

き裂を有する線形異方弾性体の圧縮荷重下における応力・変位の荷重履歴依存性

新保 泰輝¹・矢富 盟祥²

¹正会員 五大開発株式会社 技術研究所 (〒921-8051 石川県金沢市黒田1丁目35番地)

E-mail: shinbo@godai.co.jp

²正会員 金沢大学教授 金沢大学大学院自然科学研究科 (〒920-1192 石川県金沢市角間町)

E-mail: yatomi@t.kanazawa-u.ac.jp

き裂を有する材料に対し、物体境界から圧縮荷重を作用させる場合、物質が弾性体であっても物体内の最終的な応力や変位は、一般に、き裂面に働く摩擦により、物体境界から作用する応力の最終状態によっては一意には決まらず、それらの履歴によって異なる解になる。しかし、圧縮荷重下の応力、変位の荷重履歴依存性を考慮した研究は著者らの知る限りにおいて存在しない。そこで、本論文では、き裂面の滑り、および固着を考慮した境界条件により、いくつかの異なる荷重履歴を与えた場合の、荷重履歴に依存する、極座標表示した具体的な線形異方弾性体の応力、変位の理論解、および応力拡大係数、き裂先端近傍の応力、変位の理論解を求めた。

Key Words : *anisotropic elastic material , loading history, frictional crack, Mode II crack , stress and displacement fields*

1. はじめに

構造物や材料の最終的な耐荷力の決定には、破壊力学による破壊現象の解明が重要である。特に、土木の分野における、地盤、岩盤やコンクリート構造物においては、圧縮荷重下におけるき裂進展メカニズムの把握が重要である。最近では、地震のメカニズムを活断層をき裂とみなした破壊力学的研究も盛んに行われるようになったが、その場合も圧縮荷重下のき裂進展現象が主な対象となる。また、地盤や岩盤の場合には、深さ方向には重力などの影響により異方的特性を持つ場合が多く、奥行き方向に長大であることから、2次元平面ひずみ状態にある異方材料と考えられる。

き裂を有する線形異方弾性体に関する研究はSih, Paris and Irwin¹⁾, Sih, Liebowitz²⁾, Yong³⁾, Azhdari, Nemat-Nasser⁴⁾, Obata, Nemat-Nasser and Goto⁵⁾, Azhdari, Obata and Nemat-Nasser⁶⁾らに見られるように多くの研究が行われている。しかし、ほとんどが引張り荷重下にある開口き裂の場合であり、著者らの知る限りでは圧縮荷重下の場合の研究は文献6)のみである。一般に、物体境界から圧縮荷重が作用する場合、引張り荷重下でき裂面が開口している場合とは異なり、き裂面が摩擦を伴う場合の応力や変位の解は物体の境界から作用す

る応力の最終状態によって一意には決まらず、それらの履歴によって異なる解になる。したがって、物体境界にせん断力が作用した後に圧縮荷重が作用した場合と、圧縮荷重が作用した後にせん断力が作用した場合では、最終的なき裂先端近傍の応力や変位状態は異なる。この場合、応力や応力拡大係数などによる破壊基準を用いると、荷重履歴により不安定き裂進展開始時やき裂進展方向も異なる。これらの違いは、き裂進展メカニズムを把握する上で非常に重要な問題である。しかし、圧縮荷重下の応力、変位の荷重履歴依存性を考慮した研究は、物体が単純な線形等方弾性体の場合であっても著者らの知る限りにおいて皆無である。そこで、本論文では、破壊力学において基本問題である、2次元線形異方弾性体の無限領域中央にき裂がある場合に、無限遠からの圧縮荷重が作用し、き裂面が接触し、摩擦を伴ない滑っている平面ひずみ条件下のモードII型の静止き裂を考え、応力や変位の荷重履歴依存性について検討を行った。

線形異方弾性体の場合、線形等方弾性体とは異なりき裂面がせん断応力のみを受ける場合、せん断によりき裂面に開口、あるいは、めり込みが発生する。このような現象は、等方物体であっても、近年、著者らが行った比例負荷を仮定した Drucker-Prager 弾塑性体において、ダイレイタンシー特性によって生じることが分かっている

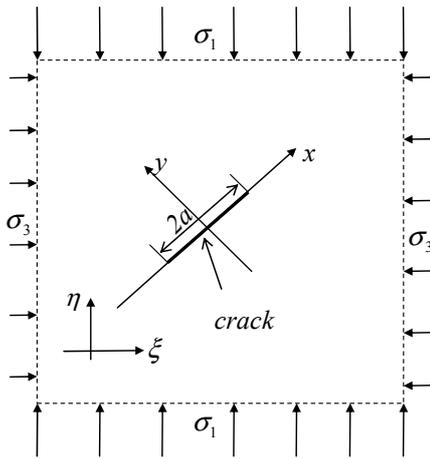


図-1 Principal stress boundary conditions at infinity.

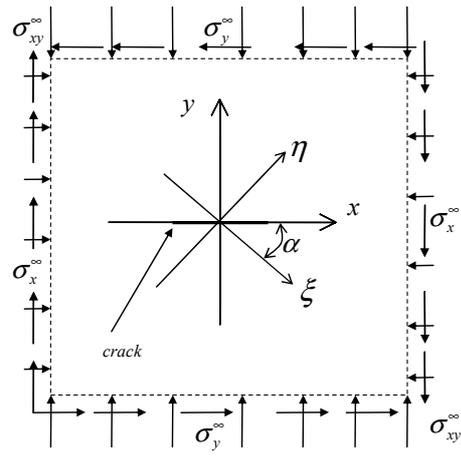


図-2 A coordinate system x-y stress boundary conditions at infinity.

る^{7,8,9)}。このような物質では、物体内に存在するき裂が物体境界から圧縮荷重とせん断力を同時に受けた場合、き裂面はせん断により開口しているか、あるいはめり込みが無く閉じている必要がある。

そこで、本論文では、き裂が開口せず、圧縮荷重下においてき裂面の固着・滑り条件を想定し、き裂面が摩擦を伴い固着する場合と滑る場合に分けた表面力の境界条件に対して、き裂面のめり込みを許さず、き裂面を閉じさせるために必要な未知の反力を考慮した境界条件を使用し、その反力、物質特性、境界応力の関係式で表した滑りき裂が存在する条件などを求めた。

また、本論文では、応力関数だけでなく、いくつかの異なる荷重履歴を与えた場合の荷重履歴に依存する、具体的な線形異方弾性体の応力・変位の理論解、応力拡大係数、き裂先端近傍の応力・変位の理論解を求めた。

なお、Azhdariほか⁶⁾は、き裂が閉じて滑る同様の問題において転位論による手法を採用し、応力関数や応力拡大係数を求めている。しかし、上記のようなき裂面の表面力の境界条件を一切与えずに応力拡大係数を求めている。その得られた応力拡大係数は著者らの得た応力拡大係数と全く同じであるが、Azhdariほかの手法では未知の反力は得られない。本論文では、付録でAzhdariほかの応力拡大係数を得た手法に関して詳細な考察を行っている。

2. 荷重履歴を伴う摩擦接触条件下での応力・変位理論解の誘導

本章では、平面ひずみ条件を仮定した2次元線形異方弾性体の無限領域中央にき裂がある場合に、無限遠からの圧縮荷重が作用し、き裂面が接触し、摩擦を伴い滑っているモードII型の静止き裂の応力や変位理論解を求める。なお、本論文の解析手法は、荷重履歴依存性の部分を除きAzhdariほかの転位論による手法と同様である。

