(1-e^{-j\omega T})|^2 f_s R_{on}} \left\{ k_1^2 \frac{2(1-\cos \theta_z)}{r_p^2} + \frac{k_1^2 (1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2)}{k_2 r_p^2} e^{j\omega(T-\tau)} \right\} \quad (41b)$$

$$A_{III}^{SH}(\omega) = \left| 1 + \left\{ 2k_1 \frac{(1-\cos \theta_z)}{r_p^2} e^{j\omega(T-\tau)} + \frac{k_1(1-2r_p \cos \theta_p + r_p^2)}{k_2 r_p^2} \right\} / (1-e^{-j\omega T}) \right|^2 \quad (41c)$$

上式において、 $\theta_z$  で変化する部分は  $k_1$  と  $(1-\cos \theta_z)$  である。まず、低域通過フィルタにおいて、 $\theta_z$  が  $\theta_p$  に近づくとき、 $k_1$  が大きくなるのに対して  $(1-\cos \theta_z)$  は小さくなる。 $\theta_z$  が  $\theta_p$  の付近の零点  $\theta_z'$  に近づくとき、 $\theta_z' < \theta_z$  であるから、 $\cos \theta_z' > \cos \theta_z$ 。従って、次の関係が得られる。

$$\cos \theta_z' - \cos \theta_z = d > 0 \quad (42)$$

そのとき  $k_1$  の変化率  $a$  は

$$a = \frac{|\cos \theta_z - \cos \theta_p|}{|\cos \theta_z' - \cos \theta_p|} = \frac{|\cos \theta_p - \cos \theta_z|}{|\cos \theta_p - \cos \theta_z - d|} = \left| \frac{1}{1 - \frac{d}{\cos \theta_p - \cos \theta_z}} \right| \quad (43)$$

であり、 $(1-\cos \theta_z)$  の変化率  $b$  は

$$b = \frac{|(1-\cos \theta_z')|}{|(1-\cos \theta_z)|} = \frac{|(1-\cos \theta_z - d)|}{|(1-\cos \theta_z)|} = \left| 1 - \frac{d}{(1-\cos \theta_z)} \right| \quad (44)$$

である。

$$|\cos \theta_p - \cos \theta_z| < |(1-\cos \theta_z)|, \quad 0 < \theta_p, \theta_z < \pi \quad (45)$$

であるから、

$$ab > 1 \quad (46)$$

が得られる。すなわち、 $\theta_z$  が  $\theta_p$  に近づくとき、 $k_1(1-\cos \theta_z)$  は大きくなる。

高域通過フィルタでは、 $\theta_z$  が  $\theta_p$  に近づくとき  $k_1$  と  $(1-\cos \theta_z)$  の両方が大きくなる。

いずれのフィルタにおいても、 $\theta_z$  が  $\theta_p$  に近づくとき、 $k_1$  および  $k_1(1-\cos \theta_z)$  は大きくなり、伝達係数  $A_{II}^{SH}(\omega), A_{III}^{SH}(\omega)$  が大きくなる。しかし、 $r_p \approx 1$  と式(38)を考慮すると、 $A_{II}^{SH}(\omega), A_{III}^{SH}(\omega)$  に占める  $k_1, k_1(1-$

$-\cos \theta_z$  のかかる項の割合は小さく、これらの増加率、従って、 $S^{SH}(\omega)$  の増加率も小さい。

以上のように、3. で求めた組合せ条件に従うと、2 次回路の出力雑音は増加する傾向にある。しかし、その増加率が小さいため、SC フィルタ全体の出力雑音は 2 次回路からフィルタ出力までの SH 成分に対する伝達利得によりほぼ決まるものと考えられる。従って、3. で求めた組合せ/並べ順に対する条件を縦続形 SC フィルタの出力雑音を最小にするための一般的な条件として採用する。

5. 設計例

今回提案した組合せ/並べ順に対する条件 (PD 法) の有効性を調べるために、11 次の低域通過フィルタ (LPF) と高域通過フィルタ (HPF) を用いて、計算機シミュレーションを行った。

5.1 フィルタの特性および設計パラメータ

表 1 にフィルタの特性および雑音解析に用いるパラメータを示し、表 2 にフィルタの零点と極の値を示す。

5.2 2 次回路の出力雑音

N2/D2 と N6/D6 に対する 2 次回路の出力雑音のスペクトルを図 2 に示す。これからわかるように、SH 成分  $S^{SH}(\omega)$  が連続成分  $S^C(\omega)$  と比べて約 20 dB 程度大きく、フィルタ出力に伝達される成分として、SH 成分のみを用いることの妥当性が示された。また、Q の高い極ほどその 2 次回路の出力雑音が大きいの。

