

Global Optimization by generalized random tunneling algorithm (3st Report : Search of some local minima by branching)

メタデータ	言語: jpn 出版者: 公開日: 2017-10-03 キーワード (Ja): キーワード (En): 作成者: メールアドレス: 所属:
URL	https://doi.org/10.24517/00007750

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 International License.



一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化

(第3報 分岐による複数の局所最適解の探索)

北山哲士 山崎光悦

Global Optimization by Generalized Random Tunneling Algorithm

(3rd Report: Search of some local minima by branching)

Satoshi KITAYAMA and Koetsu YAMAZAKI

Department of Human & Mechanical Systems Engineering, Kanazawa University
2-40-20, Kodatsuno, Kanazawa, Ishikawa, 920-8667, Japan

This paper presents a method to find some local minima by branching at local minimum, based on the Generalized Random Tunneling Algorithm (GRTA). We call this method as Branching GRTA (BGRTA). BGRTA also consists of three phases, that is, the minimization phase, the tunneling and branching phase, and constraint phase. In the minimization phase, local search technique is used. In the tunneling and branching phase, some local minima can be found by branching at local minimum obtained in the minimization phase. The next branching point is chosen from them. In the constraint phase, the feasibility is examined. We apply BGRTA to the topology optimization problem of truss structure and the traffic road design problem. Through numerical examples, we examine the validity of BGRTA.

Key words: Global Optimization, Optimum Design, Branching, Finite Element Method, Topology Optimization, Traffic Road Design

1 緒言

側面制約条件と挙動制約条件から構成される連続関数の大域的最適解、もしくはそれに相当する準最適解を求める一つの手法として、筆者らは一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズム(以下、GRTAと称す)を提案した⁽¹⁾。GRTAの利点は最適性が保証された解が得られ、仮に大域的最適解を求めることができなくても、次善の解が得られるといったことが挙げられる。さらに入力パラメータも少なく、アルゴリズムも簡単であるため、容易に実行することができる。

一方、GRTAはいくつかの局所最適解を見つけることができるが、1点探索法であるため、得られる最適解は、多点探索を行った場合よりも少なく、より多くの解の情報が必要な場合は、Particle Swarm Optimization⁽²⁾や免疫アルゴリズム^{(3),(4)}などの方法のほうが有効であろう。

さらに、GRTAは目的関数値のみを用いてランダムに次の出発点を探していたため、探索領域は例えば図1のようになっている。図1において、局所最適解Aが得られた場合、GRTAで次の出発点を見つける場合、点

Bは探索領域外となり、次の出発点となり得ないが、この点を初期点として最適解を探索すれば、点Cが得られ、目的関数は改善されていることになる。

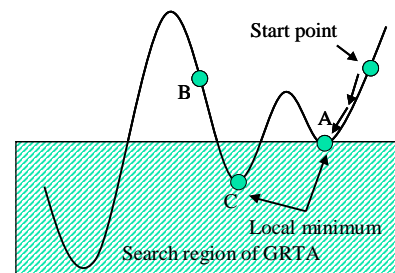


Fig.1 Search region of GRTA

このため、ランダムに次の出発点を探す場合、一度得られた点を初期点として、局所最適解を探索し、目的関数の改善を検討する必要があると考えられる。さらにGRTAは一点探索法であったため、より多くの局所最適解を求めるために、得られた局所最適解において、分岐させることを考えた。

そこで本報では、GRTAのアルゴリズムをベースにして、局所最適解において分岐させ、より多くの局所最適解を求めるアルゴリズムを開発する。複数の局所最適解を見つけることができれば、それだけ多くの情報を提供することができることになり、設計者にとっては、代替案が増えることになり、有効なことで

* 原稿受付 平成??年?月 日

*¹正員、金沢大学工学部(〒920-8667 金沢市小立野2-40-20)。

あると考える．また得られる複数の局所的最適解の中にロバスト解が含まれる可能性があること，さらに多目的最適化問題において，対話的な手法を用いる場合，希求水準の候補になりうるなど，多くの利点を含むものと考えられる．さらに目的関数を改善する点をランダムに探しているため，分岐によって生成される複数の探索点と同じ局所的最適解に陥らないよう，工夫をする．提案する方法を分岐型一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズム (Branching GRТА, 以下 BGRТА) と称する．

はじめに分岐について述べ，BGRТАのアルゴリズムを示す．そしてBGRТАを，構造最適化問題と交通路設計問題へ適用する．

2 分岐の導入

初期点を設定し，数理計画法で局所的最適解 x_L が求めた場合，この局所的最適解 x_L において分岐することにより，複数の局所的最適解を探索することを考えた．GRТАでは，目的関数値のみを取り扱い，目的関数値を改善する点が見つかった場合，その点を次の探索初期点として，逐次最適解を見つけていたが，この方法を用いて，つまり目的関数値のみを判断基準として局所的最適解で分岐させると，図2に示すように，分岐した探索点と同じ最適解に陥る可能性が大きく，さらに複数の最適解は見つかるものの，収束するまでに非常に多くの時間が必要であることが判った．