したがって、境界条件が異なるために修正した部分や、新たに極座標での応力・変位解を求める手法を理解する上で必要不可欠な基本的な事項を簡潔に再掲しつつ記述する。

(1) 線形異方弾性体の構成式

本節では、本論文で用いた線形異方弾性体の構成式を示す。本論文では、次式で表せる2次元線形異方弾性体の x, y, z 座標系(図-1, 図-2)の平面ひずみ問題を考える。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{16}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_y &= c_{21}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{26}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_z &= c_{31}\sigma_x + c_{32}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{36}\sigma_{xy} \\ 2\varepsilon_{xy} &= c_{61}\sigma_x + c_{62}\sigma_y + c_{63}\sigma_z + c_{66}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、ひずみエネルギーが存在すると仮定すると $c_{ij} = c_{ji}$ である。また、平面ひずみ条件 $\varepsilon_z = 0$ より、

$$C_{ij} := \left(c_{ij} - c_{i3} \frac{c_{3j}}{c_{33}} \right) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{16}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_y &= C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{26}\sigma_{xy} \\ 2\varepsilon_{xy} &= C_{61}\sigma_x + C_{62}\sigma_y + C_{66}\sigma_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

が得られる。ここで、式(2)より $C_{ij} = C_{ji}$ である。

(2) 線形異方弾性体の応力関数

本節では、平面ひずみ条件下にある線形異方弾性体の応力関数を用いた応力、変位式を示す。詳細については文献1), 2), 6), 10)などを参照されたい。なお、具体的な応力関数は次節に示す。

今, $z_j := x + s_j y, (j=1,2)$ として, 独立な 2 つの解析関数 $\phi(z_1), \psi(z_2)$ を考える. ここで,

$$\begin{aligned} s_1 &= \alpha_1 + i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \\ s_3 &= \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2 \\ \beta_1 &> 0, \quad \beta_2 > 0; \quad \beta_1 \neq \beta_2 \end{aligned} \quad (4)$$

であり, s_1, s_2, s_3, s_4 は次式で示す適合条件式の複素解である.

$$C_{11}s^4 - 2C_{16}s^3 + (2C_{21} + C_{66})s^2 - 2C_{26}s + C_{22} = 0 \quad (5)$$

上式の解 s が異なる値を持つ場合, Lekhnitskii により, 上式は実数解を持たないことが示されている¹⁰⁾. また, 以後, 簡単のために次式のようにおく⁹⁾.

$$\begin{aligned} \Delta_0 &:= (s_1 - s_3)(s_1 - s_4)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4) \\ \Delta_1 &:= -i(s_1 + s_2 - s_3 - s_4) \\ \Delta_2 &:= -i(s_3s_4 - s_1s_2) \\ \Delta_3 &:= -i\{s_1s_3(s_4 - s_2) + s_4s_2(s_3 - s_1)\} \\ \tilde{s}_1 &:= (s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4) \\ \tilde{s}_2 &:= (s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4) \end{aligned} \quad (6)$$

なお, $\Delta_0 > 0, \Delta_3 < 0$ である.

ここで, 解析関数 $\phi(z_1), \psi(z_2)$ を用いて,

$$\Phi(z_1) := \frac{d\phi(z_1)}{dz_1}, \quad \Psi(z_2) := \frac{d\psi(z_2)}{dz_2} \quad (7)$$

とおくと, 応力は,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \Phi(z_1) + s_2^2 \Psi(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\Phi(z_1) + \Psi(z_2)] \\ \sigma_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi(z_1) + s_2 \Psi(z_2)] \end{aligned} \quad (8)$$

となり, 変位は剛体運動を無視すると,

$$\begin{aligned} u_x &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \phi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] \\ u_y &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \phi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] \end{aligned} \quad (9)$$

となる. 上式 p_i, q_i は式(3), 式(8)より, 次式のように表せる.

$$p_i = C_{11}s_i^2 + C_{12} - C_{i6}s_i, \quad q_i = C_{12}s_i + \frac{C_{22}}{s_i} - C_{26} \quad (10)$$

(3) 線形異方弾性体の応力拡大係数

本節では, 圧縮荷重下において線形異方弾性体内に存在する初期き裂に対し, き裂面の固着・滑り条件を想定する. この時, せん断によるき裂面のめり込みを許さず, き裂面を閉じさせるために必要な未知の反力を考慮した境界条件を使用する事で得られる応力関数, 応力拡大係数を示す. さらに, 得られた反力の詳細な考察を行う.

なお, 後述するように, 本論文での『閉じさせる』『閉じている』『閉じたまま』とは, せん断によりき裂

面がめり込む場合に, き裂面に反力(圧縮力) σ を作用させる事で, き裂面のめり込み(き裂開口変位が負)を許さず, 常にき裂開口変位を 0 の状態にする事を意味する.

今, 図-1 に示すような無限領域中央に斜めに存在する長さ $2a$ のき裂 ($-a \leq x \leq a, y = 0$) (以後, 簡単のために $(x, 0)$ と表記する.) が, 無限遠方から最大圧縮主応力 σ_1 , 側圧として主応力 σ_3 ($|\sigma_3| \leq |\sigma_1|$) が作用し閉じた状態になっているとする. また, x 軸と異方性の主軸 (material axis) のなす角度を α とする.

ここで, 図-1 を α だけ時計回りに回転させ, き裂を水平としたものが図-2 である. 図中 ξ, η 軸はそれぞれ異方性の主軸 (material axis) である. なお, この時, 図-2 に示す無限遠方から作用する直応力 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty$ も圧縮応力 ($\sigma_y^\infty \leq 0, \sigma_x^\infty \leq 0$) であるとする. また, 本論文では, 図-2 に記してあるように無限遠方から作用する σ_{xy}^∞ も非正の値 ($\sigma_{xy}^\infty \leq 0$) をとる場合を考える.

この時, き裂面が接触し, 摩擦係数 μ の存在を考える. 今, き裂上面を+, 下面を-と表記すると, き裂面の開口変位は次式を満たす必要がある.

$$U_y(x) := u_y^+(x, 0) - u_y^-(x, 0) = 0 \quad (11)$$

また, き裂面での表面力の応力境界条件は, き裂上面と下面をそれぞれ \pm で表すと次式で与えられる.

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = \sigma \quad (12a)$$

and

$$\begin{cases} \sigma_{xy}^\pm(x, 0) = \mu\sigma & \text{if } \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma \leq 0 \\ \sigma_{xy}^\pm(x, 0) = \sigma_{xy}^\infty & \text{if } \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma > 0 \end{cases} \quad (12b)$$

$$\begin{cases} \sigma_{xy}^\pm(x, 0) = \mu\sigma & \text{if } \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma \leq 0 \\ \sigma_{xy}^\pm(x, 0) = \sigma_{xy}^\infty & \text{if } \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma > 0 \end{cases} \quad (12c)$$

ここで, 式(12)の σ はせん断によりき裂面がめり込む場合に, き裂面のめり込みを許さず, 閉じさせるために必要な反力(直応力)である. この値は後に求めるき裂面の開口変位を 0 とすることによって定まる. また, 式(12b)の $\mu\sigma$ は上記反力によって生じる摩擦力である. この場合, せん断力の絶対値が摩擦力の絶対値より大きいから, き裂面に滑りが生じ, き裂境界の表面力には次式のクーロンの摩擦条件が成立している.

$$\sigma_{xy}^\pm(x, 0) = \mu\sigma_y^\pm(x, 0) \quad (13)$$

一方, 式(12c)は無限遠方から与えられたせん断応力の絶対値が, 反力による摩擦力の絶対値より小さい場合の境界条件である. したがって, この場合, き裂面は滑らない事になる.