次に、最も Q の高い極 D6 に零点 N2~N6 を組み合わせたときの 2 次回路の平均雑音電力の電圧換算値  $N_{D6}$  を表 3 に示す。フィルタの (A), (B) は 4. で述べた回路形式 A, B を表している。これによると、いずれのフィルタにおいても、組み合わせられる零点が D6 に近づくにつれて、2 次回路の出力雑音が大きくなっていく。しかし、その増加率は次の 5.3 で述べる SC フィルタの雑音分布に比べれば小さい。

ルタの雑音分布に比べれば小さい。

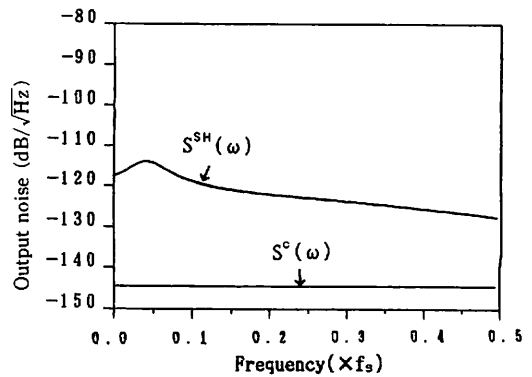
5.3 SC フィルタの出力雑音の分布

組合せ/並べ順に制約条件を課さない状態で出力雑音の分布を調べる。11 次フィルタの零点と極の組合せ/並べ順は 86,400 通りと多いため、その中から 2,000 通りを無作為に抽出して出力雑音の分布を調べた。但

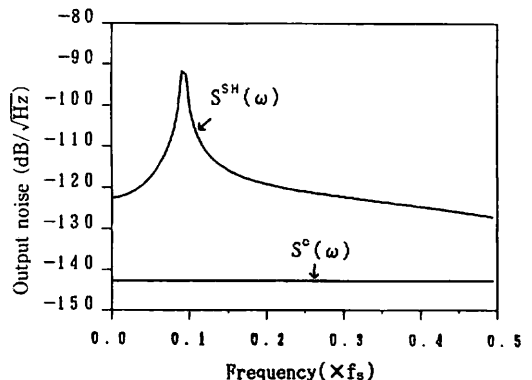
表 2 11 次 LPF, HPF の零点と極の値

零点		極					
LPF		HPF		LPF		HPF	
$r_z$	$\theta_z$	$r_z$	$\theta_z$	$r_p$	$\theta_p$	$r_p$	$\theta_p$
N1	1 180.0	1 0.0	D1	0.819	0.0	0.427	180.0
N2	1 81.6	1 14.3	D2	0.848	15.6	0.585	65.1
N3	1 52.6	1 24.8	D3	0.904	26.0	0.842	48.6
N4	1 43.1	1 30.7	D4	0.950	31.5	0.937	41.8
N5	1 39.5	1 33.6	D5	0.978	34.1	0.975	39.0
N6	1 38.3	1 34.8	D6	0.994	35.0	0.993	38.0

$\theta_z, \theta_p$  の単位: Degree



(a) Section N2/D2 of 11th-order LPF(A)



(b) Section N6/D6 of 11th-order LPF(A)

図 2 Martin-Sedra の 2 次回路の出力雑音スペクトル  
Fig. 2 Output noise spectrum of Martin-Sedra circuit.

表 1 フィルタ特性と設計パラメータ

通過域周波数	0~4 kHz(LPF), 4.4 kHz~ $f_s/2$ (HPF)
通過域リプル	0.18 dB
阻止域周波数	4.4 kHz~ $f_s/2$ (LPF), 0~4 kHz(HPF)
阻止域減衰量	80 dB
標本化周波数 $f_s$	40 kHz
クロック	50% duty
オン抵抗	10 kΩ
温度	25°C
オペアンプ雑音	白色雑音: 50 nV/√Hz
(帯域 4 MHz)	1/f 雑音: 50 nV/√Hz at 1 kHz
最小容量	0.4 pF

表3 D6にN2~N6零点を組み合わせたときの  
2次回路の平均雑音電力  $N_{D6}$ (電圧換算値)

Filter	$N_{D6}$				
	N2/D6	N3/D6	N4/D6	N5/D6	N6/D6
LPF(A)	.378E-05	.381E-05	.386E-05	.393E-05	.400E-05
LPF(B)	.380E-05	.383E-05	.389E-05	.396E-05	.402E-05
HPF(A)	.650E-05	.657E-05	.671E-05	.694E-05	.715E-05
HPF(B)	.658E-05	.667E-05	.684E-05	.709E-05	.732E-05

単位: (V/√Hz)