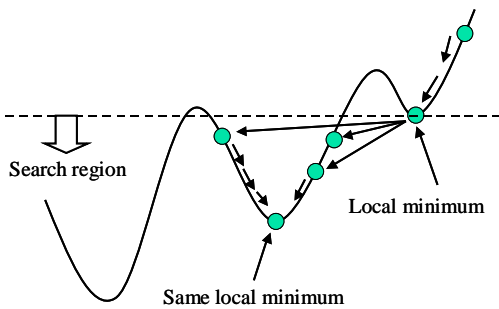


Fig.2 Branching at local minimum by GRТА

そこで，BGRТАでは，以下の点に注意して，局所的最適解において分岐させる．

1) 分岐する数はあらかじめ決めておき，それを最大分岐数 $branch_{max}$ とする．すなわち，局所的最適解 x_L における目的関数値を改善する点を最大分岐数だけ見つけるものと仮定する．もし最大分岐数だけ見つからない場合は，得られた点の中から目的関数値を最善とする探索点を次の分岐点とする．

例えば図3に示すように，局所的最適解である点Aにおいて分岐をする場合を考える．最大分岐数を2とする．点Aで分岐をし，点Bと点Dが得られたとする．点B

と点Dに対してそれぞれ数理計画法を用いて局所的最適解である点Cと点Eを求める．そして点Cと点Eの目的関数値を比較し，目的関数値の良い点Eが次の分岐点となる．分岐点Eにおいて，一定の探索回数で，目的関数値を改善する点が見つからなければ，点Eを最適

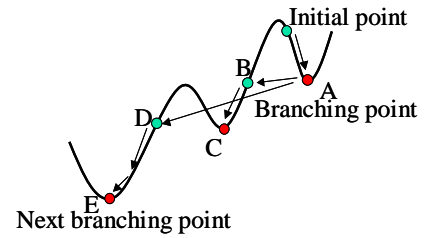


Fig.3 Branching at local minimum by BGRТА

解として探索を終了する．

2) ランダムに探索点を見つけているため，一旦，数理計画法を用いて，局所的最適解を求める．もし，目的関数が改善されていれば，その点を次の分岐点の候補として，保存する．そして，さらに目的関数値を改善する点が，最大分岐数 $branch_{max}$ となるまで，探索を行う．もし同じ最適解が得られた場合は，別の最適解の探索を行う．

最適解が同一であるかどうかを検討するために，探索開始時に次式を用いて，設計変数のスケール (正規化) を行っておく．

$$X_i = \frac{x_i - x_{i,\min}}{x_{i,\max} - x_{i,\min}} \quad i = 1, 2, \dots, ndv \quad (1)$$

ここで， $x_{i,\max}$ と $x_{i,\min}$ はそれぞれ，各設計変数の最大値と最小値であり，これは側面制約条件によって与えられる．また ndv は設計変数の数を表す．最適解の同一性は，局所的最適解における分岐数 $branch$ が2以上になったとき，次式によって検討する．

$$\frac{|X_{i,j} - X_{i,branch}|}{|X_{i,j}|} \leq \varepsilon \quad j = 1, 2, \dots, branch - 1 \quad (2)$$

式(2)において， $X_{i,j}$ は式(1)によってスケールされた設計変数であり， j 番目の分岐によって得られた i 番目の設計変数を表す．また ε は十分小さな値 (例えば $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-3}$) である．分岐によって得られた最適解のすべての設計変数 $i = 1, 2, \dots, ndv$ に対して，式(2)が成立した場合，同じ解と見なす．

3) 分岐する数が無くなった場合は，得られた局所的最適解の中から目的関数値が最もよいものを最適解として，探索を終了する．

3 BGRТАのアルゴリズム

3.1 アルゴリズム 本章では，BGRТАのアルゴリ

ズムを示す．BGRTAで必要となる入力データを以下に示す．

- 1) 探索初期点 x_0
- 2) 初期温度 T
- 3) 一つの温度当りの最大探索回数 it_{max}
- 4) 探索終了のための最小温度 T_{min}
- 5) 局所的最適解からの最大分岐数 $branch_{max}$

最小化ステップ

(STEP1) 適当な初期点 x_0 を取る．

(STEP2) 数理計画法で局所的最適解 x_L を求める．

分岐とトンネル・ステップ

(STEP3) 局所的最適解 x_L における分岐数を

$$branch = 0 \quad (3)$$

とする．

(STEP4) 初期温度 T を設定する．トンネル・ステップおよび制約ステップにおける探索回数 it, out をそれぞれ初期化する． $k = 0$ とする．

(STEP5) 各設計変数ごとに $[0, 1]$ の乱数を発生させ、それを $(-\pi/2, \pi/2)$ に変換し、 p_i とする．

(STEP6) 次式を用いて、局所的最適解 x_L からの増分を求める．

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_L + \delta \mathbf{x} \quad (4)$$

$$\delta x_i = T \tan(p_i) \quad (5)$$

ここで、 $\delta \mathbf{x}$ は局所的最適解 x_L からの増分である．

(STEP7) すべての制約条件を満足しているかどうかを検査する．もし満足していれば、STEP8へ．満足していなければ制約ステップであるSTEP18へいく．

(STEP8) \mathbf{x}^* を初期点として、数理計画法で局所的最適解 x_L^* を求める．

(STEP9) 目的関数値の改善を検査する．

$$f(\mathbf{x}_L^*) \leq f(\mathbf{x}_L) \quad (6)$$

を満足していれば、STEP10へ進む．そうでなければ、STEP13へ．

(STEP10) 今までに得られた最適解と同一でなければ、局所的最適解 x_L からの分岐数 $branch$ を

$$branch = branch + 1 \quad (7)$$

とし、増加させ、STEP11へ．同一の最適解であれば、STEP13へ．

(STEP11) 局所的最適解 x_L における分岐数が

$$branch = branch_{max} \quad (8)$$

を満足していれば、STEP12へ．そうでなければ、STEP4へ戻る．

(STEP12) 得られた局所的最適解 x_L^* の中から、目的関数を最小（もしくは最大）とするものを見つけ、その点を新たな分岐点 x_L とし、STEP3へ戻る．