なお, 物体は弾性体であっても, き裂面に摩擦が発生する場合の最終的な応力場や変位場は, 無限遠方から作用する応力 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \sigma_{xy}^\infty$ の最終状態で一意に決まらず, それらを作用させる履歴に依存して決まることに注意し

たい。しかし、最終状態に至る履歴は無限にある。したがって、本節では、後に考察する応力履歴の違いによって異なる解が得られる代表的な応力経路として、き裂方向の σ_x^∞ はその履歴には無関係であるため、常にき裂面が閉じ、境界条件式(12b)を満たし摩擦を伴い滑っており、 σ_y^∞ と σ_{xy}^∞ が比例負荷の状態 で負値のまま増加する場合を考える。

なお、Azhdari ほかは、き裂面の滑りに抵抗する応力として摩擦と共に粘着応力 τ_c も考慮しているが、本論文では、特に荷重履歴を考える上で議論が煩雑になるのを避けるため粘着力 τ_c を無視する。また、式(12b)、式(12c)の μ は Azhdari ほかと同じように静止摩擦係数、動摩擦係数などの違いを無視し、単に摩擦係数とした物質定数とする。

本手法では、式(12a)および(12b)の左辺の値はそれぞれ次式によって求められる。

$$\begin{aligned}\sigma_y^\pm(x, 0) &= \sigma_y^c(x, 0) + \sigma_y^\infty \\ \sigma_{xy}^\pm(x, 0) &= \sigma_{xy}^c(x, 0) + \sigma_{xy}^\infty\end{aligned}\quad (14)$$

ここで、右辺にある上付き c の応力は後述する連続転位分布によって生じる応力を示す。なお以後、

$$\begin{aligned}\tau &:= \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma \\ \Sigma &:= \sigma_y^\infty - \sigma\end{aligned}\quad (15)$$

とおく。今、Obata ほか⁵⁾より、単位長さの刃状転位 b_x^0 、 b_y^0 による応力関数は、

$$\begin{aligned}\Phi^c(z_1) &:= \frac{1}{2\pi i C_{11}} \frac{s_1 b_x^0 - b_y^0}{\tilde{s}_1} \frac{1}{z_1 - z_1^0} \\ \Psi^c(z_2) &:= \frac{1}{2\pi i C_{11}} \frac{s_2 b_x^0 - b_y^0}{\tilde{s}_2} \frac{1}{z_2 - z_2^0}\end{aligned}\quad (16)$$

で与える。ここで、 $z_1 = z_2 = x$ 、 $z_1^0 = z_2^0 = t$ とおき、き裂面で連続転位分布を考えれば、応力関数は、

$$\begin{aligned}\Phi^D(x, 0) &= \frac{1}{2\pi i C_{11}} \frac{1}{\tilde{s}_1} \int_{-a}^a \frac{s_1 b_x^c(t) - b_y^c(t)}{x-t} dt \\ \Psi^D(x, 0) &= \frac{1}{2\pi i C_{11}} \frac{1}{\tilde{s}_2} \int_{-a}^a \frac{s_2 b_x^c(t) - b_y^c(t)}{x-t} dt\end{aligned}\quad (17)$$

となる。式(17)を式(8)に代入し、式(12a)、式(12b)のき裂面の境界条件を使用すると、連続転位分布 $b_x^c(t)$ 、 $b_y^c(t)$ に関する積分方程式が得られる。その積分方程式に Muskhelishvili の解法¹⁾を用いて、さらに $b_x^c(x)$ 、 $b_y^c(x)$ について解くと次式が得られる。

$$\begin{cases} b_x^c(x) = -C_{11}(\Delta_2 \Sigma - \Delta_1 \tau) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ b_y^c(x) = -C_{11}(\Delta_3 \Sigma + \Delta_2 \tau) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \end{cases}\quad (18)$$

式(17)の Φ^D 、 Ψ^D に対してそれぞれ、 $x = z_1$ 、 $x = z_2$ とおき、式(18)を代入し積分すると、最終的に次式の応力関数が得られる。

$$\begin{aligned}\Phi^D(z_1) &= \frac{s_2 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right) \\ \Psi^D(z_2) &= -\frac{s_1 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right)\end{aligned}\quad (19)$$

なお、ここで、き裂面の開口変位は式(18)より、

$$\begin{aligned}U_y(x) &= U_y(-a) - \int_{-a}^x b_y^c(t) dt \\ \therefore U_y(x) &= -C_{11}(\Delta_3 \Sigma + \Delta_2 \tau) \sqrt{a^2 - x^2}\end{aligned}\quad (20)$$

であるから、き裂が閉じている(式(11))のためには、

$$\Delta_3 \Sigma + \Delta_2 \tau = 0\quad (21)$$

を満足していなければならない事が分かる。勿論、上記の条件は式(18)で $b_y^c(x) = 0$ と置いても得られる。ただし、その場合、後述するように σ の具体形は得られない。

また、応力拡大係数は Azhdari ほかより、

$$\begin{aligned}K_I &:= \lim_{x \rightarrow +a} \left[\sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y \right] \\ K_{II} &:= \lim_{x \rightarrow +a} \left[\sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_{xy} \right]\end{aligned}\quad (22)$$

である。ここに、 $z_j = x + s_j y$ であるから、 $y = 0$ とおくと式(19)、式(8)より次式が得られる。

$$\begin{aligned}K_I &= \lim_{x \rightarrow +a} \left[\sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_y \right] = \Sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \lim_{x \rightarrow +a} \left[\sqrt{2\pi(x-a)} \sigma_{xy} \right] = \tau \sqrt{\pi a}\end{aligned}\quad (23)$$

以上より、無限遠から σ_y^∞ と σ_{xy}^∞ が比例負荷で与えられ、無限領域中央にあるき裂面が摩擦接触している場合の線形異方弾性体の応力拡大係数は次式となる。

$$\begin{aligned}K_I &= \Sigma \sqrt{\pi a} \\ K_{II} &= \tau \sqrt{\pi a}\end{aligned}\quad (24)$$

なお、式(21)より、 Σ と τ は次式の関係にある。

$$\Sigma = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3} \tau, \quad \tau = \sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma\quad (25)$$

ここで、 σ の物理的意味を詳細に述べる。今、き裂面が閉じている条件、式(21)より次の関係にあることが分かる。

$$\sigma = \frac{\Delta_2 \sigma_{xy}^\infty + \Delta_3 \sigma_y^\infty}{\Delta_3 + \mu \Delta_2}\quad (26)$$

上式の右辺で求めた σ が負であれば、 σ は圧縮応力となるから、本来、せん断により、き裂面がめり込むところを圧縮応力 σ でめり込みを無くし、き裂面を閉じさせている事になる。 $\sigma = 0$ の場合は、き裂面を閉じて

いるために必要な反力が 0 であり, 式(12a), 式(12b)より, き裂面の表面力が 0 となる. この場合は付録 A に詳述している. また, ここで, 上式 $\Delta_3 + \mu\Delta_2 < 0$ は異方特性が等方性に比べてよほど大きくならない限り成立している. さらに, $\sigma_{xy}^\infty \leq 0$, $\sigma_y^\infty \leq 0$ を考えている事, $\Delta_3 < 0$ である事から, $\Delta_2 < 0$ であれば常に σ は非正值になる. また, 物質が直交異方性でき裂面の方向と異方性の主軸 (material axis) が一致している場合は $\Delta_2 = 0$ であるから, 同様に σ は非正值になる.