し、1次の分子、分母の組合せは固定してある。

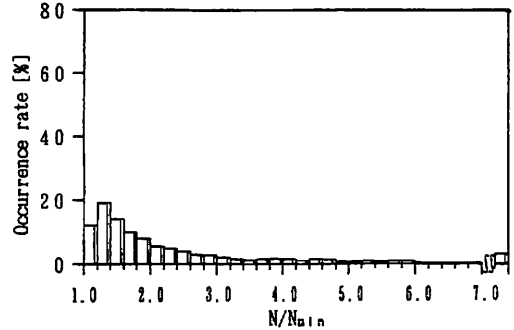
シミュレーションの結果を図3に示す。ここで、 $N$ は式(19)で与えられる出力雑音の平均電力  $P$ の電圧換算値を示し、 $N_{min}$ は2,000通りの組合せ/並べ順に対する  $N$ の最小値である。横軸は出力雑音を示しているが、 $N_{min}$ で規格化されている。縦軸は零点と極の組合せ/並べ順の発生率(%)である。

図3からわかるように、組合せ/並べ順に制約条件を課さない場合は出力雑音が広い範囲に分布している。また、 $N_{min}$ に対して、20%以内の発生率は10%程度と低く、最適な組合せ/並べ順を得るためには多くの探索回数が必要とされる。

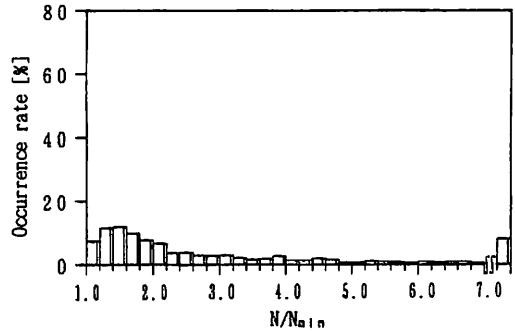
5.4 PD法の条件を課したときの出力雑音の分布

次に、3.で提案したPD法の条件を考慮したときの出力雑音の分布を調べる。組合せは、 $Q$ の高い極から順に最も近い零点と組み合わせる。例えば、D6にN6、...、D2にN2のように組み合わせ固定する。並べ順に対しては、PD法の条件を満たし、かつ若干の自由度を有する制約条件(図4)を用いる。LPFの場合は振幅が最大となる周波数の高いグループDY( $Y=4, 5, 6$ )と、低いグループDX( $X=1, 2, 3$ )に分け、これらが交互に繰り返すように2次回路を並べる。例えば、1段目の2次回路にはD4~D6の内の一つが、2段目の2次回路にはD1~D3の内の一つが割り当てられる。このようにして振幅最大を与える周波数を分散させることができる。この場合の並べ順の数は $(3!)^2=36$ 通りである。

出力雑音の分布を図5に示す。この場合は $N$ が $N_{min}$ から20%の範囲内に40%以上が集中しており、PD法の条件が出力雑音の低減に有効であることが確認できる。フィルタ設計の点からは、この条件を課すことにより出力雑音を最小にする最適な組合せ/並べ順を少ない探索回数で見出すことができる。



(a) 11th-order LPF(A)



(b) 11th-order HPF(A)

図3 制約条件を課さないときの出力雑音に対する組合せ/並べ順の発生率

Fig. 3 Distributions of pairing and ordering assignments evaluated on output noise without any constraint.

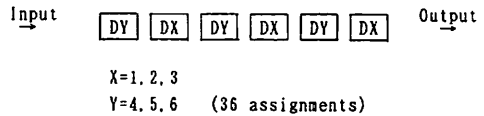


図4 PD法による並べ順に対応する制約条件  
Fig. 4 Constraints on ordering by PD method.

6. む す び

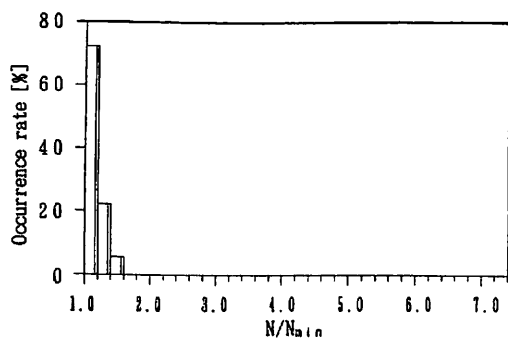
縦続形 SC フィルタの出力雑音を最小にするために零点と極の組合せ/並べ順の満たすべき一般的な条件を求めた。この条件は次のように要約できる。

[組合せ]  $Q$ の高い極から順に最も近い零点を組み合わせる。

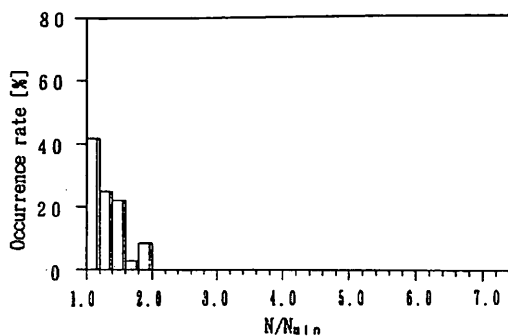
[並べ順] フィルタ入力から各2次回路までの振幅特性が極大となる周波数が分散するように並べる。