(STEP13) 探索回数 it を増加させる．

$$it = it + 1 \quad (9)$$

(STEP14) 探索回数の検査を行う．

$$it \leq it_{max} \quad (10)$$

であれば、STEP5へ戻る．そうでなければSTEP15へ．

(STEP15) 温度をコントロールするパラメータ k を

$$k = k + 1 \quad (11)$$

として、次式を用いて温度を下げる．

$$T = T / (k + 1) \quad (12)$$

(STEP16) 温度の検査を行う．

$$T \leq T_{min} \quad (13)$$

であれば、STEP17へ．そうでなければ、

$$it = out = k = 0 \quad (14)$$

としてSTEP5へ戻る．

(STEP17) 分岐数の検査を行う．

$$branch = 0 \quad (15)$$

であれば、局所的最適解から分岐する点はないので、STEP12（もしくはSTEP2）で得られた点を最適解としてアルゴリズムを終了する．そうでなければ、STEP3へ戻る．

制約ステップ

(STEP18)

$$out = out + 1 \quad (16)$$

として、温度を次式により下げる．

$$T = T / (out + 1) \quad (17)$$

(STEP19)

$$T \leq T_{min} \quad (18)$$

であれば、STEP4へ戻る．そうでなければ、STEP6へ．

全体のアルゴリズムを図4に示す．

3.2 アルゴリズムの終了条件 BGRTAのアルゴリズムの終了条件は、GRTAとは異なり、局所的最適解における分岐数 $branch$ によって決められる．すなわち、局所的最適解における分岐数が無くなった場合、目的関数を改善する点はないと判断し、STEP12（もしくはSTEP2）で得られた目的関数値を最小（もしくは最大）にするものを最適解として、アルゴリズムを終了する．

4 構造最適化問題

4.1 トラス構造の位相最適化 変位制約条件の下でトラス構造物の体積を最小にするような最適位相を求める．対象とする問題は図5に示す9節点28部材トラス構造の最適位相を求める問題である．問題の詳細は文献（1）を参照されたい．ここでは、シミュレーテッド・アニーリング（SA）と遺伝的アルゴリズム（GA）で求めた結果と比較する．