σ が正ならば, σ は本来, 開口するき裂面を閉じるための引張り応力となるが, そのような引張り応力の発生は物理的にありえないため次式が成立する場合はき裂面が閉じる解は存在し無い事になる.

$$(\Delta_2 \sigma_{xy}^\infty + \Delta_3 \sigma_y^\infty)(\Delta_3 + \mu\Delta_2) > 0 \quad (27)$$

以上より, 上記不等式が成立する場合を除き, 次式の関係が成立する.

$$\Sigma = -(\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty) \frac{\Delta_2}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \quad (28)$$

$$\tau = (\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty) \frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \mu\Delta_2}$$

$$K_I = -(\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty) \sqrt{\pi a} \frac{\Delta_2}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \quad (29)$$

$$K_{II} = (\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty) \sqrt{\pi a} \frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \mu\Delta_2}$$

Azhdariほかでは, 文献6)の4.1節において, まず, き裂が開口する場合を考察している. この時, き裂は開口しており接触していないので, 次式(文献6)の式(4.1.1))のようにき裂面の表面力を0とおいて応力関数および応力拡大係数を求めている.

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = 0 \quad \sigma_{xy}^\pm(x, 0) = 0 \quad (30)$$

次に4.2節において, き裂面が閉じた場合を言及している. その場合, 上式(30)のようなき裂面の表面力の境界条件に関する新たな記述はなく, x 方向の連続転位分布 $b_x^c(x)$ が記してあり, 次にそれによる応力関数が記された後, 式(29)と同様な力拡大係数 K_I, K_{II} が得られている. そこで, Azhdariほかは「開口した変位を閉じさせて, 開口変位を0とすれば, き裂が閉じた解が得られる」と考えたと推論できる. 実際, 式(30)のように, き裂面の表面力を0とおいても, 式(29)と同様な応力拡大係数が得られる. この結果やAzhdariほかの考察に関する詳細は付録Aに記した.

一方, 式(12)のき裂面での表面力の境界条件のうち, 式(12a)を使用せず, クーロンの摩擦則である式(13)と, き裂面が閉じている条件である y 方向の連続転位分布が0となる条件のみを使用しても, 式(29)と同様な応力拡大

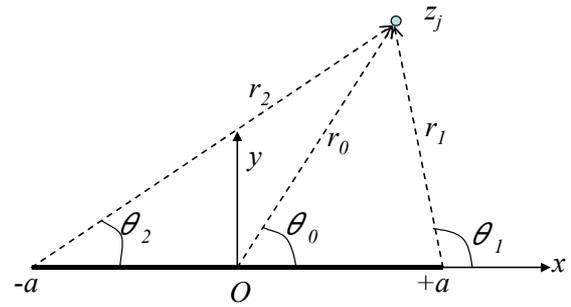


図-3 Polar coordinates $(r_1, \theta_1), (r_0, \theta_0), (r_2, \theta_2)$.

大係数 K_I, K_{II} が得られる¹²⁾. ただし, その場合, σ の具体的な式は得られない. この詳細は付録Bに記した.

(4) 無限領域中央にき裂を有する線形異方弾性体の応力と変位場

本節では, 前節で示した負荷経路における, 無限領域中央にき裂を有する線形異方弾性体の応力・変位理論解の具体的な式を求める.

今, 物体内の応力は, 物体境界からの応力 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \sigma_{xy}^\infty$ と連続転位分布による応力の和であるから, 式(8)より,

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^\infty + 2 \operatorname{Re} \left[s_1^2 \Phi^D(z_1) + s_2^2 \Psi^D(z_2) \right] \\ \sigma_y &= \sigma_y^\infty + 2 \operatorname{Re} \left[\Phi^D(z_1) + \Psi^D(z_2) \right] \\ \sigma_{xy} &= \sigma_{xy}^\infty - 2 \operatorname{Re} \left[s_1 \Phi^D(z_1) + s_2 \Psi^D(z_2) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

である. ここで, 図-3 に示す極座標系を用いると, $j=1, 2$ に対し,

$$\begin{aligned} z_j &= r_0 e^{s_j \theta_0} = r_0 (\cos \theta_0 + s_j \sin \theta_0) \\ z_j - a &= r_1 e^{s_j \theta_1} = r_1 (\cos \theta_1 + s_j \sin \theta_1) \\ z_j + a &= r_2 e^{s_j \theta_2} = r_2 (\cos \theta_2 + s_j \sin \theta_2) \end{aligned} \quad (32)$$

であるから, ここで,

$$\begin{aligned} P_1 &:= \frac{(\cos \theta_0 + s_1 \sin \theta_0)}{\sqrt{(\cos \theta_1 + s_1 \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + s_1 \sin \theta_2)}} \\ P_2 &:= \frac{(\cos \theta_0 + s_2 \sin \theta_0)}{\sqrt{(\cos \theta_1 + s_2 \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + s_2 \sin \theta_2)}} \end{aligned} \quad (33)$$

とおくと, 式(19)より,

$$\begin{aligned} \Phi^D &= \frac{s_2 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left(1 - \frac{r_0 P_1}{\sqrt{r_1 r_2}} \right) \\ \Psi^D &= -\frac{s_1 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left(1 - \frac{r_0 P_2}{\sqrt{r_1 r_2}} \right) \end{aligned} \quad (34)$$

となり, 無限領域任意点での図-3 に示す極座標系によって表現された応力は次式となる.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{r_0 \left\{ \Sigma s_1 s_2 (s_2 P_2 - s_1 P_1) + \tau (s_2^2 B - s_1^2 P_1) \right\}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{r_1 r_2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1 s_2 \Sigma + (s_1 + s_2) \tau}{2} \right] + \sigma_x^\infty \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{r_0 \left\{ \Sigma (s_1 P_2 - s_2 P_1) + \tau (P_2 - P_1) \right\}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{r_1 r_2}} \right] + \sigma \\ \sigma_{xy} &= -2 \operatorname{Re} \left[\frac{r_0 \left\{ \Sigma s_1 s_2 (P_2 - P_1) + \tau (s_2 P_2 - s_1 P_1) \right\}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{r_1 r_2}} \right] + \mu \sigma\end{aligned}\quad (35)$$

なお、上式は無限遠方では、

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^\infty \quad (36)$$

であり、無限遠方の応力境界条件を満足し、また、き裂面では、

$$\sigma_y^\pm = \sigma, \quad \sigma_{xy}^\pm = \mu \sigma \quad (37)$$

であるため、式(12a)、式(12b)に示す境界条件を満足していることが分かる。

一方、変位は無境界から作用する均一応力によるひずみが構成式より同じく均一であることから、剛体運動にのみ寄与する。したがって、剛体運動を除いた変位は、式(19)より、剛体運動に寄与する積分定数を無視すると、

$$\begin{aligned}\phi^D(z_1) &= \frac{s_2 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left(z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2} \right) \\ \psi^D(z_2) &= -\frac{s_1 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left(z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2} \right)\end{aligned}\quad (38)$$

であるから、上式に式(32)を代入すると、

$$\begin{aligned}\phi^D &= \frac{s_2 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left\{ r_0 (\cos \theta_0 + s_1 \sin \theta_0) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{r_1 r_2 (\cos \theta_1 + s_1 \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + s_1 \sin \theta_2)} \right\} \\ \psi^D &= -\frac{s_1 \Sigma + \tau}{2(s_1 - s_2)} \left\{ r_0 (\cos \theta_0 + s_2 \sin \theta_0) \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{r_1 r_2 (\cos \theta_1 + s_2 \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + s_2 \sin \theta_2)} \right\}\end{aligned}\quad (39)$$