これらの条件は、縦続形デジタルフィルタにおいて求められた条件<sup>(5)</sup>と結果的に同じであるが、これは





(a) 11th-order LPF(A)



(b) 11th-order HPF(A)

図 5 PD 法による制約条件を課したときの出力雑音に対する組合せ/並べ順の発生率

Fig. 5 Distributions of pairing and ordering assignments evaluated on output noise with constraints by PD method.

以下の理由による。まず、SC フィルタの 2 次回路の出力雑音において、SH 成分が連続成分に比べて支配的である。次に、2 次回路からフィルタ出力までの SH 成分に対する伝達関数がデジタルフィルタの場合と同じである。更に、2 次回路の出力雑音が組合せ条件にあまり依存していない。本論文ではこれらのことを数学的に解析し、一般的な条件として求めた。

具体例として、11 次の LPF, HPF を用いてシミュレーションを行った結果、上記の制約条件を満たす組合せ/並べ順に対する出力雑音はその最小値から 20% 以内に 40% 以上が集中しており、その有効性が確認できた。また、フィルタ設計の点からは、PD 法を制約条件として課すことにより、出力雑音を最小化できる最適な組合せ/並べ順を少ない探索回数で見出すことができる。

今後の課題としては、出力雑音のほか、総容量および素子感度を考慮した最適な組合せ/並べ順の条件を

求めることである。

謝辞 日ごろ御指導頂く松浦弘毅教授、武部幹教授、ならびに御討論頂いた当研究室の学生諸氏に深謝致します。

## 文 献

- (1) 中山謙二：“SC 回路網の設計と応用”，東海大学出版会(昭 60)。
- (2) 中山謙二：“SCF の縦続構成における雑音低減の検討”，信学技報，CAS82-109 (1982-12)。
- (3) 馬 志強，中山謙二，山本外史：“SC フィルタの縦続構成における総容量の最小化手法”，信学論(A)，J73-A，4，pp. 759-768(平 2-04)。
- (4) L. B. Jackson：“Roundoff noise analysis for fixed-point digital filters realized in cascade or parallel form”，IEEE Trans. Audio & Electroacoust., AU-18，pp. 107-122 (June 1970)。
- (5) 中山謙二：“デジタルフィルタの縦続構成における丸め雑音最小化手法”，信学論(A)，J64-A，11，pp. 892-899(昭 56-11)。
- (6) K. Martin and A. S. Sedra：“Stray-insensitive switched-capacitor filters based on the bilinear z-transform”，Electron Lett., Sol., 19，6，pp. 365-366(1979)。
- (7) P. E. Fleisher, and K. R. Laker：“A family of active switched capacitor biquad building blocks”，Bell Syst. Tech. J., 58，12，pp. 2235-2268(1979)。
- (8) J. H. Fischer：“Noise sources and calculation techniques for switched capacitor filters”，IEEE, Journal of Solid-State Circuit, SC-17，pp. 742-752 (Aug. 1982)。
- (9) B. Furrer and W. Guggenbuhl：“Noise analysis of a switched-capacitor biquad” ISCAS' 82，pp. 460-463(1982)。

(平成 2 年 4 月 9 日受付)

## 馬 志強

1975 中国中南鉱冶学院・自動制御卒。  
1982 同大学院修士課程了。同年同学院講師。現在、金沢大・大学院自然科学研究科(博士課程)在学中。SC フィルタの最適設計、能動 RC 回路合成などの研究に従事。





中山 謙二

昭 46 年東工大・工・電子卒。昭 46～47 同  
大学研究生。昭 58 工博(東工大)。昭 47 日  
本電気(株)入社。伝送通信事業部および  
C&C システム研究所勤務。昭 63 金沢大・  
工・電気情報工学科助教授。平 2 同教授と  
なり現在に至る。通信用各種フィルタの設  
計論、デジタル信号処理、適応信号処理、ニューラルネット  
などの研究に従事。昭 62 年 9 月 IEEE Circuits & Devices  
Mag. 論文賞受賞。著書「SC 回路網の設計と応用」(東海大学出  
版会) 他。IEEE シニア会員。



山本 外史

昭 25 名大・工・電気卒。昭 32 金沢大・  
工・電気科講師。昭 35 同大助教授。昭 39 同  
大電子工学科教授。昭 60 同大電気・情報工  
学科教授。現在に至る。電子回路、シミュ  
レーションの研究に従事。工博。ME 学会会  
員。