BGRTAで必要となる入力データには、以下のものを

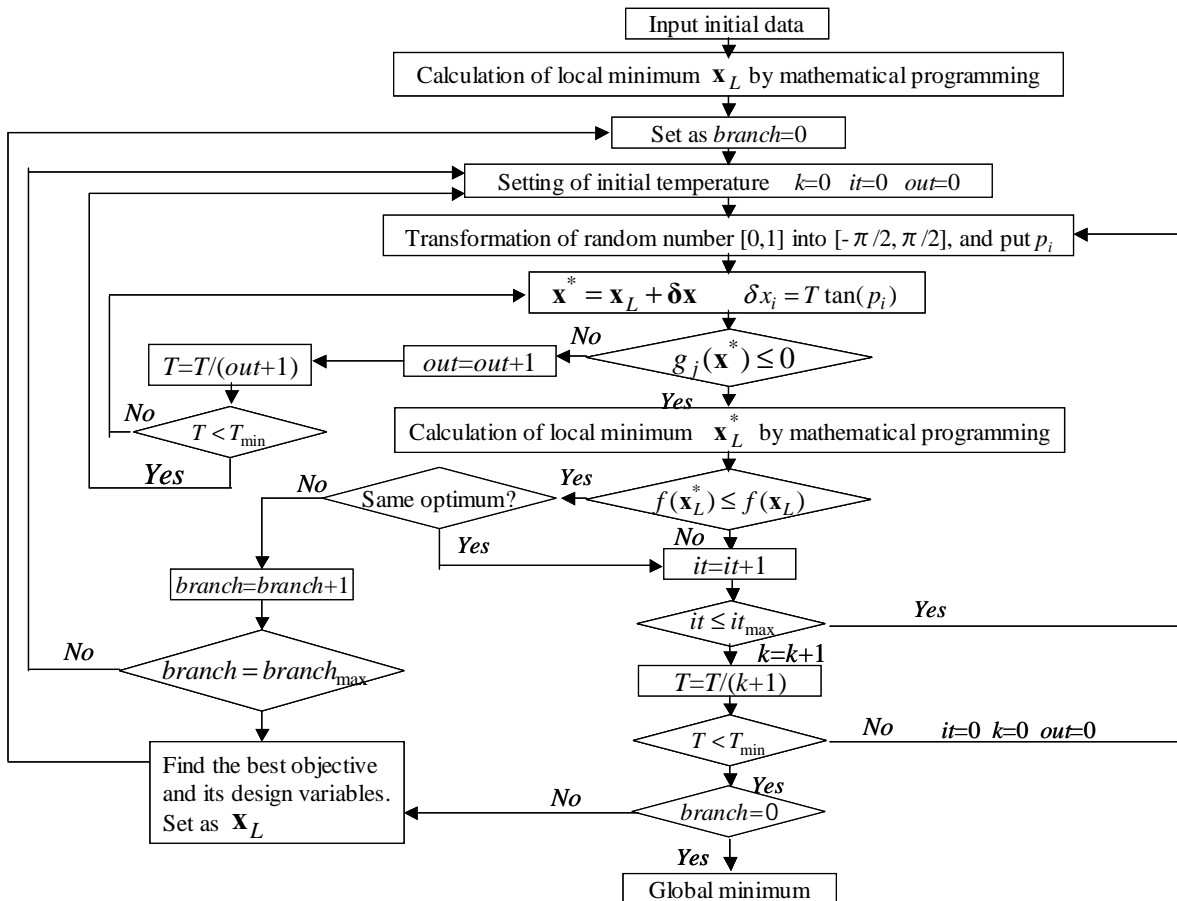


Fig.4 The algorithm of BGRTA

用いた.

- 1)初期温度 $T = 1.0$
- 2)一つの温度当りの最大探索回数 $it_{max} = 20$
- 3)探索終了のための最小温度 $T_{min} = 1.0 \times 10^{-5}$
- 4)局所的最適解からの最大分歧数 $branch_{max} = 5$

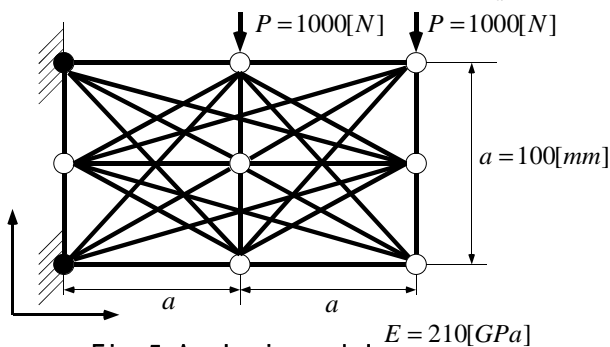


Fig.5 Analysis model

探索初期点をすべて $A_0 = 500[mm^2]$ とした時, BGRTA で得られた最適位相を, SAとGAで得られた最適位相と共に表1に示す. なお, 表中の数値は断面積を表す. SAとGAの結果は, 20回計算を行い, 目的関数が最善のものを示している. なお, SAでは文献(5)の数値を用いた. またGAでは, 個体数を100, 世代を2000世代, 突然変異を0.01, 交差率を0.6とした.

4.2 関数空間 この問題は, 数値計算の結果から目的関数値が $f = 2.40 \times 10^3[mm^3]$ から $f = 2.60 \times 10^3[mm^3]$ の間に, 少なくとも60以上の局所的最適解が存在し, また, 大域的最適解 $f = 2.35 \times 10^3[mm^3]$ の付近にも多くの局所的最適解が存在することが判り, さらに, 文献(7), (8)で報告されている局所的最適解を含めると,

Table 1 Comparison of optimum topology

BGRTA	SA	GA

非常に多くの最適解が存在する多峰性の強い関数空間であることが想定される。

SAの場合、探索初期点にも依存するが、探索点が多くこの極大値を乗り越えながら、大域的最適解を探索したが、このため、目的関数値を改悪する点を許容する受理確率が低くなり、結果として局所的最適解に陥ったと考えられる。つまりSAの結果より、所々に深い谷を持つ関数空間であることが想定される。

一方、GAでは、SAよりも深い谷を見つけているが、やはり大域的最適解を見つけることは出来なかった。連続変数をあらかじめ決めた適当なビット数で分割するようなGAの場合は、解の精度が分割するビット数に大きく依存するため、領域適応型GA⁽⁶⁾のように、最適化の状況に適応して、連続変数の精度を改良するような方法でなければ、大域的最適解の探索は困難であると考えられる。

これらの結果から、関数空間を想定するのであれば、例えば図6に示すような、所々に深い谷を持ち、さらに大域的最適解は、スパイク状のところにあるものと想定される。

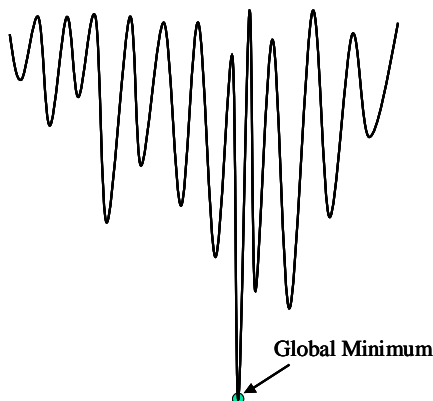


Fig.6 Behavior of objective function

一方、GRTAやBGRTAの場合、所々に深い谷を持つ関数であっても、微分可能であれば、ある程度の探索は可能である。また、異なる局所的最適解の目的関数値の差が微小の場合、GRTAでは探索が難しいものの、BGRTAでは最適解で分岐して、目的関数と制約条件の感度に基づき、複数の探索点が異なる最適解を見つけるため、探索が可能であると考えられる。