である。上式を式(9)に代入すると、図-3に示す極座標系によって表わされた変位が得られる。

したがって、式(35)、式(39)より、無限領域中央にき裂を有する線形異方弾性体の応力・変位理論解の履歴依存性は Σ 、 τ にのみ依存している事が分かる。

(5) き裂先端近傍特異応力場と変位場

本節では、前節と同様の負荷経路にある、き裂先端近

傍応力場を求める。

今、き裂右側先端近傍の応力、変位場を考える。この時、き裂先端近傍の任意点を極座標 r 、 θ により表現する。ここで、式(32)で $r_1 = r, \theta_1 = \theta$ とおき、き裂右先端を原点とすれば、

$$z_j = r (\cos \theta + s_j \sin \theta) + a \quad (40)$$

であるから、上式を式(19)に代入し、さらに式(24)を使用すると、

$$\begin{aligned}\Phi^D(z_1) &= \frac{s_2 K_I + K_{II}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right) \\ \Psi^D(z_2) &= -\frac{s_1 K_I + K_{II}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right)\end{aligned}\quad (41)$$

が得られる。ここで、き裂先端近傍を仮定し、 $r/a \ll 1$ として、上式を r でローラン展開すれば、上式は次式で表される。

$$\begin{aligned}\Phi^D &\cong -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{s_2 K_I + K_{II}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \\ \Psi^D &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \frac{s_1 K_I + K_{II}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}}\end{aligned}\quad (42)$$

式(42)を式(31)へ代入し、特異項のみを考慮すれば、

$$\begin{aligned}\sigma_x &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{-s_1^2 (s_2 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{s_2^2 (s_1 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right\} \right] \\ \sigma_y &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{-(s_2 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(s_1 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right\} \right] \\ \sigma_{xy} &\cong \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ \frac{s_1 (s_2 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{-s_2 (s_1 K_I + K_{II})}{\sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta}} \right\} \right]\end{aligned}\quad (43)$$

が得られる。また、変位は、

$$\begin{aligned}\phi(z_1) &= \int \Phi(z_1) dz_1 = -\frac{s_2 K_I + K_{II}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{\pi}} \sqrt{2(z_1 - a)} \\ \psi(z_2) &= \int \Psi(z_2) dz_2 = \frac{s_1 K_I + K_{II}}{2(s_1 - s_2) \sqrt{\pi}} \sqrt{2(z_2 - a)}\end{aligned}\quad (44)$$

であるから、式(44)を式(9)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 u_x &\equiv \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ -p_1 (s_2 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + p_2 (s_1 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta} \right\} \right] \\
 u_y &\equiv \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \left\{ -q_1 (s_2 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta + s_1 \sin \theta} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + q_2 (s_1 K_I + K_{II}) \sqrt{\cos \theta + s_2 \sin \theta} \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{45}$$

したがって、式(43)、式(45)よりき裂先端近傍応力・変位場の履歴依存性は、応力拡大係数にのみ依存している事が分かる。

3. 荷重履歴を伴う摩擦接触条件下での応力理論解に関する考察

前章で、無限領域中央にき裂を有する線形異方弾性体内およびき裂先端近傍の応力解と変位解を求めた。その場合、境界条件である無限遠方から与えた圧縮応力 σ_x^∞ 、 σ_y^∞ およびせん断応力 σ_{xy}^∞ は全て負の値で比例負荷状態を仮定し、き裂面が常に閉じたまま摩擦を伴い滑っている状況を仮定した。このような圧縮荷重下で摩擦を伴う場合の応力解と変位解は境界条件である圧縮応力の最終状態の応力によって一意には決まらず、それらの履歴に依存した解になる。それらの解の履歴依存性は、前章で示したように Σ 、 τ あるいは応力拡大係数 K_I 、 K_{II} にのみ影響する事が分かる。

前章で、次式のように式(28)、式(29)の結果を得た。

$$\begin{aligned}
 K_I &= \Sigma \sqrt{\pi a} \\
 K_{II} &= \tau \sqrt{\pi a} \\
 \Sigma &= -\frac{\Delta_2}{\Delta_3} \tau \\
 \tau &= (\sigma_{xy}^\infty - \mu \sigma_y^\infty) \frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \mu \Delta_2}
 \end{aligned} \tag{46}$$

以上より、 τ のみの境界応力の経路依存性の解を求めれば、他は上式より決まることが分かる。したがって、本章では、 τ の境界応力の経路依存性について考察する。その際、符合の分類が複雑になるのを避けるため、次式のように、式(26)の σ を非正値とするため、その分母を負値、分子を正値（または0）と仮定する。その時、 τ の分母は負値となる。

$$\Delta_3 + \mu \Delta_2 < 0, \Delta_2 \sigma_{xy}^\infty + \Delta_3 \sigma_y^\infty \geq 0 \tag{47}$$

上記の不等式の妥当性に関しては、式(26)の下で詳述している。

なお、前章では無限遠方から与えた圧縮応力 σ_x^∞ 、

σ_y^∞ およびせん断応力 σ_{xy}^∞ は全て負の値で比例負荷状態を仮定し、き裂面が常に閉じたまま摩擦を伴い滑っている履歴のみを考察したため、き裂面での表面応力の境界条件は式(12a)と式(12b)の場合を考えた。

本章では、き裂面での表面応力の境界条件の履歴として、き裂がクーロンの摩擦条件を満たしながら滑る場合のみでなく、き裂面が滑らず固着する場合（式(12a)、式(12c)）も含めて議論する。

また、本章では、分かりやすくするため、無限遠方から与えられた境界応力 σ_y^∞ 、 σ_{xy}^∞ を次式のように、正値（または0）をとるように置き換える。

$$\begin{aligned}
 q &= -\sigma_{xy}^\infty \geq 0 \\
 p &= -\sigma_y^\infty \geq 0
 \end{aligned} \tag{48}$$

また、次式のようにおく。

$$\bar{\tau} = q - \mu p \tag{49}$$

なお、無限境界の応力経路依存性を表すため、応力 $p, q, \bar{\tau}$ の増分を考える必要があるが、ある応力状態に達する応力経路は無限に考えられる。そこで、本論文では、図-4に示すような、圧縮応力 p およびせん断応力 q は、全て正値（または0）で、この値が特定の与えられた応力状態 (p^*, q^*) になるまで、すべての応力経路において、増加する（もしくは一定の）場合の応力履歴のみに限定する。また、図-4のように、今回考慮した応力経路の最終値は $(-\sigma_y^{**}, -\sigma_{xy}^{**}) = (p^*, q^*)$ とし、初期状態はすべて $(-\sigma_y^{**}, -\sigma_{xy}^{**}) = (0, 0)$ とした。

今、摩擦の発生を考慮した場合の $\bar{\tau}$ の増分 $d\bar{\tau}$ を考える。式(47)の条件が成立する場合、 $\bar{\tau}$ が負であれば、き裂面は滑らず固着状態にある。また、逆に $\bar{\tau}$ が非負の場合は、 $\bar{\tau}$ の増分が非負であれば、き裂は滑るが、負であれば、やはり固着状態にある。このことに注意すれば、次式のように滑り、ないし固着状態における $\bar{\tau}$ の増分関係が分類できる。

$$\begin{aligned}
 1) & \text{ if } q < \mu p \text{ then } d\bar{\tau} = 0, \\
 2) & \text{ if } q \geq \mu p \text{ and} \\
 & 2-1) \text{ if } dq < \mu dp \text{ then } d\bar{\tau} = 0 \\
 & 2-2) \text{ if } dq \geq \mu dp \text{ then } d\bar{\tau} = dq - \mu dp
 \end{aligned} \tag{50}$$

図-4にある(a)から(g)までの7種の応力経路に関し $\bar{\tau}$ の最終値の考察を与える。

図-4(a)は、最初、圧縮応力を $p=0$ のままにし、せん断応力 q のみを q^* まで載荷した後、次に $q=q^*$ にしたまま $p=p^*$ まで圧縮応力をかけた場合である。せん断応力 q のみを q^* まで載荷した場合に式(50)の2-2)より $\bar{\tau}=q^*$ となり、圧縮応力を載荷した場合は、式(50)の2-1)より、 $\bar{\tau}$ は変化しないから結局、 $\bar{\tau}=q^*$ となる。なお、 p^* が $q=\mu p$ と交差する場合、式(50)の1)であるから、結局、 $\bar{\tau}=q^*$ となる。

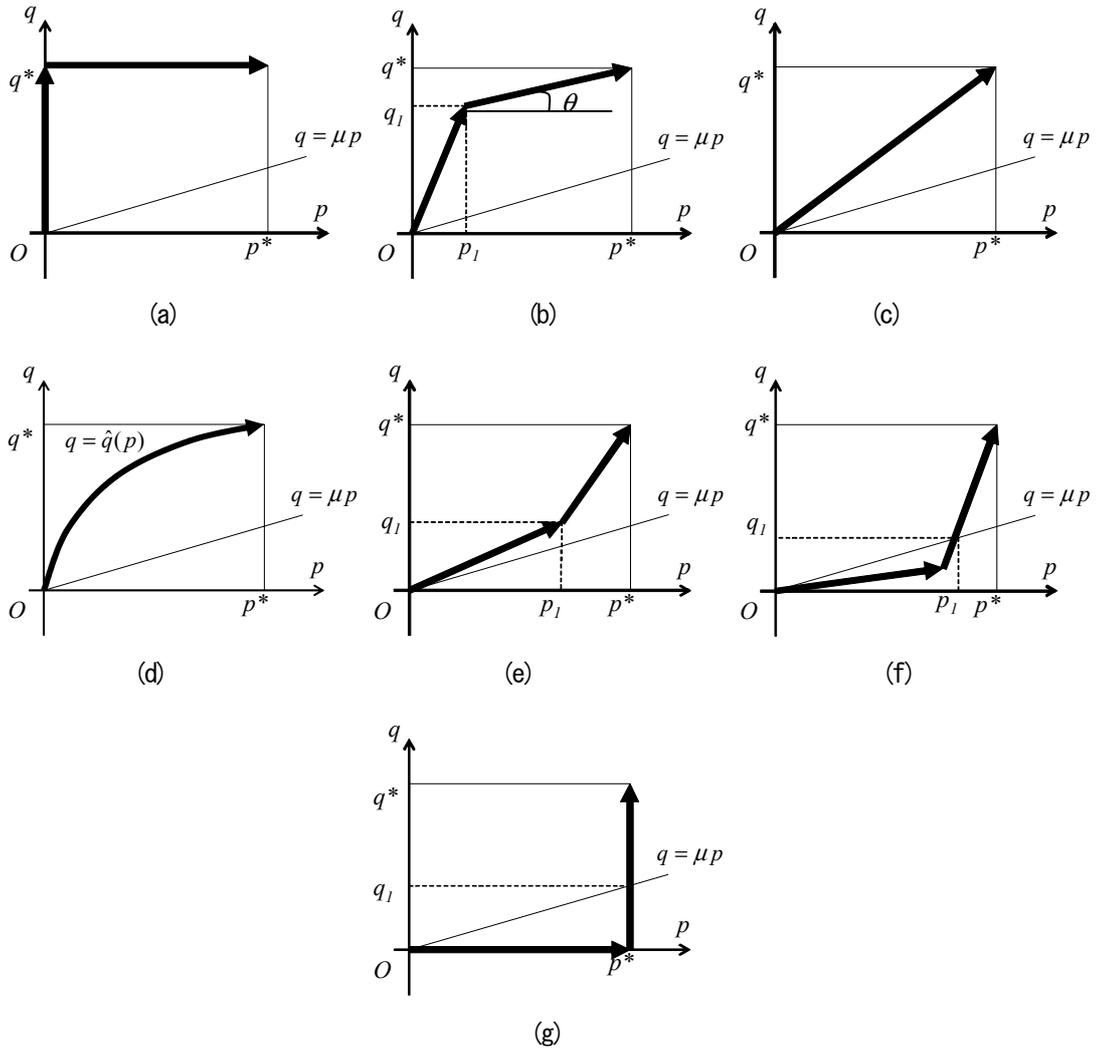


図-4 Loading path at infinity.

図-4(b)の場合は、圧縮応力が p_1 、せん断応力が q_1 になるまで、摩擦応力が増加する式(50)の2-2)を満たした比例負荷載荷であるから、その状態で式(50)の2-2)より、 $\bar{\tau} = q_1 - \mu p_1$ となる。その後は $0 < \theta < \mu$ の場合を考えると、摩擦応力が増減しない式(50)の2-1)の場合であるから、結局、 $\bar{\tau} = q_1 - \mu p_1$ となる。

図-4(c)の場合は、本論文で最初に仮定した p, q がともに摩擦を発生させながら最終応力状態まで比例負荷で載荷された場合であり、式(50)の2-2)より、 $\bar{\tau} = q^* - \mu p^*$ となる。

図-4(d)の場合は、応力経路が曲線 $q = \hat{q}(p)$ で与えられた場合である。応力は式(50)の2)の場合であるが、 $d\hat{q}/dp$ は単調減少しているから $d\hat{q} = \mu dp$ になる $p = p_1 (< p^*)$ まで、式(50)の2-2)の $d\bar{\tau}$ を次式のように積分して最終の $\bar{\tau}$ が得られる。

$$\bar{\tau} = \int_0^{p_1} \left(\frac{d\hat{q}(p)}{dp} - \mu p \right) dp \quad (51)$$

図-4(e)の場合は、圧縮応力が p_1 、せん断応力が q_1 になるまで、さらにその後も、圧縮応力が p^* 、せん断応力が q^* になるまで両者ともに摩擦応力が増加する式(50)の2-2)を満たした比例負荷載荷であるから、この両方に分けて $d\bar{\tau}$ を積分すれば結局、図-4(c)の場合と同じく、 $\bar{\tau} = q^* - \mu p^*$ となる。

図-4(f)の場合は、圧縮応力 p が p_1 に達するまでは、応力状態は式(50)の1)の状態にあるから、 $\bar{\tau}$ は変化せず0のままである。それ以降、最終状態になるまで式(50)の2-2)を満たす比例負荷載荷であるから、結局、 $\bar{\tau} = (q^* - q_1) - \mu(p^* - p_1)$ となる。この場合、圧縮応力 p が p_1 に達するまでせん断応力 $q = 0$ であれば、最大圧縮主応力方向に対し斜向したき裂に対し、最初、等方圧縮をさせ、その後、最大圧縮主応力を増加させることによりせん断応力を作用させる実験でよく行われる場合と同じ応力経路となる。

図-4(g)の場合は、図-4(a)の場合と逆であり、最初、せん断応力を $q = 0$ のままにし、圧縮応力 p のみを p^*

まで載荷した後、次に $p = p^*$ にしたまま $q = q^*$ までせん断応力を作用させた場合である。せん断応力を $q = 0$ のままにし p のみを載荷した時、および、 q が q_1 になるまでは応力状態は式(50)の1)の状態にあるから、 $\bar{\tau}$ は変化せず0のままである。それ以降、最終状態になるまで、式(50)の2-2)を満たす比例負荷載荷であるから、結局、 $\bar{\tau} = q^* - q_1$ となる。

4. まとめ

本論文では、平面ひずみ条件を仮定した2次元線形異方弾性体の無限領域中央にき裂がある場合に、無限遠からの圧縮荷重が作用し、き裂面が接触し、摩擦を伴い滑っているモードII型の静止き裂を考え、応力や変位の荷重履歴依存性について検討を行い、以下に示す知見を得た。