5 交通路設計への適用

交通路の設計は公共事業の中でも、莫大な費用がかかるものであり、その設計は非常に重要である。ここでは、既に住宅街があり、そこに住む人々の利便性が向上するような交通路を設計することを想定する⁽⁹⁾。出来上がった交通路の設計案を住民に見せ、仮に問題が生じた場合は、あらかじめ複数の案を用意しておけ

ば、再検討のために要する時間が短縮でき、結果として、建設作業の短縮化が期待できる。そこで、複数の設計案を得るために、BGRTAを交通路設計問題へ適用する。ここで扱う問題の前提として、交通路設計に対する住民の苦情や用地買収、さらには政治問題を取り除き、純粋に利用者の利便性が向上するような複数の交通路設計案を求めるものとする。

5.1 問題設定 問題を簡略化するために、平面上の点 (u_i, v_i) に住宅街が離散的に存在するものとし、その数を $i=1, 2, \dots, n$ とする。平面上に存在する住宅街はあらかじめ設定され、また大型ショッピングセンターを目的地とし、その座標を (x_0, y_0) とし、これらはすべて固定されているとする。

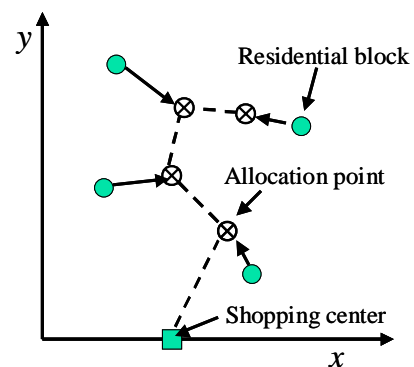


Fig.7 Modeling of traffic road design

住宅街の人々 (u_i, v_i) が利用する交通路を設計する場合、ここでは簡単のため、 (u_i, v_i) に対して”割当て点” (x_j, y_j) を設け、図7に示すように、住宅街の人々が直接的に大型ショッピングセンターへ行くことはなく、一度この割当て点 (x_j, y_j) に行き、そして大型ショッピングセンターへ行くものと仮定する。割当て点は住宅の数と同数とする。すなわち、

$$(x_j, y_j) \quad j=1, 2, \dots, n \quad (19)$$

である。また、各割当て点 (x_j, y_j) を $j=0, 1, 2, \dots, n$ の順に直線で結んだものを交通路と見なす。

このモデルは、鉄道路線を作る場合に、住宅街から最もアクセスのしやすい、つまり住宅街の近くに駅 (x_j, y_j) を設定し、路線を作るものと同様である。

5.2 目的関数 住宅街 (u_i, v_i) と割当て点 (x_j, y_j) の距離 $\phi_{i,j}$ を

$$\phi_{i,j} = \sqrt{(x_j - u_i)^2 + (y_j - v_i)^2} \quad i=j=1, 2, \dots, n \quad (20)$$

とする。各 (u_i, v_i) に対して、最も近くにある (x_j, y_j) を (x_j^*, y_j^*) とする。割当て点は少なくとも1つ以上の (u_i, v_i) に割当てられるとする。そして、 (u_i, v_i) と (x_j^*, y_j^*) の距離を $\phi_{i,j}^*$ とし、その総和を目的関数とする。

$$\sum_{i=1}^n w_i \phi_{i,j}^* \rightarrow \min \quad (21)$$

ここで w_i は重みであり，例えば住宅街の人口密度などを表す．この目的関数を最小化することにより，住宅街に住む人々全体の交通路に対する利便性が向上するものとする．

5.3 制約条件 交通路の建設コストを考え，各割当て点と目的地を結ぶ距離の総和が一定値 L 以下となるよう，挙動制約条件を与える．ただし，各区間の建設コストを重み W_i として考え，

$$\sum_{i=1}^n W_i \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \leq L \quad (22)$$

とする．また，次に示す側面制約条件を与える．

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (23)$$

$$y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \quad (24)$$

5.4 設計変数 各割当て点の座標値である (x_j, y_j) ($j=1, 2, \dots, n$) を設計変数とする．

5.5 初期値について 各割当て点の x 座標の初期値については， $[x_{\min}, x_{\max}]$ の乱数を発生させて決定する．一方， y 座標の初期値については， $[y_{\min}, y_{\max}]$ の乱数により初期値を決めた場合，目的地 (x_0, y_0) と割当て点 (x_j, y_j) ($j=1, 2, \dots, n$) を結ぶ初期交通路が自分自身に交わる冗長なものになる場合もあるため， $[y_{\min}, y_{\max}]$ の乱数を発生させ，小さいものから順番に並び替え，決定する．この方法によって得られた初期交通路の一例を図8に示す．図8において \square は住宅街を表し， \diamond は初期点を表す．