- 圧縮荷重下におけるき裂面が接触し摩擦を伴い、固着する場合と滑る場合の表面力の境界条件に、き裂面を閉じさせるために必要な未知の反力 σ を用いた境界条件を使用し、その反力、物質特性、境界応力の関係式で表した滑りき裂が存在する条件などを求めた。
- 無限遠方から作用する応力 σ_y^∞ 、 σ_{xy}^∞ が比例負荷で負値のまま増加する場合の極座標表示した具体的な線形異方弾性体の物体全体の応力や変位の理論解、き裂先端近傍の応力や変位の理論解を求めた。
- 無限領域全体の応力や変位に関する荷重履歴依存性は σ 、 τ のみに影響し、また、き裂先端近傍の応力や変位に関しては応力拡大係数にのみ影響する事を示した。
- いくつかの異なる応力経路を与えた場合の荷重履歴に依存する解を求めた。

謝辞: Azhdari ほかの参考文献の応力拡大係数や、式(A6)に関し、名古屋工業大学の小畑誠教授には多くのご意見を頂き、また、S.Nemat-Nasser 教授に A.Azhdari 氏の連絡先を聞いてくださるなどのお世話をして頂いたことをここに記して感謝いたします。

付録A Azhdariほかの応力拡大係数

Azhdariほかの論文⁹⁾では、第4節で、連続転位分布によるき裂問題の例題を記述している。その4.1節において、まず、き裂が開く場合を考察している。この時、き裂は開口していて接触していないので、次式(文献6)の式(4.1.1))のようにき裂面の表面力を0とおいて応力関数および応力拡大係数を求めている。

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = 0, \sigma_{xy}^\pm(x, 0) = 0 \quad (A1)$$

結果として、次式に示すようなき裂面の x, y 方向の連続転位分布 $b_x^c(x), b_y^c(x)$ 、 y 方向の開口変位 $U_y(x)$ を求め、それが正であること、および応力拡大係数 K_I, K_{II} などを求めている。

$$b_x^c(x) = -C_{11}(\Delta_2\sigma_y^\infty - \Delta_1\sigma_{xy}^\infty) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (A2)$$

$$b_y^c(x) = -C_{11}(\Delta_3\sigma_y^\infty + \Delta_2\sigma_{xy}^\infty) \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (A3)$$

$$U_y(x) = C_{11}(\Delta_3\sigma_y^\infty + \Delta_2\sigma_{xy}^\infty) \sqrt{a^2 - x^2} > 0 \quad (A4)$$

$$K_I = \sigma_y^\infty \sqrt{\pi a}, \quad K_{II} = \sigma_{xy}^\infty \sqrt{\pi a} \quad (A5)$$

それぞれ、文献6)の式(4.1.7a)、式(4.1.7b)、式(4.1.15)、式(4.1.16)である。次に4.2節において、き裂が閉じた場合を言及している。その場合、き裂面は、クーロンの摩擦力および粘着力が作用しつつ滑っている状態を仮定しているが、き裂面の表面力の境界条件に関する新たな記述は無く、いきなり次式の x 方向の連続転位分布 $b_x^c(x)$ が記してあり、次にそれによる応力関数が記された後、粘着力は0とした場合の本論文の式(29)と全く同等な応力拡大係数 K_I, K_{II} が得られている。

$$b_x^c(x) = \frac{\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty}{\pi Q} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, Q = \frac{-1}{\pi C_{11}} \frac{\Delta_3 + \mu\Delta_2}{\Delta_0} \quad (A6)$$

上式は文献6)の式(4.2.1)ならびに式(4.2.3a)である。

そこで、Azhdariほかにおいて、式(A6)ならびに応力拡大係数(式(29))はいかにして得られたのかを彼等の論文の内容から推論する。

まず、き裂面が開く場合として、式(A1)~式(A5)が得られる。この場合は、式(A4)に示すようにき裂面は開口する。そこで、Azhdariほかは、開口した変位を閉じさせるためには、式(A4)の開口変位 $U_y(x)$ を0とすれば良いと考えたと思われる。そのように憶測する理由の一つは、Azhdariほかの他の例題では、全てき裂面の表面力に関する境界条件を記してあるにかかわらず、この問題の場合には、き裂面の表面力に関する境界条件が一切記して無いからである。

Azhdariほかの開口変位を0とする条件は次式である。

$$\Delta_3\sigma_y^\infty + \Delta_2\sigma_{xy}^\infty = 0 \quad (A7)$$

上式(A7)を式(A3)に代入すれば、式(A6)が簡単に得られる。次に、Azhdariほかは式(A6)を使用して、応力関数を求め、それにより応力が求まるので、それを応力拡大係数の定義を使用し、式(29)と同様の応力拡大係数を得たと推測できる。なお、論文には式(A6)が記してあつ

たため、応力関数を使用することを記したが、応力関数を使用しなくても式(A7)を使用すれば、次式が成立するため、式(A5)は式(29)となる事が直ぐに分かる。

$$\sigma_{xy}^{\infty} = (\sigma_{xy}^{\infty} - \mu\sigma_y^{\infty}) \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \right), \quad \sigma_y^{\infty} = -\frac{\Delta_2}{\Delta_3} \sigma_{xy}^{\infty}$$

上式の結果を逆に考えれば、き裂面に表面力が作用しない場合で、き裂面が閉じる場合の応力拡大係数は、き裂面が開く場合と同じく式(A5)に等しいことが分かる。

なお、Azhdari ほかはこの応力拡大係数を求めた後、物質が直交異方性でき裂面の方向と異方性の主軸 (material axis) が一致している場合は $\Delta_2 = 0$ であるから上記の応力拡大係数は下式となり線形等方弾性体の場合と同様になると記している。

$$K_I = 0, \quad K_{II} = (\sigma_{xy}^{\infty} - \mu\sigma_y^{\infty}) \sqrt{\pi a} \quad (A8)$$

しかし、この議論において式(A7)のき裂面が閉じている条件を使えば、 $\Delta_2 = 0$ であれば $\Delta_3 < 0$ であるから、き裂面が閉じるためにはき裂面に働く無限遠方上下からの応力 σ_y^{∞} が 0 の時のみに限定される。

結果として、Azhdari ほかの論文の応力拡大係数は、上記した直方異方性体ないし等方弾性体の場合では式(A5)の特別な場合である次式となる。

$$K_I = 0, \quad K_{II} = \sigma_{xy}^{\infty} \sqrt{\pi a} \quad (A9)$$

すなわち、無限遠方にせん断応力 σ_{xy}^{∞} のみが作用した場合に限定され、き裂面に摩擦力が発生しない純粋なモード II 型と等しいことになる。

一方、著者らのき裂面の表面応力が 0 でない場合の解では、図-4(c)の無限遠方からせん断応力 σ_{xy}^{∞} および直応力 σ_y^{∞} が比例負荷で載荷される場合を考えると、式(21)で、 $\Delta_3 < 0$ より、 $\Delta_2 = 0$ であれば、

$$\Sigma = \sigma_y^{\infty} - \sigma = 0$$

となるから、上記の Azhdari ほかのように σ_y^{∞} は 0 とは限定されず、 $\sigma (= \sigma_y^{\infty} < 0)$ はき裂面の無限遠方上下からの圧縮応力 σ_y^{∞} により、き裂面がめり込まず、閉じているために必要なき裂面に発生する反力となっていることが分かる。また、この時、き裂面に摩擦力が発生する場合の応力拡大係数は式(A8)であり、上記した直方異方性体ないし等方弾性体の場合の応力拡大係数となっている。

なお、Azhdari ほかでは、4.3.2 節において、上記と同様な無限領域中央にある長さ $2a$ のき裂面の左の一部分 ($-a \leq x \leq b < a$) が摩擦無し条件で閉じており、右の残りの部分が開口している問題を解いている。ここでも、この閉じている部分のき裂面の境界応力を 0 としている。

摩擦が無くとも、き裂を閉じさせるための直応力は必要である。Azhdari ほかはこの応力を σ_{yy}^0 とおいて使用しているが、き裂面の境界応力は 0 としている。著者らは、境界条件式(4.3.6c)は、表現の誤りであると考える。

付録B クーロン摩擦則のみを使用した場合の考察

き裂面の応力境界条件を本論文の式(13)であるクーロンの摩擦だけとした場合の考察を行う。ここで式(13)の左辺は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_y^{\pm}(x, 0) &= \sigma_y^c(x, 0) + \sigma_y^{\infty} \\ \sigma_{xy}^{\pm}(x, 0) &= \sigma_{xy}^c(x, 0) + \sigma_{xy}^{\infty} \end{aligned} \quad (B1)$$

この時、式(B1)を式(13)に代入すれば次式となる。

$$\sigma_{xy}^c(x, 0) + \sigma_{xy}^{\infty} = \mu \{ \sigma_y^c(x, 0) + \sigma_y^{\infty} \} \quad (B2)$$

ここで、連続転位分布による応力関数は式(17)であるから、応力関数で表された応力の式(8)に代入し、結果を式(B2)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (\sigma_y^{\infty} - \mu\sigma_{xy}^{\infty}) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2iC_{11}} \int_{-a}^a \frac{1}{x-t} \left\{ \frac{(\mu+s_1)(s_1 b_x^c(t) - b_y^c(t))}{\tilde{s}_1} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\mu+s_2)(s_2 b_x^c(t) - b_y^c(t))}{\tilde{s}_2} \right\} dt \right] \end{aligned} \quad (B3)$$

ここで、き裂面が閉じているために、 $b_y^c(t) = 0$ とおくと式(B3)は次式となる。

$$\begin{aligned} & (\sigma_y^{\infty} - \mu\sigma_{xy}^{\infty}) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2iC_{11}} \int_{-a}^a \frac{b_x^c(t)}{x-t} \left\{ \mu \left(\frac{s_1}{\tilde{s}_1} + \frac{s_2}{\tilde{s}_2} \right) + \left(\frac{s_1^2}{\tilde{s}_1} + \frac{s_2^2}{\tilde{s}_2} \right) \right\} dt \right] \end{aligned} \quad (B4)$$

ここで、

$$\left(\frac{s_1}{\tilde{s}_1} + \frac{s_2}{\tilde{s}_2} \right) = \frac{i\Delta_2}{\Delta_0}, \quad \left(\frac{s_1^2}{\tilde{s}_1} + \frac{s_2^2}{\tilde{s}_2} \right) = \frac{i\Delta_3}{\Delta_0}$$

であるから、式(B4)より、

$$\int_{-a}^a \frac{b_x^c(t)}{x-t} dt = C_{11} (\sigma_y^{\infty} - \mu\sigma_{xy}^{\infty}) \frac{\Delta_0}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \quad (B5)$$

が得られる。上式の積分方程式に Muskhelishvili¹¹⁾の解法を用いると、

$$b_x^c(x) = C_{11} (\sigma_y^{\infty} - \mu\sigma_{xy}^{\infty}) \frac{\Delta_0}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (B6)$$

が得られる。上式を用いると、最終的に以下に示す応力

関数が得られる。

$$\Phi^D(z_1) = \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \mu\sigma_{xy}^\infty) \frac{\Delta_0}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \frac{is_1}{\tilde{s}_1} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right)$$

$$\Psi^D(z_2) = \frac{1}{2}(\sigma_y^\infty - \mu\sigma_{xy}^\infty) \frac{\Delta_0}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \frac{is_2}{\tilde{s}_2} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} \right)$$

以上より、次式の本論文の式(29)と全く同等な応力拡大係数 K_I, K_{II} が得られる。

$$K_I = -\sqrt{\pi a} (\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty) \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \right)$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi a} (\sigma_{xy}^\infty - \mu\sigma_y^\infty) \left(\frac{\Delta_3}{\Delta_3 + \mu\Delta_2} \right) \quad (B7)$$

このように、クーロンの摩擦則である式(13)と、き裂面が閉じている条件である y 方向の連続転位分布 $b_y^c(t) = 0$ のみを使用しても式(29)と同様な応力拡大係数 K_I, K_{II} が得られる¹²⁾。

しかし、き裂面での境界条件として、式(12a)のき裂面の直応力が、き裂面を閉じさせるために必要な反力 σ と等しいという境界条件が無く、クーロンの摩擦式(13)の1式だけでは式(B4)や式(B5)のように1個の式しか得られず、式(18)のような2個の式は得られない。したがって、当然ながら式(21)のき裂面が閉じている条件や、その時の反力 σ も得られない。そのため、物質特性と境界応力の関係式で表した式(12)のき裂面の固着・滑りの境界条件や、滑りき裂が存在する条件も得られない。

参考文献

1) Sih, G. C., Paris, P. C. and Irwin, G. R.: On crack in recti-

- linearly anisotropic bodies, *International Journal of Fracture*, Vol.1, No.3, pp. 189-203, 1965.
- 2) Sih, G. C. and Liebowitz, H.: Mathematical theories of brittle fracture. In: H. Liebowitz, (Ed.), *Fracture, an Advanced Treatise, vol. II.*, Academic Press, 1968.
- 3) Yong, L. X.: Crack surface displacement coupling due to material anisotropy, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.49. No.3, pp.425-434, 1994.
- 4) Azhdari, A. and Nemat-Nasser, S. : Hoop stress intensity factor and crackkinking in anisotropic brittle solids, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.33, pp.2023-2037, 1996.
- 5) Obata, M., Nemat-Nasser, S. and Goto, Y.: Branched cracks in anisotropic elastic solids, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.56, pp. 858-864, 1989.
- 6) Azhdari, A., Obata, M. and Nemat-Nasser, S.: Alternative solution methods for crack problems in plane anisotropic elasticity, with examples, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, pp.6433-6478, 2000.
- 7) 新保泰輝, 矢富盟祥: Drucker-Prager 弾塑性体のモード II 型き裂先端近傍特異場の漸近解析, *材料*, Vol.57, No. 9, pp.936-943, 2008.
- 8) 矢富盟祥, 新保泰輝: Drucker-Prager 弾塑性体の漸近解を使用した最大摩擦せん断応力破壊規準によるせん断破壊の考察, *材料*, Vol.57, No.12, pp.1224-1231, 2008.
- 9) 新保泰輝, 矢富盟祥: 非関連型の Drucker-Prager 弾塑性体の漸近解を使用した最大摩擦せん断応力破壊規準によるせん断破壊の考察, *応用力学論文集*, Vol.11, pp.319-330, 2008.
- 10) Savin, G. N.: *Stress Concentration Around Holes*, Pergamon Press, 1961.
- 11) Muskhelishvili, N. I.: *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen, 1963.
- 12) Obata, M: in private communication, 2010.

(2010. 12. 28 受付)

LOADING HISTORY DEPENDENCY OF THE STRESS AND THE DISPLACEMENT FOR AN ANISOTROPIC LINEAR ELASTIC MATERIAL WITH A CRACK IN FRICTIONAL CONTACT

Taiki SHIMBO and Chikayoshi YATOMI

In this paper, considering a straight crack in an infinitely extended anisotropic linear elastic material, we obtain a closed form solution of the stress and the displacement. The given far field stresses are such that the crack faces are in frictional contact and may slide against each other. We note that the final stress and displacement in the body do not uniquely determined by the final far field stresses but are dependent on the loading history since the crack faces are in frictional contact.

Azhdari, A., et al. obtained the same stress intensity factors as ours for the above mentioned problem without considering the stress boundary conditions. We examine their method in detail in the appendix.