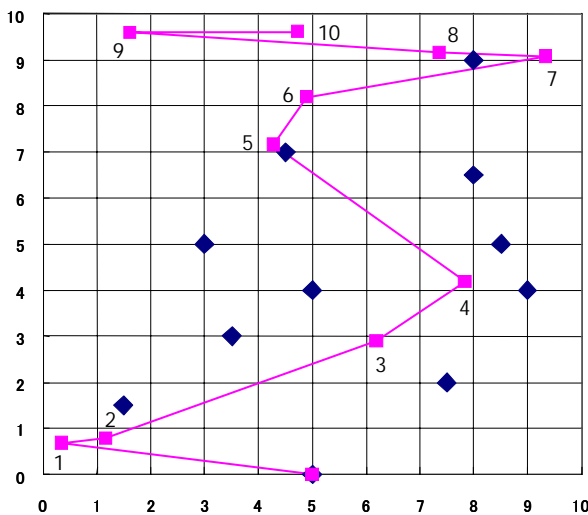


Fig.8 An example of initial point

5.6 数値計算例 住宅街の数を10とする．住宅街の座標 (u_i, v_i) と重み w_i を表2に示す．

各区間の建設コストは一律であると想定し，式(22)の重みを $W_i = 1.0$ とした．側面制約条件は

$$[x_{\min}, x_{\max}] = [y_{\min}, y_{\max}] = [0.0, 10.0] \quad (25)$$

とした．そしてショッピングセンターの座標は

Table 2 Coordinates of residential block

Residential block	Coordinates	Weight (Case1)	Weight (Case2)
1	(1.5, 1.5)	1	1
2	(7.5, 2.0)	1	2
3	(3.5, 3.0)	1	2
4	(5.0, 4.0)	1	1
5	(9.0, 4.0)	1	3
6	(3.0, 5.0)	1	2
7	(8.5, 5.0)	1	3
8	(8.0, 6.5)	1	5
9	(4.5, 7.0)	1	4
10	(8.0, 9.0)	1	2

$$(x_0, y_0) = (5.0, 0.0) \quad (26)$$

であり，式(22)の総長さ L を $L=15$ とした．

一方，BGRTAで必要となる入力データは，局所的最適解からの最大分岐数を $branch_{\max} = 3$ とし，その他は構造最適化のものと同じ数値を用いた．

BGRTAで局所的最適解を求めるために用いた最適化手法は逐次二次計画法である．

5.7 重みが一律の場合 式(21)の住宅街に対する重み w_i が一律の場合(Case1)において，得られたいくつかの結果を目的関数値と共に図9(a), (b), (c), (d)に示す．図9(a)は，乱数の種を変更して20回試行し，最も目的関数値の良かったものを大域的最適解とした．また図9(b), (c), (d)は，探索過程で得られたいくつかの局所的最適解である．図9中の \square は住宅街を表し， \diamond は割当て点を表す．また矢印は住宅街の人々が利用する割当て点である．

この結果から，大域的最適解の場合，住宅街 (u_i, v_i) と割当て点 (x_j, y_j) は，1対1の関係を持っているが，目的関数値が悪くなるにつれ，いくつかの住宅街 (u_i, v_i) は，同じ割当て点 (x_j, y_j) を利用するような傾向が見られた．

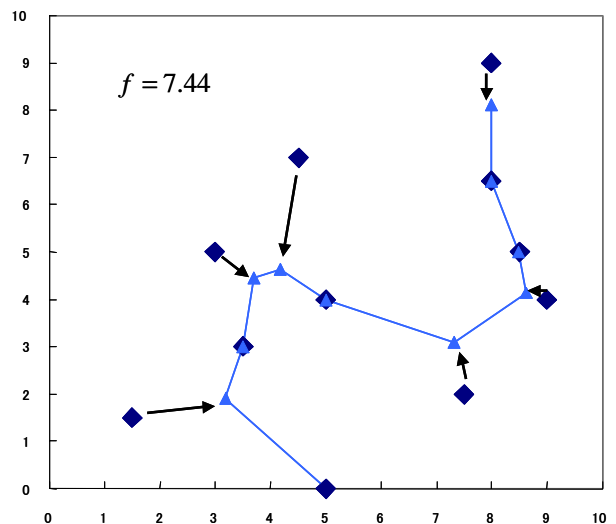


Fig.9(a) Traffic road at global minimum

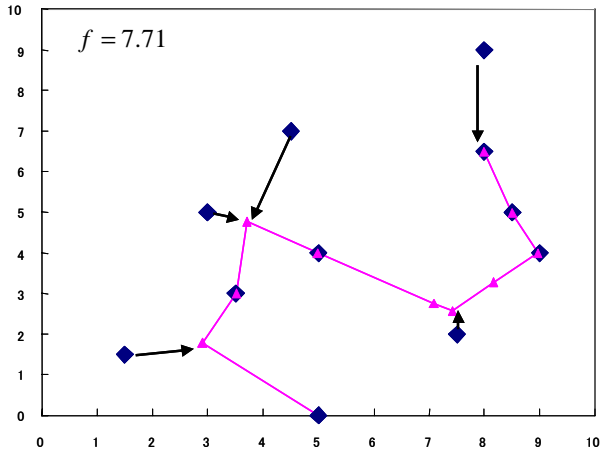


Fig.9(b) Traffic road at local minimum

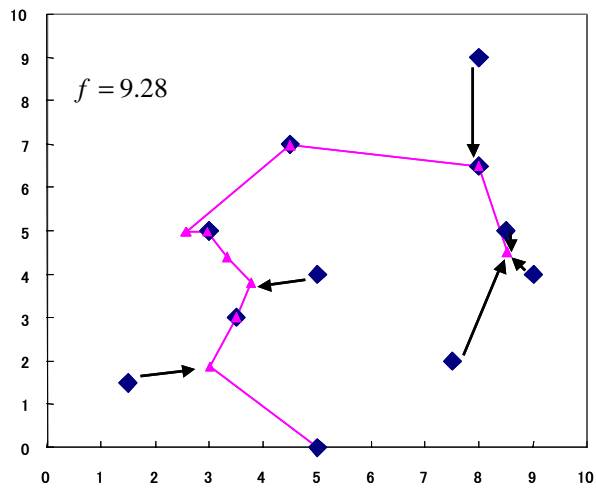


Fig.9(c) Traffic road at local minimum

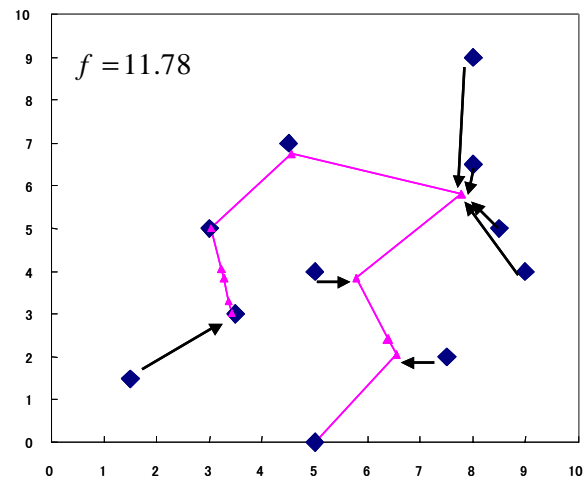


Fig.9(d) Traffic road at local minimum

しては，他と比べ重みが大きく，必ず交通路が通過している．

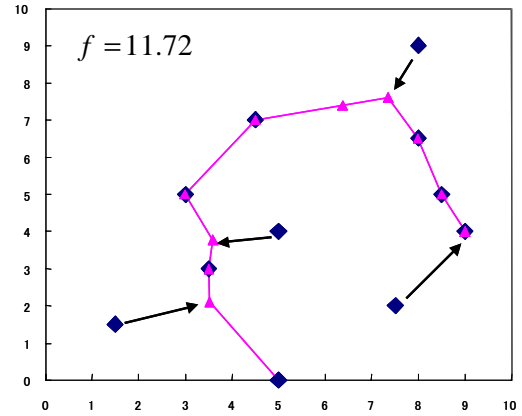


Fig.10(a) Traffic road at global minimum

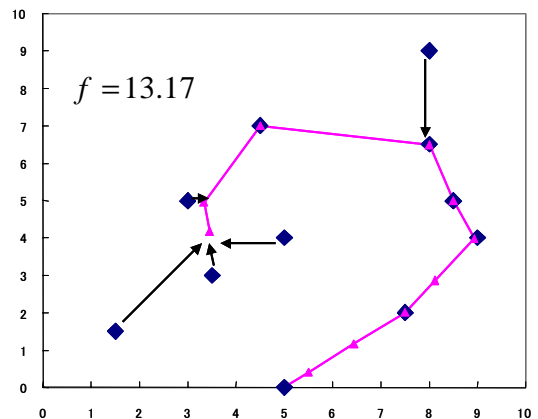


Fig.10(b) Traffic road at local minimum

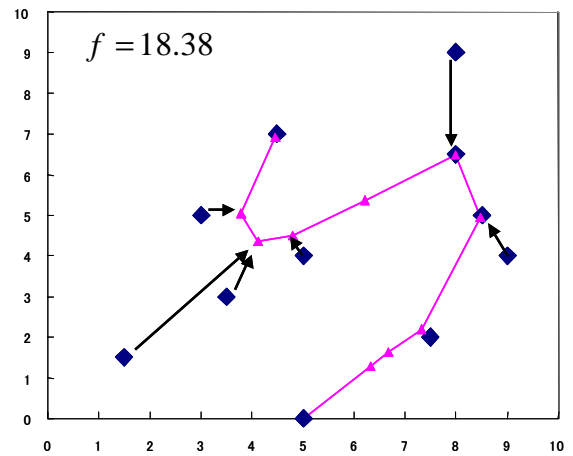


Fig.10(c) Traffic road at local minimum

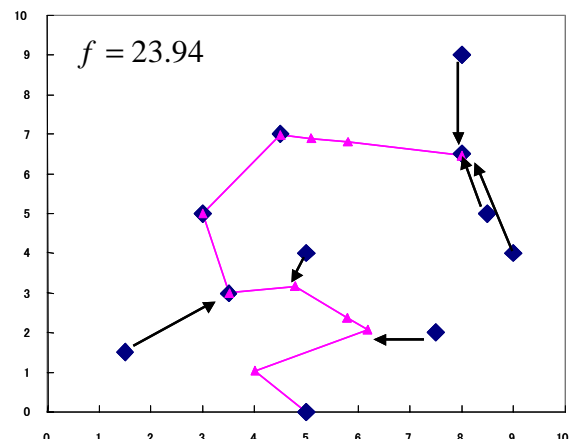
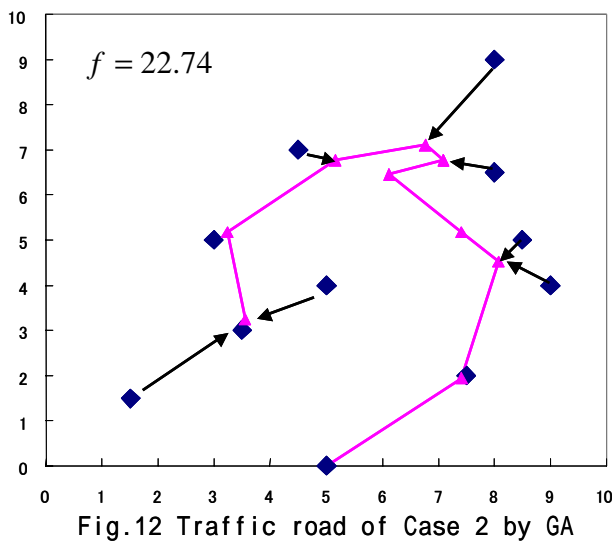
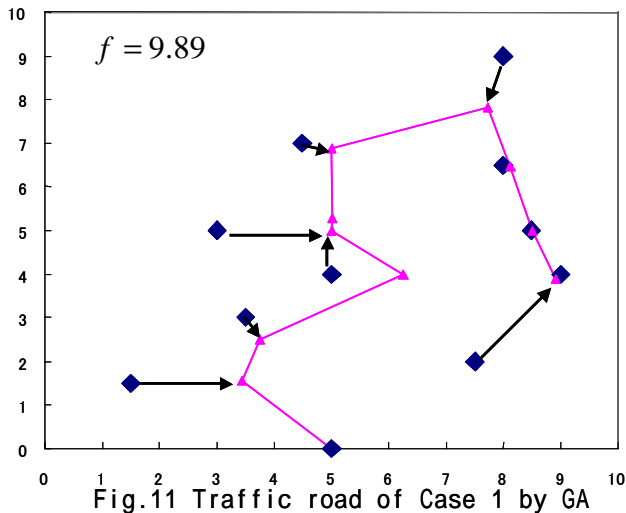


Fig.10(d) Traffic road at local minimum

5.8 重みが異なる場合 式(21)の住宅街に対する重み w_i が異なる場合(Case2)の結果を図10(a), (b), (c), (d)に示す．図10(a)は，乱数の種を変更して20回試行し，最も目的関数値の良かったものを大域的最適解とした．また図10(b), (c), (d)は，探索過程で得られたいくつかの局所的最適解である．この場合，重みが一律の場合と異なり，いくつかの住宅街 (u_i, v_i) が同じ割当て点 (x_j, y_j) を利用するようになっており，また交通路自体も，重みの大きい住宅街を通過しており，外へ湾曲していることがわかる．特に (u_8, v_8) に関

5.9 GAとの比較 交通路設計問題に対して，GAとの比較を行う．GAでは，個体数を100，世代を5000世代，突然変異を0.01，交差率を0.8とした．重みが一律の場合の結果を図11に，重みが異なる場合の結果を図12に示す．なお図11および図12は，乱数の種を変え，20回試行し，目的関数値の最良のものである．



6 結言

本論文では，一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムを改良し，局所的最適解で分岐することにより，複数の最適解を求めるためのアルゴリズムを開発した．提案した手法は一点探索と多点探索を繰り返しながら，複数の最適解を求める方法である．また，分岐によって生じた複数の探索点が同一の最適解に陥らないようにした．数値計算例では，構造最適化問題と交通路設計問題を扱った．構造最適化問題では，ある程度の最適解の数を，また交通路設計では，複数の交通路設計案を示した．

しかし，提案した手法は，並列計算に向いているものの，探索点が感度に基づく探索を行っているため，

多くの計算時間を必要とする場合もある．設計変数が少ない場合は，分岐数を多くすれば，多くの最適解が得られるものの，設計変数が多く，局所的最適解における分岐数も多くした場合，非常に多くの計算時間が必要となるため，計算時間と設計変数・分岐数の関係はトレードオフの関係が存在するものと考えられる．しかし，設計変数の数と最適な分岐数の関係を言及することは一般には困難であると考えられるので，今後の検討課題としたい．

参考文献

- (1) 北山・山崎，一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化（第1報 アルゴリズムの提示と数値計算例），機論A，69-684，（2003），pp.1250-1256．
- (2) 例えば，PARSOPOULOS, K.E. and VRAHATIS, M.N., *Recent approaches to global optimization problems through Particle Swarm Optimization*, Natural Computing,1,(2002),pp.235-306.
- (3) 森・築山・福田，多様性をもつ免疫的アルゴリズムの提案と負荷割当て問題への応用，電学論C，113-10，（1993），pp.827-878．
- (4) 森・築山・福田，免疫アルゴリズムによる多峰性関数最適化，電学論C，117-5，（1997），pp.593-598．
- (5) 北山・山崎，一般化ランダム・トンネリング・アルゴリズムによる大域的最適化（第2報 解の精度とその効率に関する検討），機論A，70-689，（2004），pp.50-55．
- (6) 荒川・萩原，実数領域適応型(ARRange)遺伝的アルゴリズムの開発，機論C，63-616，（1997），pp.4216-4223．
- (7) 坂本・尾田，遺伝的アルゴリズムを利用した最適トラス形態決定法，機論A，59-562，pp.1568-1573．
- (8) 山崎光悦，トンネル法によるトラス構造形態の最適化，機講論，No.940-10，（1994），pp.339-341．
- (9) 最適設計ハンドブック，山川宏編，（2003），朝倉書店，pp.475-481．